DU BON USAGE D'UN TRACEUR DE COURBES POUR ÉCLAIRER CERTAINS CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Gérard KUNTZ

Le logiciel GRAPHIX, commercialisé par l'IREM de Marseille est un traceur de courbes dont la prise en main ne nécessite aucune connaissance en informatique. En moins d'une heure, une classe de seconde peut commencer à faire des mathématiques avec cet outil qui l'accompagnera tout au long de sa scolarité en lycée et au-delà. Voici quelques séquences pédagogiques qui ont été expérimentées avec succès avec des élèves du lycée Couffignal de Strasbourg. Leur durée varie de quelques minutes à deux heures. Certaines de ces séquences peuvent être traitées sur calculatrices avec écran graphique.

a) Tracé de courbes point par point. Variations de fonctions

Il suffit d'introduire la fonction, de choisir les unités, la position de l'origine, l'intervalle d'étude et voilà que la courbe se dessine. C'est tellement simple que l'élève de seconde a vite fait d'imaginer que dans ce domaine, l'informatique le déchargera à l'avenir de toute étude de fonction. Il convient de le détromper dès le début de l'année.

Trois types de contre-exemples mettent en évidence les limites du genre : les fonctions présentant des changements de variations sur un très petit intervalle, la représentation de fonctions sur de grands intervalles, enfin des fonctions du type $f(x) = \sin(1/x)$ sur un intervalle dont un bord est voisin de zéro.

On demandera par exemple aux élèves de tenter de dresser le tableau de variation de $f(x) = x\hat{}3 + 0.001001 * x\hat{}2 + 1E - 9 * x + 0.5$ au seul vu du tracé de la courbe. Après cette séquence, on conduira les élèves par un raisonnement simple à zoomer sur un intervalle où les surprises apparaîtront.

On proposera ensuite la représentation de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; 5000]$ par exemple. Il suffit de faire varier le nombre de points pour obtenir des tracés apparemment cohérents ... mais faux et contradictoires, si l'on relie les points (voir les figures). On prendra bien entendu le temps d'expliquer cette pseudo-cohérence, calculatrice en main.

La fonction $f(x) = \sin(1/x)$ permet à peu de frais de faire apparaître à l'écran un nuage de points sur un petit intervalle voisin de zéro, puis de retrouver une cohérence en réduisant l'intervalle.

De cet ensemble de travaux sur ordinateur les élèves concluront qu'un tracé de courbes par points ne fournit aucune certitude : entre deux points quelconques,

© L'OUVERT 60 (1990)

aussi voisins soient-ils, tout peut arriver, même si habituellement les choses se passent bien.

On profitera de cette séquence pour montrer que si l'on réduit l'intervalle d'étude, les tracés ressemblent fort à des segments : l'interpollation linéaire en découle naturellement.

b) Approximation d'une fonction par des fonctions simples

Cette séquence, particulièrement spectaculaire utilise la facilité de superposition des tracés qu'offre GRAPHIX. On commence par tracer la courbe du sinus dans $[0; 2\pi]$, puis les représentations des polynomes de degré $1, 3, 5 \ldots 15$ qui constituent les approximations de TAYLOR. Sur l'écran, on comprendra une fois pour toutes ce que signifie l'expression : la fonction g est une approximation de f dans tel intervalle. La notion d'intervalle de validité saute aux yeux. De nombreux exemples peuvent être mis en œuvre, sans justification, en seconde ou première, avec justification après certains T.P. de terminale. En section BTS ou à l'université, l'approximation d'une fonction par une série de FOURIER permettra aux étudiants de voir concrètement le sens des théorèmes qui leur sont proposés. Il suffit de quelques minutes pour avoir les tracés sous les yeux.

