Les belles histoires de Tonton Lulu

LES CARTES MARINES :

HISTOIRE D'UN PROBLÈME POSÉ AUX MATHÉMATIQUES (*)

Jacques LUBCZANSKI

Si dresser une carte est un acte fondateur – la prise de possession symbolique d'un territoire – c'est aussi donner un outil au navigateur pour aller d'un point à un autre.

A ceux qui ne voient pas là un problème mathématique, je répondrai que jusqu'au XVIII^{e} siècle, tous les cartographes étaient mathématiciens; d'ailleurs l'histoire du problème de la cartographie maritine s'inscrit parfaitement dans l'histoire des maths, et donc au bout du compte dans celle des hommes.

Notre problème va commencer au cinquième siècle avant J.C. – en Grèce, bien sûr – et trouver une solution satisfaisante au XVI^{e} siècle en Europe. Cette solution est toujours utilisée de nos jours.

Et ce problème reste d'actualité, au moins sur le fond, puisqu'on doit lancer le satallite Hipparchos du côté de Neptune : c'est l'espace qu'il s'agit à présent de cartographier ...

OÙ EST LE PROBLÈME?

Comment les navigateurs se repèrent-ils?

Tout dépend de l'endroit où ils sont : tant qu'ils longent la côte, sans s'en éloigner au point de la perdre de vue, ils n'ont besoin que de points de repères terrestres : une bonne connaissance du rivage suffit au cabotage qui a été la première forme de navigation.

Mais dès qu'on ne voit plus la côte, et que l'horizon n'est plus fait que d'eau tout autour de soi – à propos, à quelle distance du rivage cela arrive-t-il? – il faut d'autres points de repère pour connaître sa position et sa direction.

La position d'un navire est donné par la latitude (hauteur angulaire au dessus de l'équateur) et par la longitude (déviation angulaire par rapport à un méridien donné). Mais si la latitude est facile à mesurer par rapport au soleil et aux étoiles, il n'en va pas de même pour la longitude : une mesure directe et précise à l'aide des étoiles est impossible à cause de la rotation de la terre sur elle-même. On mesure donc la longitude de façon indirecte, à partir de la vitesse et de la direction du

(*) Texte d'une conférence donnée à Nyon le 2 octobre 1989, dans un cours organisé par la Commission Romande de Mathématiques.

navire; et la mesure de la vitesse d'un navire a elle même posé problème pendant longtemps : le loch, qui mesure la distance parcourue date de 1577 et les premières horloges portables, à ressort, datent des années 1600.

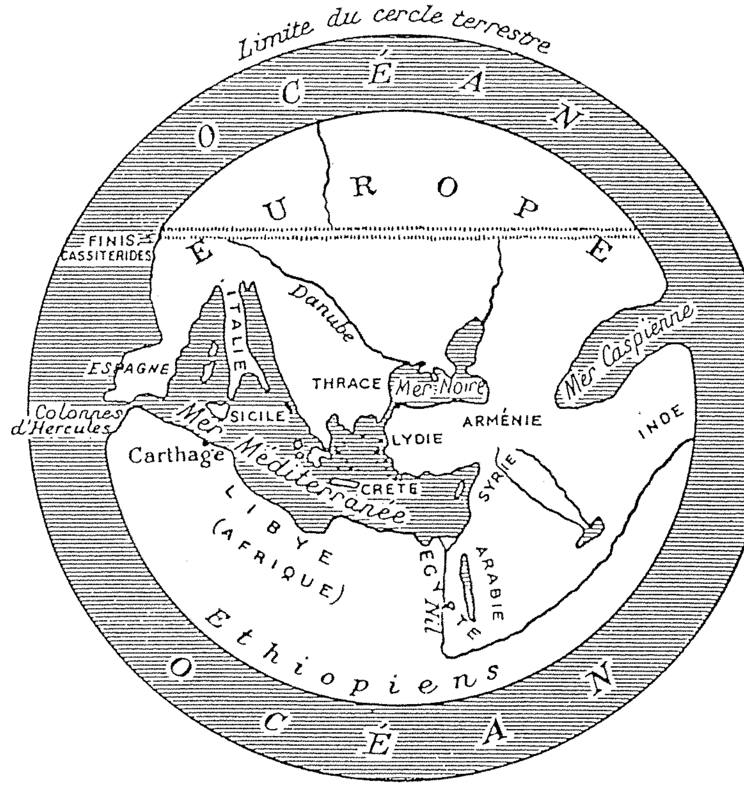
La direction d'un navire est donnée par l'angle du cap avec le nord, c'est-à-dire avec un méridien. Dans l'hémisphère nord, l'étoile polaire donne le nord (et dans l'hémisphère sud, c'est la croix du sud). La boussole apparaîtra vers 1200. Sur une carte, les lignes qui font un angle constant avec les méridiens s'appellent les lignes de Rhumb : en se fixant un "rhumb" précis, on suivra ces lignes.

