L'APPORT DE L'INFORMATIQUE A UNE APPROCHE GLOBALE DES TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES.

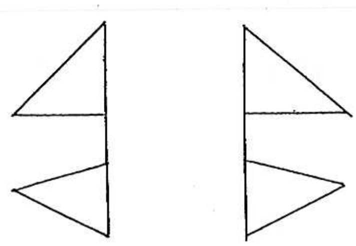
G NOEL

Sometimes children have difficulties, while learning geometry, to perceive a plane as a global entity. Geometric transformations such as isometries or affine transformations are then considered as defined on a bounded part of the plane rather than on the whole plane.
By the use of computer programmes we hope it will be possible to give students a global perception of geometric transformations, showing in particular how the plane is deformed under the effect of the transformation. Two programs are described.

1. Perception locale et perception globale

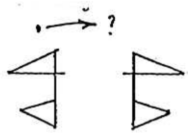
Il est bien connu que les transformations géométriques planes ne sont pas immédiatement perçues par l'enfant en formation comme s'appliquant à l'entièreté du plan. Dans un premier temps, ces transformations géométriques s'appliquent uniquement à des objets limités.

Ainsi un enfant d'environ douze ans peut parfaitement saisir que les deux figures ci-dessous sont symétriques, et indiquer quels sont les éléments de ces figures qui se correspondent par cette symétrie.

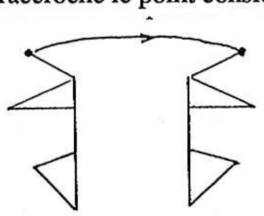


Cependant, le même enfant pourrait avoir des difficultés à étendre la symétrie au-delà des objets considérés et de construire l'image d'un point qui n'est pas directement rattaché à un des objets:

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
4 (1991) (p.41 - 57) - IREM de Strasbourg



Pour faciliter la résolution du problème, il peut être utile de dessiner une "antenne" qui raccroche le point considéré à l'objet le plus proche:



On étend ainsi le "domaine" de la transformation considérée, tel qu'il est perçu par l'enfant, mais ce domaine reste limité (compact comme disent les analystes). Le point de vue adopté naturellement par l'enfant est donc un point de vue local.

Toutes les transformations géométriques n'ont pas le même statut relativement au caractère illimité du plan. Les translations sont sans doute parmi les transformations élémentaires celles qui mettent le plus en oeuvre ce caractère, du fait que les trajectoires (orbites) des objets sont elles-mêmes illimitées.

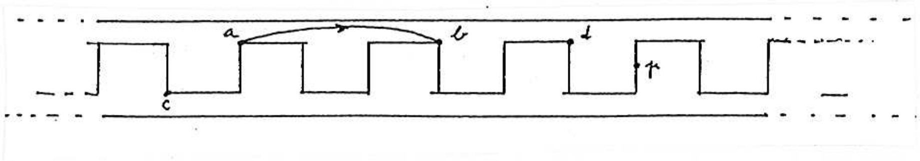
Un test réalisé en 1979 [B] mettait bien en évidence la distinction entre les perceptions locale et globale des translations. La question suivante était posée à 316 élèves de la fin de la première année de l'enseignement secondaire (âge normal: 13 ans).

La bande qui est dessinée ci-dessous glisse sur elle-même de manière que le point a vienne se placer sur le point b. On te demande:

- d'indiquer par une flèche où arrive le point c par ce glissement;

- de faire de même pour les deux points d et p;

- de repasser en rouge la position de la frise après ce glissement.



55,4% des élèves (64,5% des garçons et 45,3% des filles) ont fourni correctement les images des points *c,d,p*. Mais seuls 26,6% (38,4% des garçons, 12,9% des filles) ont dessiné l'image de la frise correctement, en compensant par un morceau introduit à gauche le morceau qui sort à droite. Ceux-là perçoivent d'une part le caractère illimité du plan et d'autre part le fait qu'une translation s'applique à l'ensemble du plan. Les autres n'ont guère dépassé l'aspect local.