c) Tangente à une courbe plane en un point

On commence par représenter la courbe d'une fonction dans un intervalle donné. Par un point fixe et par un point variable de cette courbe, on fait passer une droite dont les élèves établiront l'équation, qui dépend du paramètre k, abscisse de ce point variable. GRAPHIX offre la possibilité d'utiliser un paramètre qui peut prendre 25 valeurs distinctes. Il suffira de prendre pour k des valeurs de plus en plus voisines de l'abscisse du point fixe pour voir apparaître une famille de droites tendant vers une position limite. Les contre-exemples feront appel à des courbes présentant un point anguleux, ou à la courbe de $f(x) = x * \sin(1/x)$ prolongée par l'origine.

d) Étude d'une famille de fonctions dépendant d'un paramètre

On pourra utiliser les facilités offertes par GRAPHIX pour représenter des familles de fonctions dépendant d'un paramètre : des propriétés apparaissent, donnant naissance à des conjectures que l'on s'emploiera à démontrer (point commun, tangente commune). Cette démarche est essentielle dans une formation scientifique où des phénomènes dépendant de paramètres sont le pain quotidien.

e) Limites et prolongement par continuité

Cette séquence, particulièrement importante, illustre parfaitement les services rendus par l'informatique aux mathématiques, et leurs évidentes limites. Les nombres positifs disponibles dans un logiciel constituent un intervalle $[a, b]$ de décimaux, a étant voisin de zéro, b étant très grand mais fini.

La notion de limite à l'infini ou en zéro est donc inaccessible à tout logiciel. Par exemple TURBO PASCAL travaille dans l'intervalle $[1E - 38, 1E + 38]$. Ce "*détail*" mis à part, on peut se faire une idée de la manière dont évolue une fonction à l'infini ou en zéro en donnant à la variable des valeurs voisines de zéro ou très grandes : le résultat est souvent correct, mais de nombreuses erreurs apparaissent, qu'il convient d'expliquer. L'exemple de $f(x) = (1+1/x)\hat{}x$ à l'infini est significatif : après s'être approché de e, les valeurs sautent brutalement à 1. On ne peut que conjecturer avec l'informatique, ensuite il convient de démontrer.

Pour réaliser les prolongements par continuité d'une fonction f en 0, il suffit de représenter f sur $]0,1]$: le prolongement est fait automatiquement ... aux risques et périls de l'utilisateur.

f) Variations d'une fonction et signe de la dérivée

GRAPHIX fournit à l'utilisateur la possibilité de tracer automatiquement la courbe de la fonction dérivée d'une fonction f. On mettra sans peine en évidence les rapports entre les variations de f et le signe de f'.

g) Études de transformations ponctuelles

Cette séquence utilise une très remarquable possibilité de GRAPHIX. Soit une courbe C1 définie en coordonnées cartésienness, paramétriques ou polaires. On peut définir une courbe C2 en coordonnées paramétriques par les formules :

$$x = f(x1, y1) \ ; \ y = g(x1, y1) \qquad (1)$$

Le logiciel interprète $x1$ et $y1$ comme les coordonnées d'un point de C1 et trace donc l'image de C1 par la transformation ponctuelle définie par les formules (1).

On pourra alors passer en revue l'ensemble des transformations ponctuelles du lycée, vérifier leurs propriétés, ou émettre des conjectures. Au cours d'un T.P. préparatoire, on pourra décrire les transformations ponctuelles par des formules de type (1) pour celles qui ne sont pas au programme sous cette forme.

On pourra aussi exhiber sans peine des exemples de transformations qui ne sont pas aussi simples que celles du programme, et qui finissent par donner l'impression aux élèves que l'image d'un cercle ne peut être qu'un cercle et que celle d'une droite ne saurait différer d'une droite ... On obtient un franc succès en transformant une droite en cercle ou un cercle en droite. Cela justifie les efforts de démonstrations qui finissent par lasser les élèves non avertis des bizarreries qu'offrent des transformations décrites par des formules relativement simples.

On pourra sans peine composer des transformations, mettre en évidence leurs invariants.

Enfin, on pourra étudier des familles de transformations dépendant d'un paramètre (homothéties de centre A, de rapport k) et conjecturer à propos des propriétés de la famille d'images de la courbe initiale.

