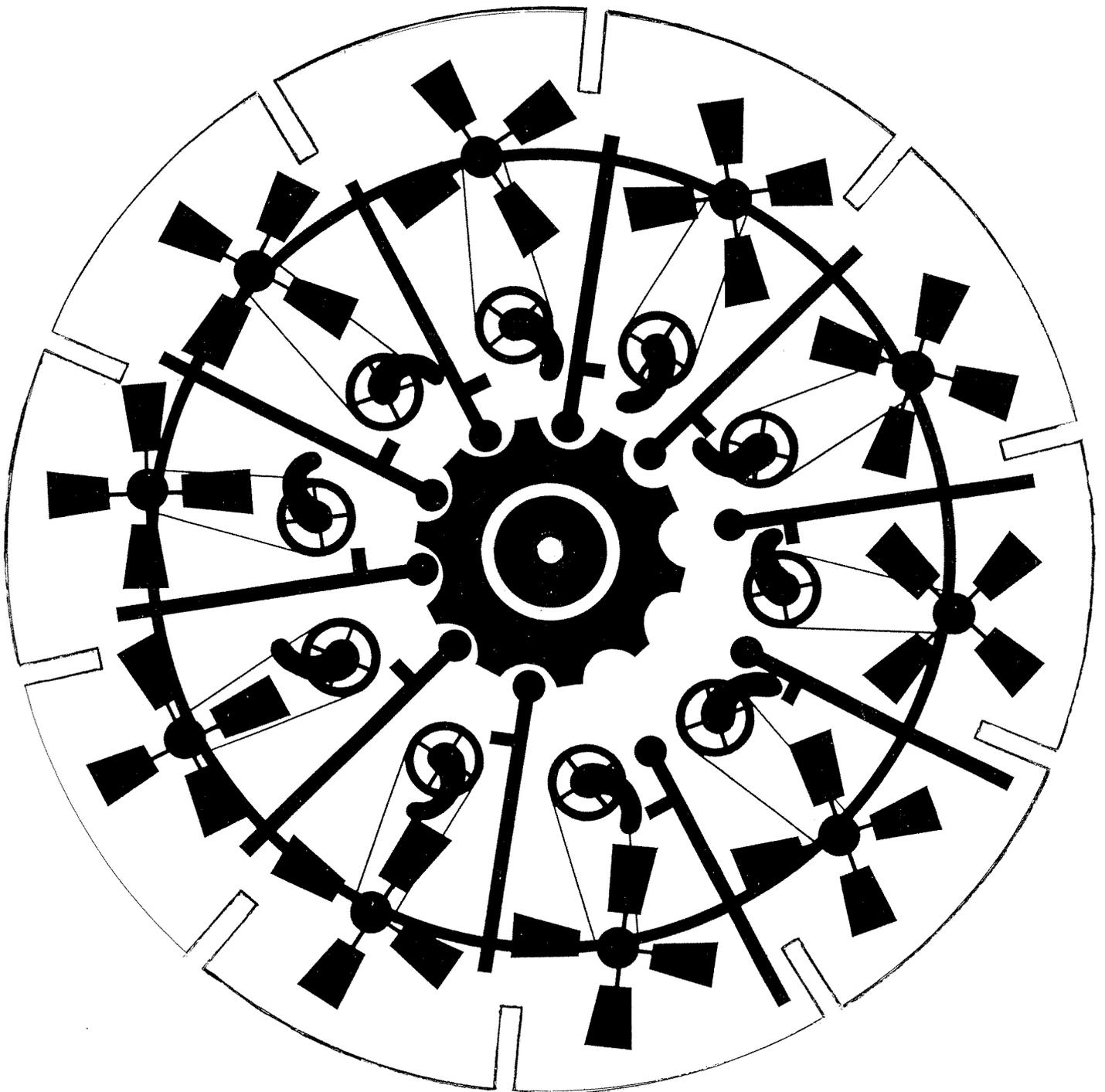

L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 62 - MARS 1991

I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

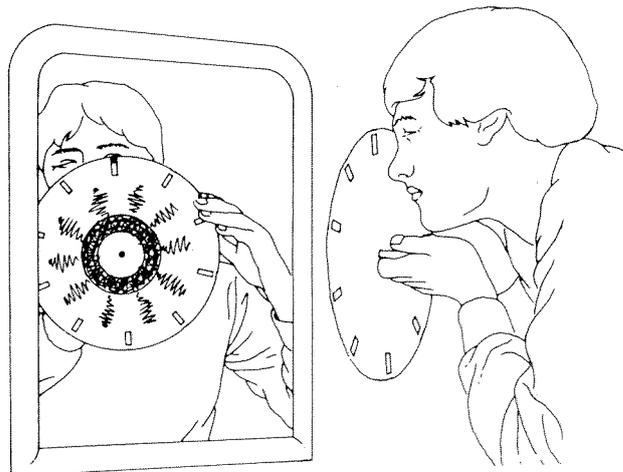
Le Phénakistiscope fut inventé par le physicien belge Joseph PLATEAU en 1833. Le mot est formé des racines grecques "*phenakistikos*" (trompeur) et "*scopein*" (voir).

PLATEAU avait noté qu'une roue en rotation rapide paraissait cependant immobile si on l'observait à travers des crans ménagés régulièrement sur le pourtour d'une deuxième roue solidaire de la première.

Il reprit cette idée en découpant sur les bords d'un disque de carton des fentes régulièrement espacées. Sur l'une des faces il dessina des figures représentant les phases d'un mouvement, chacune différant légèrement de la suivante. Quand il faisait tourner rapidement le disque sur une aiguille devant un miroir, les figures observées à travers les fentes paraissaient s'animer. Si le nombre de fentes est égal au nombre des figures, la scène semble ne pas changer de place, sinon elle semblera avancer ou reculer.

Cet appareil reçut un accueil enthousiaste et fut largement imité. Divers perfectionnements aboutirent à la création du zootrope puis du praxinoscope et finalement du cinéma lui-même.

Pour fabriquer votre phénakistiscope, photocopiez le dessin de couverture et collez-le sur un carton de même diamètre. Puis découpez les fentes prévues. Le dessin ci-dessous montre comment manipuler l'appareil.



EVOLUTION

75 ou 80 % d'élèves au niveau de la terminale, c'est peut-être une ambition souhaitable, mais il ne faut pas se leurrer sur son efficacité. Un léger retour en arrière nous montre que la prolongation générale de la scolarité au delà du certificat d'étude a entraîné bien naturellement la disparition de cet examen sans que l'on puisse clairement mesurer le progrès éducatif dû à l'allongement des études : l'augmentation du niveau de vie doit autant, sinon plus, au gain de productivité, et il ne semble pas qu'elle ait atténué les inégalités.

Au moment où, par volonté politique, nous allons assister à un bouleversement complet du type d'élèves accueillis en lycée, il serait temps que nous prévoyions les conséquences de cette décision et que nous prenions les mesures correspondantes. Dire que cela se résoudra comme au collège il y a 15 à 10 ans, c'est oublier que des adolescents de 17 ans ne se conduisent pas comme des préadolescents de 14. Prévoir, autant que faire se peut, c'est se donner les moyens, c'est informer les professeurs, c'est les inciter à se recycler en pédagogie et non pas seulement sur telle ou telle partie nouvelle des programmes.

Nous sommes tous concernés par cette mutation. En collège, par l'expérience que les enseignants peuvent apporter à leurs collègues de seconde quand ceux-ci veulent bien se donner la peine d'écouter; en DEUG, IUT, STS ou PRÉPA, où se fera sentir une pression démographique contraignant les professeurs à remettre en cause des méthodes de travail et d'enseignement qui ne sont plus adaptées à la culture de leurs nouveaux élèves.

J. LEFORT.

SOMMAIRE

N° 62 – MARS 1991

◇ <i>Notre couverture : Le phénikistiscope</i>	I
◇ <i>Editorial : Evolution</i>	II
◇ <i>A propos de géométrie au bac</i> , par N. VOGEL	1
◇ <i>Quaternions, octonions et géométrie élémentaire (2^e partie)</i> , par M. GUINOT .	9
◇ <i>Calculs numériques et calculatrice en 3^e</i> , par le groupe de liaison 3 ^e - 2 nd e ...	25
◇ <i>Géométrie algébrique élémentaire des courbes planes</i> , par J.-Y. MÉRINDOL ...	31
◇ <i>Les roulettes d'ellipses</i> , par E. EHRHART	43
◇ <i>A vos stylos</i> , par 'L'Ouvert'	46

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT
- ◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro* : 25.- F

A PROPOS DE GÉOMÉTRIE AU BAC

Nicole VOGEL

Certains d'entre nous connaissent déjà l'exercice 2 des sujets de bac C et E donnés en juin 1990 à Strasbourg. Pour ceux qui le découvrent ou qui ne s'en souviennent plus très bien, en voici l'énoncé :

Exercice 2 : (5 points)

Soient Γ le cercle de centre O et de rayon R , $[AA']$ un diamètre fixé de Γ , P le milieu de $[OA']$. Une droite Δ distincte de la droite (AA') et de la perpendiculaire en P à (AA') pivote autour de P et coupe Γ en B et C .

- 1) Déterminer l'ensemble E_1 des milieux M de $[BC]$ lorsque Δ varie.
- 2) a. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC . La droite $(A'M)$ coupe (AH) en D . Déterminer l'ensemble E_2 des points D lorsque M décrit E_1 .
b. Montrer que $A'BDC$ est un parallélogramme. En déduire que D est l'orthocentre du triangle ABC .
- 3) La droite (AM) coupe (OD) en I . Montrer que $2\vec{IO} + \vec{ID} = \vec{O}$.
Que représente I pour le triangle ABC ? Déterminer l'ensemble E_3 des points I lorsque M décrit E_1 .

Cet exercice a été très mal réussi par les candidats (*). Je voudrais essayer d'expliquer ici pourquoi les questions posées sont difficiles pour un sujet d'examen.

A. Etude de la figure

La situation à étudier devient très vite compliquée. Mais surtout, les heuristiques utiles sont presque toutes associées à des sous-figures sur lesquelles rien n'attire notre attention, détournée par d'autres objets.

Les figures que je propose ne comportent pas les ensembles E_1, E_2, E_3 qui les compliquent davantage sans fournir de nouvelle idée pour les démonstrations. A cette exception près, j'y ai placé tous les éléments mentionnés par l'énoncé et seulement ceux-là. Toutefois, les droites sont limitées à leurs segments nommés ou nécessaires pour trouver un point d'intersection, afin de ne pas alourdir davantage les schémas.

(*) Sur le paquet de 60 copies que j'ai corrigées, la moyenne pour cet exercice était de 1,4/5!

Nous allons examiner les différentes étapes du problème (les différentes hypothèses et conclusions sont codées sur les figures).

Question 1) : Quel est l'ensemble des points M ?

Ce qu'on vient de tracer :

Ce qu'il faut voir :

$(h_1)(h_2)$: hypothèses de la démonstration

(c) : conclusion.

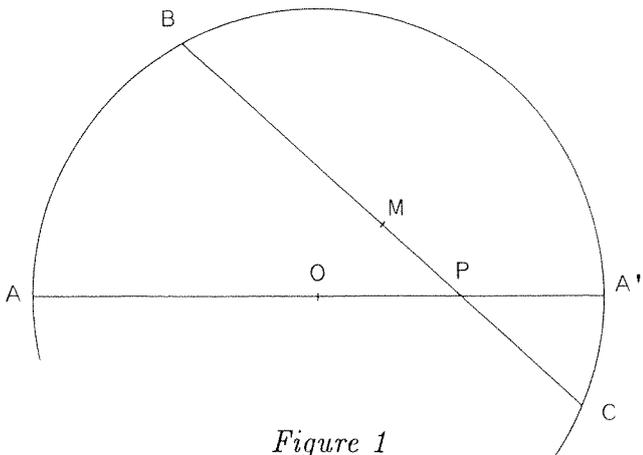


Figure 1

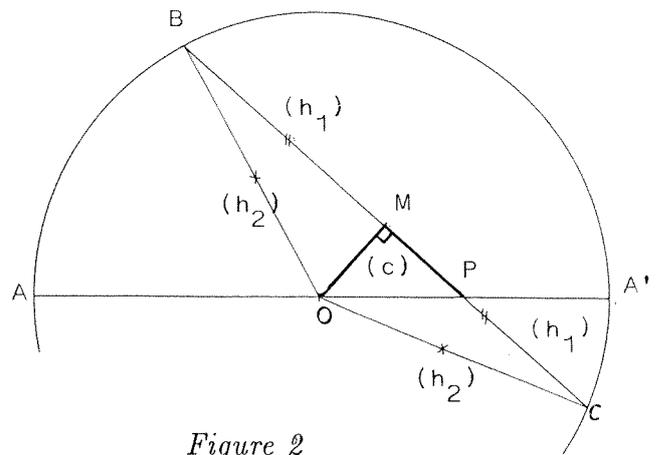


Figure 2

Question 2) a : Quel est l'ensemble des points D ?

Comment se présente la figure :

Ce qu'on vient de tracer

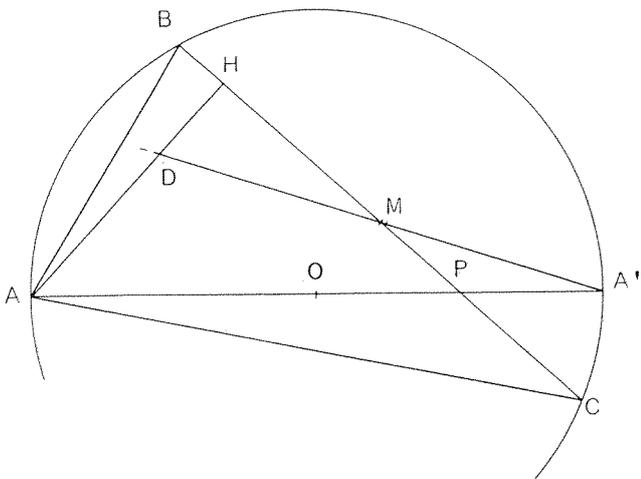


Figure 3

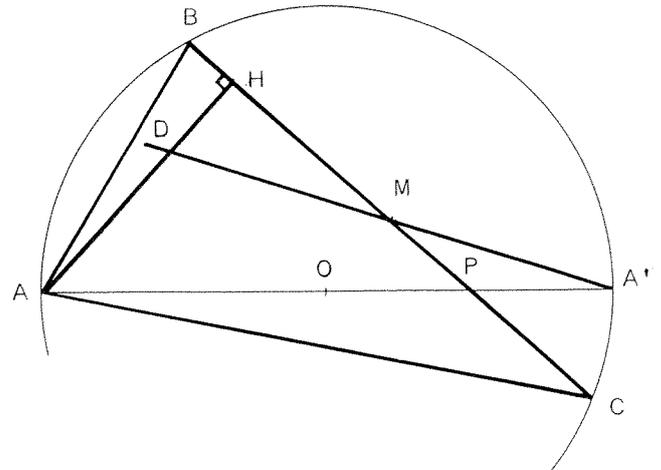


Figure 4

A PROPOS DE GÉOMÉTRIE AU BAC

Ce qu'il faut voir : figures 5 et 6

$(h_1)(h_2)$: hypothèses; on ne dispose de

(h_2) que si on a trouvé la question 1

(c) : conclusion ...

$(h_1)(h_2)$: hypothèses

(h_1) est une conclusion intermédiaire

(c) : conclusion

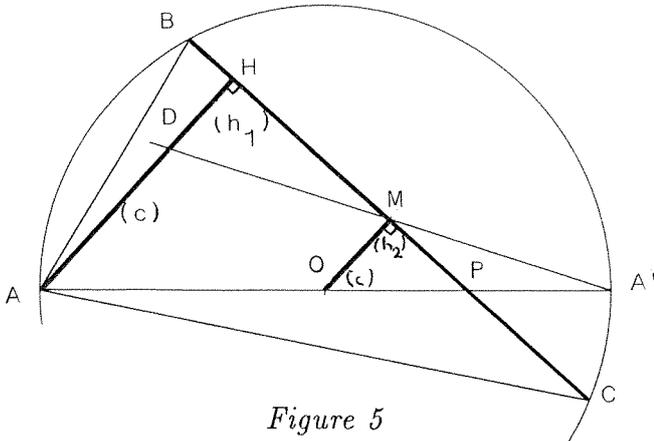


Figure 5

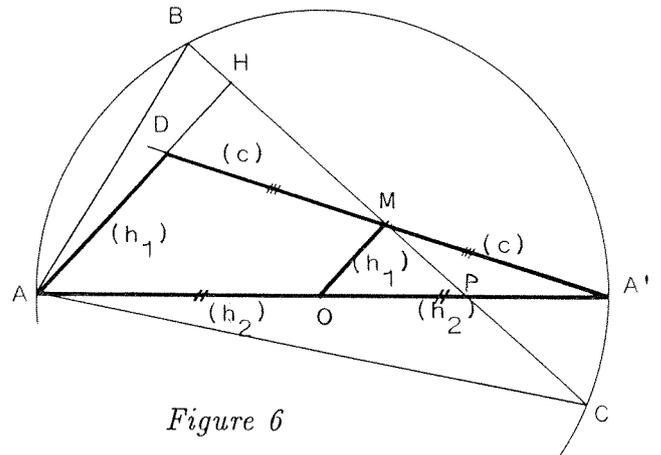


Figure 6

Question 2) b :

“Montrer que $A'BDC$ est un parallélogramme” ne semble pas poser de problème aux élèves qui ont traité les questions précédentes. La situation est effectivement assez simple si on se réfère au tableau présenté plus loin.

Voyons donc comment en déduire que D est orthocentre de ABC .