Le problème de fond, d'un point de vue mathématique, est que la position et la direction d'un navire sont des notions "locales" alors qu'une carte maritime est une représentation "globale". Mettre la sphère à plat implique des déformations mais autorise des choix : que veut-on préserver sur la carte?

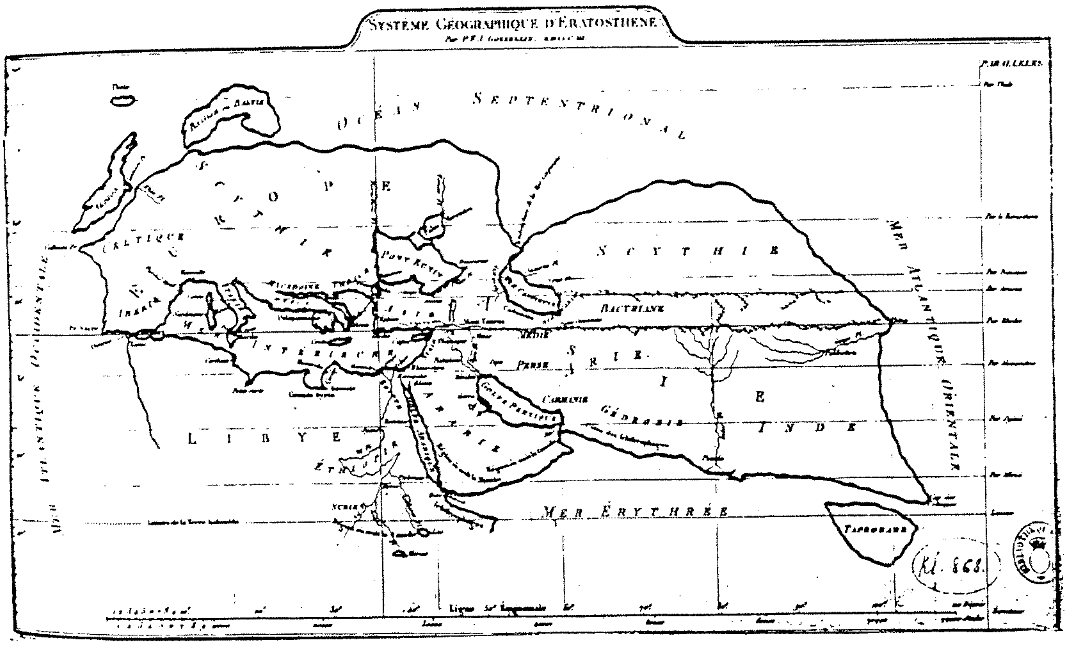
LES CARTES DE L'ANTIQUITÉ

Reprenons l'histoire à son commencement; pour les grecs de la fin de V^{e} siècle av. J.C., la terre est ronde. D'une part cela explique que l'horizon s'éloigne à mesure q'uon avance vers lui, et d'autre part cela satisfait les préoccupations esthétiques d'un PLATON, pour qui la sphère est la seule forme parfaite.