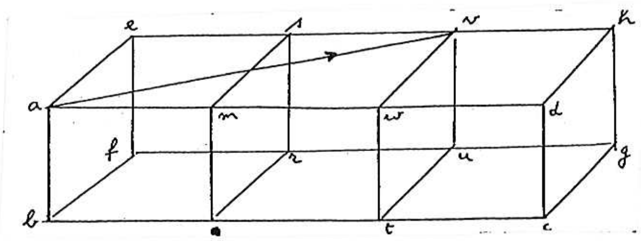
2. Les invariants

Les objets invariants par une translation non identique sont nécessairement non bornés. Il n'en est pas de même pour les objets invariants par une symétrie (qu'elle soit axiale ou centrale) ou une rotation. Certains aspects de ces transformations sont donc, a priori, plus intuitifs que les aspects correspondants des translations. Il ne faudrait cependant pas croire qu'il n'y a aucun problème. Ainsi lors du test mentionné ci-dessous, 63% des élèves étaient capables de trouver le symétrique d'un sommet ou d'un côté d'un parallélogramme par rapport au centre de celui-ci. Mais seuls 29,7% indiquaient correctement l'image d'une diagonale, la réponse la plus fréquente étant l'autre diagonale. Même si un souci d'équilibre (une autre forme de symétrie) peut favoriser une régression, le fait que cette régression ait eu lieu montre que la notion d'objet invariant n'était pas intégrée. Dans le même test, plus d'un quart des élèves étaient incapables d'indiquer le symétrique d'un segment par rapport à sa médiatrice (alors qu'ils savent pratiquement que les deux extrémités sont échangées et que l'image d'un segment est un segment).

L'idée d'objet invariant par une transformation n'est donc peut-être pas aussi naturelle qu'on pourrait le croire. L'idée de modifier n'est-elle pas contenue dans celle de transformer? Les objets invariants sont donc pathologiques, et la transformation identique est le comble du dérèglement. Une invention de mathématicien!

Si les élèves se méfient des objets invariants par une transformation, ils manipulent par contre assez bien les grandeurs invariantes. Citons à nouveau une question du test de 1979 :

Voici une boîte à trois compartiments de même dimension. La flèche indique une translation par laquelle l'image du sommet a est le point v.



Par cette translation, l'image du point m est le point ...; l'image du segment [bq] est le segment ...; l'image du rectangle amqb est le rectangle ... . Complète!

Il n'y avait que 38,3% des élèves (43,3% de garçons, 30,9% de filles) en mesure de déterminer correctement l'image du segment *[bq]*. Mais plus de 80% des réponses (autant chez les filles que chez les garçons) tenaient compte de la conservation par translation de la longueur et de la direction de *[bq]*. C'est donc surtout le positionnement de l'image *[bq]* qui était déficient.

Nous retrouvons ainsi la distinction entre le point de vue local, suffisant pour déterminer la forme et les dimensions de l'image de *[bq]*, et le point de vue global nécessaire pour positionner cette image (bien que l'objet considéré ne soit aucunement illimité comme l'était l'exemple rencontré au n° 1).

3. Le point de vue dynamique

Une transformation mathématique a un caractère statique absolu : $f: A \rightarrow B$ est déterminé par la donnée de $f(x)$, connaissant x. Peu importe le chemin utilisé pour passer de x à $f(x)$!

Cependant, pour les élèves (et peut-être pas seulement pour eux!) les notions de rotation et de translation sont inséparables des déplacements physiques qui les réalisent. Il ne faut certainement pas combattre ce phénomène, mais au contraire en tirer parti. Il est important qu'un élève sache qu'en effet, une rotation "ça tourne"! Et il est important qu'il perçoive que la trajectoire d'un point lors de cette rotation physique est un cercle. (D'un point de vue mathématique, je devrais parler de l'orbite du point pour le groupe de Lie engendré par la rotation considérée!) Pour une translation ou une homothétie, les trajectoires sont des droites. Pour une symétrie ou une symétrie glissée, c'est moins clair, sauf si on accepte de sortir du plan. Et pour une transformation affine quelconque?

La détermination des courbes invariantes par une transformation permet de donner à ces transformations un caractère dynamique. En réalisant de nombreux dessins de courbes invariantes, on peut alors appréhender globalement de quelle façon le plan (ou l'espace) se déforme sous l'effet de la transformation. L'aspect purement ponctuel, ou même local, est loin.