Comment se présente la figure

Ce qu'on vient de tracer

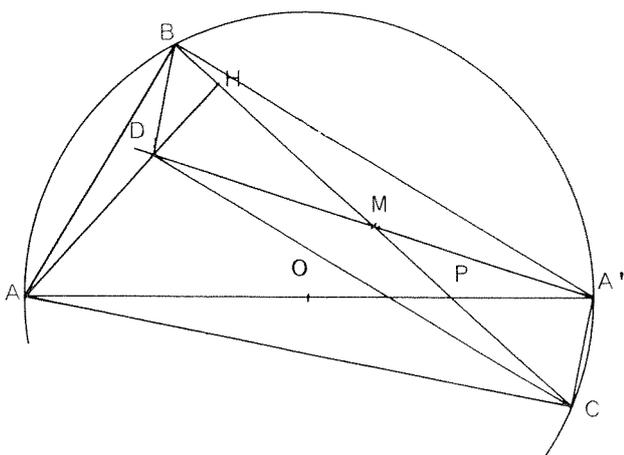


Figure 7

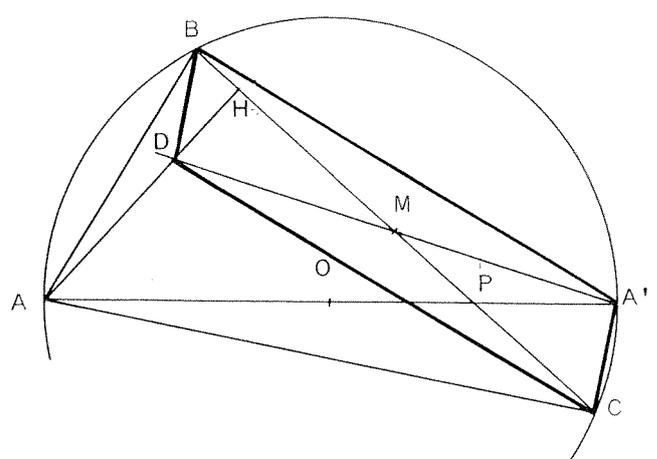


Figure 8

Ce qu'il faut voir

$(h_1)(h_2)$: on ne dispose de (h_2) que si on a trouvé la question 2a)

(c_1) : I est centre de gravité de ADA' .

(c_1) est une conclusion intermédiaire qui permet de démontrer les trois items de la question 3.

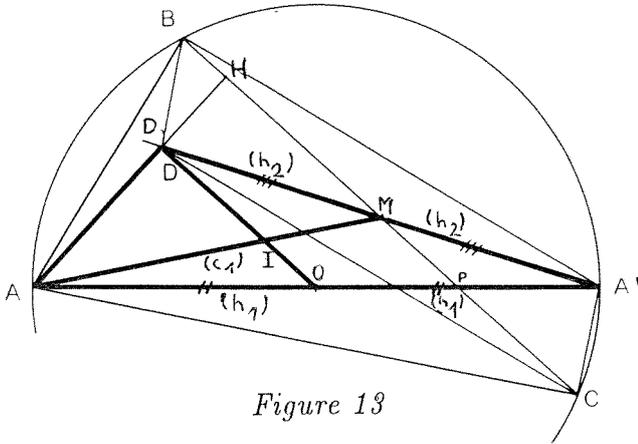


Figure 13

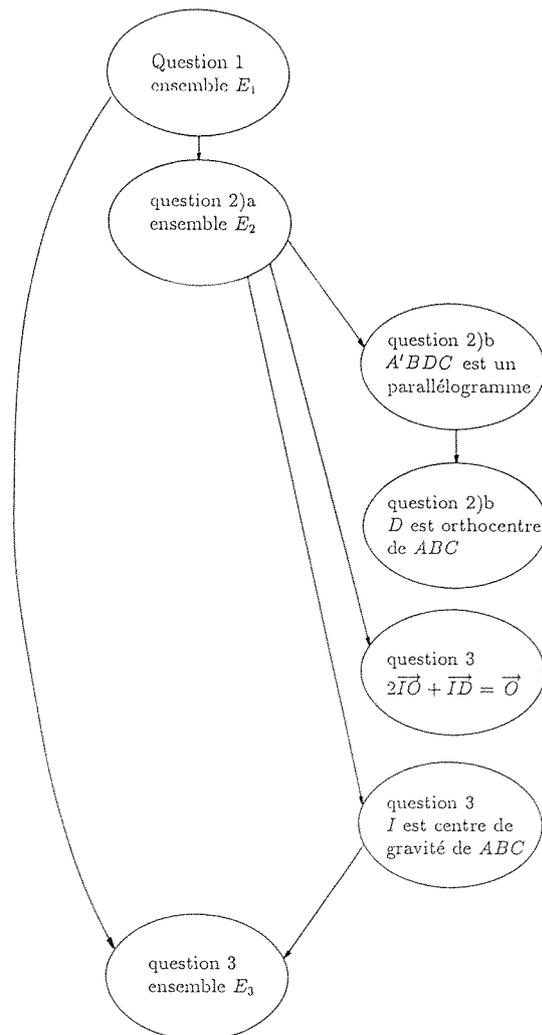
Bien sûr, on peut aussi commencer par prouver que les triangles IOM et IDA sont homothétiques en utilisant les résultats de la question 2a) puis en déduire les trois conclusions demandées.

B. Objectifs de l'exercice

Remarquons que l'énoncé poursuit un double objectif qui ne peut pas apparaître aux élèves : — on détermine les ensembles de points E_1, E_2, E_3 dans les questions 1) et 2)a et à la fin de la question 3);

— on étudie la droite d'EULER du triangle ABC dans la question 2)b et au début de la question 3).

La question "montrer que $A'BDC$ est un parallélogramme" est la seule qui ne se rattache qu'indirectement à l'un de ces objectifs puisqu'elle n'est qu'une aide pour prouver que D est orthocentre de ABC . Mais l'élève qui a reconnu les objectifs du premier type est naturellement tenté de penser que les autres questions vont toutes l'aider à les atteindre, ce qui est faux.



Voici le graphe de dépendance des différentes questions en suivant le raisonnement évoqué dans la partie A.

	question 1 : ensemble E_1	question 2a : ensemble E_2	question 2 b : $A'BDC$ est un parallélogramme
Objets qu'on vient de tracer et propriétés associées	le cercle Γ ① le point O • centre de Γ le point P • milieu de $[OA']$ M • milieu de $[BC]$ les segments $[AA']$, $[BC]$	le point H • pied de la hauteur D • intersection ... ④ le segment $[AH]$ • hauteur de ABC et $[A'D]$ le triangle ABC	le quadrilatère $A'BDC$ ⑧
Autres objets nouveaux cités dans la question	le nombre R la droite Δ , la droite perpendiculaire en P à (AA') l'ensemble E_1	l'ensemble E_2	
Éléments sur lesquels porte la conclusion de la question précédente		le point M • sur le cercle de diamètre $[OP]$	Ensemble E_2 • hom A'_2 (ensemble E_1) image de E_1 par l'homothétie de centre A' , de rapport 2
Objets et propriétés essentiels dans l'heuristique retenue	l'angle \widehat{OMP} ② • droit	les triangles $A'AD$ et $A'OM$ • ils sont homothétiques dans un rapport 2 ⑥	le point M • milieu de $[A'D]$ et milieu de $[BC]$
Objets et propriétés secondaires de la démonstration	le triangle OBC • isocèle la droite (OM) ② • médiane de OBC	les droites (AH) et (OM) • perpendiculaires à (BC) ⑤ le point O • milieu de $[AA']$ ⑥	

Remarques : • cette question nécessite une réciproque
• la position de P sur $[OA']$ n'intervient que pour obtenir une définition simple des ensembles E_1, E_2, E_3 et pas du tout dans la démonstration

A PROPOS DE GÉOMÉTRIE AU BAC

question 2 b : D orthocentre de ABC	question 3 : $2\vec{IO} + \vec{ID} = \vec{O}$	question 3 : que représente I ?	question 3 : ensemble E_3
	les segments $[AM]$ $\textcircled{12}$ et $[OD]$ le point I		
	les vecteurs \vec{IO} et \vec{ID}	les vecteurs \vec{IO} et \vec{ID} • $2\vec{IO} + \vec{ID} = \vec{O}$	l'ensemble E_3
le quadrilatère $A'BDC$ • parallélogramme	le point D • orthocentre de ABC	le point I le segment $[AM]$ • position de I sur $[AM]$	le point I • centre de gravité de ABC
le segment $[BB']$ où B' est l'intersection de (BD) avec (AC) $\textcircled{10}$ • perpendiculaire à (AC)	le triangle ADA' $\textcircled{13}$ le point I • centre de gravité de ADA'	le triangle ADA' • I est son centre de gravité la droite (AM) • médiane de ADA' et de ABC	les points I et M et A • $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AM}$
l'angle $\widehat{A'CA}$ • droit 9 les droites $(A'C)$ et (BD) • parallèles $\textcircled{10}$	les points M • milieu de $[A'D]$ et O • milieu de $[AA']$ $\textcircled{13}$		

Note : $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$...
renvoient aux figures
de même numéro.

C. Comparaison des éléments présents dans chaque question et des éléments utiles à la résoudre

Nous allons les présenter de façon non exhaustive dans un tableau (voir pp. 6 et 7), en suivant encore le raisonnement retenu dans la partie A.

Conclusions

Cette étude de l'énoncé et de la figure montre que tous les raisonnements élémentaires mis en œuvre sont très simples et à la portée d'un bon élève de seconde. Cette remarque a fait dire hâtivement à certains que l'exercice était très simple.

Mais nous voyons, en comparant les heuristiques utilisées aux hypothèses des questions qu'il n'est absolument pas évident de découvrir de bonnes stratégies de démonstration.

Pire, aucune des méthodes naturellement associées au programme des terminales C et E (utilisation d'une similitude, de la composée de transformations planes, interprétation dans le plan complexe, barycentres ...) n'est utile ici. J'ai observé de nombreux élèves qui cherchaient une transformation simple donnant M dans la première question. Je trouve cette tentative honorable. Malheureusement, ces jeunes ont souvent abandonné entièrement l'exercice lorsqu'ils ont constaté que les questions suivantes dépendaient toutes de la première. Ils se sont retrouvés ainsi au même niveau que ceux qui n'avaient pas du tout travaillé la géométrie en terminale.

Certes, cet exercice est un sujet intéressant pour un travail en classe. De plus, il est sûrement souhaitable que l'épreuve de math des bacs C et E comporte un peu de géométrie pure. Cependant, il me semble indispensable de cerner les compétences que nous pouvons évaluer en temps limité. Qu'attendons-nous de nos élèves dans le domaine des heuristiques? Quelles sont celles que nous les aidons à acquérir? Quelles sont celles qui sont implicitement associées au programme?

Pour terminer, je voudrais évoquer un dernier problème : combien de temps "*l'élève moyen, rédigeant posément après avoir réfléchi posément*" — vous savez, celui qui est déposé au pavillon de Breteuil depuis la note de service n° 86-331 du 3 novembre 1986 et auquel on soumet tous les sujets de bac — a-t-il mis pour trouver et rédiger cet exercice? Et s'il l'avait très bien traité le jour du bac, peut-être même parce que ses professeurs auraient su lui faire aimer la géométrie, aurait-il été raisonnable de ne lui attribuer que cinq petits points en récompense? Ne risque-t-il pas de dire à ses camarades actuellement en terminale qu'il vaut mieux faire des mots croisés que de la géométrie?

QUATERNIONS, OCTONIONS ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Deuxième partie : PAPPUS, DESARGUES et l'algèbre des octonions

Marc GUINOT

Les octonions sont moins bien connus que les quaternions à tel point qu'un éminent professeur d'université m'a récemment avoué que, tout en ayant entendu parler des "*octaves de CAYLEY*", il ne connaissait pas le mot synonyme d'"*octonions*" pourtant utilisé en priorité par BOURBAKI dans ses "*Éléments de mathématiques*" (Alg. Chap. III, p. 176) et par DIEUDONNÉ dans son "*Abrégé d'histoire des mathématiques*", éd. Hermann 1978.

Leur découverte date du milieu du XIX^e siècle en liaison avec les travaux des mathématiciens de l'époque sur les "*systèmes hypercomplexes*" susceptibles de généraliser, comme le corps des nombres complexes ou celui des quaternions, la notion usuelle de nombre. Si le nom du grand mathématicien anglais Arthur CAYLEY est le plus souvent associé à cette découverte, il ne faut pas oublier celui bien moins connu de John GRAVES qui précéda CAYLEY d'un an dans ses travaux et dont les mérites en la matière ne furent connus que quatre ans plus tard, grâce à HAMILTON qui était son correspondant (cf. le livre "*Zahlen*", Grundwissen Mathematik 1, Springer Verlag, 2. Auflage, 1988, Kapitel 9).

Outre la particularité de fournir, comme nous allons le voir, un exemple de plan qui n'est que partiellement arguésien, l'algèbre des octonions est à l'origine de l'identité algébrique remarquable :

$$\begin{aligned} & (m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + t^2 + u^2)(M^2 + N^2 + P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 + T^2 + U^2) = \\ & (mM - nN - qQ - rR - sS - tT - uU - vV)^2 + (mN + nM + qR - rQ - tS + sT + vU - uV)^2 + \\ & (mQ + qM + rN - nR - uS + sU + tV - vT)^2 + (mR + RM + nQ - qN - vS + sV + uT - tU)^2 + \\ & (mS - nT - qU - rV + sM + tN + uQ + vR)^2 + (nS - mT + rU - qV - sN + tM - uR + vQ)^2 + \\ & (qS + mU + nV - rT - sQ + uM - vN + tR)^2 + (nS + mV + qT - nU - sR + vM - tQ + uN)^2 \end{aligned}$$

qui fait pendant aux identités plus simples de FIBONACCI

$$(m^2 + n^2)(M^2 + N^2) = (mM - nN)^2 + (mN + nM)^2$$

et d'EULER

$$\begin{aligned} (m^2 + n^2 + p^2 + q^2)(M^2 + N^2 + P^2 + Q^2) &= (mM - nN - pP - qQ)^2 + (mN + nM + pQ - qP)^2 \\ &+ (mP + pM + qN - nQ)^2 + (mQ + qM + nP - pN)^2 \end{aligned}$$

et dont HURWITZ a démontré en 1898 qu'elle n'était pas généralisable à plus de huit carrés.

Si j'en crois enfin DIEUDONNÉ, dans son tout récent livre sur l'histoire de la topologie algébrique (en anglais!), c'est l'existence de l'algèbre des octonions qui explique certaines propriétés topologiques remarquables concernant, entre autres, la sphère à 7 dimensions, mais il ne m'est pas possible de les détailler ici, faute de les comprendre moi-même (cf. Jean DIEUDONNÉ, *A history of Algebraic and Differential Topology 1900–1960*, Birkhäuser, 1989).

Comme pour les quaternions, nous ne chercherons pas à donner tout de suite une définition précise des octonions qui permettrait de rattacher ceux-ci à la sacro-sainte théorie des ensembles, mais nous demanderons au lecteur de bien vouloir admettre l'existence d'un ensemble particulier, noté \mathbb{O} , muni de deux lois de composition $(x, y) \rightarrow x + y$ ("l'addition") et $(x, y) \rightarrow xy$ ("la multiplication"), contenant un élément particulier, noté p , le tout de telle sorte que l'on ait les propriétés axiomatiques suivantes :

(O_1) \mathbb{H} est un sous-ensemble de \mathbb{O} .

(O_2) L'addition et la multiplication de \mathbb{O} prolongent respectivement l'addition et la multiplication de \mathbb{H} .

(O_3) L'addition dans \mathbb{O} est commutative et associative.

(O_4) La multiplication dans \mathbb{O} est distributive par rapport à l'addition.

(O_5) Tout élément de \mathbb{O} peut s'écrire sous la forme $u + vp$ où u et v sont des quaternions.

(O_6) Si u et v sont des quaternions quelconques, on a

$$\begin{aligned} (i) \quad & u(vp) = (vu)p \\ (ii) \quad & (up)v = (u\bar{v})p \\ (iii) \quad & (up)(vp) = -\bar{v}u \end{aligned}$$

où évidemment, \bar{v} est le conjugué du quaternion v .

Les éléments de \mathbb{O} sont appelés **octonions** (ou **octaves**) de Cayley, pour être plus précis). D'après le premier axiome, tout quaternion est un octonion particulier.

Le lecteur observera tout de suite qu'il n'est pas question d'associativité, pour la multiplication, dans (O_4). Vu les relations figurant dans (O_6), cette associativité est extrêmement douteuse, ce qui va nous obliger à des précautions particulières dans le maniement des parenthèses.

A cause de (O_2), les notations xy et $x + y$ sont dépourvues d'ambiguïté. Comme de coutume, on notera x^2 (carré de x) le produit xx . Par contre, il ne serait pas judicieux d'introduire sans réfléchir la notation x^3 car rien ne prouve que $x^2x = xx^2 \dots$

Grâce à (O_5), on voit facilement que pour tout octonion x , on a

$$\begin{aligned} (1) \quad & 0 + x = x \\ (2) \quad & 1x = x1 = x. \end{aligned}$$

En effet, x étant de la forme $u + vp$ où u et v sont deux quaternions, on a $0 + x = 0 + (u + vp) = (0 + u) + vp = u + vp = x$ et $1x = 1(u + vp) = 1u + 1(vp) = 1u + (v1)p = u + vp = x$, en utilisant la règle (i) de (O_6).

Le fait que $1x = x1$ peut se déduire de l'égalité plus générale

$$(3) \quad ax = xa$$

pour tout octonion x et tout réel a .