De façon naturelle, la terre est alors représentée par un cercle évoquant la rotondité du globe. Et, bien sûr, la carte est centrée sur la Grèce et ses voisins.



Carte du monde par HICATÉE *(de Milet)* 517 *av. J.C.*

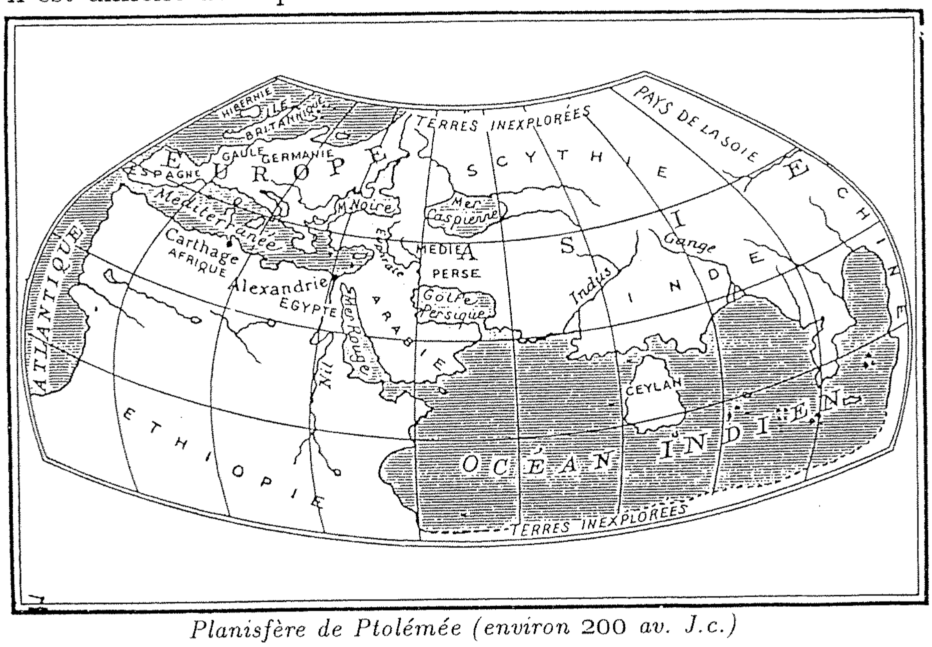


Carte d'Eratosthène reconstituée au XIX[e] siècle

Il faut attendre plus de deux cents ans pour qu'on commence à mesurer, à calculer les distances et les positions des lieux connus. ERATOSTHÈNE imagine des lignes imaginaires, les parallèles, qui relient des points de même latitude.

Encore quatre siècles et PTOLÉMÉE vint : en utilisant les progrès de la trigonométrie, il trace une projection du globe, avec latitude et longitude. Et cette carte fera autorité pendant longtemps : c'est la première carte du monde imprimée au XV[e] siècle.

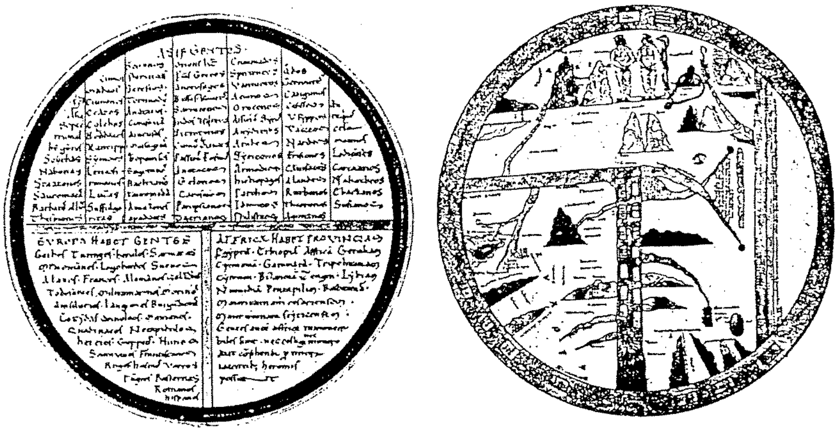
Mais la navigation dans le monde grec concerne avant tout la Méditerranée, sur laquelle il est difficile de se perdre ...