4. Une approche informatique

Les points précédents définissent notre philosophie vis-à-vis des transformations géométriques. Nous attendons des logiciels informatiques qu'ils aident nos élèves à se forger une intuition globale de ces transformations. Cela signifie que ces logiciels doivent dépasser le stade du dessin de l'image d'un point ou même d'un objet borné. Ils doivent aussi notamment:

- simuler le mouvement physique associé à la transformation mathématique;
- dessiner les trajectoires des points ou des objets;
- permettre de vérifier la conservation de certains invariants.

Il est également indiqué de pouvoir composer des transformations et de constituer des groupes de transformations.

La plupart des logiciels de constructions géométriques existant sur le marché ont été analysés récemment dans [MM] et [ST]. Apparemment, peu de ces logiciels ont abordé les transformations géométriques. "EUCLIDE" (J.C. Allard) permet de définir des isométries, homothéties et projections et de les appliquer à des objets. L'utilisateur doit être capable d'écrire des procédures LOGO. Sur "*Géométrie plane*" (Pilat Informatique Educative) la plupart des transformations élémentaires sont disponibles, mais uniquement point par point. D'après [ST], "*Cabri-*

Géomètre" devrait à moyen terme comporter un module relatif aux transformations. Je ne sais si cette implémentation est à présent réalisée. D'après la description qui en est fait dans [BR], "*Geophile*" n'aborde guère le sujet.

Beaucoup de travail reste donc à accomplir. Je présenterai ci-dessous deux logiciels abordant --- partiellement --- certains des points soulevés plus haut.

5. <u>TRANSAFF</u>

TRANSAFF est un logiciel déjà ancien (1982). Il "tourne" sur APPLE II+, COMMODORE 128 et PC-IBM. TRANSAFF est consacré aux transformations affines du plan. Il peut donc être utilisé dans des classes de la fin de l'enseignement secondaire.

Le menu de TRANSAFF vous propose plusieurs options:

MENU

DEFINIR	*DESSINER*
(A) ALGEBRIQUEMENT	*(C) UN CERCLE*
(G) GEOMETRIQUEMENT	*(Y) UN POLYGONE*
	(F) UNE FIGURE
CONSTRUIRE L'IMAGE	*(K) AFFICHER*
(P) D'UN POINT	*(E) ECHANGER*
(Z) D'UN POLYGONE	*(V) INVERSER*
(I) D'UNE FIGURE	*(U) DECOMPOSER*
(Q) D'UN QUADRILLAGE	
OBTENIR	*(R) EXTRAIRE UNE RACINE*
(X) LES POINTS FIXES	
(D) LES DIRECTIONS PROPRES	
(T) LA TRAJECTOIRE D'UN POINT	
(N) EFFACER L'ECRAN	*(S) STOPPER*

VOTRE CHOIX :

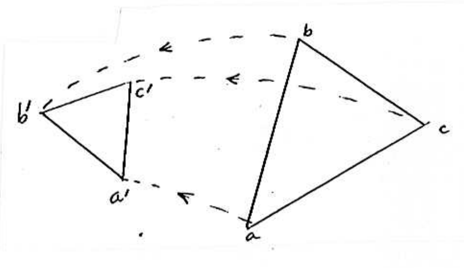
Une transformation affine de $\mathbf{R}^2$ est définie par des équations

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

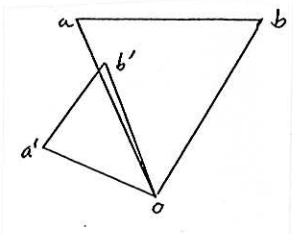
Pour TRANSAFF une telle transformation affine est donnée par la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est donc en fait la restriction au plan $z = 1$ d'une transformation linéaire de $\mathbf{R}^3$. Le programme permet de définir une transformation affine de façon algébrique, en introduisant au clavier les coefficients *a, b, c, d, e, f*. Il permet aussi de définir cette transformation de façon géométrique, en marquant à l'aide d'un curseur, des points à l'écran. Le programme calcule alors lui-même les coefficients *a, b, c, d, e, f* de la matrice *M*. A l'écran sont dans ce cas dessinés un triangle et son image.



