POINT D'ANCRAGE EN GEOMETRIE

Ana MESQUITA et Virginia PADILLA

Une même figure peut solliciter différents types d'appréhension. Cette distinction, introduite par R. DUVAL (1988) est à la base du modèle d'analyse de tâches géométriques que nous utilisons ici (A. MESQUITA 1989).

Un premier type d'appréhension sollicité par une figure est l'appréhension spontanée et immédiate, dite appréhension perceptive : on y privilégie la forme globale de la figure.

Par exemple, l'appréhension perceptive de la figure 1 consiste à y identifier quatre petits triangles, ou un petit triangle inscrit dans un grand triangle. Dans le premier cas, on a affaire à une appréhension analytique, c'est-à-dire à une appréhension qui repose sur un rassemblement de parties élémentaires, autrement dit, ce sont les sous-figures constituées par les parties élémentaires – les petits triangles – qui sont privilégiés. Dans le deuxième cas, l'appréhension – dite globale – repose sur un partage de la figure extérieure, c'est le contour qui est privilégié.

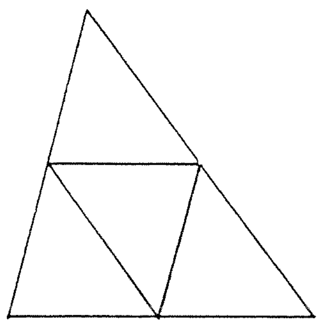


Figure 1

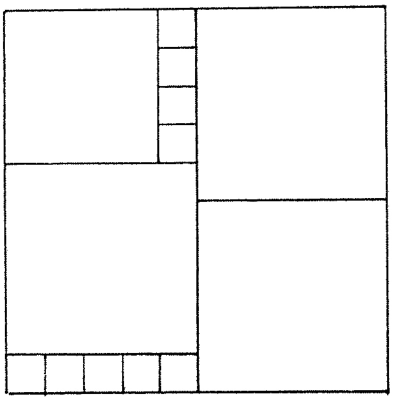
Un deuxième type d'appréhension est l'appréhension opératoire qui se fonde sur l'identification des parties élémentaires de la figure et sur les reconfigurations de ces parties en sous-figures permettant des traitements. Elle permet de donner un sens dynamique aux caractéristiques de la figure, facilitant les manipulations, soit physiques, soit mentales sur tout ou partie de la figure. En particulier, le fractionnement de la figure donnée ici joue un rôle important. Dans le cas où les parties obtenues ont la même forme que le tout, le fractionnement est dit homogène, sinon on parle d'un fractionnement non-homogène (R. DUVAL 1988, p. 62). L'appréhension opératoire de la fig. 1 met en évidence trois parallélogrammes.

En considérant le point d'ancrage comme la sous-figure privilégiée par le traitement, il est évident que celui-ci peut reposer soit sur la figure dans sa globalité, soit sur l'une ou l'autre des parties élémentaires soit encore sur des reconfigurations.

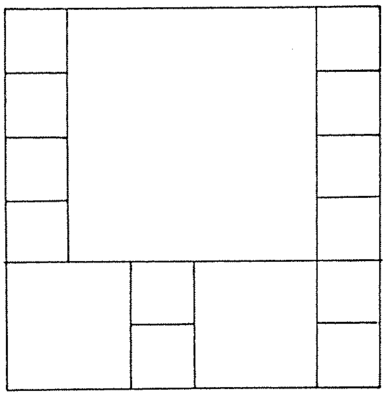
Ces différences d'appréhension et de point d'ancrage peuvent conduire à des traitements différents. Certaines formes d'appréhension, associées au "*bon*" point d'ancrage permettent de résoudre rapidement le problème, d'autres, au contraire, constituent un obstacle à son traitement.

Dans l'observation que nous relatons ci-après, une appréhension opératoire mettant en évidence des reconfigurations non-homogènes de la figure est essentielle à la résolution du problème, tandis qu'une appréhension opératoire centrée sur des reconfigurations homogènes constitue un obstacle à son traitement; dans ce cas, la résolution exige un changement de point d'ancrage, car seul un point d'ancrage centré sur les reconfigurations non-homogènes permet la résolution du problème.

Le problème : L'observation portait sur le problème suivant : "*Etant donné un carré, pour quelles valeurs de n est-il possible de le diviser en n petits carrés*". La consigne énoncée oralement était accompagnée des deux figures suivantes :



Exemple avec 13 carreaux



Exemple avec 15 carreaux

Figure 2

Dans cet article, nous en décrivons la résolution incomplète par deux enfants de huit ans et demi : Nathan et Lionel que nous avons observés pendant une séance enregistrée. A cet âge, il semble presque impossible qu'un écolier réponde à la question posée et trouve la réponse : n est un entier quelconque différent de 2, 3 et 5. Mais il est capable d'inventer des découpages corrects pour certaines valeurs de n (par contre, le problème a été complètement résolu par un binôme d'enfants de 9 à 10 ans en une heure et demie environ). Nous faisons quelques commentaires sur leurs stratégies et en particulier sur le rôle de l'appréhension dans la résolution du problème.