Mettons en effet x sous la forme $u + vp$ avec u et v dans \mathbb{H} . Alors, grâce à (i) et (ii), $ax = a(u + vp) = au + a(vp) = au + (va)p = au + (av)p$ et $xa = (u + vp)a = ua + (vp)a = ua + (v\bar{a})p = ua + (va)p = au + (av)p$ en utilisant le fait bien connu que tout réel a permute avec tout quaternion et que $\bar{\bar{a}} = a$.

On a aussi

$$(4) \quad 0x = 0$$

pour tout octonion x . En effet, les relations $0(u + vp) = 0u + 0(vp) = 0u + (v0)p = 0 + 0p = 0p$ montrent que tout le problème est de voir que $0p = 0$. Pour cela, on observe d'abord que $(0p)p = (0p)(1p) = -\bar{1} \times 0 = 0$ d'après (O_6) , (iii), de sorte que l'on peut écrire soit $(0p + 0)p = (0p)p = 0$ en utilisant le fait que $0p + 0 = 0p$, soit $(0p + 0)p = (0p)p + 0p = 0 + 0p = 0p$ par distributivité. D'où l'égalité voulue.

Ces particularités du nombre 0 au sein des octonions permettent de voir que tout octonion x admet un opposé y . En effet, si on écrit $x = u + vp$ avec u et v dans \mathbb{H} et si on pose $y = (-u) + (-v)p$, alors $x + y = u + vp + (-u) + (-v)p = [u + (-u)] + [v + (-v)]p = 0 + 0p = 0p = 0$. Ainsi, l'ensemble des octonions est-il un groupe commutatif pour l'addition. Cela permet en particulier d'utiliser dans les calculs les écritures abrégées $x - y$ pour $x + (-y)$, $-x - y$ pour $(-x) + (-y)$, et ainsi de suite. De plus, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition permet de justifier la règle des signes qui s'exprime par les égalités $(-x)y = -xy$, $(-x)(-y) = xy$, $(x - y)(z - w) = xz - xw - yz + yw$, etc.

Au delà de ces propriétés sans surprises, il nous faut compléter les étranges relations (i), (ii) et (iii) données dans (O_6) .

En premier lieu, on a

$$(5) \quad pu = \bar{u}p$$

pour tout quaternion u , et

$$(6) \quad p^2 = -1.$$

La première égalité s'obtient en introduisant le facteur 1 dans le produit pu : $(1p)u = (1\bar{u})p = \bar{u}p$ grâce à (ii) et à (2); la seconde en faisant de même, mais deux fois : $p^2 = (1p)(1p) = -\bar{1}.1 = -1$ d'après (iii). D'une manière générale, les relations de (O_6) permettent de développer le produit de deux octonions quelconques, écrits sous la forme $u + vp$ et $u' + v'p$ où u, v, u', v' sont des quaternions; on a

$$(7) \quad (u + vp)(u' + v'p) = uu' - \bar{v}'v + (v'u + v\bar{u}')p.$$

En effet, $(u + vp)(u' + v'p) = uu' + u(v'p) + (vp)u' + (vp)(v'p) = uu' + (v'u)p + (v\bar{u}')p - \bar{v}'v = uu' - \bar{v}'v + (v'u + v\bar{u}')p$.

Si on prend en particulier $u' = \bar{u}$ et $v' = -v$, on obtient $u\bar{u} + \bar{v}v + (-vu + v\bar{u})p = u\bar{u} + v\bar{v}$, c'est-à-dire

$$(8) \quad (u + vp)(\bar{u} - vp) = u\bar{u} + v\bar{v} = |u|^2 + |v|^2$$

où, comme on l'a vu dans la première partie, $|u|$ et $|v|$ représentent les modules des quaternions u et v . Cette dernière propriété nous permet de voir que si u et v sont deux quaternions, la relation $u + vp = 0$ n'est possible qu'avec $u = v = 0$ car l'égalité $|u|^2 + |v|^2 = 0$ qui découle de $u + vp = 0$ grâce à (8) n'est possible que si $|u| = |v| = 0$, donc si $u = v = 0$. On déduit de là que tout octonion s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u + vp$ où u et v sont deux quaternions. Ainsi, se donner un octonion revient à se donner deux quaternions.

En sens inverse, on peut se servir de cette propriété pour définir \mathbb{O} : on considère l'ensemble \mathbb{H}^2 des couples (u, v) de deux quaternions et on définit une addition et une multiplication en posant

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$$

et

$$(u, v).(u', v') = (uu' - \bar{v}'v, v'u + v\bar{u}')$$

En identifiant chaque quaternion u avec le couple $(u, 0)$ et en posant $p = (0, 1)$, il est possible de démontrer que les axiomes (O_1) à (O_6) sont tous satisfaits.

Comme tout quaternion correspond à un quadruplet de nombres réels, on voit qu'un octonion correspond à huit nombres réels, rangés dans un certain ordre, ce qui explique, évidemment, l'appellation d'octonion. Une autre façon de voir cela est de restreindre la multiplication de \mathbb{O} à la seule considération des produits ax où a est un réel et x un octonion. Cela permet, conjointement à l'addition, de considérer \mathbb{O} comme un espace vectoriel sur \mathbb{R} , mais il convient de vérifier que l'on a toujours $a(bx) = (ab)x$ si a, b sont des réels et x un octonion arbitraire : cela résulte en fait de ce que $a(u + vp) = (au) + a(vp) = (au) + (va)p = au + (av)p$ car $va = av$.

Moyennant quoi, \mathbb{O} est un espace vectoriel de dimension 8, dont une base peut être définie par la suite $(1, i, j, k, p, ip, jp, kp)$. Le lecteur observera que, heureusement pour la simplicité des calculs, on a $(ai)p = a(ip)$ si $a \in \mathbb{R}$ ainsi que les relations analogues pour j et k .

Car il faut avouer que la relation $(xy)z = x(yz)$ — que l'on écrira encore $xy.z = x.yz$ pour éviter les parenthèses — est fautive en général. Il suffit de le voir dans le cas particulier où $x = i, y = j$ et $z = p$. On a en effet $i(jp) = (ji)p = (-ij)p$, ce qui est différent de $(ij)p$ à cause de l'unicité de l'écriture $u + vp$ en général.

Néanmoins on a

$$(9) \quad (ax)y = a(xy), (xa)y = x(ay) \text{ et } (xy)a = x(ya)$$

si x et y sont deux octonions quelconques et si a est un réel.

Vérifions la première relation. Il revient au même de s'assurer que $a \cdot t(u+vp)(u'+v'p) = a(u+vp) \cdot (u'+v'p)$ lorsque u, v, u', v' sont des quaternions quelconques. Il peut être commode de vérifier d'abord le cas particulier $au \cdot p = a \cdot up$ pour tout quaternion u : on a en effet, d'après (0₆), (i) et (3), $a \cdot up = ua \cdot p = au \cdot p$. Cela étant, en appliquant (7) et en utilisant le cas particulier en question, il vient

$$\begin{aligned} a \cdot (u+vp)(u'+v'p) &= a[(uu' - \bar{v}'v) + (v'u + v\bar{u}')p] = a(uu' - \bar{v}'v) \\ &\quad + a \cdot (v'u + v\bar{u}')p = a(uu' - \bar{v}'v) + a(v'u + v\bar{u}') \cdot p \\ &= a \cdot uu' - a \cdot \bar{v}'v + (a \cdot v'u + a \cdot v'u)p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a(u+vp) \cdot (u'+v'p) &= (au + a \cdot vp)(u'+v'p) = (au + av \cdot p)(u'+v'p) \\ &= (au \cdot u' - \bar{v}' \cdot av) + (v' \cdot au + av \cdot \bar{u}')p \end{aligned}$$

ce qui donne le même résultat vu l'associativité de la multiplication dans \mathbb{H} et le fait que a permute avec tout quaternion.

On peut vérifier de même la troisième relation en utilisant le fait que $up \cdot a = au \cdot p$ et les règles de calcul usuelles sur les quaternions, y compris cette fois celles faisant intervenir les conjugués : $\overline{au'} = a\bar{u}'$ et $\overline{av'} = a\bar{v}'$. Enfin, pour la relation du milieu, le mieux est de s'appuyer sur les deux autres et sur (3).

On peut résumer les relations (9) ci-dessus en disant que la relation d'associativité $xy \cdot z = x \cdot yz$ a lieu lorsque l'un des facteurs est un réel. Dans ce cas-là, on écrira naturellement xyz chacun des octonions obtenus.

Nous allons voir que ce cas particulier n'est pas le seul où la relation d'associativité soit vraie. Mais pour cela, nous aurons besoin de définir, comme pour les quaternions, les notions de conjugué, de module et d'inverse. Comme tout octonion x s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u + vp$ où u et v sont des quaternions, on peut utiliser u et v pour les définitions. On posera successivement $\bar{x} = \bar{u} - vp$, $|x| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2}$ et $x^{-1} = (\bar{u} - vp)(|u|^2 + |v|^2)^{-1}$ en supposant dans ce dernier cas $x \neq 0$ ce qui implique que $(|u|^2 + |v|^2)^{-1}$ représente l'inverse d'un nombre réel $\neq 0$. Lorsque x est un élément de \mathbb{H} , on a $x = u$ (et $v = 0$), ce qui fait que l'on retrouve le conjugué \bar{u} , le module $|u|$ et l'inverse u^{-1} du quaternion u . Les notations sont donc cohérentes avec celles déjà utilisées pour les quaternions et rien ne s'oppose à ce qu'on applique le même vocabulaire de **conjugué**, de **module** (ou **valeur absolue**) et d'**inverse**. La définition du conjugué d'un octonion peut sembler étrange mais elle se comprend mieux si on examine la relation (8) ci-dessus. De façon précise, on a

$$(10) \quad x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$$

pour tout octonion x .

La relation $x\bar{x} = |x|^2$ n'est autre que (8) et la relation $\bar{x}x = |x|^2$ se justifie par un calcul direct : $(\bar{u} - vp)(u + vp) = \bar{u}u + \bar{u}(vp) - (vp)u - (vp)(vp) = \bar{u}u + (v\bar{u})p - (v\bar{u})p + \bar{v}v = \bar{u}u + \bar{v}v = |u|^2 + |v|^2$.

On a aussi immédiatement

$$(11) \quad \overline{\bar{x}} = x$$

et pour deux octonions x et y quelconques

$$(12) \quad \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$(13) \quad \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$$

ce qui s'établit sans problème par un calcul direct, laissé au lecteur. On notera que la relation $\bar{x} = x$ revient à dire que x est un réel, car en écrivant $x = u + vp$, cette relation signifie que $\bar{u} = u$ et $-v = v$, donc que $u \in \mathbb{R}$ et $v = 0$.

Si on écrit x sous la forme $a + bc + cj + dk + ep + fip + gjp + hkp$ où a, b, c, d, e, f, g, h sont des réels (coordonnées de x dans la base $(1, i, j, k, p, ip, jp, kp)$), dire que x est un réel revient à dire que les sept dernières coordonnées sont nulles. En sens inverse, si la première coordonnée a est nulle, on dit que x est un **octonion pur**. Lorsque x est un quaternion on retrouve la notion de quaternion pur. Dire que x est un octonion pur revient à dire que $\bar{x} = -x$. On vérifie aussi facilement que tout octonion est somme d'une manière et d'une seule d'un nombre réel a et d'un octonion pur y , ce qui permet de parler de la **partie réelle** et de la **partie pure** de l'octonion x .

De la relation (13) ci-dessus, on déduit que

$$(14) \quad xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

pour tout octonion $x \neq 0$.

On a en effet $x^{-1} = \bar{x}|x|^{-2}$ par définition où $|x|^{-2}$ est un simple réel, permutable en tant que tel avec tout octonion et qui ne pose pas de problème d'associativité d'après (9). On a donc $xx^{-1} = x(\bar{x}|x|^{-2}) = (x\bar{x})|x|^{-2} = |x|^2|x|^{-2} = 1$ et $x^{-1}x = (\bar{x}|x|^{-2})x = (|x|^{-2}\bar{x})x = |x|^{-2}(\bar{x}x) = |x|^{-2}|x|^2 = 1$.

Pour aller plus loin et pour démontrer par exemple que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, il nous faut établir au préalable que $|xy| = |x||y|$ si x et y sont des octonions quelconques. Comme c'est, en fait, une relation entre des réels positifs, il revient au même de montrer que $|xy|^2 = |x|^2|y|^2$. Ce serait facile à faire s'il s'agissait de quaternions car on pourrait user de l'associativité, alors que pour des octonions quelconques on ne le peut pas. Si on écrit $x = u + vp$ et $y = u' + v'p$ où u, v, u', v' sont des quaternions, la formule à démontrer revient à

$$|uu' - \bar{v}'v|^2 + |v'u + v\bar{u}'|^2 = (|u|^2 + |v|^2)(|u'|^2 + |v'|^2)$$

ou

$$(uu' - \bar{v}'v)(\overline{uu' - \bar{v}'v}) + (v'u + v\bar{u}')(\overline{v'u + v\bar{u}'}) = (u\bar{u} + v\bar{v})(\overline{u\bar{u}' + v\bar{v}'})$$

ce qui, on en conviendra, n'a rien d'évident.

Pourtant, si on développe le premier nombre, on trouve

$$uu'\bar{u}'\bar{u} - uu'\bar{v}v' - \bar{v}'v\bar{u}'\bar{u} + \bar{v}'v\bar{v}v' + v'u\bar{u}\bar{v}' + v'uu'\bar{v} + v\bar{u}'\bar{u}\bar{v}' + v\bar{u}'u'\bar{v}.$$

Les termes 1, 4, 5 et 8 sont en fait $|uu'|^2, |vv'|^2, |uv'|^2$ et $|u'v|^2$ ou (pour des quaternions, cela revient au même) $|u|^2|u'|^2, |v|^2|v'|^2, |u|^2|v'|^2$ et $|u'|^2|v|^2$, autrement dit les termes qui résulteraient du développement de $(|u|^2 + |v|^2)(|u'|^2 + |v'|^2)$.

Il s'agit donc de montrer que les termes qui restent font, ensemble, 0. Or les termes 2 et 3 (resp. 6 et 7) sont conjugués l'un de l'autre. Ajoutés ensemble, ils donnent des nombres réels qu'on peut noter $-2\mathcal{R}(\bar{v}'v\bar{u}'\bar{u})$ (resp. $2\mathcal{R}(v\bar{u}'\bar{u}\bar{v}')$) en convenant de noter en général $\mathcal{R}w$ la partie réelle d'un quaternion w quelconque. Or on a $\mathcal{R}(\bar{v}'v\bar{u}'\bar{u}) = \mathcal{R}(v\bar{u}'\bar{u}\bar{v}')$ en vertu du lemme suivant.

Lemme.— Si w et w' sont des quaternions, on a $\mathcal{R}(ww') = \mathcal{R}(w'w)$. Il suffit d'écrire $w = a + bi + cj + dk$ et $w' = a' + b'i + c'j + d'k$ où $a, b, c, d, a', b', c', d'$ sont des réels pour voir que $\mathcal{R}(ww') = \mathcal{R}(w'w) = aa' - bb' - cc' - dd'$. Ce lemme une fois acquis, le résultat final est démontré : on a

$$(15) \quad |xy| = |x||y|$$

pour deux octonions x et y quelconques.

Comme la relation $|x| = 0$ n'est possible qu'avec $x = 0$, on voit, grâce à (15) que le produit de deux octonions ne peut être nul que si l'un des facteurs x ou y est nul.

La même relation (15) montre aussi que si x est un octonion non nul, on a

$$(16) \quad |x^{-1}| = |x|^{-1}.$$

La relation

$$(17) \quad (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

si x, y sont des octonions non nuls est alors facile à établir. On a $(xy)^{-1} = (\bar{x}\bar{y})|xy|^{-2} = (\bar{x}\bar{y})(|x||y|)^{-2} = (\bar{y}\bar{x})(|x|^{-2}|y|^{-2})$. Comme les derniers facteurs sont des réels, ils peuvent permuter comme on veut et être associés aux autres facteurs n'importe comment, ce qui peut donner $(\bar{y}|y|^{-2})(\bar{x}|x|^{-2})$, c'est-à-dire le résultat.

Il n'est malheureusement pas possible de s'arrêter là. Nous aurons besoin d'abord de vérifier que pour deux octonions x et y , on a

$$(18) \quad (x\bar{x})y = x(\bar{x}y), (xy)\bar{y} = x(y\bar{y}), (xy)\bar{x} = x(y\bar{x})$$

ce qui veut dire, en fait, que la relation d'associativité $(xy)z = x(yz)$ a lieu si deux des facteurs x, y, z sont conjugués.

La démonstration de ces formules n'est pas aisée. Voilà ce que je propose : s'il y a plus simple, qu'on me le fasse savoir !

