CHANGEMENT DE REGISTRE

L.E.G.T. — COLMAR

1.— HISTORIQUE

L'évaluation étant à la mode, le proviseur du L.E.G.T. de Colmar avait demandé en mai-juin 89 d'organiser dans toutes les disciplines un test d'évaluation pour les élèves entrant en seconde. Cette idée n'enthousiasma pas les professeurs qui, outre le travail supplémentaire qu'ils voyaient poindre, n'en comprenaient pas très bien l'utilité : que tester? dans quel but? En mathématiques, la réflexion finit par tourner autour du fait que si nous savions, par notre pratique professionnelle, juger chez nos élèves la compréhension du cours passé ou l'aptitude à résoudre des exercices plus ou moins techniques, nous avions peu de moyens pour tester ou évaluer la compréhension globale des mathématiques et l'aptitude à suivre avec profit une classe de seconde. Et surtout, si un test était mis en place, nous ne savions pas bien dans quel sens l'utiliser. Profitant des liens que l'un d'entre nous avait avec l'I.R.E.M. et le D.E.A. de didactique des mathématiques, nous convainquîmes le proviseur de faire appel à un didacticien. Raymond DUVAL voulu bien répondre à notre appel et nous nous retrouvâmes fin juin au lycée avec sept collègues de maths. Les indications que nous fournit R. DUVAL débouchèrent sur la confection d'une batterie de tests dont la durée de passation fut fixée à 90 min. La banalisation de deux heures de cours un mercredi matin de la rentrée 89 permit, grâce à l'amabilité de quelques collègues d'autres disciplines, de proposer l'évaluation à tous les élèves de seconde.

Une partie du dépouillement fut rapidement effectuée à la main, les différentes classes ayant été réparties entre les collègues de mathématiques. Un dépouillement plus précis sur ordinateur demanda plus de temps, faute de compétences. Cela fut fait grâce du C.P.E., Dominique DUPUIS qui eût l'intelligence d'associer des élèves à la manipulation d'un fichier en D-Base III. Il faut reconnaître que c'est un travail assez lourd et que nous n'avons pas le logiciel adapté, mais il semble difficile de faire beaucoup mieux, d'autant plus qu'il paraît peu utile de recommencer chaque année.

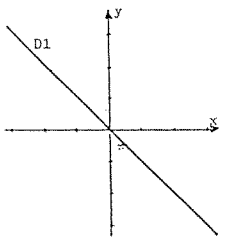
On trouvera ci-après une partie des résultats concernant les exercices 1, 2 et 4.

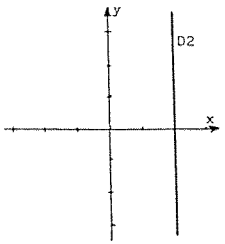
© L'OUVERT 60 (1990)

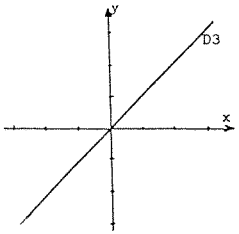
NOM . . . . . .Prénom . . . . . Classe . . . .

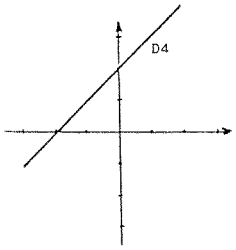
Exercice n° 1 Temps : 5 minutes

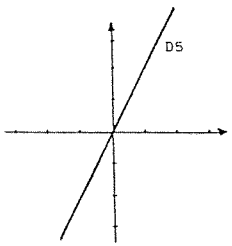
On désigne par x l'abscisse et par y l'ordonnée d'un point M du plan repéré. Indiquer à quelle expression algébrique (E1,E2,...ou E11) chacune des droites D1, D2... D5 correspond.