Planisfère de Ptolémée (environ 200 av. J.c.)

L'INTERMÈDE MÉDIÉVAL

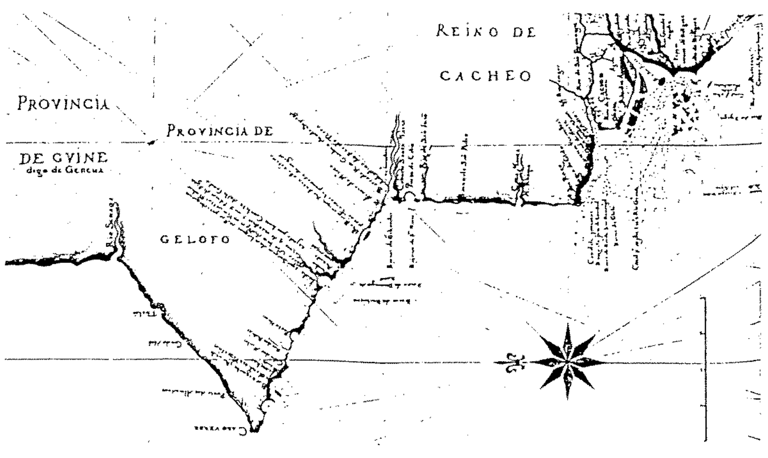
Pendant la période médiévale, ou l'Occident est sous la domination idéologique de l'Eglise, les cartes du monde sont d'abord des actes de foi; c'est l'interprétation des textes saints qui dicte la géographie et la cartographie. Par exemple, si la Bible dit que l'Océan recouvre 1/7 du globe, il doit en être de même sur la carte, même si la réalité est autre. Cela conduit aux cartes dites en "T sur O", en abrégé T/O, où le Nil, le Don et la Méditerranée forment en T sur le O qui délimite la Terre.



Mappemondes du XII^e siècle

Bien entendu les cartes en T/O n'étaient d'aucun secours pour les navigateurs. Cela n'affectait pas outre mesure les chrétiens qui naviguaient en Méditerranée, et qui employaient des pilotes arabes.

Par contre, quand les Portugais développaient une politique d'exploration et de colonisation, à partir du XIV^e siècle, leurs navigateurs créèrent leurs cartes : les Portulans sont des cartes basées sur des relations de voyages précédents : ce sont plutôt des itinéraires, des listes de lieux par lesquels il faut passer que des cartes sur lesquelles on peut repérer sa position et sa direction.



Atlas maritine portugais

MATHÉMATICIENS ET MARINS

Pour les mathématiciens, à partir du XVI^e siècle, une carte est une "projection de la surface du globe selon les lois de la perspective" (1). Ils en distinguent trois sortes :

— **carte stéréographique** : l'œil est au pôle, le plan de projection est le plan équatorial,
— **carte gnomonique** : l'œil est au centre, le plan de projection est un plan tangent à la sphère,
— **carte orthographique** : l'œil est à l'infini, le plan de projection est le plan équatorial.

Les cartes stéréographiques conservent les angles, les gnomoniques montrent les chemins les plus courts, les orthographiques permettent certaines mesures de distance... Mais aucune n'est assez globale ni assez pratique pour le marin.

Ce qui intéresse le marin c'est ce qu'il peut mesurer depuis son navire : en particulier l'angle de son cap avec le Nord, c'est-à-dire avec les méridiens, le plus pratique étant de naviguer à cap constant. En naviguant à cap constant, le marin suit les "lignes de Rhumb" : ce sont ces lignes qu'il veut retrouver sur la carte.

Les mathématiciens appellent les lignes de Rhumb des loxodromies. Ce ne sont pas des grands cercles sur la sphère : par exemple leurs projections sur une carte stéréographique sont des spirales équiangulaires (logarithmiques). Et donc pas les plus courts chemins d'un point à un autre. Mais c'est avec ça qu'on navigue : avec des arcs de loxodromies.