Commençons par démontrer la première relation par un calcul direct. Développons d'abord le produit $(u + vp)[(\bar{u} - vp)(u' + v'p)]$. Le produit entre crochets donne $\bar{u}u' + \bar{u}(v'p) - (vp)u' - (vp)(v'p) = \bar{u}u' + (v'\bar{u})p - (v\bar{u}')p + \bar{v}'v = \bar{u}u' + \bar{v}'v + (v'\bar{u} - v\bar{u}')p$. D'où le produit complet

$$u(\bar{u}u' + \bar{v}'v) + u[(v'\bar{u} - v\bar{u}')p] + (vp)(\bar{u}u' + \bar{v}'v) + (vp)[(v'\bar{u} - v\bar{u}')p] = \\ u(\bar{u}u' + \bar{v}'v) + [(v'\bar{u} - v\bar{u}')u]p + (v\bar{u}u' + \bar{v}'v)p - (v'\bar{u} - v\bar{u}')v.$$

Comme $\overline{\bar{u}u' + \bar{v}'v} = \overline{\bar{u}u'} + \overline{\bar{v}'v} = \bar{u}'u + \bar{v}v'$ et $\overline{v'\bar{u} - v\bar{u}'} = \overline{v'\bar{u}} - \overline{v\bar{u}'} = u\bar{v}' - u'\bar{v}$, on trouve

$$u\bar{u}u' + u\bar{v}'v + (v'\bar{u}u - v\bar{u}'u)p + (v\bar{u}'u + v\bar{v}'v)p - u\bar{v}'v + u'\bar{v}v$$

ce qui se simplifie heureusement en $u\bar{u}u' + u'\bar{v}v + (v'\bar{u}u + v\bar{v}'v)p$. Comme $u\bar{u}$ et $\bar{u}u$ (resp. $v\bar{v}$ et $\bar{v}v$) sont des réels égaux, permutant avec tous les facteurs, il vient $u\bar{u}(u' + v'p) + v\bar{v}(v'p + u') = (u\bar{u} + v\bar{v})(u' + v'p)$, ce qui n'est autre que le produit $(x\bar{x})y$ (si $x = u + vp$ et $y = u' + v'p$). D'où la première relation.

On pourrait démontrer de la même façon $(xy)\bar{y} = x(y\bar{y})$, mais si on part de l'égalité déjà trouvée $(x\bar{x})y = x(\bar{x}y)$ et qu'on prend les conjugués des deux membres, on obtient $\bar{y}(x\bar{x}) = (\bar{y}x)\bar{x}$. Comme cette relation est valable quels que soient x et y , on peut remplacer x par y et y par \bar{x} , ce qui donne $x(y\bar{y}) = (xy)\bar{y}$.

Une démonstration directe de la relation restante $[(xy)\bar{x} = x(y\bar{x})]$ semble plus malaisée car on ne peut espérer de simplification liée à des groupements du type $x\bar{x}$ et $y\bar{y}$. C'est pourquoi, nous allons faire appel à une autre méthode en commençant par établir que

$$(19) \quad (xx)y = x(xy), \quad (xy)y = x(yy), \quad (xy)x = x(yx).$$

Pour l'égalité $(xx)y = x(xy)$, on va utiliser la relation établie $(x\bar{x})y = x(\bar{x}y)$ en remarquant que $x + \bar{x}$ est un nombre réel a car il est son propre conjugué : $\overline{x + \bar{x}} = \bar{x} + x = \bar{x} + x = x + \bar{x}$. On a donc $\bar{x} = a - x$, de sorte que la relation $(x\bar{x})y = x(\bar{x}y)$ s'écrit $[x(a - x)]y = x[(a - x)y]$. Le premier membre devient $(xa - xx)y = (xa)y - (xx)y = axy - (xx)y$ puisque a est un réel ; le second devient $x(ay - xy) = x(ay) - x(xy) = axy - x(xy)$. D'où la relation voulue

On démontre de la même manière l'égalité $(xy)y = x(yy)$ à partir de la relation $(xy)\bar{y} = x(y\bar{y})$ déjà établie.

Mais pour la relation qui reste $(xy)x = x(yx)$, il faut naturellement une autre méthode car on ne sait pas encore que $(xy)\bar{x} = x(y\bar{x})$... Partons de l'égalité $(xx)y = x(xy)$ et remplaçons x par $y + x$. On obtient $[(y + x)(y + x)]y =$

$(y + x)[(y + x)y]$, soit $(yy + yx + xy + xx)y = (y + x)(yy + xy)$ c'est-à-dire $(yy)y + (yx)y + (xy)y + (xx)y = y(yy) + y(xy) + x(yy) + x(xy)$. Comme $(yy)y = y(yy)$, $(xy)y = x(yy)$ et $(xx)y = x(xy)$ d'après ce qu'on a déjà vu, il reste $(yx)y = y(xy)$, ce qui est en substance la relation manquante. On peut alors achever la démonstration de (18) en remplaçant x par $a - \bar{x}$. À partir de ces nouvelles règles de calcul, il n'est pas difficile de voir que

$$(20) \quad (xx^{-1})y = x(x^{-1}y), (xy)y^{-1} = x(yy^{-1}), (xy)x^{-1} = x(yx^{-1})$$

où $x \neq 0$ dans les cas 1 et 3 et $y \neq 0$ dans le cas 2.

Pour simplifier ses calculs, le lecteur est invité à noter $\frac{x}{a}$ le produit d'un octonion x par l'inverse d'un réel $a \neq 0$ et à vérifier au préalable que $\frac{x}{a}y = x\frac{y}{a} = \frac{xy}{a}$ si x et y sont des octonions quelconques.

Le lecteur pourra s'assurer de sa virtuosité en essayant de démontrer l'*identité de Moufang* $(xy)(zx) = x(yz)x$ (cf. N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique, Alg.*, Chap. III, exercice 2, p. 203).

Signalons pour ceux qui veulent enrichir leur culture mathématique que l'on traduit les relations (19) en disant que l'algèbre \mathbb{O} des octonions est **alternative** (cf. N. BOURBAKI, *Alg.*, Chap. III, Appendice). Pour expliquer cette appellation, faisons correspondre à tout triplet (x, y, z) d'octonions l'expression $(xy)z - x(yz)$ (appelée l'**associateur** de x, y, z). On définit ainsi une application non nulle de $\mathbb{O} \cdot \mathbb{O} \cdot \mathbb{O}$ dans \mathbb{O} qui est trilinéaire. Les relations (20) signifient alors très exactement que cette application trilinéaire est alternée, c'est-à-dire qu'elle s'annule pour tout triplet (x, y, z) comportant deux termes égaux.

Pour définir à partir de \mathbb{O} un plan analogue au plan de HAMILTON de la première partie, on pourrait associer à tout triplet (a, b, c) d'octonions tel que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ l'ensemble, noté $\mathcal{D}(a, b, c)$, formé de tous les couples $(x, y) \in \mathbb{O}^2 = \mathbb{O} \cdot \mathbb{O}$ tels que $ax + by + c = 0$.

Malheureusement, si on procède ainsi, il n'est plus vrai que *par deux points distincts passe une droite et une seule*. En effet, si on pose $A = (0, 0)$ et $B = (1, p)$, il est facile de vérifier que A et B appartiennent tous deux à la *droite* $\mathcal{D}(1, p, 0) = 0$ et à la *droite* $\mathcal{D}(i, ip, 0)$, c'est-à-dire que l'on a $x + py = 0$ et $ix + ip \cdot y = 0$ si $x = y = 0$ et si $x = 1$ et $y = p$. Dans ce dernier cas, on a en effet $1 + p^2 = 0$ et $i + (ip)p = i + ip^2 = i - i = 0$. Néanmoins, les *droites* en question, malgré la proportionnalité de leurs coefficients sont *distinctes*. La première contient le *point* $M = (jp, j)$ car $jp + pj = jp + \bar{j}p = jp - jp = 0$, mais pas la seconde car $i \cdot jp + ip \cdot j = (ji)p + (i\bar{j})p = (ji)p - (ij)p = (2ji)p \neq 0$.

Aussi pour définir malgré tout dans \mathbb{O}^2 une structure géométrique convenable se limiterait-on à des équations *réduites*. De façon précise, si a et b sont deux octonions quelconques, on notera $\Delta(a, b)$ l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{O}^2$ tels que $y = ax + b$ et si c est un octonion isolé, on désignera par la notation $\Delta(c)$ l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{O}^2$ tels que $x = c$ — autrement dit l'ensemble $\{c\} \cdot \mathbb{O}$.

Pour fixer les idées, on dira que les ensembles $\Delta(a, b)$ et $\Delta(c)$ sont les **droites de Cayley** de \mathbb{O}^2 , droites de CAYLEY de **première espèce** dans le premier cas, droites de CAYLEY de **deuxième espèce** dans le second.

Proposition 1.— Les droites de CAYLEY de \mathbb{O}^2 jouissent des propriétés suivantes :

a) Si c et c' sont des octonions quelconques, on a $\Delta(c) = \Delta(c')$ si $c = c'$ et $\Delta(c) \cap \Delta(c') = \emptyset$ si $c \neq c'$.

b) Si a, b, c sont trois octonions, il y a un élément et un seul qui appartient à la fois à $\Delta(a, b)$ et à $\Delta(c)$.

c) Si a, a', b et b' sont des octonions et si $a \neq a'$, il y a un élément et un seul qui appartient à la fois à $\Delta(a, b)$ et à $\Delta(a', b')$.

d) Si a, a', b et b' sont des octonions et si $a = a'$, on a $\Delta(a, b) = \Delta(a', b')$ si $b = b'$ et $\Delta(a, b) \cap \Delta(a', b') = \emptyset$ si $b \neq b'$.

Les affirmations a) et d) ci-dessus sont faciles à démontrer. En effet, les égalités $\Delta(c) = \Delta(c')$ si $c = c'$ et $\Delta(a, b) = \Delta(a', b')$ si $a = a'$ et $b = b'$ sont évidentes. Si $c \neq c'$, il n'y a effectivement aucun élément commun (x, y) à $\Delta(c)$ et à $\Delta(c')$ car dans le cas contraire, on aurait $x = c$ et $x = c'$, donc $c = c'$, en contradiction avec l'hypothèse.

De même, si $a = a'$ et $b \neq b'$, il n'y a aucun élément commun (x, y) aux deux ensembles $\Delta(a, b)$ et $\Delta(a', b')$ car dans le cas contraire, on aurait $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, donc $ax + b = a'x + b'$, ce qui impliquerait $b = b'$ puisqu'on a déjà $a = a'$.

Considérons maintenant un élément (x, y) appartenant à la fois à $\Delta(a, b)$ et à $\Delta(c)$. Alors $x = c$ et $y = ax + b$. Cela ne donne qu'une possibilité pour le couple (x, y) : $x = c$ et $y = ac + b$. Inversement, il est clair que si $x = c$ et $y = ac + b$, le couple (x, y) appartient à la fois à $\Delta(a, b)$ et à $\Delta(c)$. D'où l'assertion b) de la proposition.

Considérons enfin quatre octonions a, a', b et b' tels que $a \neq a'$. Pour qu'un couple (x, y) appartienne à $\Delta(a, b) \cap \Delta(a', b')$, il faut et il suffit que l'on ait à la fois $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. Il revient au même de dire que l'on a simultanément $y = ax + b$ et $ax + b = a'x + b'$. Cette dernière égalité s'écrit aussi $(a - a')x = b' - b$. Comme $a - a'$ est un octonion non nul par hypothèse, cette relation implique que $(a - a')^{-1}[(a - a')x] = (a - a')^{-1}(b' - b)$, donc que $x = (a - a')^{-1}(b' - b)$ puisque $(a - a')^{-1}[(a - a')x] = [(a - a')^{-1}(a - a')]x = 1x = x$. Réciproquement, on montre de la même manière que si $x = (a - a')^{-1}(b' - b)$, on a $(a - a')x = b' - b$.

Bref, on voit ainsi qu'il y a un couple (x, y) et un seul commun à $\Delta(a, b)$ et à $\Delta(a', b')$, qui est

$$\left((a - a')^{-1}(b' - b), a[(a - a')^{-1}(b' - b)] + b \right)$$

ce qui achève la démonstration.

Il est facile de voir qu'une droite de CAYLEY contient une infinité d'éléments et qu'en dehors de celle-ci il y a aussi, dans \mathbb{O}^2 , une infinité d'éléments. La partie b)

de la prop. 1 montre qu'une droite de CAYLEY ne peut être à la fois de première et de seconde espèce.

Si D est une droite de CAYLEY de première espèce, il existe un octonion a unique et un octonion b unique tels que $D = \Delta(a, b)$. En effet, la relation $\Delta(a, b) = \Delta(a', b')$ n'est pas possible si $a \neq a'$ d'après le c) de la prop. 1 et si $a = a'$, on a nécessairement $b = b'$ d'après le d). L'unique octonion a qu'on peut ainsi associer à une droite D de première espèce s'appellera le **coefficient directeur** de D . Si D est une droite de seconde espèce, ce n'est pas une droite de première espèce et on convient alors de dire que le **coefficient directeur** est le symbole ∞ , élément mathématique particulier qui est tout sauf un octonion.

La proposition 1 permet de démontrer le théorème que tout le monde attend.

Théorème 1.— Muni de l'ensemble \mathcal{D} de toutes les droites de CAYLEY, l'ensemble \mathbb{O}^2 des couples d'octonions est un plan de type affine.

Montrons d'abord que l'axiome (P_2) est vérifié. Il s'agit de montrer que si A et B sont deux éléments différents de \mathbb{O}^2 , il existe une droite de CAYLEY et une seule contenant à la fois A et B .

L'unicité résulte de la proposition 1. En effet, d'après b) deux droites de CAYLEY D et D' qui contiennent à la fois A et B sont nécessairement de même espèce. Si elles sont toutes deux de seconde espèce, on a $D = D'$ d'après a). Si elles sont toutes deux de première espèce, on peut les écrire $D = \Delta(a, b)$ et $D' = \Delta(a', b')$. En vertu de c), on ne peut avoir $a \neq a'$. On a alors $a = a'$ et $b = b'$ d'après d). D'où $D = D'$ encore.

Pour démontrer l'existence, on doit distinguer deux cas et poser $a = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ où x_A, x_B, y_A, y_B sont des octonions. Si $x_A = x_B$, il est clair que la droite $\Delta(x_A)$ répond aux conditions voulues. Si $x_A \neq x_B$, on pose $D = \Delta(a, b)$ avec $a = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ et $b = y_A - [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}]x_A$. Pour montrer que $\Delta(a, b)$ contient A et B , on doit s'assurer que $y_A = ax_A + b$ et que $y_B = ax_B + b$. La première relation est évidente et la seconde s'obtient en appliquant convenablement les règles de calcul vues plus haut sur les octonions :

$$\begin{aligned} ax_B + b &= [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}]x_B + y_A - [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}]x_A \\ &= [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}]x_B - [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}]x_A + y_A \\ &= [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}](x_B - x_A) + y_A \\ &= (y_B - y_A)[(x_B - x_A)^{-1}(x_B - x_A)] + y_A \\ &= y_B - y_A + y_A \\ &= y_B. \end{aligned}$$

Le lecteur observera que l'on obtient en prime le coefficient directeur de l'unique droite contenant A et B : c'est le symbole ∞ si $x_A = x_B$ et l'octonion $(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ si $x_A \neq x_B$.

Vérifions maintenant l'axiome (P_3) et pour ce faire considérons une droite de CAYLEY D quelconque et un élément A de \mathbb{O}^2 n'appartenant pas à D .

Il s'agit de montrer qu'il existe une droite de CAYLEY D' et une seule contenant A et sans élément commun avec D . L'unicité résulte de la prop. 1. Si D est de première espèce, D' ne peut être de seconde espèce d'après b). Si on pose alors $D = \Delta(a, b)$ et si on considère deux droites $\Delta(a', b')$ et $\Delta(a'', b'')$ répondant au problème, on a nécessairement $a' = a$ et $a'' = a$ d'après c) et par suite $b' = b''$ d'après d). Si D est de seconde espèce, la droite cherchée est nécessairement de seconde espèce d'après b) et son unicité résulte aisément de a). Pour démontrer l'existence, distinguons deux cas. Si $D = \Delta(a, b)$, prenons $D' = \Delta(a, y_A - ax_A)$ (en posant évidemment $A = (x_A, y_A)$). Si on n'avait pas $D \cap D' = \emptyset$, on aurait, d'après d), $b = y_A - ax_A$, ce qui est absurde car A n'appartient pas à D par hypothèse.

Si $D = \Delta(c)$, on pose $D' = \Delta(x_A)$. D'après a), on a $D \cap D' = \emptyset$ ou $D = D'$. Comme il est impossible que $D = D'$ sinon A appartiendrait à D , on a la propriété cherchée.

Comme l'axiome (P_1) est trivialement vérifié, la démonstration du théorème est achevée.

Dans la suite, on supposera \mathbb{O}^2 muni de la structure définie grâce au th. 1 et on dira que \mathbb{O}^2 est le **plan de Cayley**. On utilisera alors librement le vocabulaire général de la géométrie en parlant de points et de droites dans \mathbb{O}^2 . Comme dans le plan de HAMILTON, chaque point du plan de CAYLEY admet deux coordonnées, l'abscisse et l'ordonnée : ce sont des octonions. Chaque droite admet une équation soit de la forme $y = ax + b$, soit de la forme $x = c$. On pourra aussi parler dans \mathbb{O}^2 de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées. On notera que les droites de seconde espèce ne sont autres que les parallèles à l'axe des ordonnées.

Comme on l'a observé en démontrant le th. 1 on peut aisément déterminer le coefficient directeur des droites de \mathbb{O}^2 .

Proposition 2.— Si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points distincts du plan de CAYLEY \mathbb{O}^2 , le coefficient directeur de l'unique droite passant par A et par B est $(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ si $x_A \neq x_B$ et ∞ si $x_A = x_B$.

Il est facile aussi de tirer de la prop. 1 le résultat suivant

Proposition 3.— Pour que deux droites du plan de CAYLEY soient parallèles il faut et il suffit qu'elles aient le même coefficient directeur.

Armé de ces deux derniers résultats, il est facile de s'attaquer au problème de la validité des théorèmes de DESARGUES et de PAPPUS. Pour ce dernier, la question se pose à peine car l'ensemble \mathbb{H} étant une partie de \mathbb{O} , le même contre-exemple que dans la première partie suffit : $A = (1, 0)$, $B = (i, 0)$, $C = (j, 0)$, $A' = (0, 1)$, $B' = (0, -i)$, $C' = (0, -j)$.