E1 : $y \geqslant x$

E2 : $y \leqslant x$

E3 : $y = x$

E4 : $y = -x$

E5 : $y = 0$

E6 : $y = x + 2$

E7 : $y = x - 2$

E8 : $y = 2.x$

E9 : $y > x + 2$

E10: $y = 2$

E11: $x = 2$

REPONSES

La droite D1 correspond à l'expression .....

La droite D2 correspond à l'expression .....

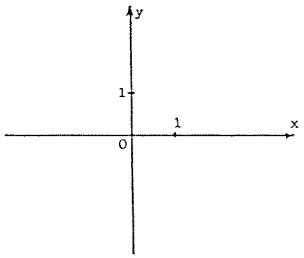
La droite D3 correspond à l'expression .....

La droite D4 correspond à l'expression .....

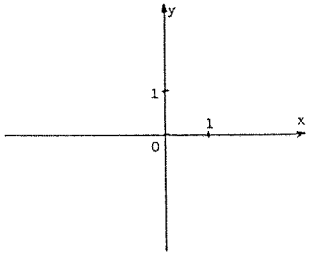
La droite D5 correspond à l'expression .....

NOM . . . . . .Prénom . . . . . Classe . . . .

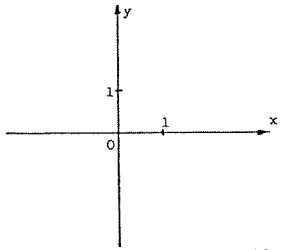
Exercice n° 2 Temps : 10 minutes



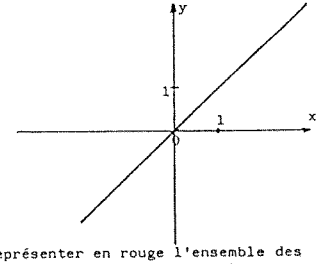
Représenter en rouge l'ensemble des points qui ont une abscisse positive.



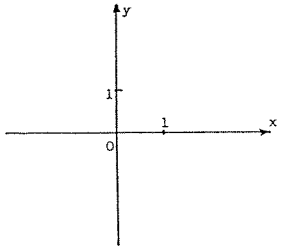
Représenter en rouge l'ensemble des points qui ont une ordonnée négative.



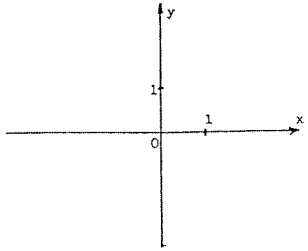
Représenter en rouge l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à l'abscisse.



Représenter en rouge l'ensemble des points dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse.



Représenter en rouge l'ensemble des points dont l'ordonnée est l'opposée de l'abscisse.



Représenter en rouge l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe.

CHANGEMENT DE REGISTRE

NOM . . . . . .Prénom . . . . . Classe . . . .

Exercice n° 4 Temps : 15 minutes

ENONCE :

ABCD est un parallélogramme, I et J les milieux respectifs de [AB] et [AD]. (BJ) et (DI) se coupent en K. Montrer que les points A, K, C sont alignés.

DEMONSTRATION :

I et J sont les milieux de [AB] et [AD] . Les droites (BJ) et (DI) sont donc deux médianes du triangle ABD . Ces droites se coupent en K qui est le centre de gravité du triangle ABD . Soit O le centre du parallélogramme ABCD . La droite (AO) est la troisième médiane du triangle ABD et passe donc par K . O étant le milieu de [AC] , les points A, K et C sont alignés.

QUESTIONS :

a) Souligne les passages correspondants aux hypothèses de l'énoncé.

b) Encadre les passages correspondants aux conclusions intermédiaires.

c) Cite les théorèmes ou propriétés utilisés.

d) Précise, en justifiant, la position du point K sur le segment [AC].