Analyse a priori : La question donnée peut être résolue par des enfants de cet âge grâce à la mise en évidence du fait récursif suivant : on sait qu'on peut toujours partager un carré en quatre carreaux. Il suffit alors de laisser invariant trois des quatre carreaux du partage initial et en se centrant sur un seul des carreaux de le partager à son tour en quatre. On obtient alors un partage en $3 + 4 = 7$ carreaux.

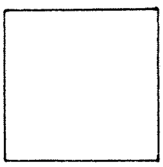


Figure 3

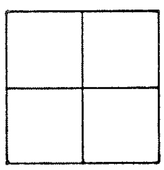


Figure 4

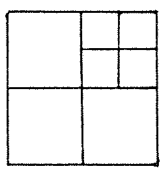


Figure 5

La transition entre ces reconfigurations n'est pas automatique. Elle exige
1) qu'on se centre initialement sur le carré à partager (fig. 3);
2) qu'on se centre ensuite en un seul des petits carreaux résultat du partage initial (fig. 4), en l'isolant et en abandonnant les autres;
3) que l'on procède enfin au partage de ce seul carré (fig. 5).

On peut visualiser de la façon suivante ce que nous venons de dire :

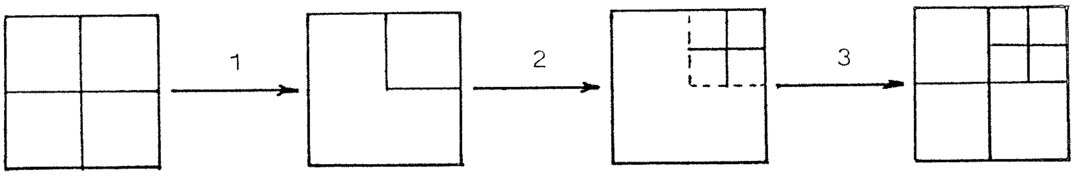


Figure 6

Les partages exigent en effet des points d'ancrage différents : les passages (1) et (3) n'exigent que des changements de point d'ancrage. Le passage (2) est essentiel : il se heurte à un obstacle heuristique considérable puisqu'il s'agit d'ajouter des traits sur la figure.

Les stratégies de résolution : Nous décrivons et comparons les stratégies des deux enfants en analysant essentiellement les points d'ancrage.

1) **Lionel :** Cet enfant a, dès le début, le même type d'appréhension de la figure : il la voit à partir de son contour global qu'il décompose comme un puzzle en carreaux pas nécessairement égaux. Il est influencé par le modèle suggéré par la consigne. On peut dire qu'il a une appréhension globale de la figure considérée à deux dimensions. La non-homogénéïté des petits carrés intérieurs est parfaitement admise.

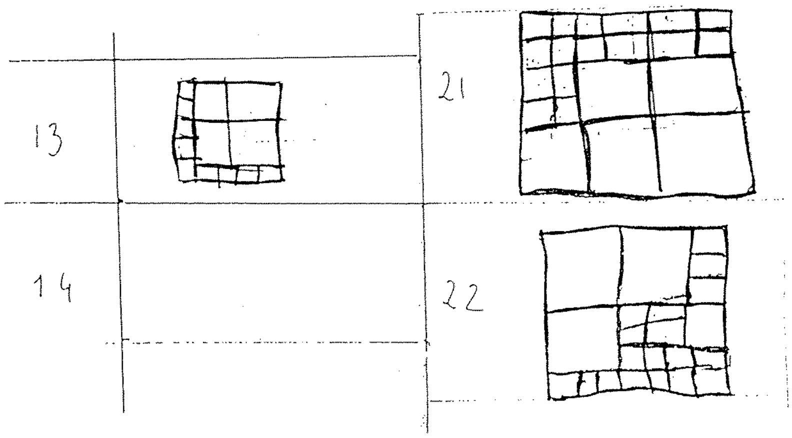


Figure 7

2) **Nathan :** La stratégie de cet enfant, avec deux phases bien démarquées peut être résumée de la façon suivante :

1ère phase :

1ère étape : Après avoir fait quelques dessins, Nathan fait sa première conjecture : la division en un nombre pair de carrés est possible et impossible en un nombre impair (ce qui est contradictoire avec la feuille distribuée et avec quelques dessins de Nathan lui-même!). En voici un témoignage :
N : "On ne peut pas avoir un carré de 25 ... 25 c'est pas pair (...) Il faut qu'il soit pair ... 25 c'est impair."

