OVALES À DEUX POINTS ISOCORDES?

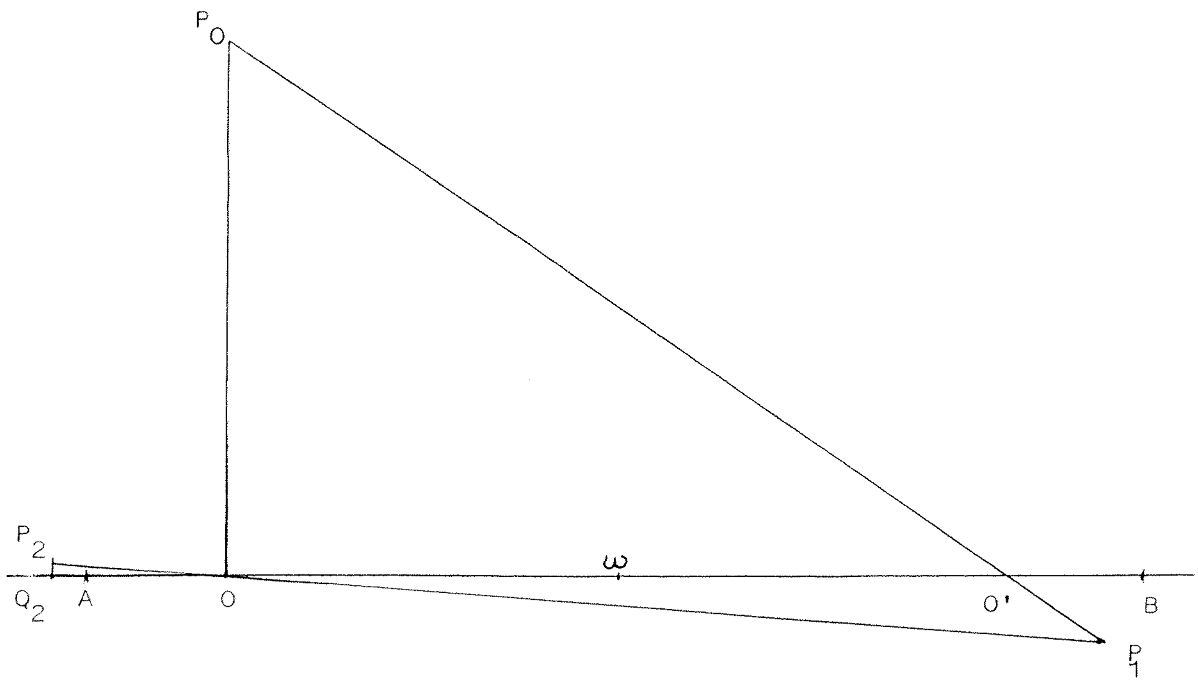
Eugène EHRHART

Un ovale est une courbe convexe fermée. Un point intérieur est **isocorde** si toutes les cordes qui y passent sont égales. On sait qu'il y a une infinité d'ovales possédant un tel point. Le cercle par exemple, ou le limaçon de PASCAL dans le cas convexe ($\frac{d}{a} \leq \frac{1}{2}$ dans l'équation polaire $r = d \cos\theta \pm a$).

Un ovale peut-il avoir deux points isocordiaux O et O' ? (La longueur constante de la corde est la même pour les deux points, car c'est celle de leur corde commune AB.) Posée par P. ERDÖS depuis plus d'un demi-siècle, la question reste ouverte. Voir "*Problèmes non résolus*", livre assez récent de Stanley OGILVY.

En 1952 G.-A. DIRAC prouve dans le "*Journal of the London math. soc.*", pp. 429–439, que pour un tel ovale, la droite AB serait un axe de symétrie et le milieu commun ω de OO' et AB serait centre de symétrie. L'excentricité $e = \frac{\omega O}{\omega A}$ serait inférieure à $\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$ (car OP_0 étant une demi-corde perpendiculaire à $AB = a$ en 0, $OP_0 = a/2$ et $O'P_0 < a$). DIRAC pense qu'il n'existe pas d'ovale biisocordial.

Nous allons voir que cette conjecture est probablement exacte.



Les points A, O, O', B se suivent dans cet ordre sur AB. En portant $P_0P_1 = a$ sur la demi-droite P_0O', on obtient un autre point P_1 de l'ovale. Le report de $P_1P_2 = a$ sur la demi-droite P_1O donne un point P_2 et ainsi de suite.

Soit Q_i la projection orthogonale de P_i sur la droite AB. Comme dans notre figure, Q_2 est extérieur au segment AB, on peut arrêter la construction : la courbe ne peut être convexe. Pour la valeur correspondante de e il n'existe donc pas d'ovale convenable.

Soit $\omega A = a/2 = 10$ cm. Un programme établi pour l'ordinateur par François PLUVINAGE donne **le point d'arrêt** Q_j pour quelques excentricités échelonnées de 0,85 à 0,10 :

e	j	ωQ_j (cm)
0,85	2	11,260
0,80	2	11,028
0,40	4	10,028
0,35	6	10,014
0,30	8	10,004 006
0,25	10	10,000 409
0,20	16	10,000 039
0,15	28	10,000 000 439
0,10	62	10,000 000 000 028

On constate que $\omega Q_j > \omega A$ pour toutes les valeurs e de la liste : **pour ces e il n'existe pas d'ovale convenable**, la courbe ne pouvant être convexe.

Pour $e < 0,10$ le calcul de j est délicat. Il semble pourtant que pour ces valeurs il n'existe pas non plus d'ovale convenable.

Si quelqu'un pouvait **démontrer** que ωQ_j décroît avec e et tend vers 10 si e tend vers zéro, la preuve de l'inexistence d'un ovale biisocorde serait faite.