Ont été testé 362 élèves répartis sur 11 classes :

2 classes option gestion : dont l'orientation vers une première G sera majoritaire,

1 classe médico-sociale : avec orientation majoritaire vers la première F8,

4 classes de seconde T : avec orientation majoritaire vers les sections E, F1, F3 de première,

3 classes de seconde IES : (le lycée n'a pas de section A ou B),

1 classe dite S.T. : dont la moitié des élèves suivent l'option TSA, l'autre moitié d'autres options de "*prestige*" (latin, informatique, ...).

3.— RÉSULTATS DU PREMIER EXERCICE

Répartition des réponses	$y = -x$	$x = 2$	$y = x$	$y = x + 2$	$y = 2x$
Réussite	144	222	178	60	95
Non réponse	33	13	16	46	**80**
$y \geq x$	26	7	**53**	16	**31**
$y \leq x$	19	5	24	4	19
$y = x$	**72**	5		22	22
$y = -x$		3	26	**61**	13
$y = 0$	34	**25**	15	4	25
$y = x + 2$	4	**22**	12		20
$y = x - 2$	11	4	7	**77**	10
$y = 2x$	4	16	10	12	
$y \geq x + 2$	2	6	5	9	18
$y = 2$	3	16	3	27	9
$x = 2$	0		4	3	9
Réponses multiples	10	18	9	20	8

Cet exercice demande d'être capable de passer rapidement d'une représentation graphique à l'équation. Ce n'est pas l'exercice classique qui, lui, est plutôt du style :
* Tracer la droite d'équation ... ou bien :
* Donner l'équation de la droite passant par ...

Il est beaucoup plus rare d'avoir à tracer une droite et à trouver ensuite son équation. C'est un exercice que l'on recontre plutôt en terminale A2/3 où l'on demande en statistique, de représenter un nuage de points par une droite, puis de donner son équation.

Ici, on se rapproche un peu de ce type d'exercice, à la différence près que, plus qu'une valeur exacte, c'est d'un ordre de grandeur qu'il s'agit :
* être capable de distinguer une pente positive d'une pente négative (items 1 et 3) ;
* être capable de situer l'ordonnée à l'origine au dessus ou en dessous de 0 (item 4) ;
* être capable de voir si une pente est ou non supérieure à 1 (item 5).

Analysons item par item les résultats :

1) y = -x est réussi par 40 % des élèves et l'erreur la plus fréquente (20 % des cas) consiste à répondre $y = x$. Est-ce influence de la notion de bissectrice ou attraction du signe + ? Peut-être un peu des deux et il n'est pas possible de répondre ici.

2) x = 2 est réussi par plus de 60 %, les erreurs les plus fréquentes conduisent à $y = 0$ (sans doute parce que l'élève ressent qu'il n'y a pas de y dans l'équation) et $y = x + 2$ (ce qui se comprend si on veut absolument $ax + b$ avec a non nul). Ces deux erreurs regroupent chacune 6 ou 7 % des réponses. Signalons encore $y = 2x$ et $y = 2$.

3) y = x est réussi par près de 50 % des élèves. C'est pourtant le B.A.BA des fonctions affines. Curieusement, 15 % des réponses donnent $y \geq x$ dont nous n'avons pas pu comprendre l'origine.

4) y = x + 2 est l'item le moins bien réussi. Sans doute n'est-ce pas une fonction linéaire, mais surtout quand on regarde l'erreur la plus fréquente, on tombe sur $y = x - 2$ qui a un taux d'apparition supérieur au taux de réussite (21 % au lieu de 16,6 %), preuve que la notion d'ordonnée à l'origine n'est pas du tout comprise et confondue avec "l'abscisse à l'origine" ! On note encore $y = 2$ (il ne reste plus que l'ordonnée à l'origine) qui intervient dans 7,5 % des cas.