2ème étape : Elle se caractérise par le partage du carré en rectangles; chaque côté du carré étant divisé en parties égales. Comme Nathan traite chaque côté individuellement en restant centré sur les segments unidimensionnels et indépendants qu'il divise en parties égales, le résultat est un ensemble de rectangles et non pas de carrés. Cette centration sur chaque côté conduit à une reconfiguration homogène : un pavage par des rectangles identiques.

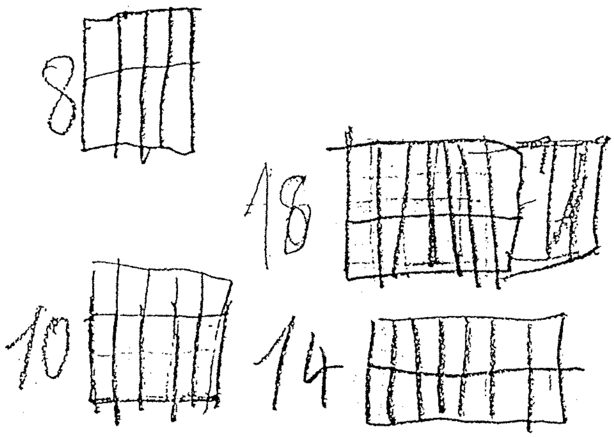


Figure 8

C'est peut-être la prégnance de la grille, associée au problème de la division du carré en rectangles égaux qui amène Nathan à une recherche numérique centrée sur les tables de multiplication comme en témoigne le dialogue suivant :
N : "4 fois 4 jusqu'à ce que ça arrive à 12."
L : "3 fois 4 ..."
(...)
N : "On ne peut pas faire sur la table de 3 ... 22."

3ème étape : A la suite de l'intervention suivante de Lionel :
L : "Le carré doit être de la même manière ... de la même longueur ... et en même temps il faut qu'on ait des carreaux."
Nathan cherche alors à partager le carré en carreaux égaux.

4ème étape : Nathan reprend sa conjecture sur les pairs.

2ème phase :
Elle démarre à la suite d'un échange avec Lionel qui parlait peu et faisait des figures comme celles de la page suivante :

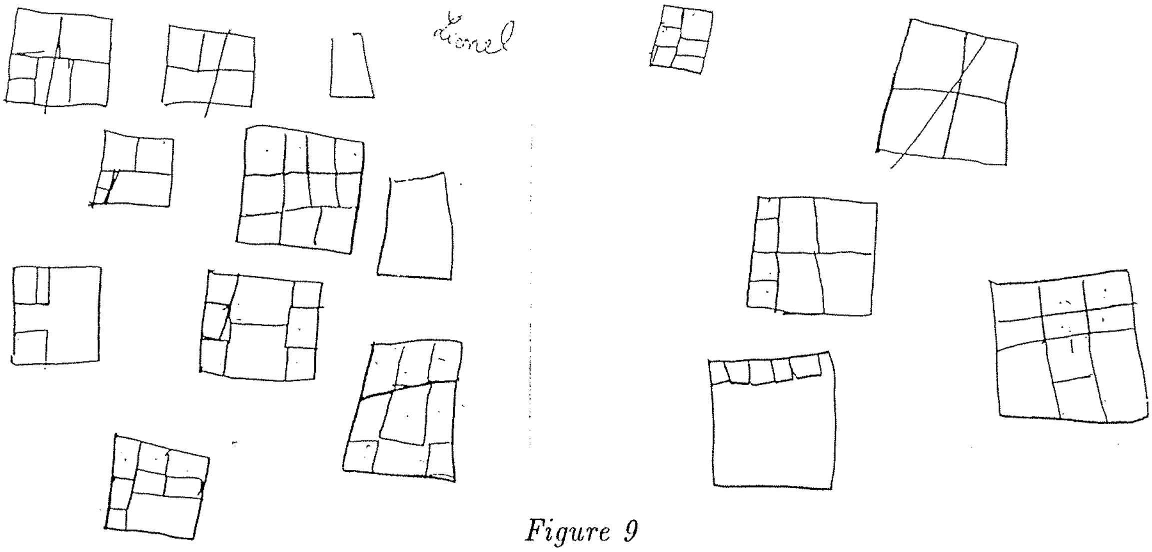


Figure 9

1ère étape : Nathan essaye d'obtenir un grand carré à partir de différents petits carrés. Autrement dit, il fait des rassemblements de petits carrés de façon à composer un grand carré. Par la suite il compte les carrés obtenus. C'est une phase de composition par tatonnement du puzzle : le nombre de carrés du puzzle n'est pas défini au départ mais déterminé au fur et à mesure par les contraintes de la figure et de la tâche.

