# A VOS STYLOS

## PROBLÈME 12

**Enoncé**

Soit $\Omega$ un ouvert non vide du plan. Deux points $C$ (chat) et $S$ (souris) sont mobiles dans $\Omega$ et choisissent chacun à chaque instant leur vitesse, le module de cette dernière étant toutefois limité à un intervalle $[O, V]$, où la vitesse maximale $V$ est la même pour $C$ et $S$. On demande, selon la forme de $\Omega$, si $C$ a une stratégie imparable pour finir par rattraper $S$, si au contraire $S$ a un moyen certain de toujours échapper à $C$, ou si ni l'un ni l'autre de ces deux cas ne se présente.

**Solution** (de "*L'Ouvert*") :

Voici une stratégie (attribuée, dans ses miscellanées, par LITTLEWOOD à BESICOVITCH) qui permet à $S$ d'échapper indéfiniment à $C$. Choisir un disque ouvert $D$, de centre $A \neq S_0$ et de rayon $r > 0$, tel que $S_0 \in D \subset \Omega$. Choisir des réels $\ell_n > 0$ tels que $\Sigma_{n \geq 1} \ell_n = \infty$ et $\Sigma_{n \geq 1} \ell_n^2 < r^2 - (AS_0)^2$ (par exemple $\ell_n = a/n$, avec $a$ assez petit). La droite $AS_0$ délimite deux demi-plans ouverts; l'un au moins d'entre eux, soit $\Pi_0$, ne contient pas $C_0$. A la vitesse $V$, $S$ parcourt le segment $S_0S_1$, de longueur $\ell_1$, perpendiculaire à $AS_0$, et situé dans $\Pi_0$ (sauf son origine $S_0$). Il est clair que pendant ce temps, $C$ ne peut rattraper $S$; donc à l'instant $\ell_1/V$ où $S$ arrive en $S_1$, $C$ arrive en un point $C_1 \neq S_1$. Puis $S$ choisit un demi-plan $\Pi_1$ limité par $AS_1$ et ne contenant pas $C_1$, et parcourt à la vitesse $V$ le segment $S_1S_2$ perpendiculaire à $AS_1$, situé dans $\Pi_1$, et de longueur $\ell_2$; durant ce temps $C$ ne peut rattraper $S$ et donc $C_2 \neq S_2$. Puis ... comme la longueur $S_0S_1S_2 \ldots S_n \ldots$ est infinie, $S$ n'est jamais rattrapée par $C$; comme, par le théorème de PYTHAGORE,

$$AS_n^2 = AS_0^2 + S_0S_1^2 + \cdots + S_{n-1}S_n^2 = AS_0^2 + \ell_1^2 + \cdots + \ell_n^2 < r^2,$$

$S$ reste toujours dans le disque $D$ et donc a fortiori dans $\Omega$. On remarquera que cette stratégie reste efficace même si $C$ est, lui, autorisé à sortir de $\Omega$!

---

## PROBLÈME 13

**Enoncé**

Un réel $x$ est algébrique si et seulement s'il existe des polynômes à coefficients entiers $P(u,v)$ et $Q(u,v)$ et des entiers $u_o, v_o$ tels que, en posant

$$u_{n+1} = P(u_n, v_n) \quad ; \quad v_{n+1} = Q(u_n, v_n)$$

on ait $v_n \neq 0$ pour tout $n$ et $(u_n/v_n) \longrightarrow x$, quand $n$ tend vers $\infty$.

© L'OUVERT 60 (1990)

## Indication

Méthode itérative de NEWTON.

---

PROBLÈME 14 (proposé par D. DUMONT)

## Enoncé

Démontrer l'égalité suivante pour $|x| < 1$ :

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \cdots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{7x^7}{1-x^7} + \cdots$$

**Question complémentaire :** Comparer à l'aide d'un micro-ordinateur les vitesses de convergence des deux séries. Comment croit la somme $S(x)$ de ces séries quand $x$ tend vers $1^-$ ? (problème dont le résultat n'est pas connu par l'auteur).

---

PROBLÈME 15

## Enoncé

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{n\to\infty} f(x+\sqrt{n}) = 0$ pour tout $x$. A-t-on $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$?

---

## Au pays colinéaire

Au pays colinéaire
Où les esprits sont obtus
On vit à l'ordinaire
Près de logiques talus
Taillés à coup d'équerres
Par un théorème ambigu.

Au pays colinéaire
De logique et de raison
L'esprit s'arrête aux limites de la matière
Sans que le rêve, ce doux poison
Qui n'obéit à aucun axiome arbitraire
Nous entraîne au delà de l'apparence et du son.

Au pays colinéaire
Où tout se calcule et se trace
Il n'y a plus entre les volumes et les aires
Les vitesses et les masses
De place pour se haïr ou se plaire
Et tous les cœurs sont de glace.

Au pays colinéaire
Où l'on se perd parfois
On ne sent plus le courant d'air
De la vie et de ses pourquoi
Drogue inhumaine tu es trop amère
Pour nous dicter ta propre loi.

Stéphane BURGERT
18 avril 1990