5) y = 2x est l'item qui a posé le plus de problème. Seulement un quart de réussite et surtout 22 % de non réponse. Etait-ce manque de temps ou ignorance? Nous pencherions plutôt vers la deuxième hypothèse quand on remarque de quelle façon sont réparties les erreurs :

* $y \geq x$ arrive en tête, traduction assez logique d'une pente supérieure à 1, avec 8,6 % des réponses;

* $y = 0$!;

* $y = x$ qui est une erreur somme toute moins grave puisqu'elle respecte l'allure générale de la fonction (pente positive et passage par 0);

* $y = x + 2$ qui traduit sans doute une confusion entre somme et produit.

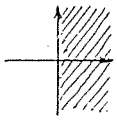
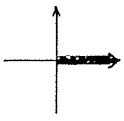
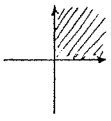
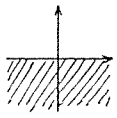
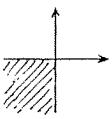
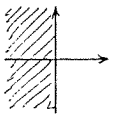
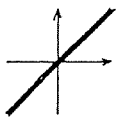
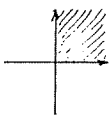
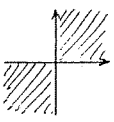
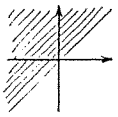
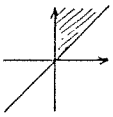
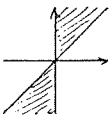
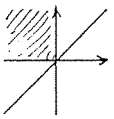
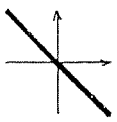
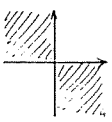
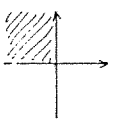
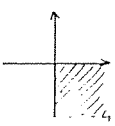
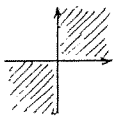
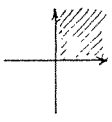
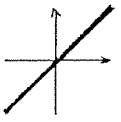
Nous noterons aussi que 31 élèves (8,6 %) répondent correctement à la fois à "$y = x + 2$" et "$y = 2x$" tandis que 35 (9,7 %) le font à "$y = x$" et "$y = x + 2$".

Enfin le tableau suivant donne le nombre de réponses correctes à l'ensemble des items de l'exercice 1. En moyenne il y a 1,9 réponses justes, ce qui correspondrait à 7,7 sur 20. Ce n'est pas brillant !

Nombre d'items réussis	Nombre d'élèves	%	% cumulé
5	26	7,2	7,2
4	34	9,4	16,6
3	67	18,5	35,1
2	63	17,4	52,5
1	103	28,5	81,0
0	69	19,1	100

Etant donnée la simplicité des équations et le rôle important joué par la fonction affine dans le cours de mathématiques de collège, on s'attendait à recueillir des résultats supérieurs à la moyenne. Or, seul est réussi l'item 2 correspondant à la droite d'équation $x = 2$, ce qui a surpris les professeurs : c'est l'exception qui est bien retenue. Aucun autre item n'obtient un score de réussite supérieur à 50 %.

4.— RÉSULTATS DU DEUXIÈME EXERCICE

	rép. correcte	réponses incorrectes (par ordre de fréquence)			
item 1	 201 55,5%	 91 25,1%	 36 9,9%		
item 2	 202 55,8%	93 25,7%	 22 6,1%	 17 4,7%	
item 3	 190 52,5%	 23 5,4%	20 5,5%	 18 5,0%	2 droites 15 1 pente - 13 12
item 4	 91 25,1%	 56 15,5%	 43 11,9%	 23 6,4%	cas non prévu 33 (8%)
item 5	 102 28,2%	 72 19,9%	24 6,6%	 18 5,0%	 15 4,1%
item 6	 244 67,4%	27 7,5%	 17 4,7%	16 4,4%	 13 3,5%

Cet exercice demande d'être capable de passer rapidement d'un texte en français courant à une représentation graphique. Cela est bien différent des exercices du type :
* Tracer la droite d'équation $y = x$ ou bien :
* Représenter l'ensemble des points tels que $y = -x$.