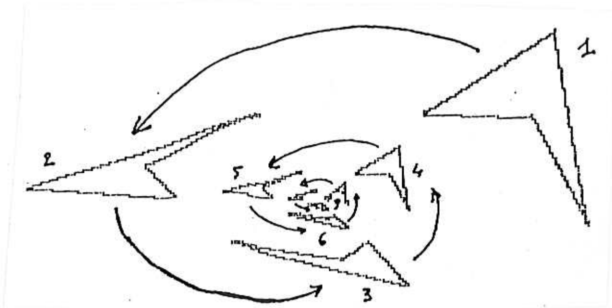
Eventuellement vous pouvez décider que la transformation plane souhaitée est linéaire. Vous n'avez alors à marquer à l'écran que 4 points au lieu de 6 et l'origine du plan (le centre de l'écran) est un sommet commun aux deux triangles.



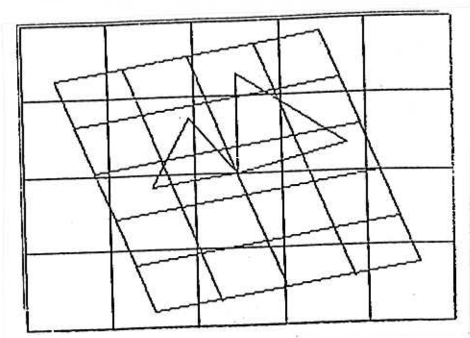
(Dans la version actuelle de TRANSAFF, les lettres *a, b, c, a', b', c'* n'apparaissent pas à l'écran. L'utilisateur doit mémoriser ses choix).

La routine la plus simple consiste à demander l'image d'un point marqué à l'aide du curseur. Vous êtes-là au niveau ponctuel. Tant que vous vous limitez à demander quelques images de points, vous restez à ce niveau, vous ne discernez que difficilement "ce que fait la transformation". Dans le pire des cas, vous pourriez être en présence d'une rotation sans vous en rendre compte.

Vous accédez au niveau local en demandant l'image d'un cercle ou d'un polygone. En itérant la transformation, vous allez déjà atteindre une perception plus globale.



Vous pouvez également atteindre une perception plus globale en demandant l'image d'un quadrillage. Le programme dessine alors un réseau plan (toujours le même) et son image par la transformation choisie. A plusieurs reprises, E. CASTELNUOVO a signalé que l'introduction d'un système de coordonnées dans le plan était une des façons d'amener les enfants à prendre conscience du caractère illimité du plan. Le quadrillage et son image étant dessinés, on peut marquer un nouveau point p dans un des carrés et demander à un élève d'indiquer l'endroit où l'ordinateur dessinera l'image p' de p.



D'autres routines (AFFICHER, ECHANGER, INVERSER, DECOMPOSER) permettent à l'utilisateur de manipuler la transformation considérée.

Mais la routine la plus intéressante de TRANSAFF est celle qui permet de remplacer une transformation par une de ses racines $n^{\text{ièmes}}$. Par exemple une rotation de 60° peut être remplacée par une racine $30^{\text{ème}}$, c'est-à-dire une rotation de 2°. Définir la racine $n^{\text{ième}}$ d'une transformation affine quelconque est plus difficile. La transformation étant représentée par la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il s'agit de trouver une matrice

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

telle que $N^n = M$. Si M est diagonalisable (dans **C**) alors M est semblable à une matrice

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Le plan $z = 1$ étant invariant, le nombre 1 est toujours une valeur propre de M). Si $M = PDP^{-1}$, on peut alors adopter

$$\mathrm{N} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/n} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{p}^{1}$$

Si une valeur propre λ est négative, $\lambda^{1/n}$ n'est réel que si n est impair. On se limitera donc à utiliser des racines d'ordre impair. Si les deux valeurs propres sont complexes conjuguées, TRANSAFF choisit pour $\lambda^{1/n}$ la détermination principale de la racine $n^{\text{ième}}$; si $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $-\pi < \theta < +\pi$, alors $\lambda^{1/n} = \rho^{1/n} e^{i\theta/n}$. De cette façon, la matrice N est réelle. (Le choix d'une autre détermination de $\lambda^{1/n}$ amènerait à une autre famille de courbes invariantes).