Donc une carte intéressante serait une carte où les rhumbs se lisent facilement, c'est-à-dire où les loxodromies seraient représentées par des droites. C'est l'idée de MERCATOR en 1569.

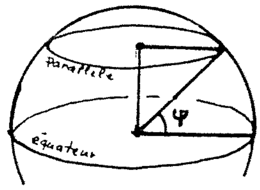
L'IDÉE DE MERCATOR

Voici, avant tout calcul, les idées qui sont à la base de la projection de MERCATOR :

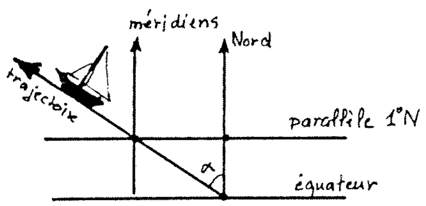
— les méridiens pointent tous vers le Nord : sur la carte ce seront donc des droites parallèles et équidistantes : les verticales,
— les parallèles sont toujours orthogonaux aux méridiens : ce seront donc les horizontales,
— les parallèles se retrouveront donc tous de longueur égale sur la carte : or, en réalité, ils sont de plus en plus courts à mesure qu'on s'approche du pôle. Pour préserver le rhumb (l'angle avec le méridien) sur la carte, on va les espacer de plus en plus.

(1) Encyclopédie Méthodique, 1790.

Précisons ce dernier point. Le parallèle situé à une latitude φ a pour longueur celle de l'équateur multipliée par $\cos\varphi$. Sur la carte, il a la même longueur que l'équateur : il est donc dilaté d'un facteur $1/\cos\varphi$.



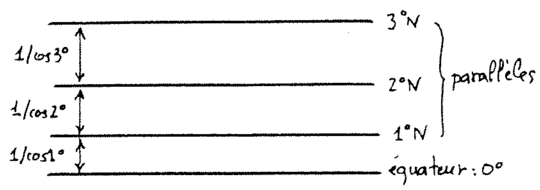
Vue du globe



Sur la carte

Par exemple, le parallèle $1°N$ est dilaté de $1/\cos 1°$ (qui est bien un facteur plus grand que 1 puisque $\cos 1° < 1$). Alors si on veut que l'angle α de la carte soit égal à celui qu'on mesure sur le bateau – le rhumb –, il faut que le triangle sur la carte soit semblable au triangle réel qu'il représente (2).

Pour que deux triangles soient semblables, il faut que leurs côtés soient proportionnels : si le côté "parallèle" est dilaté d'un facteur $1/\cos 1°$, il doit en être de même pour le côté "méridien" : autrement dit, le parallèle $1°N$ doit être "remonté". Et de la même façon pour le parallèle $2°N$, et les suivants ...



Sur la carte

Sur la carte, les parallèles sont donc de plus en plus espacés.

Sans tenir compte de l'échelle de la carte, le parallèle situé à la latitude n sera représenté à la hauteur $h(n)$ au dessus de l'équateur où $h(n) = \frac{1}{\cos 1} + \frac{1}{\cos 2} + \ldots + \frac{1}{\cos n}$.

On obtient par exemple :

$$h(30) = 31,55\ldots$$
$$h(45) = 50,71\ldots$$
$$h(60) = 75,96\ldots$$

(2) Le monde réel est sphérique mais sur une petite distance, il peut être considéré comme plat.

On ne peut pas aller jusqu'au pôle : il faudrait pour cela que la carte soit infinie. La carte s'arrêtera donc à une certaine latitude.

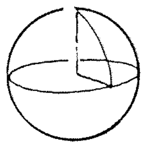
UN PEU DE SCIENCE FICTION

Pour le mathématicien, qui se situe volontiers hors du temps qui passe, tout cela peut ressembler à du bricolage. Pour le rassurer, habillons notre problème avec les vêtements que la science confectionnera plus tard :

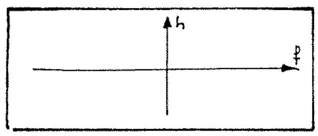
30 ans après MERCATOR apparaissent les logarithmes, un siècle plus tard le calcul infinitésimal est au point; deux siècles après la notion d'application conforme, c'est-à-dire qui conserve les angles, apparaît.