Il est beaucoup plus rare d'avoir un texte de maths sans aucune formule, un texte où "$y = x$" a été remplacé par "l'ordonnée est égale à l'abscisse". Ceci prouve que l'on a encore ici un exercice de transfert, de changement de registre. Il faut pouvoir passer d'un texte au graphique. L'aspect inhabituel de cet exercice a sans doute poussé les élèves à passer par une étape de formalisation, c'est-à-dire ici par une formule mais qui, malheureusement n'était peut-être pas exacte.

Nombre d'items réussis	Nombre d'élèves	%	% cumulé
6	38	10,5	10,5
5	56	15,5	26,0
4	51	14,1	40,1
3	53	14,6	54,7
2	50	13,8	68,5
1	59	16,3	84,8
0	55	15,2	100

Si on compare cet exercice au précédent, il est plutôt mieux réussi. Il y a eu en moyenne 2,8 réponses justes (soit 9,5 sur 20). De nombreux items dépassent la barre des 50 %. L'analyse des erreurs est un peu plus délicate puisqu'ici l'ensemble des réponses est ouvert.

Analysons item par item les résultats :

1) x > 0 : L'erreur principale vient de l'absence de y qui est naturellement remplacé par $y = 0$.

2) y < 0 : On trouve de façon analogue que l'absence de x est remplacée par $x = 0$. Les résultats très voisins à ces deux items ainsi que ce qui a été vu à propos de l'exercice n° 1 (item $x = 2$) montre bien la tendance à l'assimilation de "rien" avec "0". Mais alors que pour l'item 1, il y a environ 10 % des réponses qui donne le premier quadrant, pour l'item 2, le fait qu'on ne puisse manifestement pas donner une réponse dans le premier quadrant implique une dispersion entre le 3ème quadrant (x et y tous deux négatifs) et la réunion de 2ème et 3ème quadrant (x négatif). Curieusement il n'y a que peu de réponses (7) donnant le 4ème quadrant.

Cette similitude entre les deux premiers items est corroborée par le grand nombre d'élèves ayant les deux réponses correctes : 192 soit 95 % de ceux ayant répondu juste à la première question.

3) y = x : Il y a ici une grande dispersion des réponses fausses. Les réponses sous forme de quadrants conduisent soit au premier quadrant, soit à la réunion

du premier et du troisième quadrant. Il y a alors confusion entre l'égalité des nombres et égalité des signes avec en plus dans le premier cas auto-limitation aux nombres positifs. Les réponses sous forme de droites conduisent soit aux deux axes de coordonnées, soit aux deux bissectrices, soit encore aux deux demi-axes positifs. Il semble qu'il faille voir, dans le cas des axes, là encore, l'oubli du "0" de l'une des coordonnées, limitées éventuellement aux nombres positifs; quant aux bissectrices, leur intervention résulte évidemment de l'oubli du signe.

4) y > x : Il n'y a qu'un quart de bonnes réponses, preuve s'il en est besoin que les inégalités dans le plan ne sont pas comprises à l'entrée en seconde. On notera toutefois que la principale erreur qui rassemble plus de 15 % des cas revient à ne considérer que les nombres positifs. Près de 12 % des élèves donnent une réponse mixte conduisant à $y > x$ pour x positif et à $y < x$ ($|y| > |x|$) pour x négatif; ceci témoigne une fois de plus de la difficulté de manipulation des nombres négatifs.

5) y = -x : Au vu de l'exercice 1 et de l'item 3 du présent exercice, on s'attendait à un meilleur score; ce mauvais résultat s'explique difficilement, même si l'analyse des erreurs conduit aux mêmes constatations que précédemment. Les réponses sous forme de quadrant traduisent le remplacement des nombres par leur signe en se limitant éventuellement à un demi-axe positif (x ou y). La réponse correspondant au demi-axe y négatif est plus surprenante!