Mais le théorème de DESARGUES est aussi, en général, en défaut. Pour le voir, on considère les droites d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées), $y = x$ (la première bissectrice) et $y = 0$ (l'axe des abscisses). Ce sont des droites distinctes,

concourantes en 0. Sur la première droite, on prend $A = (0, i)$ et $A' = (0, ip)$, sur la seconde $B = (1, 1)$ et $B' = (p, p)$, sur la troisième $C = (j, 0)$ et $C' = (jp, 0)$.

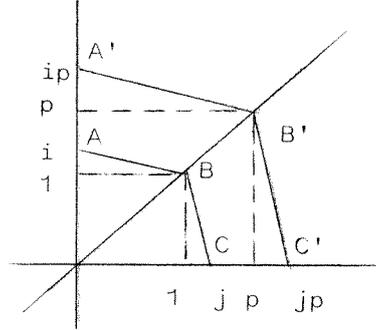


Figure 9

Montrons en calculant les coefficients directeurs que $AB \parallel A'B'$. Pour AB , on trouve $(1 - i)(1 - 0)^{-1} = 1 - i$ et pour $A'B'$, $(p - ip)(p - 0)^{-1} = [(1 - i)p]p^{-1} = (1 - i)(pp^{-1}) = 1 - i$.

Montrons de même que $BC \parallel B'C'$. Pour BC , on trouve $(0 - 1)(j - 1)^{-1} = -(j - 1)^{-1}$ et pour $B'C'$, $(0 - p)(jp - p)^{-1} = -p[(j - 1)p]^{-1} = -p[(p^{-1})](j - 1)^{-1} = (-pp^{-1})(j - 1)^{-1} = -(j - 1)^{-1}$.

Par contre, AC n'est pas parallèle à $A'C'$ car les coefficients directeurs correspondants sont $(0 - i)(j - 0)^{-1} = -ij^{-1} = (-i)(-j) = ij$ et $(0 - ip)(jp - 0)^{-1} = (-ip)(jp)^{-1} = (-ip)(-p^{-1}j) = -(ip)(pj) = (ip)(jp) = -\bar{j}i = ji$. Et on sait que $ij \neq ji$.

Néanmoins, comme nous l'avions annoncé, le théorème de DESARGUES reste valable si on se contente de prendre six points sur des droites D_A, D_B, D_C parallèles.

Théorème 2.— Soient D_A, D_B, D_C des droites parallèles dans le plan \mathbb{O}^2 , A et A' deux points sur D_A , B et B' deux points sur D_B , C et C' deux points sur D_C tels que $AB \parallel A'B'$ et $BC \parallel B'C'$. Alors, les droites AC et $A'C'$ sont parallèles.

L'idée de la démonstration est d'introduire la notion de translation dans le plan de CAYLEY, comme on l'a fait dans le plan de HAMILTON. De façon précise, si a et b sont deux octonions, on appelle translation d'opérateur (a, b) dans \mathbb{O}^2 l'application $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ de \mathbb{O}^2 dans lui-même. On vérifie aussitôt que l'on définit ainsi une bijection dont la bijection réciproque est la translation d'opérateur $(-a, -b)$ et que si on compose la translation d'opérateur (a, b) avec la translation d'opérateur (a', b') , on obtient la translation d'opérateur $(a + a', b + b')$. Mais les deux propriétés essentielles pour la démonstration du th. 2 sont les résultats équivalents aux propositions 5 et 6 de la première partie :

Proposition 4.— Si A et B sont deux points de \mathbb{O}^2 , il existe une translation et une seule qui transforme A et B .

En effet, avec des notations évidentes, la translation cherchée est celle d'opérateur $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Proposition 5.— Si t est une translation de \mathbb{O}^2 , si A et B sont deux points quelconques et si A' et B' sont les images de A et B par t , on a les deux propriétés suivantes

- (i) Si $A \neq B$, alors $A' \neq B'$ et $AB \parallel A'B'$.
- (ii) Si $A \neq A'$, alors $B \neq B'$ et $AA' \parallel BB'$.

En effet, comme dans le cas de la prop. 6 vue dans la première partie, le calcul des coefficients directeurs ne nécessite que l'emploi de l'addition et de la soustraction.

En utilisant ces résultats, la démonstration du th. 2 peut se calquer sans problème sur celle du th. 2 de la première partie. Les détails sont laissés au lecteur.

On peut dire que dans le plan de CAYLEY, la *moitié* du théorème de DESARGUES est vraie. On exprimera cela en disant que \mathbb{O}^2 est **semi-arguésien**, ce qui constitue un modèle fort intéressant de plan son arguésien compte tenu de l'importance que présente le théorème de DESARGUES dans certaines définitions axiomatiques du plan. Ce sera notre conclusion.

Conclusion : Axiome de DESARGUES et axiome de PAPPUS

Nous avons vu dans l'introduction que les propriétés les plus élémentaires de la géométrie plane (propriété d'incidence) peuvent être présentées au moyen de trois axiomes (P_1) , (P_2) et (P_3) qui définissent de façon précise ce que nous avons appelé les plans de type affine. Un grand nombre d'exemples de plans de ce genre peuvent être définis à l'aide d'un corps K , commutatif ou non. Comme nous l'avons expliqué en détail avec le corps \mathbb{H} des quaternions, le plan K^2 correspondant est arguésien, ce qui veut dire qu'il satisfait à un cas particulier du théorème historique de DESARGUES exprimant que pour des points A, B, C, A', B', C' convenablement disposés, les relations $AB \parallel A'B'$ et $BC \parallel B'C'$ impliquent $AC \parallel A'C'$. L'énoncé précis de ce résultat constitue ce qu'on appelle maintenant l'**axiome de DESARGUES**. C'est donc une condition nécessaire pour que la structure d'un plan de type affine puisse être définie à l'aide d'un corps, commutatif ou non.

Il se trouve que c'est aussi une condition suffisante. La démonstration de ce phénomène est assez longue, sans être difficile. Le lecteur intéressé pourra consulter les livres de Pierre SAMUEL et de Jacqueline LELONG-FERRAND cités dans notre bibliographie — ou pour un point de vue légèrement différent celui d'Emil ARTIN. La méthode de SAMUEL et de LELONG-FERRAND consiste à définir, d'une manière géométrique, la notion de vecteur dans un plan de type affine. Pour ce faire, on définit une relation binaire entre bipoints du plan, qui n'est autre que la bonne vieille relation d'équipollence de BELLAVITIS. Si on suit SAMUEL, il y a trois espèces d'équipollence que, à Saumur, pour y voir clair, nous avons baptisées *équipollence stricte*, *équipollence linéaire* et *équipollence triviale*. Moyennant quoi, on détermine une relation réflexive et symétrique entre les bipoints d'un plan de type affine quelconque. Mais l'exemple du *plan de MOULTON* (cf. fig. 5 de l'Introduction) montre que cette relation n'est pas nécessairement transitive. Cependant si on admet l'axiome de DESARGUES, cette transitivité se démontre, mais non sans peine (cf. SAMUEL). En fait, l'analyse de la démonstration montre que seule la *moitié*

de cet axiome est vraiment utile. De façon précise, pour que l'équipollence soit une relation transitive il faut et il suffit que le plan de type affine considéré soit semi-arguésien. Avec cette seule hypothèse, on peut alors non seulement définir les vecteurs du plan par passage au quotient, mais montrer que l'ensemble de ces vecteurs est un groupe commutatif pour une addition qui satisfait à la relation de CHASLES. Pour définir à partir de là le corps souhaité, l'idée consiste à introduire de manière purement géométrique la notion d'homothétie dans un plan semi-arguésien. Pour s'affranchir du centre d'homothétie, on se contente d'introduire la notion d'homothétie vectorielle. Sans introduire d'autre hypothèse, on montre alors que ces homothéties constituent un corps non nécessairement commutatif K et que l'ensemble V des vecteurs du plan est un espace vectoriel (à gauche) sur ce corps. Malheureusement — et c'est ce qui fait l'intérêt du plan de CAYLEY — il n'est pas toujours vrai que V soit de dimension 2 sur K . Pour qu'il en soit ainsi il est nécessaire et suffisant que la totalité de l'axiome de DESARGUES soit vérifiée, autrement dit que le plan soit arguésien.

Des calculs personnels que je n'ai fait vérifier par personne semblent montrer que dans le cas du plan de CAYLEY \mathbb{O}^2 la dimension de V sur K est égale à 16, ce qui fait beaucoup pour un plan!

Dans un plan de type affine quelconque, on peut considérer aussi un énoncé qu'il est légitime d'appeler l'**axiome de PAPPUS** (cf. fig. 4 de l'Introduction). On démontre que l'axiome de PAPPUS entraîne l'axiome de DESARGUES (voir le livre de Jacqueline LELONG-FERRAND). Comme nous l'avons laissé entendre dans la première partie, la validité de cet axiome équivaut à la commutativité du corps de base que l'on peut associer à tout plan arguésien.

Les lecteurs assoiffés de détails n'ont qu'à se procurer les ouvrages cités dans notre abondante bibliographie. Ça suffit comme ça!

Bibliographie

Pour ce qui concerne la place des théorèmes de DESARGUES et de PAPPUS dans la présentation axiomatique de la géométrie plane, le lecteur pourra consulter conjointement les livres déjà cités de Pierre SAMUEL et de Jacqueline LELONG-FERRAND :

Pierre SAMUEL, *Géométrie projective*, P.U.F., 1986.

Jacqueline LELONG-FERRAND, *Les fondements de la géométrie*, P.U.F., 1985.

Il trouvera aussi des compléments et un autre point de vue dans le livre plus ancien d'Emil ARTIN ou dans l'ouvrage célèbre de David HILBERT :

Emil ARTIN, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, 1967.

David HILBERT, *Les fondements de la géométrie*, Dunod 1971.

Sur les octonions, on trouvera quelques indications dans Nicolas BOURBAKI, *Éléments de mathématique*, Alg. Chap. III, Appendice, nouvelle édition, 1970, Hermann.

M. GUINOT

Jean DIEUDONNÉ, *A History of Algebraic and Differential Topology (1900–1960)*, Birkhäuser, 1989.

Mais pour ceux qui lisent l'allemand sans peine, nous ne pouvons que leur conseiller l'achat de l'ouvrage collectif

H.-D. EBBINGHAUS u. a., *Zahlen, Grundwissen Mathematik 1, zweite, überarbeitete und ergänzte Auflage*, Springer Verlag, 1988

dont tout un chapitre est consacré aux *nombres de CAYLEY*.

Pourquoi vous agace-t-il, ce fameux slogan de “80%
d'une classe d'âge menés au niveau du bac” ?

D'abord parce qu'on a mué en grande cause ce qui n'est, au départ, qu'une bourde ministérielle, un lapsus malheureux ou plutôt un contresens. De passage au Japon, M. CHEVÈNEMENT y a entendu dire que 80 % des élèves, là-bas, atteignaient le stade du baccalauréat. En fier patriote, il a proclamé aussitôt que les petits Français valaient bien les petits Japonais. Il omettait de signaler, dans sa candide ignorance, que le “bac”, au Japon, n'est qu'une attestation de fin d'études sans valeur aucune. Il ne savait pas non plus que le système japonais est un système assassin qui épuise les gosses pour un “rendement” des plus médiocres.

Mais tant pis. La formule était lancée. Et il fallait que les choses ressemblent aux mots quand bien même les mots résonnaient dans le vide. C'est cela, paraît-il, le courage politique et la volonté de la Nation. Résultat : pour s'approcher de l'objectif, on n'hésite pas à intensifier les tortures et à multiplier les martyrs.

Marguerite GENTZBITTEL

La cause des élèves, éd. du Seuil, 1991.

CALCULS NUMÉRIQUES ET CALCULATRICE EN 3ème

GROUPE DE LIAISON 3e – 2nde

Dans le cadre d'un stage MAFPEN, une trentaine de professeurs se sont réunis pour réfléchir à différentes approches des mathématiques au niveau des 3èmes et des 2ndes. Ceux d'entre eux qui se sont intéressés au calcul numérique ont compilé ou inventé une série d'exercices qui mettent bien en évidence les possibilités et les limites, les avantages et les inconvénients du calcul sur machine. C'est volontairement qu'il n'est question ici ni des fonctions trigonométriques, ni des fonctions statistiques, ni même de la programmation élémentaire qui ne peuvent venir que dans un deuxième temps et plus sûrement au niveau de la seconde.

Exercice 1 : Qui est le plus rapide ?

Dans chaque ligne, cocher d'une croix la bonne réponse. Mais attention : il ne s'agit pas de répondre au hasard ... Une bonne réponse rapporte un point, mais une mauvaise réponse enlève un point !

est égale à l'expression	0	7	$2\sqrt{7}$	± 7	$\sqrt{7}$
$\sqrt{7} + \sqrt{7}$					
$\sqrt{49}$					
$\sqrt{28}$					
$\sqrt{63} - 3\sqrt{7}$					
$0,5[(\sqrt{7} + 1)^2 - (\sqrt{7} - 1)^2]$					
$\sqrt{1008} - \sqrt{847}$					
$7/\sqrt{7}$					

A faire : ① avec la calculatrice ② à la main. Chronométrer les deux étapes. Comparer les résultats et le temps consacré.

Exercice 2 : De l'usage de quelques touches

Une calculatrice scientifique reconnaît la priorité des opérations, elle possède les parenthèses et une mémoire.

\boxed{M} (ou $\boxed{M+}$, $\boxed{M in}$, \boxed{STO} , ...) s'utilise pour mettre un nombre en mémoire.

\boxed{RM} (ou \boxed{MR} , $\boxed{M out}$, \boxed{RCL} , ...) permet d'utiliser le nombre placé

en mémoire.

La touche $\boxed{\text{CM}}$ permet de mettre 0 dans la mémoire.

a) Des programmes de calculs

Quelles expressions sont calculées par les programmes suivants?

1) Taper un nombre x puis $\boxed{\text{M}} \boxed{x^2} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{\times} \boxed{\text{RM}} \boxed{+} \boxed{5} \boxed{=}$

2) Taper x puis $\boxed{\text{M}} \boxed{x^2} \boxed{\times} \boxed{2} \boxed{\div} \boxed{5} \boxed{-} \boxed{\text{RM}} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{=}$

3) Taper x puis $\boxed{\text{M}} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{(} \boxed{\text{RM}} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{=}$

4) Taper x puis $\boxed{\text{M}} \boxed{\times} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{=} \boxed{\times} \boxed{(} \boxed{\text{RM}} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{=} \boxed{\div} \boxed{5} \boxed{=}$

b) Des expressions à calculer

Ecrire un programme de calcul pour chacune des expressions suivantes :

1) $5x + 3x^2 - 4$

2) $(x + 3) \times (4 - 2x) + 3$

3) $\frac{3}{4}x - \frac{5}{7}x^2$

Tester ensuite ces programmes avec $x = 0$, puis $x = 3$ et enfin $x = -5$.

(Pour taper - 5 : 5 $\boxed{+/-}$)

Exercice 3 : La notation scientifique

1)

n	7	9	11	13
on calcule				
283×10^n . Résultat affiché par la calculatrice				

2) a) La calculatrice affiche $\boxed{1.09951 \quad 12}$.

Que signifie ce résultat? Ecrire la séquence des touches utilisées pour obtenir cet affichage. Ecrire le résultat en écriture décimale puis en toutes lettres.

b) Effectuer à la calculatrice $1,09951^{12}$ en notant la séquence des touches utilisées. Noter le résultat affiché.

Exercice 4 : Ne pas confondre x^n et $x \times 10^n$

1) Effectue sur ta calculatrice les opérations suivantes :

$3,435 \times 1000$	$3,435^3$ (touche $\boxed{y^x}$)
$3,435 \times 100000$	$3,435^5$
$3,435 \times 10^5$	$3,435 \times 10^8$
$3,435 \times 10^{10}$	$3,435^{10}$

2) Quelle séquence de touches faut-il taper sur le clavier de ta calculatrice pour obtenir l’affichage : $\boxed{3.43597 \quad 10}$?

→

→

(2 possibilités).

3) Ecris ce nombre en écriture décimale.

Ecris-le maintenant en français en toutes lettres.

4) Effectue sur ta calculatrice, en notant la séquence des touches utilisées, le calcul de :

$$2^{35}$$

Interprète le résultat :

5) Des deux nombres ci-dessous, lequel est le plus grand? (donne un ordre de grandeur de chacun d'eux).

$$a = 1,0995^{12}$$

$$b = 1,0995 \times 10^{12}$$

Exercice 5 : La multiplication de grands nombres

Pour cette activité se munir d'une calculatrice.

a) Une multiplication

Problème : Calculer $123\,456 \times 987\,654$ à l'aide d'une calculatrice et sans *poser* de multiplication.

1. Obtient-on le résultat exact quand on tape $123\,456$ $\boxed{\times}$ $987\,654$ $\boxed{=}$ sur la calculatrice?

2. On peut écrire :

$$123\,456 = 123\,000 + 456 \text{ et } 987\,654 = 987\,000 + 654; \text{ on a alors}$$

$$123\,456 \times 987\,654 = (123\,000 + 456) \times (987\,000 + 654).$$

Comment peut-on maintenant résoudre le problème posé?

Exercice 6 : Mieux vaut réfléchir avant de calculer

1) Calculer avec différentes calculatrices les nombres $A = 923\,761^2 - 923\,760^2$ et $B = 28\,923\,761^2 - 28\,923\,760^2$.

2) Calculer à la main les valeurs théoriques de A et de B après avoir remarqué que **ce sont des différences de carrés**.

3) Confronter les résultats des calculatrices et les résultats théoriques.

Exercice 7 : Encore plus compliqué!