Si M n'est pas diagonalisable, on est contraint de rechercher sa forme canonique de Jordan, J, qui est nécessairement d'un des types suivants:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans chacun de ces cas, la valeur propre λ est réelle. Sauf si on est dans le cas J_1 et si $\lambda = 0$, il existe effectivement des matrices K_1, K_2, K_3 vérifiant les conditions $K_1^{\,n} = J_1, K_2^{\,n} = J_2$, $K_3^{\,n} = J_3$:

$$K_1 = \begin{pmatrix} \lambda^{1/n} & \lambda^{-(n-1)/n}/n & 0 \\ 0 & \lambda^{1/n} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} \lambda^{1/n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & -(n-1)/2n^2 \\ 0 & 1 & 1/n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $M = P\,J_k\,P^{-1}$, on aura alors $M^{1/n} = P\,K_k\,P^{-1}$.

Le cas où la forme de Jordan M est

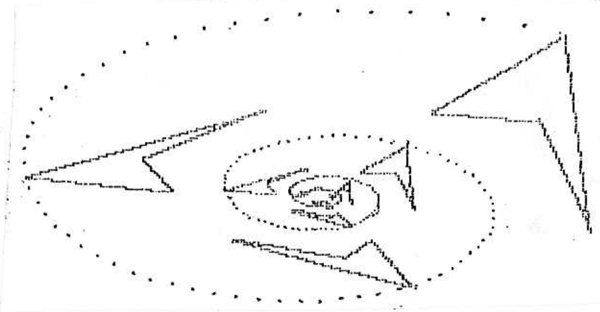
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est singulier : la transformation linéaire $\begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases}$

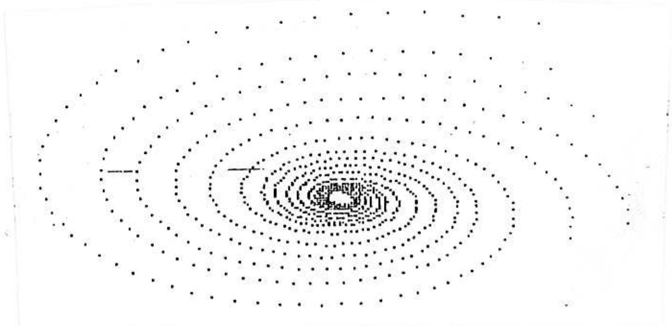
n'admet en effet aucune racine, d'aucun ordre entier supérieur à 1.

En résumé : Sauf dans un cas exceptionnel, si n est impair, on peut trouver une matrice N telle que $N^n = M$. (Et si aucune valeur propre de M n'est négative, il n'est pas nécessaire de supposer n impair).

En faisant alors dessiner les images itérées d'un point par une racine nième d'une transformation, on obtient en fait une courbe invariante pour cette transformation.



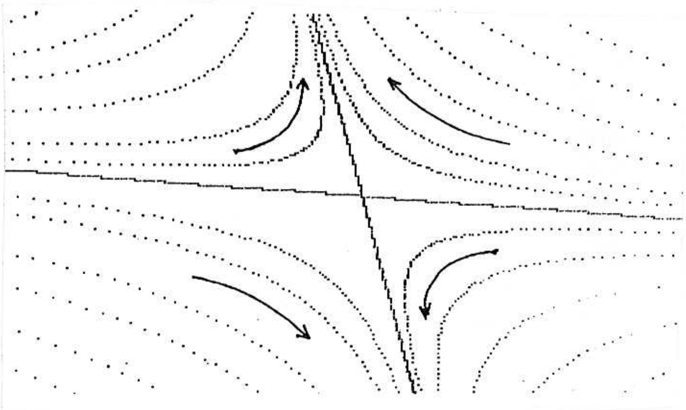
Le dessin de plusieurs courbes invariantes permet d'appréhender globalement la façon dont le plan se déforme sous l'effet de la transformation considérée.



Lorsque la transformation possède des valeurs propres complexes conjuguées, les courbes invariantes sont des spirales parcourues vers l'intérieur ou l'extérieur selon que les valeurs propres ont un module inférieur ou supérieur à 1.

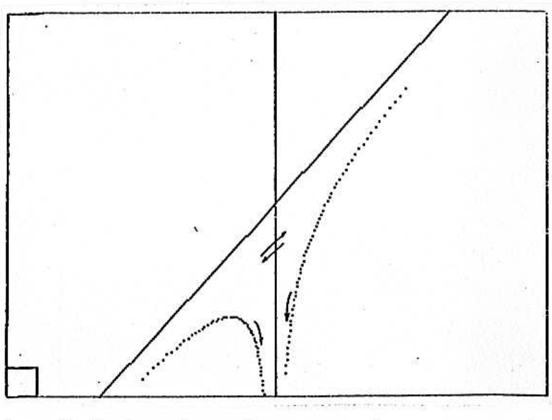
Lorsque la transformation possède des valeurs propres réelles, les trajectoires sont soit tangentes, soit asymptotiques aux droites propres.