6) x . y > 0 : C'est l'item le mieux réussi avec deux tiers de bonnes réponses. Si on trouve près de 5 % de réponses qui se limite au premier quadrant, traduisant encore une fois la méconnaissance des nombres négatifs il faut noter les réponses donnant les deux demi-axes positifs et celles donnant les deux axes qu'il vaut sans doute mieux interpréter comme les deux demi-axes positifs et les deux demi-axes négatifs; il s'agit de la confusion entre les points et une de leurs coordonnées quand celles-ci interviennent séparément. On peut en effet imaginer le "raisonnement" suivant : "abscisse et ordonnée de même signe $\Longrightarrow$ ($x > 0$ et $y > 0$) ou ($x < 0$ et $y < 0$) $\Longrightarrow$ (demi-axe x positif et demi-axe y positif) ou ...", "raisonnement" mené plus ou moins jusqu'au bout!

5.— LA DISTINCTION Y = X et Y = -X

Cette notion se retrouve dans les deux premiers exercices et il a semblé intéressant de comparer les résultats.

$y = x$ est trouvé par environ 50 % des élèves aussi bien dans le premier que dans le deuxième exercice, cependant seuls 111 élèves (soit 30 %) réussissent simultanément les deux exercices sur cette notion.

Par contre, si dans le premier exercice $y = -x$ atteint un score d'environ 40 %, il tombe à moins de 30 % dans le deuxième et seuls 63 élèves (17 %) réussissent simultanément les deux exercices sur cette notion.

Si maintenant on compare les erreurs relatives à ces deux notions, on trouve dans le premier exercice que l'erreur se fait essentiellement par assimilation de $y = \pm x$ à $y = x$ puisque 20 % des élèves donne la réponse $y = x$ à la place de $y = -x$

alors que seuls 7 % d'entre eux donne $y = -x$ au lieu de $y = x$ (l'erreur la plus fréquente à ce niveau étant $y \geq x$ réponse donnée par un élève sur sept!?).

On peut aussi noter que 118 élèves, soit le tiers, donne la réponse correcte aux deux items à la fois du premier exercice tandis que pour le deuxième exercice on en trouve 96, soit un peu plus du quart. Une étude plus approfondie montre que la réussite à $y = -x$ dans un des exercices comme dans l'autre, est un bon "prédicteur" de la réussite à $y = x$.

6.— RÉSULTATS DU QUATRIÈME EXERCICE

On a coutume de répéter que les mathématiques développent l'esprit logique. Mais de quelle logique s'agit-il? Il est connu que la logique mathématique, essentiellement binaire (du moins au stade où on l'enseigne) n'est qu'une faible partie de la logique que l'on peut mettre en œuvre dans les raisonnements quotidiens. En ce sens la logique mathématique devrait être plus simple et par suite d'accès plus facile pour les élèves. Or, que constatons nous?

* **Les hypothèses** ne sont entièrement reconnues que par une petite moitié des élèves et on ne dépasse la moyenne que si on ajoute les élèves qui n'ont cité qu'une des deux hypothèses. Cependant un peu plus d'un élève sur cinq (23,5 %) cite la conclusion parmi les hypothèses. Le rôle de la phrase "Soit O le centre du parallélogramme" est plus ambigüe, mais n'étant citée que par 19 élèves, cela ne modifie pas beaucoup les résultats d'ensemble.

* **Les conclusions intermédiaires** ne sont reconnues comme telles que par 6 % des élèves. En fait il y avait 5 conclusions intermédiaires à citer et 82 élèves (22,5 %) en ont cité au moins 4 et 208 (57,5 %) au moins une.

Cependant 105 (29 %) ont en général cité une hypothèse et quelquefois la conclusion générale. Cela fait quand même un pourcentage important que nous ne pouvons négliger.