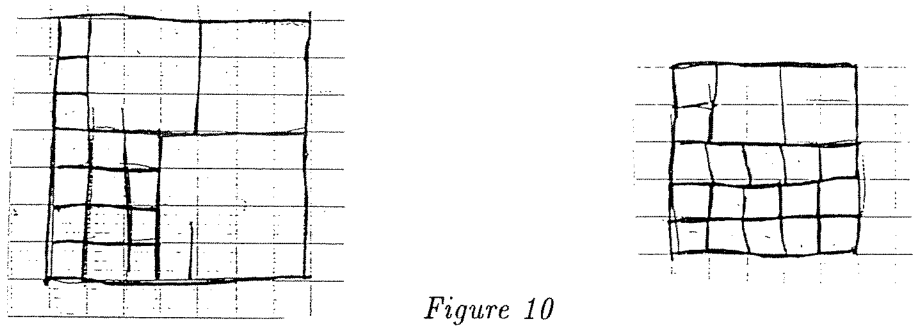


Figure 10

Deux remarques importantes :

1) A ce moment, 55 minutes après le début de la recherche, Nathan a **compris l'énoncé** au sens de Glaeser (*). Il prend en considération :
— la propriété des parties élémentaires : les carrés (avec des côtés exactement égaux);
— la possibilité d'admettre des carrés intérieurs inégaux.
N : "C'est juste. Il y en a un qu'est plus grand, mais ils sont toujours carrés."

2) A ce moment, le problème est, pour Nathan, l'inverse de celui qui est posé : il essaie d'obtenir un carré à partir d'un nombre à déterminer de carreaux. C'est d'ailleurs le sens de la question de contrôle qu'il pose à Lionel, après avoir fait un carré avec 13 carreaux.
N : "13, tu as déjà fait ?"

(*) **Comprendre l'énoncé** c'est avant tout comprendre ce que signifient les mots des phrases. **Comprendre le problème** c'est saisir "où gîte le lièvre", où se situe la difficulté.

2ème étape : Nathan commence à faire des recompositions à partir des puzzles déjà obtenus en essayant d'obtenir des carrés avec un nombre déterminé a priori de carreaux :
N : "49 carrés ... il faut en faire 22 (...)"

La recherche de Nathan s'achève quand son père arrive, au bout d'une heure et demie, au moment où il travaillait autour de 3, en cherchant à réduire le nombre de carreaux d'un carré donné.
N : "18 plus quelque chose ça fait 21 ... Il faut que je retire 3"
En tout cas, il arrête son travail sans s'être aperçu du rôle essentiel du 3 :
N : "Là je peux pas tirer 3, sinon ça fait pas un carré ... Comment je fais ? ... je dois en barrer ? Je dois effacer quelque chose ? ... peut-être 1 ... 9, j'ai tiré 9 ..., 3 moins 9 ça fait 6, j'essayerai de faire 6 ... un carré de 6, comme ça ... "

Conclusion

1) Cette observation met en évidence l'importance centrale des différents types d'appréhension dans la résolution des problèmes et en particulier les difficultés résultant d'une centration excessive sur une des formes d'appréhension perceptive.

2) Cela suggère que les stratégies de résolution se développent en fonction du type d'appréhension, autrement dit, c'est l'appréhension qui conditionne les formes de raisonnement.

3) Cette observation attire notre attention sur la centration excessive de Nathan sur son image mentale d'un damier, ce qui lui fait négliger complètement les deux exemples qui illustraient la consigne : deux exemples de pavages non-homogènes avec un nombre impair de carreaux (13 et 15).

4) D'un autre point de vue, l'observation suggère que le changement d'appréhension est essentiel. Or ce changement se heurte à plusieurs obstacles, ce qui nécessite une éducation, voire une ré-éducation des formes d'appréhension et des points d'ancrage sur la figure.

5) Il nous faut également tenir compte du rôle de la feuille indicative que nous avions distribuée. Elle apporte plus qu'un simple complément à la consigne orale : elle induit une procédure d'obtention des résultats en obligeant à un ordre déterminé, ordre qui cache une structure sous-jacente générative de la solution.

Bibliographie :

DUVAL R. (1988).– *Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence.*– "Annales de Didactique et de Sciences Cognitives", IREM de Strasbourg, p. 57–74.

MESQUITA A. (1989).– *Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie.*– "Educational Studies in Mathematics" 20, p. 55–77.

MESQUITA A. (1989).– *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie.*– Thèse IREM de Strasbourg.

PADILLA V. (1990).– *Les figures aident-elles à voir en géométrie ?*– "Annales de Didactique et de Sciences Cognitives", IREM de Strasbourg, p. 223–252.