1) A l'aide de ta calculatrice, calcule les nombres suivants :

$$A = 123\,456^2 - 123\,455 \times 123\,457 \quad B = 456\,789^2 - 456\,785 \times 456\,793$$

$$C = 123\,456\,789^2 - 123\,456\,787 \times 123\,456\,791$$

(tu donneras les résultats proposés par ta machine en précisant la marque et le modèle).

2) Calculer algébriquement les résultats exacts.

Pour cela : appeler x le nombre élevé au carré; exprimer les deux autres en fonction de x puis développer les deux termes de la différence.

3) Confronter les résultats théoriques avec ceux de la machine, essayer d'expliquer l'origine des différences.

4) Reprendre la question 1) avec d'autres modèles de calculatrice.

Exercice 8 : Divisions aux résultats proches

1) Avec plusieurs modèles de calculatrices, comparer les valeurs affichées par les calculs de $\frac{33\,461}{80\,782}$ et de $\frac{13\,860}{33\,461}$.

2) Justifier, **sans les calculer**, que les produits en croix ne peuvent pas être égaux.

Exercice 9 : $\sqrt{2}$ est-il rationnel?

1) Exercice à faire **d'abord avec la calculatrice puis sans la calculatrice** : Montrer que $\sqrt{2}$ et $(10/7)$ sont voisins, mais pas égaux.

2) Avec la calculatrice, comparer à présent

a) $\sqrt{2}$ et $\frac{19\,601}{13\,860}$

b) $\sqrt{2}$ et $\frac{768\,398\,401}{543\,339\,720}$.

3) Pour démontrer que $\frac{19\,601}{13\,860} \neq \sqrt{2}$:

a) Calculer d'abord le carré de 19 601 à l'aide des produits remarquables : $(19\,601)^2 = (19\,600 + 1)^2 = \dots$

b) Calculer $13\,860^2 = (1386 \times 10)^2$

c) En déduire que $\frac{19\,601}{13\,860} \neq \sqrt{2}$.

4) En faisant de simples considérations sur la parité du numérateur et du dénominateur, démontrer que $\sqrt{2} \neq \frac{768\,398\,401}{543\,339\,720}$.

Exercice 10 : Où les ordres de grandeurs jouent des tours

Pierre et Nicole ont à calculer le nombre suivant :

$$A = \sqrt{10^{16} - (10^8 - 2 \times 10^{-8})^2}.$$

Pierre n'utilise que sa calculatrice. Il trouve $A = 0$. Nicole fait d'abord quelques calculs à la main. Elle trouve $A = 2$. Le résultat de Nicole est meilleur que celui de Pierre. Justifier cette affirmation.

1) Refais les calculs de Pierre sur ta calculatrice.

2) Quels sont les calculs de Nicole?

3) Pourquoi le résultat de Nicole est-il meilleur?

4) Le résultat de Nicole est-il exact, trop grand ou trop petit?

Exercice 11 : La calculatrice pour tracer une courbe

On veut tracer la courbe définie par l'équation $y = x^3 - 5x^2 + 8$ pour x compris entre -1 et 5.

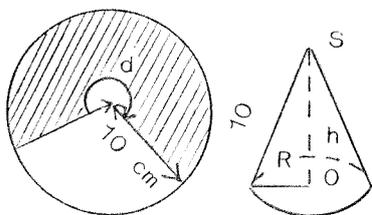
1) Compléter le tableau de valeurs :

CALCULS NUMÉRIQUES ET CALCULATRICE EN 3ème

x	-1	0	1	2	3	4	5
y							

- 2) Indiquer la suite des touches de ta calculatrice utilisées pour calculer y en fonction de x (on pourra par exemple commencer par mettre x en mémoire).
- 3) Placer dans un repère orthonormé les points correspondants aux valeurs du tableau de 1) (unité : 1 cm).
- 4) Calculer d'autres valeurs pour préciser l'allure de la courbe.
- 5) y s'annule pour une valeur de x comprise entre 1 et 2. Essayer de préciser cette valeur en faisant des essais que l'on notera.

Exercice 12 : La calculatrice pour chercher un maximum



On cherche à réaliser un cône ayant le volume le plus grand possible en découpant son patron dans un disque de 10 cm de rayon.

1) Montrer que si R est le rayon du cône, son volume V est défini par la formule : $V = \frac{\pi}{3} \times R^2 \sqrt{100 - R^2}$.

- 2) Compléter le tableau de valeurs :

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V											

- 3) Indiquer la suite des touches de la calculatrice utilisées pour calculer V en fonction de R (on pourra par exemple commencer par mettre R en mémoire).
- 4) Faire une représentation graphique de la variation du volume en fonction du rayon (on mettra les valeurs de R en abscisses et les valeurs correspondantes de V en ordonnées : on prendra 1 cm pour représenter 100 cm³).
- 5) En faisant des essais successifs, préciser la valeur de R pour laquelle le volume est maximal.
- 6) Calculer alors l'angle du secteur circulaire, patron du cône de volume maximal.

Exercice 13 : La calculatrice pour vérifier une solution

On cherche une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

- 1) Compléter le tableau de valeurs

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$x^2 - x - 1$							

On pourra faire un graphique.

2) Indiquer la suite des touches utilisées pour calculer $x^2 - x - 1$ en fonction de x (on pourra, par exemple, commencer par mettre x en mémoire).

3) Préciser la solution cherchée en faisant des essais que l'on notera.

4) Calculer $x^2 - x - 1$ pour $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (indiquer la séquence de calcul en notant les touches utilisées). Que penser du résultat? Comparer le résultat selon le type de calculatrice. Démontrer (à la main) que $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ est une solution exacte de l'équation proposée.

Exercice 14 : L'utilisation de la calculatrice est-elle raisonnable?

1) Construire avec précision un triangle dont les côtés mesurent 9 cm, 8 cm et 12 cm. Ce triangle est-il rectangle? Justifier.

2) L'unité de longueur est de 5 cm pour cette question. Construire avec précision un triangle dont les côtés mesurent $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ unités, $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ unités et $\sqrt{10}$ unités.

3) Vérifier à l'aide d'une calculatrice si ce dernier triangle est bien un triangle rectangle.

4) Reprendre la question précédente sans calculatrice.

5) L'utilisation d'une calculatrice est-elle raisonnable pour cette vérification?

RÉPONSE A LA DEVINETTE POSÉE DANS LE N° 59 :

Qui a dit : *“Les mathématiques sont comme le porc, tout en est bon”*?

Il s'agit de LAGRANGE dont les propos sont rapportés par Emile PICARD lors de la séance d'ouverture du congrès international des mathématiques de Strasbourg en 1920.

GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE ÉLÉMENTAIRE

DES COURBES PLANES (*)

Jean-Yves MÉRINDOL

Introduction

Les courbes planes sont des objets mathématiques tout à fait naturels. A un niveau élémentaire, on rencontre les droites puis les coniques. Dans ce qui suit, on s'intéresse aux courbes algébriques de tout degré.

On verra que l'on peut obtenir des résultats valables pour ces courbes en n'utilisant que deux outils.

Le premier est le maniement des positions générales : “*en général*” deux droites se coupent en un seul point; “*en général*” par cinq points, il passe une conique et une seule. Dans les deux cas, avec un peu de travail, on peut explicitement préciser les situations où l'énoncé est faux. Mais l'idée qui sera utilisée dans la suite, de façon purement heuristique, est que des calculs corrects faits sans trop de précaution (par exemple en utilisant sans le vérifier que n équations linéaires sont indépendantes) sont “*en général*” vrais. On pourrait effectivement démontrer ces énoncés mais ceci demande un travail technique important qui cache les idées essentielles des démonstrations. On a donc délibérément sacrifié la rigueur au profit de la géométrie.

Le deuxième outil est plus technique. Il s'agit du théorème de BÉZOUT : en général une courbe de degré n coupe une courbe de degré m en $m \times n$ points.

En fait ces deux outils : position générale et théorie de l'intersection sont les deux outils fondamentaux d'étude du chapitre de la géométrie projective énumérative.

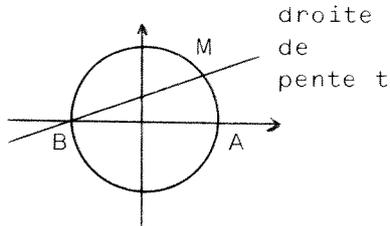
1) Courbes et intégrales

Quand on veut calculer des primitives d'une fonction F , on a souvent bien du mal à trouver le bon changement de variable. Mais on comprend mieux les choses en introduisant un peu de géométrie. Prenons un exemple simple : $\int \sqrt{1-x^2} dx$. On pose $y = \sqrt{1-x^2}$ d'où $x^2 + y^2 = 1$ qui est l'équation d'une courbe (ici un cercle) que l'on va paramétriser. Dans le cas présent du cercle, il y a deux possibilités :

- Soit une paramétrisation transcendante avec les fonctions sinus et cosinus.
- Soit une paramétrisation algébrique en posant $t = \tan(u/2)$ où t est la pente d'une droite variable passant par B (voir dessin) qui recoupe le cercle en M dont

(*) Conférence donnée le 21 février 1990 à Strasbourg.

les coordonnées sont $((2t/1+t^2); (1-t^2/1+t^2))$.

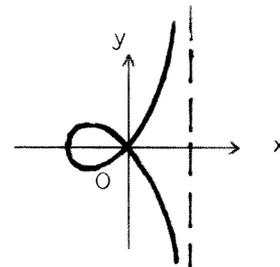


Dans le cas présent, le remplacement, dans le calcul de la primitive, de x par $(2t/1+t^2)$ permet de se ramener à une fraction rationnelle.

Un autre exemple, plus compliqué, est donné par les fonctions elliptiques, appelées ainsi car elles permettent le calcul de la longueur d'un arc d'ellipse. Considérons l'ellipse d'équation $x^2 + (y^2/a^2) = 1$ ($a > 1$) (ou $y = \pm a\sqrt{1-x^2}$). Pour calculer la longueur de l'arc d'une telle ellipse, on considère l'élément différentiel ds avec $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2(1+k^2x^2)/(1-x^2)$ où l'on a posé $k^2 = a^2 - 1$. On est ainsi amené à calculer $\int \sqrt{(1+k^2x^2)/(1-x^2)} dx$. Comme dans le cas du cercle, on pose $y = \sqrt{(1+k^2x^2)/(1-x^2)}$ et on voudrait pouvoir paramétrer la courbe $y^2(1-x^2) - (1+k^2x^2) = 0$. Or on peut prouver (et on le fera plus loin) que ceci est impossible par les fractions rationnelles, d'où la nécessité de recourir à des fonctions spéciales, transcendentes, qui sont les fonctions elliptiques. On verra qu'en général les courbes de degré supérieur ou égal à 3 ne peuvent pas être paramétrées par des fonctions rationnelles. Il y a cependant quelques contre-exemples :

— La strophoïde d'équation $x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$ soit $y^2 = (x^2 - x^3/1+x)$ peut être paramétrée par :

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$$

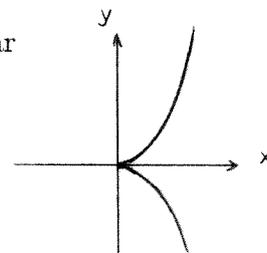


ce qui permet le calcul de

$$\int \sqrt{\frac{x^2 - x^3}{1+x}} dx.$$

— La cissoïde d'équation $x(x^2 + y^2) = y^2$ paramétrée par

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$



Dans ces deux cas, ce qui permet la paramétrisation, c'est l'existence d'un point double par lequel on fait passer une droite de pente t qui recoupe la courbe en un unique point M dont les coordonnées s'expriment justement à l'aide des fractions rationnelles en t indiquées ci-dessus.

2) Le bon cadre d'étude :

Il y a essentiellement deux façons de définir une courbe algébrique plane (C). A l'aide d'une équation cartésienne :

$$(C) = \{(x; y) / P(x, y) = 0\}$$

où P est un polynôme de degré d et par définition d est le degré de la courbe. Mais deux polynômes distincts peuvent donner la même courbe (vue comme sous-ensemble du plan) : $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est équivalent à $(x^2 + y^2 - 1)^2 = 0$ et dans le cas des réels à $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1) = 0$.

La deuxième méthode consiste en une représentation paramétrique :

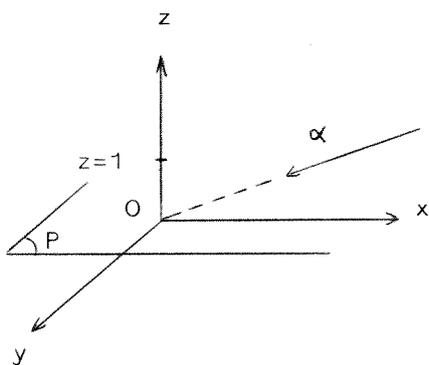
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (f(t); g(t)) \end{aligned}$$

où f et g sont deux fractions rationnelles.

La question qui se pose est le passage d'une forme à l'autre. Si le passage d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne ne pose pas de grandes difficultés théoriques (on élimine t entre $x = f(t)$ et $y = g(t)$), il n'en est pas de même en sens inverse. En fait *en général* une courbe définie par une équation algébrique ne peut être paramétrée par des fractions rationnelles.

Pour comprendre cela plus facilement, il faut se placer non pas dans \mathbb{R}^2 où les calculs sont beaucoup trop compliqués, mais dans \mathbb{C}^2 et même plutôt $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, plan projectif complexe.

Définition heuristique : On appelle **plan projectif sur \mathbb{C}** le plan habituel \mathbb{C}^2 auquel on adjoint une **droite à l'infini** de telle sorte que deux droites se coupent toujours (éventuellement à l'*infini* lorsqu'elles sont parallèles dans \mathbb{C}^2).



On comprend mieux cette notion si on se place dans \mathbb{C}^2 rapporté à un repère $(0, x, y, z)$ dans lequel on considère le plan (P) d'équation $z = 1$. Tout point α de (P) s'identifie avec une droite vectorielle de \mathbb{C}^3 (la droite engendrée par $\alpha : \mathbb{C} \cdot \alpha$), mais il existe des droites vectorielles (celles contenues dans $(x0y)$) qui ne coupent pas (P) . Ce seront elles qui seront associées aux points de la droite à l'infini de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Ceci permet de donner une définition plus rigoureuse :

Définition :

- Un point de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ est une droite vectorielle de \mathbb{C}^3 .
- Une droite de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ est l'ensemble des droites vectorielles contenues dans un plan vectoriel de \mathbb{C}^3 .

La droite à l'infini de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ est associée au plan $(x0y)$. Grâce à cette définition, deux droites distinctes ont toujours un point commun et un seul (car deux plans vectoriels distincts se coupent en une droite). En géométrie projective la notion de parallèle n'existe pas.

Une courbe algébrique de (P) va être associée à un cône algébrique de sommet 0. Dans \mathbb{C}^3 un tel cône a pour équation un polynôme homogène à trois variable $(X, Y$ et $Z)$. La recherche de l'intersection de ce cône avec $Z = 0$ revient à chercher les points à l'infini de la courbe algébrique ou, ce qui revient au même, l'intersection de la courbe avec la droite à l'infini.

Il est très facile d'obtenir l'équation du cône à partir de l'équation d'une courbe algébrique; il suffit d'homogénéiser le polynôme, c'est-à-dire de multiplier chaque monôme par Z^m où m est à chaque fois le plus petit entier possible tel que tous les monômes résultant aient le même degré : celui de la courbe. En sens inverse, pour déshomogénéiser, on remplacera partout Z par 1. C'est l'opération algébrique correspondant à celle, géométrique, décrite ci-dessus.

Exemples :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ donne } X^2 + Y^2 - Z^2 = 0.$$

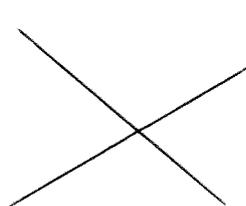
$$X^3 + Y^3 + ZY^2 + Z^3 = 0 \text{ donne } x^3 + y^3 + y^2 + 1 = 0.$$

(X, Y, Z) seront les coordonnées homogènes d'un point de la courbe, coordonnées définies à un facteur multiplicatif non nul près, ce qui correspond au fait qu'un point de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ est une droite vectorielle de \mathbb{C}^3 . Dans ce cadre, un cercle a toujours deux points d'intersection, éventuellement confondus, avec une droite. En particulier tous les cercles coupent la droite à l'infini ($Z = 0$) en les points $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$ appelé pour cela les points cycliques du plan. De même, deux cercles se coupent toujours en 4 points : les points cycliques et deux autres points distincts ou non.

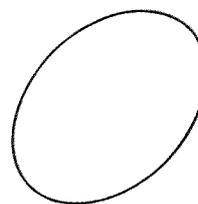
Une parabole se distinguera par le fait qu'elle est tangente à la droite à l'infini. On le voit sur $y = x^2$ qui s'homogénéise en $YZ = X^2$ dont l'intersection avec $Z = 0$ conduit à la solution double $X^2 = 0$.

D'une façon plus générale, une conique, c'est-à-dire par définition une courbe de degré deux, ne peut présenter que l'une des deux formes suivantes :

- soit elle est dégénérée en deux droites distinctes ou non,
- soit elle n'est pas dégénérée, et à un changement de coordonnées près, son équation est $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$. Ainsi il n'y a qu'une seule conique non dégénérée dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, à un changement de coordonnées près.



Coniques dégénérées

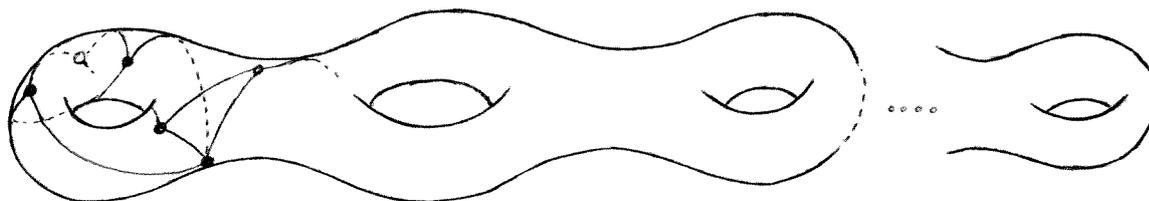


Conique propre

Mais cette simplicité disparaît dès que le degré des courbes est strictement supérieur à 2.