* **Les théorèmes :** Un nombre infime d'élèves a vu les quatre propriétés utilisées. Reconnaissons que ce n'est pas évident car la démonstration proposée n'y fait que des allusions. Mais la majorité des élèves ne cite qu'un ou deux théorèmes ce qui correspond à une analyse très superficielle. Il se trouve cependant un quart des élèves pour inventer ou citer des théorèmes qui les arrangent (PYTHAGORE, THALÈS, ...).

* **La démonstration** n'est achevée que par 11 élèves, score ridiculement bas, mais peut-être, osons l'espérer, est-ce manque de temps puisqu'il y a quand même 40 % de réponses correctes pour la position du point K. Preuve que les élèves n'ont pas tout oublié du cours de maths, quant à faire une démonstration c'est autre chose!

Les mathématiques étant la science de la démonstration, il est certain que la réussite à ce quatrième exercice paraît primordiale pour la compréhension de l'enchaînement logique des démonstrations du cours. La distinction entre hypothèses et conclusions, la reconnaissance des théorèmes utilisés, ... semblent

être des préalables à une saine activité mathématique.

HYPOTHÈSES	les 2 réponses justes	176	48,6 %	56,9 %
	une réponse juste	30	8,3 %	
	O centre du parallélogramme	19	5,3 %	
	la conclusion générale	85	23,5 %	29,0 %
	une conclusion intermédiaire	20	5,5 %	
	phrase mal coupée	18	5,0 %	
	absence de réponse	14	3,9 %	
CONCLUSIONS	les 5 réponses justes	23	6,4 %	57,5 %
	4 réponses justes	59	16,3 %	
	1, 2 ou 3 réponses justes	126	34,8 %	
	une hypothèse	105	29,0 %	35,4 %
	O centre du parallélogramme	23	6,4 %	
	phrase mal coupée	14	3,9 %	
	absence de réponse	12	3,3 %	
THÉORÈMES	les 4 réponses justes	10	2,8 %	57,2 %
	3 réponses justes	15	4,1 %	
	1 ou 2 réponses justes	182	50,3 %	
	théorème sans rapport	73	20,2 %	24,6 %
	théorème inventé	16	4,4 %	
	absence de réponse	66	18,2 %	
RÉSULTATS	réponse 1/3 ou 2/3	147	40,6 %	
	dont réponse justifiée	11	3,0 %	
	réponse fausse	61	16,9 %	
	absence de réponse	154	42,5 %	

Malgré ses imperfections, le test que propose cet exercice met en évidence la faillite de l'enseignement de la démonstration dans les classes antérieures (mais qu'en est-il en terminale?). Or, différents travaux (ceux de l'école piagétienne, par exemple) montrent que l'élève de 15 – 16 ans est capable de comprendre ce qu'est une démonstration. D'où vient alors qu'il ne sache pas en reconnaître les articulations? On pourra consulter à ce propos les articles de M.-A. EGRET et R. DUVAL dans le volume 2 des "*Annales de didactique et de sciences cognitives*" (1989) (*).

7.— CONCLUSION PROVISOIRE

Nous n'avions pas l'intention de faire œuvre de didacticien mais de réfléchir à notre pratique enseignante et de faire réfléchir l'ensemble des collègues. Ce but là est certainement atteint.

Il reste à savoir comment exploiter ces résultats dans nos classes respectives. Dans quelle direction agir pour telle classe qui réussit plus mal que d'autres tel ou tel item?

En particulier certaines des classes les plus faibles en mathématique (option gestion ou médico-social) ont une bonne réussite aux deux premiers items de l'exercice 4. N'y a-t-il pas là amorce d'une approche nouvelle pour faire comprendre à ces élèves ce que sont les mathématiques et les réconcilier avec une certaine pratique du raisonnement logique utilisé dans notre discipline? C'est sans doute en ce sens que nous continuerons à travailler.

(*) En vente à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg, 70 F (port compris). (Pour rappel : vol. 1 : 60 F et vol. 3 : 70 F (port compris toujours))