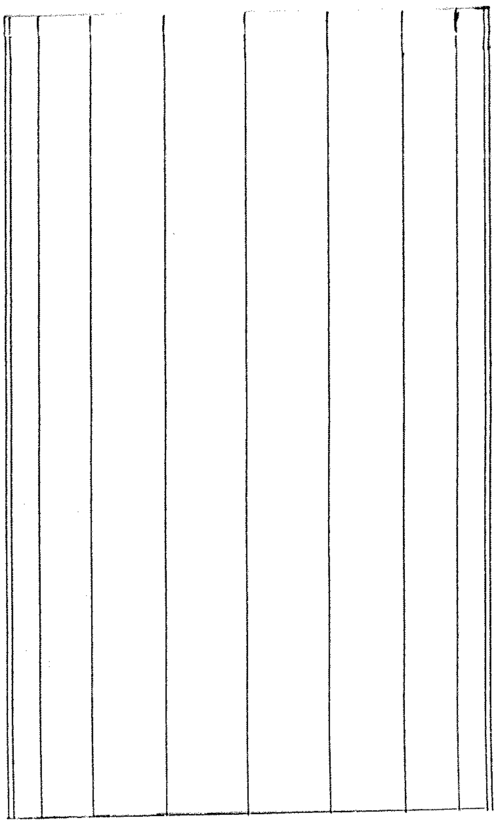
h) Courbes paramétrées. Lieu de points

Il suffit d'introduire les formules et l'intervalle, ainsi que les unités, et la courbe se dessine. Cela permet en particulier de visualiser un ensemble de points dépendant d'un paramètre. Les séquences g et h constituent une approche complémentaire à celle du "*Géomètre*" de Nathan dont le point de vue est résolument géométrique.

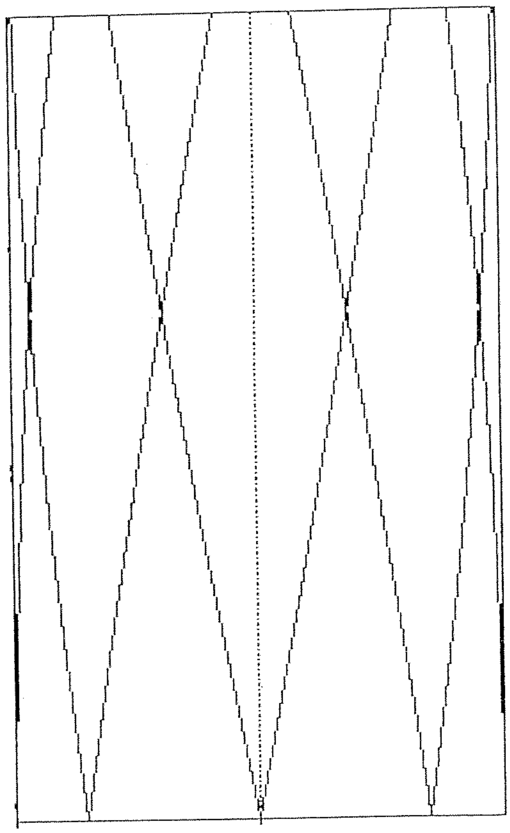
Conclusion

Ce logiciel constitue un remarquable outil au service des enseignants et des élèves pour préparer l'étude théorique des notions mathématiques, et pour conjecturer. Ce qui est décrit plus haut est loin d'être exhaustif. Les mises en gardes étant faites, les élèves sont rapidement habiles pour en tirer parti, sachant que rien ne pourra remplacer le travail conceptuel et la démarche démonstrative.

