A VOS STYLOS

PROBLÈME 11

Enoncé

Trouver le plus petit entier positif k pour lequel il existe un polynôme à coefficients entiers, de degré k, de la forme

$$P(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

et tel que, pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$, $P(x)$ soit divisible par un milliard.

Solution (de "*L'Ouvert*") :

Soient n et t des entiers strictement positifs. Nous allons montrer qu'il existe un polynôme, à coefficients entiers, de degré k, de la forme

$$P(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset n\mathbb{Z}$ si et seulement si n divise k!

Pour $n = 10^9$, comme $k = 40$ est le plus petit nombre tel que un milliard divise $k!$ (car 40! contient neuf fois le facteur premier 5 alors que 39! ne le contient que huit fois), ceci entraînera que la réponse est 40.

a) Si n divise $k!$, il existe un tel polynôme. Il suffit de prendre $P(x) = x(x+1)\ldots(x+k-1)$. Pour x entier positif, $P(x)/k!$ est un coefficient binomial, donc $P(x)$ est divisible par n; comme la propriété "$P(x)$ est divisible par n" ne dépend que de la valeur de x modulo n, elle s'étend à tout $x \in \mathbb{Z}$.

b) Si P est un tel polynôme, par récurrence sur m il est clair que pour tout m positif, $\Delta^m P$ envoie $\mathbb{Z}$ dans $n\mathbb{Z}$ (où Δ est l'opérateur de différence finie $\Delta Q(x) = Q(x+1) - Q(x)$); c'est donc vrai en particulier pour $m = k$. Mais Δ^k appliqué au polynôme $x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$ donne le polynôme constant $k!$, donc n divise $k!$.

PROBLÈME 12

Enoncé

Soit Ω un ouvert non vide du plan. Deux points C (chat) et S (souris) sont mobiles dans Ω et choisissent chacun à chaque instant leur vitesse, le module de cette dernière étant toutefois limité à un intervalle $[O, V]$, où la vitesse maximale V est la même pour C et S. On demande, selon la forme de Ω, si C a une stratégie imparable pour finir par rattraper S, si au contraire S a un moyen certain de toujours échapper à C, ou si ni l'un ni l'autre de ces deux cas ne se présente.

Indication

Pourvu que les positions initiales C_0 et S_0 soient différentes, il existe une stratégie permettant à S d'échapper indéfiniment à C, quel que soit l'ouvert non vide Ω.

PROBLÈME 13

Enoncé

Un réel x est algébrique si et seulement s'il existe des polynômes à coefficients entiers $P(u,v)$ et $Q(u,v)$ et des entiers u_o, v_o tels que, en posant

$$u_{n+1} = P(u_n, v_n) \quad ; \quad v_{n+1} = Q(u_n, v_n)$$

on ait $v_n \neq 0$ pour tout n et $(u_n/v_n) \longrightarrow x$, quand n tend vers ∞.

PROBLÈME 14 (proposé par D. DUMONT)

Enoncé

Démontrer l'égalité suivante pour $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \cdots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{7x^7}{1-x^7} + \cdots$$

Question complémentaire : Comparer à l'aide d'un micro-ordinateur les vitesses de convergence des deux séries. Comment croit la somme $S(x)$ de ces séries quand x tend vers 1^-? (problème dont le résultat n'est pas connu par l'auteur).

DEVINETTE :

Qui a dit : "*Les mathématiques sont comme le porc, tout en est bon*"?
La première bonne réponse aura une surprise!