Et la façon dont les trajectoires sont parcourues indique si les valeurs propres sont positives ou négatives, de valeur absolue supérieure à 1 ou inférieure à 1.



La transformation ci-dessus possède deux valeurs propres positives, une supérieure et l'autre inférieure à 1.

Dans le cas où une valeur propre est négative, on a vu qu'il convenait de choisir une racine d'ordre impair. Celle-ci aura elle-même une valeur propre négative.
Il en résulte que la "courbe invariante" comporte dans ce cas deux branches séparées par la droite propre associée à la seconde valeur propre. Chacune des branches est image de l'autre par la transformation. Ce phénomène se repère immédiatement lors de l'exécution de la routine de dessin d'une trajectoire puisqu'on voit les deux courbes se dessiner simultanément. Il est donc très facile de déceler les valeurs propres négatives.



Une courbe invariante formée de deux branches: une valeur propre est positive supérieure à 1, l'autre est négative inférieure à 1 en valeur absolue.

Avec un peu d'expérience, il est possible de trouver des informations qualitatives concernant la transformation dès la définition de celle-ci par les images de trois points, en observant seulement un triangle et son image. En particulier, on distingue facilement si l'orientation est conservée, ou si les valeurs propres sont réelles ou complexes.

6. GEOM

GEOM est un logiciel plus ambitieux mais encore en voie de développement. A l'heure actuelle, GEOM permet

- de définir des objets géométriques (points, droites, cercles, polygones, ...);
- de réaliser des constructions en utilisant quelques "constructeurs de base";
- de définir des isométries et des homothéties;
- de transformer un objet par une isométrie ou une homothétie, en visualisant à l'écran le "mouvement" effectué;
- de définir un groupe de transformations;
- de dessiner l'orbite d'un objet par tous les éléments d'un groupe de transformations. On accède ainsi aux pavages du plan et à leurs groupes.

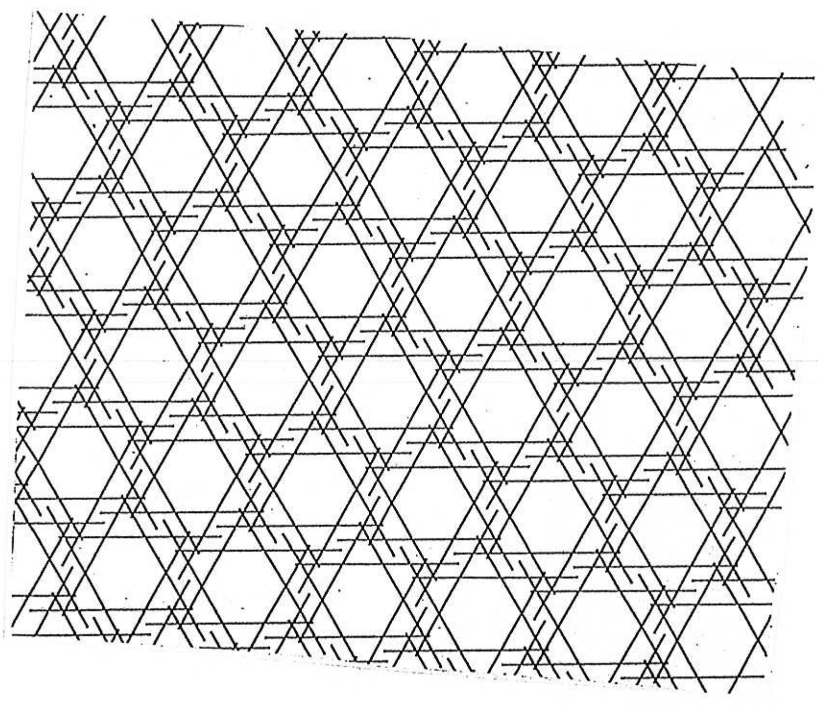
GEOM permet de définir simultanément un nombre arbitraire d'objets et de transformations géométriques, et d'appliquer n'importe quelle transformation à n'importe quel objet, voire à tous les objets. Le caractère local est ainsi largement dépassé. De plus, GEOM réalise l'animation du déplacement des objets. La visualisation du mouvement d'un objet effectuant (par exemple) une rotation autour d'un point fixe devrait contribuer à la formation de l'intuition concernant les isométries.