C'est bien de cela qu'il s'agit :

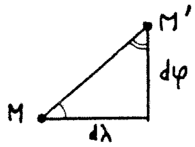
$$\begin{array}{ccc} \varphi \text{ latitude} & \longmapsto & f : \text{latitude sur la carte} \\ \lambda \text{ longitude} & & h : \text{hauteur sur la carte} \end{array}$$



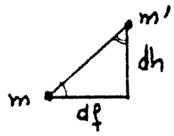
$\longmapsto$



le globe — la carte



$\longmapsto$



un triangle infinitésimal — son image

L'application est conforme si et seulement si tout triangle infinitésimal est semblable à son image c'est-à-dire si : $\frac{df}{d\lambda} = \frac{dh}{d\varphi}$. Or, on a vu que (toujours sans tenir compte de l'échelle) : $\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\cos\varphi}$.

D'où $\frac{dh}{d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$ et $h(\varphi) = Ln|\tan(\varphi/2 + \pi/4)|$ (3) (φ en radians).

On obtient par exemple :

$$h(30) = 0,5493\ldots$$
$$h(45) = 0,8813\ldots$$
$$h(60) = 1,3169\ldots$$

Quel rapport ont ces chiffres avec ceux de MERCATOR?

$$\frac{31,55\ldots}{0,5493\ldots} = 57,438\ldots \; ; \; \frac{50,71\ldots}{0,8813\ldots} = 57,533\ldots \; ; \; \frac{75,96\ldots}{1,3169\ldots} = 57,679\ldots \; ;$$

(3) N.D.L.R. : C'est ce qu'on appelle la fonction de MERCATOR!

Le rapport est sensiblement constant, et légèrement supérieur à 57. Pour le comprendre, utilisons un autre outil de science fiction – pour MERCATOR! – : les sommes de RIEMANN.

L'intégrale $\int_0^n \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$, qui nous a donné la hauteur h pour n degrés, est approchée par la somme $\Sigma_1^n \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{\cos p}$ (p en degrés) c'est-à-dire par $\frac{\pi}{180} \times \Sigma_1^n \frac{1}{\cos p}$, le coefficient $\frac{\pi}{180}$ correspondant à un pas de 1°. Or $\frac{\pi}{180}$ vaut 57,296 et $\Sigma_1^n \frac{1}{\cos p}$ est la hauteur calculée par MERCATOR.

n	l'intégrale	la somme	la tangente (à titre indicatif)
30	0,549	0,550	0,577
45	0,881	0,885	1
60	1,317	1,326	1,732

(La somme de RIEMANN est systématiquement en excès par rapport à l'intégrale à cause de la convexité de la fonction 1/ cos.)

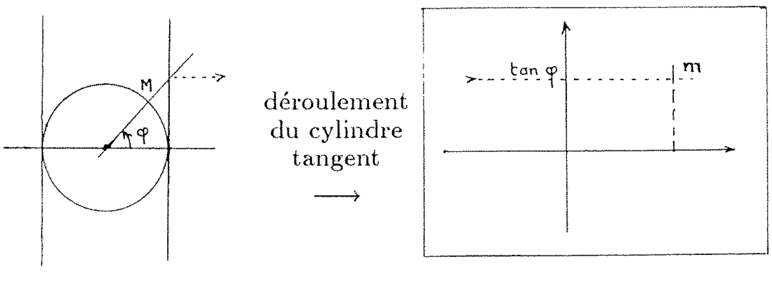
L'erreur commise est faible : se verrait-elle lors de la confection d'une carte? Sans doute pas.