3) Degré et genre d'une courbe

Un des invariants (par changement de coordonnées projective) d'une courbe algébrique est le degré. Un autre invariant est le **genre**. On sait ce qu'est le genre d'une surface topologique compacte et orientable : la sphère est de genre 0, le tore de genre 1 (il a 1 trou), ... le tore à g trous est de genre g .



Mais une courbe algébrique plane dans le plan projectif complexe est une surface topologique réelle. Localement dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, on peut utiliser les coordonnées inhomogènes, par exemple x et y . L'équation de la courbe algébrique est alors $P(x, y) = 0$. Mais tout, ici, est dans \mathbb{C} . Décomposons x et y en parties réelles et parties imaginaires : $x = a + ib$, $y = c + id$ (et $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$). Alors $P(x, y) = 0$ s'écrit $Re P(a + ib, c + id) = Im P(a + ib, c + id) = 0$. Ces deux équations (réelles) déterminent dans \mathbb{R}^4 une surface réelle. Cet énoncé heuristique peut se justifier assez facilement. On peut même montrer que si $P, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ n'ont jamais de zéros communs (on dit, si cette condition est vérifiée partout, y compris à l'infini, que la courbe est non singulière) que la surface ainsi définie est une variété différentielle réelle de classe C^∞ . Il est facile ensuite de vérifier que ces courbes algébriques non singulières sont compactes (car $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ l'est) et orientables (car les polynômes respectent l'orientation canonique de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ déduite de celle usuelle de \mathbb{C}). Toute la question est alors de calculer le genre de cette surface (qui est une surface de RIEMANN).

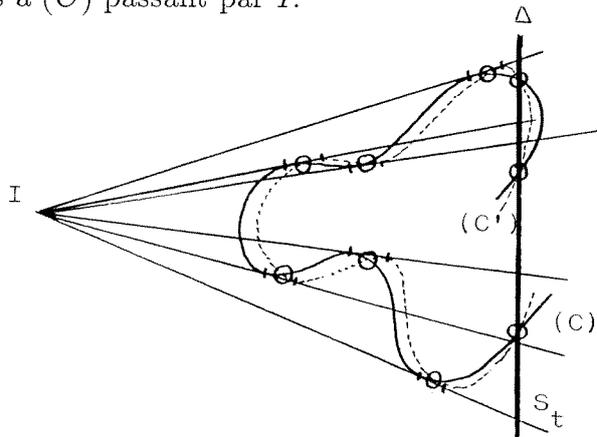
Pour cela nous admettrons le **théorème de BÉZOUT** : deux courbes algébriques (A) et (B) de degré respectif m et n ont $m \times n$ points d'intersection (si on les compte avec leur multiplicité et s'il n'y a pas de courbes algébriques dans $(A) \cap (B)$, autrement dit si $(A) \cap (B)$ est fini).

Remarque : Cet énoncé n'est valable que sur \mathbb{C} (ou sur un corps algébriquement clos). On retrouve ainsi que deux coniques se coupent toujours en quatre points, ce qui n'est bien sûr pas vrai en réel : pensez aux cercles.

C'est ici que la grande simplicité du plan projectif apparaît puisque les intersections à "l'infini" permettent d'éviter de nombreux cas particuliers typiques du cas classique (droites parallèles, ...).

Enfin il faut savoir définir les multiplicités d'intersection. Ceci demande un peu d'algèbre linéaire mais n'est pas indispensable pour la suite. On peut se contenter de savoir qu'on peut retrouver rigoureusement les notions intuitives.

Calcul du genre : Soit (C) une courbe algébrique non singulière de degré d . Prenons un point I n'appartenant pas à $(C) \cup \Delta$. Une homothétie de centre I transforme (C) en (C') et laisse invariante la droite à l'infini Δ . Or sur Δ il y a d points de (C) donc de (C') ; comme (C) et (C') sont toutes les deux de degré d (pour le voir il suffit d'écrire l'équation donnant (C') en fonction de celle de (C) et du rapport d'homothétie), ils ont d^2 points d'intersection dont $d^2 - d$ en dehors de Δ . Or si le rapport d'homothétie est proche de 1, ces $d^2 - d$ points d'intersections seront proches des points de contact des tangentes à (C) issues de I . Il y a donc $d^2 - d$ tangentes à (C) passant par I .



Nous allons maintenant calculer le genre de (C) par triangulation : on sait que si dans une telle triangulation il y a S sommets, A arêtes et F faces alors le genre g est donné par $S - A + F = 2 - 2g$. Effectuons une triangulation sur la droite à l'infini Δ . Choisissons cette triangulation assez fine pour que les points p de Δ tels que IP soit tangente à (C) soient des sommets de la triangulation. On voit facilement que topologiquement cette droite est l'union d'un plan réel (\mathbb{C}) et d'un point à l'infini. Il s'agit donc de la sphère topologique (S^2) . Soient s, a, f les données correspondant à cette triangulation. On a $s - a + f = 2$. Relevons cette triangulation sur (C) en prenant I comme centre de projection. A tout sommet de Δ correspondent d sommets sur (C) sauf pour les sommets de type S_t où (IS_t) est tangente à (C) . On peut prouver que les droites bitangentes, c'est-à-dire tangentes à C en plusieurs points, sont en nombre fini. Quitte à déplacer I , on peut supposer que ce point n'appartient à aucune de ces droites bitangentes, Alors pour de tels

sommets S_i il y a $d - 1$ sommets de la triangulation sur (C) . Mais les sommets du type S_i sont au nombre de $d^2 - d$. Finalement si S est le nombre de sommets de la triangulation relevées sur (C) alors $S = ds - d(d - 1)$. Les arêtes et les faces de la triangulation de Δ se relèvent en arêtes et faces de la triangulation sur (C) . Mais à chaque fois, il y en a exactement d sur (C) pour une sur Δ de telle sorte que $A = da$ et $F = df$. D'où : $S - A + F = ds - da + df - d(d - 1) = -d^2 + 3d = 2 - 2g$. D'où $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Le raisonnement que nous venons de faire peut être techniquement rendu parfaitement correct. Reste le cas où il existe des points singuliers sur la courbe (C) . Les plus simples de ces points sont les points doubles : \times ou les points de rebroussement : $<$. La courbe n'est plus alors une variété topologique mais on peut s'intéresser à ce qu'on appelle la résolution de (C) . Dans le premier cas, ceci revient à séparer les branches singulières : \times , dans le second, on ne change rien ensemblistement mais on remplace "brutalement" le point de rebroussement par un point non singulier.

On peut alors adapter le raisonnement et on voit que le genre de la résolution de (C) s'abaisse : $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$ où δ est le nombre de point double ou de "cusps".

Exemples :

degré $d = 1$: genre 0 .

$d = 2$: genre 0 . On savait déjà qu'une conique ressemblait algébriquement (donc topologiquement) à une droite : voir la paramétrisation donnée dans le §1.

$d = 3$: genre 1 si la courbe est lisse ;
genre 0 pour la strophoïde ou la cissoïde.

4) Genre et paramétrisation :

En adaptant l'argument donné ci-dessus pour les triangulations, on peut facilement montrer le résultat suivant :

Proposition : Soient X et Y deux surfaces topologiques compactes orientables de genre $g(X)$ et $g(Y)$. S'il existe une application continue et non constante $f : X \rightarrow Y$ respectant l'orientation de X et de Y , alors $g(X) \geq g(Y)$.

Remarque : La contrainte de respecter l'orientation est forte : ceci entraîne que f est presque partout un isomorphisme local et que les points d'exception (points de ramification) sont **isolés** et en nombre fini. Cette proposition entraîne que si on veut paramétriser une courbe (C) par des fonctions rationnelles (donc par $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$) le genre de (C) est nul. (En effet, on voit facilement que les polynômes respectent l'orientation.)

Corollaire : Une courbe de genre $g > 0$ ne peut être paramétrée par des fonctions rationnelles.

C'est ce qui ruine tout espoir de trouver un changement de variable pour le calcul

de la longueur d'une ellipse qui ramène ces calculs à des calculs de primitives de fractions rationnelles.

5) Famille de courbes de même degré :

L'ensemble des équations de toutes les courbes de degré d peut être assimilé à l'ensemble formé des coefficients des monômes de leurs équations. Les monômes sont de la forme $x^\alpha y^\beta$ avec $0 \leq \alpha + \beta \leq d$. Il y a donc $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ monômes distincts ce qui montre que l'ensemble des équations des courbes de degré d forme un espace vectoriel de dimension $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$. Puisqu'une même courbe est définie à une constante multiplicative près, on voit que la famille de toutes les courbes de degré d s'identifie à l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ où $N = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 = \frac{d(d+3)}{2}$.

Maintenant si on oblige la courbe à passer par un point P , c'est fixer une condition linéaire; il suffit pour s'en convaincre de choisir des coordonnées projectives (α, β, γ) de P et d'écrire que $P \in (C)$, d'équation $\sum_{\substack{i+j+k=d \\ i,j,k \geq 0}} a_{i,j,k} X^i Y^j Z^k$ si et seulement si la condition linéaire entre les $a_{i,j,k}$: $\sum a_{i,j,k} \alpha^i \beta^j \gamma^k$ est satisfaite. Par suite, si on impose le passage par $\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 2$ points il restera un espace de dimension au moins 2. Si ces points sont en position assez générale, il est raisonnable de croire que les conditions linéaires imposées sont indépendantes et alors l'espace (E) des équations des courbes passant par tous ces points sera exactement de dimension 2. On vient d'obtenir ce qu'on appelle un **pinceau** de courbes. Cet espoir peut être justifié rigoureusement. Choisissons une base de cet espace de dimension 2 : $\{P_1, P_2\}$. Les équations dans (E) s'écriront toutes sous la forme $\lambda P_1 + \mu P_2$.

Puisque les courbes d'équation P_1 et P_2 se coupent en d^2 points, toutes les autres courbes de la famille (E) repasseront en ces d^2 points. On vient de prouver le résultat suivant :

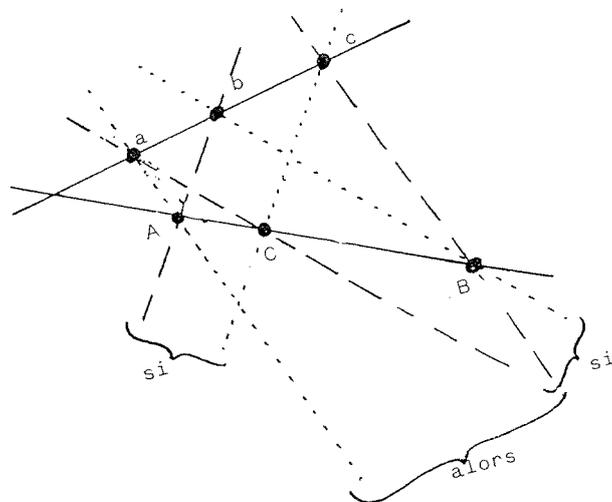
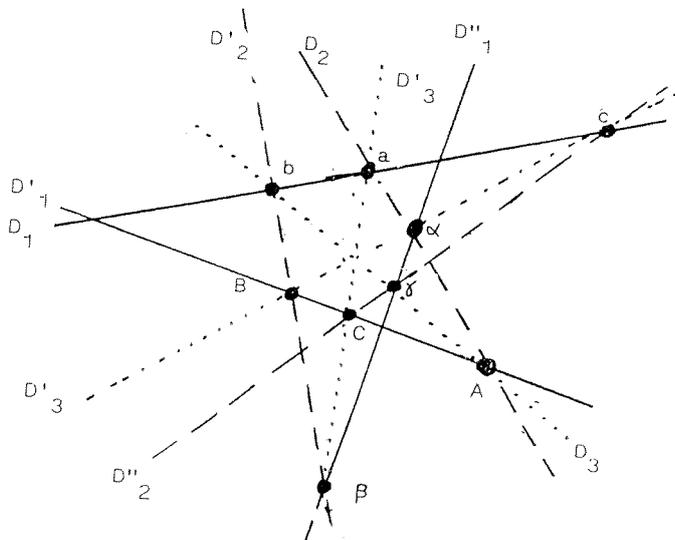
Théorème : Choisissons $\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 2$ points en "position générale". Toutes les courbes de degré d qui passent par ces points repassent aussi par $d - \left[\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 2 \right] = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ autres points.

Application 1: Pour $d = 3$ on peut fixer 8 des 9 points d'intersection des deux cubiques et toutes les cubiques passant par ces 8 points repassent par un 9^e point.

Si les cubiques sont dégénérées en trois droites (dont l'une est la droite à l'infini) on obtient le théorème de PAPPUS que l'on peut écrire soit sous forme projective (sans tenir compte de la droite à l'infini) soit sous forme affine (les droites se coupant à l'infini sont alors parallèles).

Forme projective : Si (D_2, D'_2, D''_2) et (D_3, D'_3, D''_3) sont deux cubiques dégénérées en trois droites, cubiques se coupant en les 9 points $A, B, C, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ et si A, B, C d'une part et a, b, c d'autre part sont alignés, il en est de même de α, β, γ .

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE DES COURBES PLANES



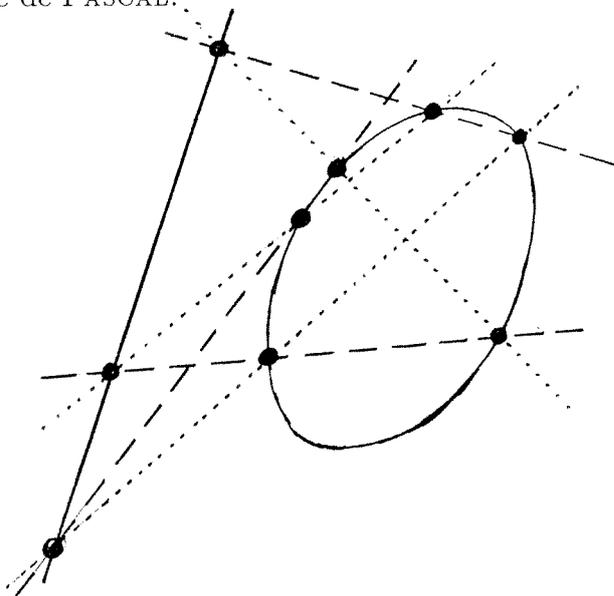
Forme projective du théorème de Pappus

Forme affine du théorème de Pappus

En effet, la cubique contenant $A, B, C, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ contient deux droites donc est dégénérée en 3 droites et passe par le 9^e point δ .

Forme affine : On considère que la droite α, β, γ est la droite à l'infini : soit (A, B, C) et (a, b, c) deux droites : si $bA \parallel (cC)$ et si $(aC) \parallel (bB)$ alors $(aA) \parallel (cB)$.

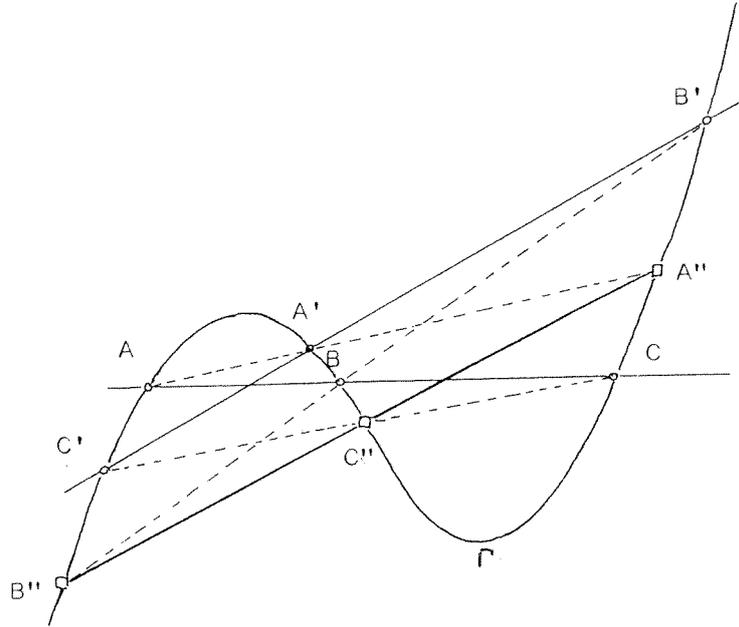
Si deux des cubiques sont dégénérées en 3 droites et l'autre en une conique et une droite, on obtient le théorème de PASCAL.



En effet les deux cubiques dégénérées en trois droites se coupent en 9 points dont 6 sont sur une conique. La cubique contenant ces 6 points et 2 autres est dégénérée en la conique et une droite, donc le 9^e point est aligné avec les 2 précédents.

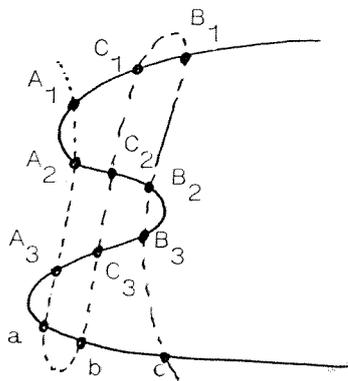
Si deux cubiques sont dégénérées en 3 droites et l'autre est quelconque, on obtient le théorème de LAMÉ. Si les droites D et D' coupent la cubique respectivement

en A, B, C et A', B', C' ; si A'', B'', C'' sont les points où $(AA'), (BB')$ et (CC') recouperont la cubique, alors A'', B'' et C'' sont alignés (*).