Par exemple, lors d'un raisonnement, le repérage dans une figure complexe de polygones isométriques pourrait être illustré de façon dynamique. Ainsi, la conviction de l'élève de ce que les polygones sont effectivement isométriques ne reposerait pas uniquement sur un raisonnement peut-être difficile à assimiler, mais aussi sur une constatation semi-expérimentale. (J'utilise l'expression "semi-expérimentale" parce que les caractéristiques de l'isométrie à utiliser ne pourraient provenir que du raisonnement lui-même).

L'ordinateur permet de cette façon de vérifier les assertions mathématiques. De plus, le logiciel permettant de répéter si nécessaire le dernier mouvement effectué, il est possible de repérer à loisir divers éléments intéressants et de contrôler des égalités de longueurs ou d'angles.

GEOM permet également de définir des groupes d'isométries. Considérons par exemple deux rotations de centres différents, une de 60°, l'autre de 120°. Définissons un groupe d'isométries comme étant engendré par ces deux rotations. On demande alors à l'ordinateur de dessiner les images d'un objet de départ par les deux générateurs du groupe, puis les images des images par ces deux générateurs, etc. En observant sur l'écran les déplacements de l'objet de départ, on appréhende concrètement la façon dont le groupe de transformations est engendré par les deux rotations données. Le dessin s'arrête lorsque les images calculées se trouvent entièrement extérieures à l'écran. Le dessin final, imprimé sur papier, peut être analysé en vue de déterminer a posteriori non seulement les rotations qui ont servi de générateurs, mais également d'autres éléments du groupe de transformations.

Le dessin suivant est obtenu de cette manière à partir d'un simple segment et de deux rotations, une de 60° et l'autre de 120°.



La figure précédente apparaît déjà fort complexe. Un exemple plus simple consiste à considérer le groupe engendré par les rotations de 180° autour des milieux de trois des côtés d'un quadrilatère. On applique alors ce groupe au quadrilatère lui-même. On obtient ainsi un pavage du plan, et cela quel que soit le quadrilatère de départ, ce qui ne manque pas de surprendre certains. Au passage, on voit apparaître les autres transformations appartenant au groupe, et on constate de visu par exemple, que la composée de deux rotations de 180° est une translation.

Nos figures ont cette fois envahi le plan tout entier. N'est-ce pas ce que nous cherchions à réaliser dès le départ ?

Les développements futurs de GEOM comprendront :

- la possibilité de mémoriser une construction sous forme de macro-instruction de façon à pouvoir l'appliquer à des données différentes;
- la réalisation de lieux géométriques;
- la possibilité de définir des transformations affines;
- l'incorporation de la routine "racine" de TRANSAFF, de façon à pouvoir dessiner des courbes invariantes;
- la détermination des points fixes et droites propres.

Concluons en signalant que GEOM est entièrement piloté par menus déroulants. Il ne nécessite pas que l'utilisateur maîtrise un langage informatique quelconque. Il nous semble en effet important qu'un logiciel destiné à favoriser la formation de l'intuition géométrique permette à l'utilisateur de concentrer son attention sur les aspects mathématiques plutôt qu'informatiques.

7. Se procurer GEOM et TRANSAFF ?

TRANSAFF est disponible: s'adresser à l'auteur en spécifiant le matériel utilisé (PC-IBM compatible, APPLE II, COMMODORE 128). GEOM n'est pas terminé: il faudra attendre...

Bibliographie

[B] R. BEX, G. NOEL et Y. NOEL-ROCH, *Un test de fin de première année secondaire*, Math. Ecole n° 100-101, 67-75(1981).

[MM] Heinz SCHUMANN, *The computer as a tool for geometric constructions*, Micromath. Vol. 5, n° 3, 53-56, (1989).

[ST] D. GUIN, *Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, Vol. 2, 89-109, (1989).

[BR] Gabriel BRAUN, *Un outil pour la construction géométrique*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, Vol. 2, 111-133, (1989).