Une conclusion s'impose : MERCATOR est un homme de son époque, mais dont l'idée rejoindra celle des mathématiciens du siècle suivant : CARALIERI, ROBERVAL, LEIBNIZ, NEWTON ...

ATTENTION AUX PROJECTIONS

Dans "projection de MERCATOR", le mot "projection" est trompeur : le système de MERCATOR n'est pas une projection au sens géométrique du terme : c'est une reconstruction par le calcul.

En particulier, contrairement à ce qu'on peut lire dans des ouvrages de bon aloi, ce n'est pas une projection cyclindrique tangente où le point de latitude φ est représenté à la hauteur $\tan\varphi$.



La colonne des valeurs de $\tan n$ dans le tableau ci-dessus diffère notablement des deux autres : c'est normal puisque les fonctions $\mathrm{Ln}|\tan(\varphi/2 + \pi/4)|$ et $\tan\varphi$ sont distinctes. Ce qui se retrouve bien entendu sur les dérivées de chacune :

$1/\cos\varphi$ pour la première et $1/\cos^2\varphi$ pour la seconde.

Et la projection cylindrique tangente, si elle est facile à imaginer, ne serait d'aucune utilité pour retrouver les "rhumbs" sur la carte.

Méfions-nous des idées simplistes...

ET AUJOURD'HUI?

Comment se dirige un marin d'aujourd'hui ? Quelles cartes utilise-t-on pour trouver son cap ?

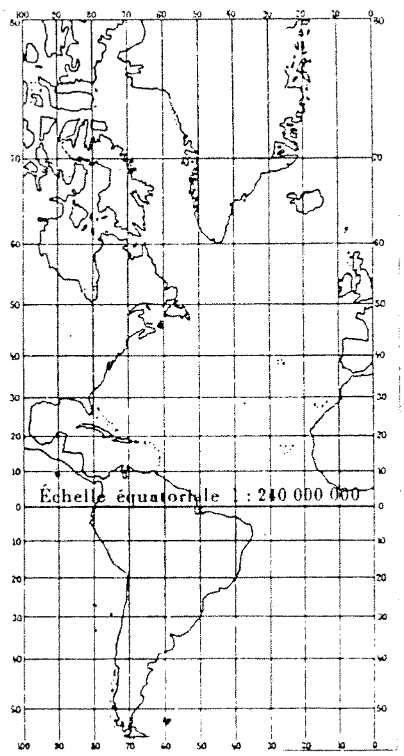
Principalement des cartes de MERCATOR, qui ont la préférence de la plupart des navigateurs, même si on sait faire des cartes plus sophistiquées. Mais il faut préciser que s'ajoutent à ces cartes deux autres outils performants :
— pour les itinéraires usuels : un annuaire donnant, pour chaque liaison, la liste des caps successifs à prendre;
— pour les itinéraires exceptionnels : le guidage par satellite, comme la balise Argos (mais il y en a d'autres), qui donne la position et la direction du navire quand on la demande.

La recherche de la "meilleure" route passe aussi par des impératifs météorologiques, économiques et géographiques. En particulier la navigation à cap constant emprunte les loxodromies qui ne sont pas les plus courts chemins : la différence en distance – et donc en carburant – peut atteindre 10% sur une traversée transatlantique. Mais on peut réduire cette différence en approchant la géodésique (chemin le plus court) par une suite d'arcs de loxodromies ...

Pour terminer, citons quelques problèmes mathématiques ayant des liens plus ou moins forts avec la navigation:

— liens historiques : la recherche des géodésiques sur une surface, au sein des géométries non euclidiennes;
— liens esthétiques : la description des rivages en termes de courbes fractales;
— liens technologiques : pour la navigation dans l'espace, le problème de la transmission des informations avec le moins d'erreurs possibles (par exemple : une photo envoyée de la fusée à la terre). Ce sont des problèmes d'algèbre – codes autocorrecteurs – ou de géométrie – épuration automatique des formes –, liés aux moyens informatiques utilisés.

Il ne restera plus alors qu'une question : "*quel est l'âge du capitaine ?*"



Une carte de MERCATOR