Ces résultats permettent de construire une loi de groupe sur les points d'une cubique (*).

Application 2 : On ne peut pas fabriquer une loi de groupe sur une quartique (C) , mais on peut y créer quelque chose d'approchant sur les triplets de points non ordonnés par la méthode suivante :



On fixe trois points a, b, c sur une quartique. Aux deux triplets A_1, A_2, A_3 et (B_1, B_2, B_3) on associe le triplet (C_1, C_2, C_3) intersection de la quartique avec l'unique cubique passant par les 9 points $a, b, c, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. On a presque défini une loi de groupe $*$ telle que $(A_1, A_2, A_3) * (B_1, B_2, B_3) * (a, b, c) = 0$ où 0 est l'élément neutre.

(*) Voir une démonstration de ces théorèmes dans 'L'Ouvert' n° 54, l'article de J. MARTINET : "Géométrie analytique sans coordonnées ... ou presque".

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE DES COURBES PLANES

La difficulté et le “presque” provient du fait que “la” cubique passant par les 9 points $a, b, c, \dots B_3$ n’est pas toujours unique. Il peut arriver qu’il existe un pinceau de telles cubiques et le triplet (C_1, C_2, C_3) n’est plus bien défini. L’idée pour s’en sortir est alors d’identifier les divers triplets obtenus. La loi de groupe n’existe pas sur le produit symétrique $S^3(C)$ (ensemble des triplets, non ordonnés, de points de (C)) mais sur un quotient de cet espace que l’on appelle la **Jacobienne** de (C) .

On peut néanmoins démontrer sur $S^3(C)$ un analogue de l’associativité, de l’existence de l’élément neutre et du symétrique, en faisant des constructions voisines de celles expliquées ci-dessus pour les cubiques planes. C’est d’ailleurs un joli exercice de trouver la raison de cette quasi-associativité (quasi car la loi de composition interne n’est pas partout définie), le dessin devenant passablement compliqué.

“MATH.en.JEANS” - An II

Congrès de Strasbourg

20 & 21 avril 1991

Université Louis Pasteur,
Département de Mathématiques
7 rue René Descartes 67084 Strasbourg Cedex

Durant ces deux jours, chaque “équipe de recherche” présentera l’ensemble de son travail. Conférences, tables rondes et rencontres entre élèves et mathématiciens, alterneront avec ces exposés.

samedi 20 avril	dimanche 21 avril
matin groupes JEANS et ateliers IREM	matin exposés JEANS, rencontres élèves / mathématiciens
après-midi exposés JEANS, conférences, table ronde, conférence de presse	après-midi exposés JEANS, table ronde bilans et perspectives

Toute personne intéressée au développement de l’Opération, en France et vers l’Europe et/ou désirant assister au Congrès doit contacter le plus rapidement possible :

l’Association “MATH.en.JEANS” (A.M.e.J.), à l’attention de M. Denis BRESSON, local A.P.M.E.P.,
26, rue Duméril, F-75013 Paris. téléphone : ((33)) (1) 42 00 32 29

Le Congrès de Strasbourg est organisé avec le soutien de l’I.R.E.M. de Strasbourg, et réalisé avec l’aide du Ministère de la Recherche et de la Technologie (D.I.S.T.).

VIème ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

29 août - 7 septembre 1991 - Plestin - les Grèves (près de Lannion)

ANNONCE

FONCTIONS DE L'ÉCOLE D'ÉTÉ

L'école d'été est ouverte aux personnes intéressées aux développements de la recherche en didactique des mathématiques : chercheurs (il faut entendre par là non seulement des personnes qui ont un statut de chercheur universitaire ou autre, mais aussi, par exemple, des enseignants et des formateurs qui font des recherches ou sont impliqués dans des recherches.), étudiants en didactiques des mathématiques, ou enseignants ayant à enseigner la didactique des mathématiques.

L'école d'été est un lieu d'échanges approfondis, entre chercheurs, sur les questions vives de la didactique des mathématiques et ses relations avec l'extérieur. Elle contribue également au travail de constitution et de développement d'enseignements de didactique des mathématiques.

L'école offre un enseignement de haut niveau, informe les participants des avancements récents et significatifs de la recherche et organise des débats avec des équipes qui y ont contribué.

Les séquences d'enseignement présentées à l'école d'été s'articuleront avec certains travaux présentés dans le cadre de la commission inter-IREM Didactique (séminaire national) ou développés au sein du Groupe de Recherche "Didactique" du C.N.R.S.

FORMES D'ORGANISATION DIDACTIQUE

Des ensembles coordonnés de "cours - travaux dirigés - ateliers" constituent l'organisation didactique de base de l'école d'été. Les séances de travaux dirigés et d'ateliers proposent des activités portant sur un ou plusieurs points du cours auquel elles sont associées.

D'autres formes d'organisation : conférences (en journée ou en soirée), forum de problèmes, tables rondes, seront également utilisées, en particulier pour aider à identifier ou mettre en débat des thèmes de recherche.

L'un des buts de l'école d'été, à travers notamment la mise en place d'un dispositif d'observation et d'évaluation, est de tester la pertinence, pour l'enseignement de la didactique, de certaines formes d'organisation et de participer à la mise au point d'enseignements efficaces de la didactique.

THÈMES ABORDÉS

Le programme mettra l'accent sur les points suivants :

- *Problèmes méthodologiques de la recherche en didactique*
- *Deux approches didactiques : la théorie des situations et la théorie anthropologique*
- *La notion de transposition didactique*
- *La place de l'enseignant dans le système didactique*
- *Evaluation et didactique*
- *Questions spontanées sur l'enseignement : leur approche didactique*
- *Intelligence artificielle et interaction didactique*

Pour permettre un travail réel, le nombre de participants est limité à 110 personnes. Le montant de la participation sera d'environ 2 800 F. L'école ayant des chances d'être inscrite au programme des Universités d'Été du Ministère de l'Éducation Nationale, il convient de surveiller le Bulletin Officiel.

Les dossiers de pré-inscription, et toute information complémentaire, peuvent être obtenus en s'adressant avant le 28 février à

Madeleine EBERHARD
Equipe de Didactique des Mathématiques
Laboratoire L.S.D. 2 - Université Joseph Fourier
BP 53 X
38 041 GRENOBLE CEDEX

LES ROULETTES D'ELLIPSES

Eugène EHRHART

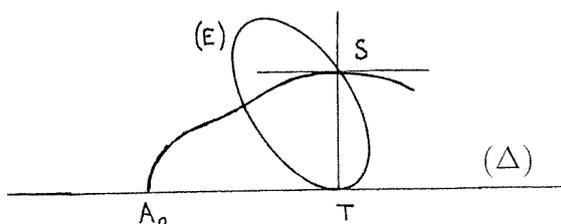
Nous allons chercher les diverses formes de la trajectoire d'un point du bord d'une ellipse qui roule sans glisser sur une droite. A une similitude près, ces courbes dépendent de deux paramètres, alors qu'est unique la "roulette" de PASCAL, la cycloïde, courbe la plus étudiée au 17^e siècle. On s'appuiera sur deux propositions qui remontent à ce temps-là.

Soit dans un plan une courbe (C) qui roule sans glisser sur une courbe fixe (C') et soit T le point de tangence de (C) et (C') à un moment donné. Alors :

Lemme 1. T est le centre instantané de rotation de (C) .

Lemme 2. La trajectoire du point du bord de (C) , qui se trouve en T au moment donné, a en T une tangente de rebroussement qui est la normale commune de (C) et (C') .

Soit (E) une ellipse d'axes $2a, 2b$ ($a > b$) et de périmètre p , roulant sans glisser sur une droite (Δ) , et soit M un point du bord de (E) . Il est évident que la trajectoire de M se compose d'une suite d'arches égales $\widehat{A_0A_1}, \widehat{A_1A_2} \dots$ telles que les points A_0, A_1, A_2, \dots se trouvent sur (Δ) et que $A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = p$. Il suffit donc d'étudier l'arche $\widehat{A_0A_1}$, qui présente en A_0 et A_1 des tangentes de rebroussement perpendiculaires à (Δ) (lemme 2).



Si S est un sommet de l'arche $\widehat{A_0A_1}$ par rapport à (Δ) , le centre instantané de rotation T de (E) , point de contact de (E) et de (Δ) (lemme 1), est sur la perpendiculaire en S à (Δ) . **Pour un point M donné du bord de (E) le nombre de sommets de l'arche $\widehat{A_0A_1}$ par rapport à (Δ) est donc égal à celui des normales à (E) passant par M , diminué d'une unité, car la normale en M ne convient pas, et éventuellement d'une autre unité comme on le verra.**

La normale en un point (x, y) de l'ellipse (E) , rapportée à ses axes, a pour équation

$$\frac{a^2 X}{x} - \frac{b^2 Y}{y} = a^2 - b^2.$$

Cette normale passe par un point $M(\alpha, \beta)$ de (E) si

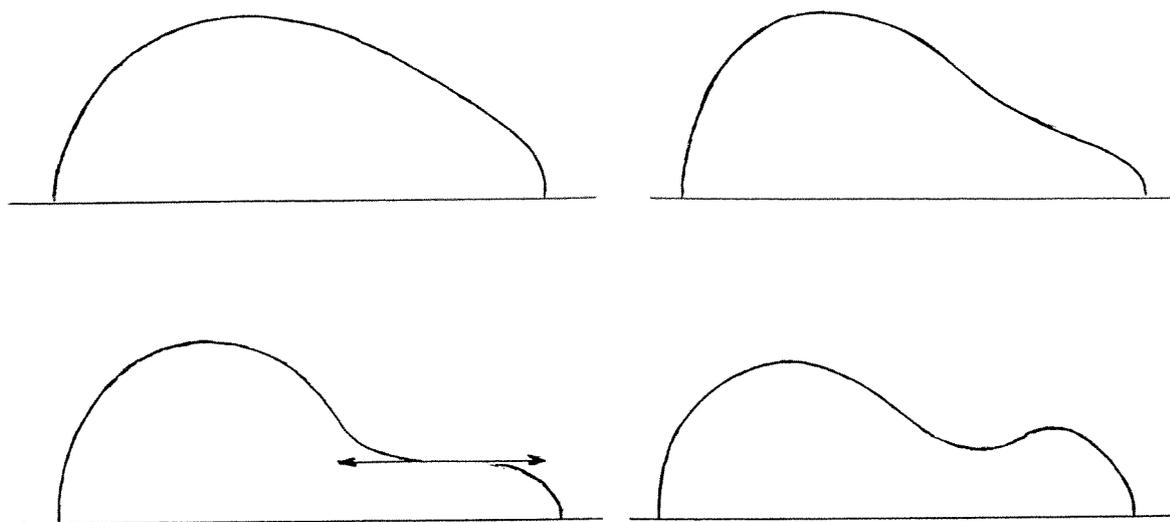
$$(1) \quad \frac{a^2\alpha}{x} - \frac{b^2\beta}{y} = a^2 - b^2.$$

Le point (x, y) appartenant à (E) , on a aussi

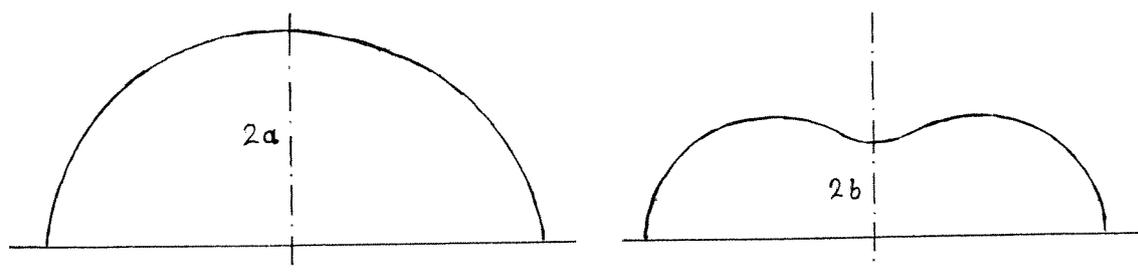
$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Outre le point (α, β) , les coniques représentées par les équations (1) et (2) ont en commun soit un ou trois points, soit plus rarement deux, dont un de tangence. L'arche $\widehat{A_0A_1}$ a donc un ou trois sommets, soit plus rarement un sommet et un point d'inflexion à tangente parallèle à (Δ) .

Voici donc les quatre types de formes que peut avoir l'arche $\widehat{A_0A_1}$, à une symétrie près par rapport à la médiatrice de A_0A_1 :



Si le point M donné sur le bord de (E) est un de ses sommets, l'arche $\widehat{A_0A_1}$ a un axe de symétrie :



LES ROULETTES D'ELLIPSES

Remarque : Rappelons une prouesse de ROBERVAL : avant l'invention du calcul intégral, il a montré que **l'aire sous l'arche de la cycloïde est trois fois celle du cercle générateur**. Sa démonstration (*) simple et courte est une merveille. On sait aussi que PASCAL montra que **la longueur de l'arche de la roulette de cercle est quatre fois sa hauteur**.

Pour la roulette d'ellipse il semble difficile d'établir l'équation à deux paramètres de son arche. D'ailleurs une équation compliquée, où figurerait nécessairement une intégrale elliptique, se prêterait mal à la construction des courbes A_0A_1 . Quant au calcul de l'aire sous l'arche ou de sa longueur, on ne peut sans doute y songer, même s'il y a symétrie.

Il faut se battre sur tous les fronts de la liberté.

Quand les nazis s'en sont pris aux communistes, je me suis tu, car je n'étais pas communiste.

Quand ils ont emprisonné les socio-démocrates, je n'ai rien dit, car je n'étais pas socio-démocrate.

Quand ce fut le tour des catholiques, je n'ai pas protesté, car je n'étais pas catholique.

Quand ils ont emmené les juifs, je n'ai pas bougé, car je n'étais pas juif.

Quand ils sont venus chez moi, il n'y avait plus personne pour protester.

Martin NIEMÖLLER.

(*) Voir DAHAN-DALMEDICO et PFEIFFER, *Routes et dédales*, pp. 168–169. Ed. Blanchard, 1982.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 14 (proposé par D. DUMONT)

Énoncé

Démontrer l'égalité suivante pour $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \dots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{7x^7}{1-x^7} + \dots$$

Question complémentaire

Comparer à l'aide d'un micro-ordinateur les vitesses de convergence des deux séries. Comment croît la somme $S(x)$ de ces séries quand x tend vers 1^- ? (problème dont le résultat n'est pas connu par l'auteur).

Solution (de 'L'Ouvert')

Nous allons montrer que chacun des deux membres est développable en série entière de x dans le disque $|x| < 1$, et que les deux séries sont identiques.

Pour le membre de droite, $\frac{px^p}{1-x^p} = p \sum_{k \geq 1} x^{kp}$ est majorée en module terme à terme par $p \sum_{k \geq 1} |x|^{kp}$; sommant en p impair, on obtient $\sum_{n \geq 1} b_n x^n$, avec

$$b_n = \sum_{\substack{p, k: pk=n \\ p \text{ impair}}} p = \sum_{\substack{p|n \\ p \text{ impair}}} p;$$

la convergence résulte de $b_n \leq \sum_{p|n} p \leq n^2$ et de la convergence de $\sum n^2 |x|^n$.

De même, à gauche, $\frac{px^p}{1+x^p} = p \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} x^{kp}$, donc la somme $\sum_{p \geq 1} \frac{px^p}{1+x^p}$ vaut $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ avec

$$a_n = \sum_{p, k: pk=n} (-1)^{k+1} p = - \sum_{p|n} (-1)^{n/p} p;$$

les calculs et la convergence sont justifiés en majorant en module le terme $(-1)^{k+1} px^{kp}$ par $p|x|^{kp}$ et en contrôlant la série de séries, selon la même estimation que ci-dessus, par $\sum n^2 |x|^n$.

Il ne reste plus qu'à établir $a_n = b_n$. Mettons n sous la forme $2^q m$, où m est impair. Les diviseurs impairs de n sont exactement les diviseurs de m ; les diviseurs de n sont les nombres de la forme $2^r p$, où $0 \leq r \leq q$ et p divise m . Il nous suffit donc de vérifier la relation

$$- \sum_{p|m} \sum_{r=0}^q (-1)^{2^{q-r} \frac{m}{p}} 2^r p = \sum_{p|m} p$$

A VOS STYLOS

qui, puisque $\frac{m}{p}$ est impair, se ramène à

$$1 + 2 + \dots + 2^{q-1} - 2^q = -1.$$

Nous laissons ouverte la question complémentaire. Nous publierons tout travail à ce propos, à quelque moment qu'il nous parvienne.

PROBLÈME 15

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + \sqrt{n}) = 0$ pour tout x . A-t-on $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$?

Indication

Oui; \sqrt{n} peut être remplacé par toute suite croissante u_n telle que $u_n \rightarrow +\infty$ et $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$.

PROBLÈME 16

Énoncé

Les touches \oplus , \otimes , \odot de ma calculatrice sont hors d'usage. Comment effectuer les quatre opérations en utilisant seulement des constantes et les touches de soustraction \ominus et d'inversion \odot/x ?

Remarque

'L'Ouvert' publiera la solution du lecteur proposant une méthode de multiplication qui utilise le plus petit nombre d'opérations (soustractions et inversions).

PROBLÈME 17

Énoncé (proposé par O. ADELMAN)

Trouver tous les couples (a, b) de réels strictement positifs tels que, en posant

$$A = \{[na], n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{[nb], n \in \mathbb{N}^*\}$$

on ait $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{N}^*$. $[x]$ est la partie entière de x .

Même question avec trois réels a, b, c tels que A, B et C forment une partition de \mathbb{N}^* .