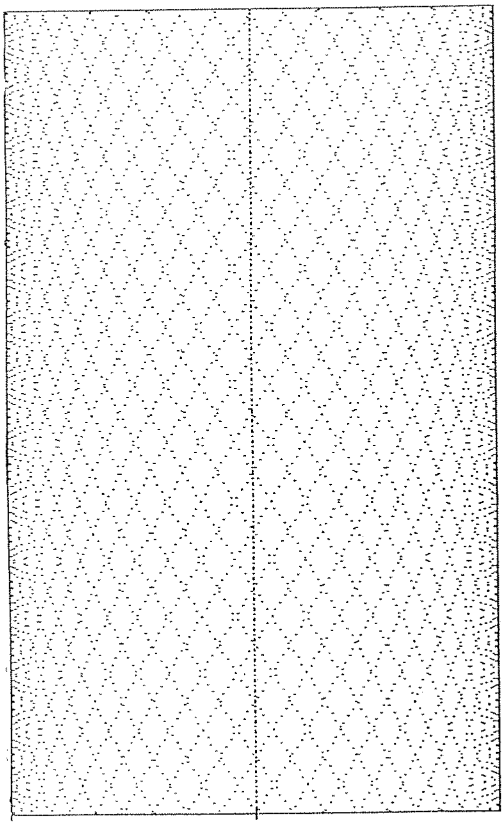
Représentation de $f(x) = \sin x$ sur $[0; 5000]$
avec les pas indiqués
(Logiciel GRAPHIX)



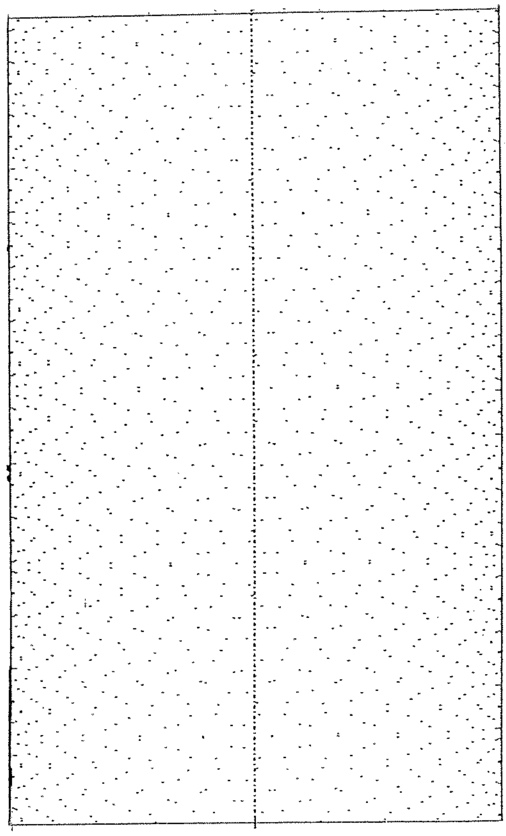
pas = 0.34906585 $\simeq \frac{\pi}{9}$



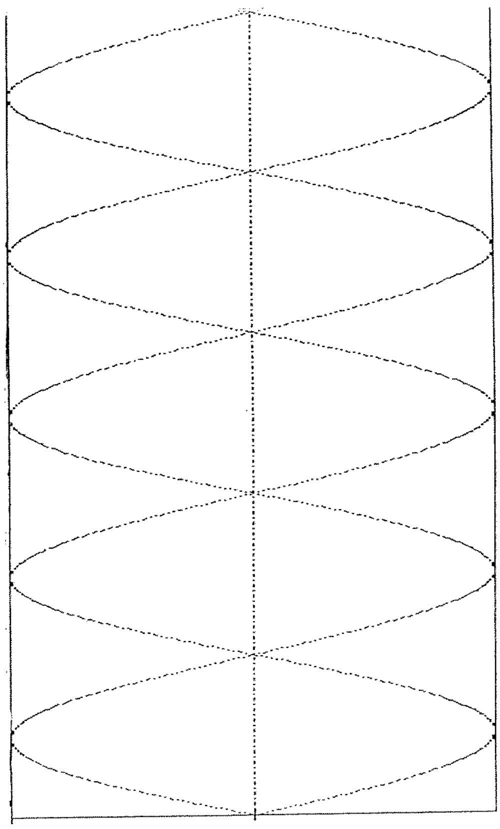
pas = 6.7853 $\simeq \frac{\pi}{4}$



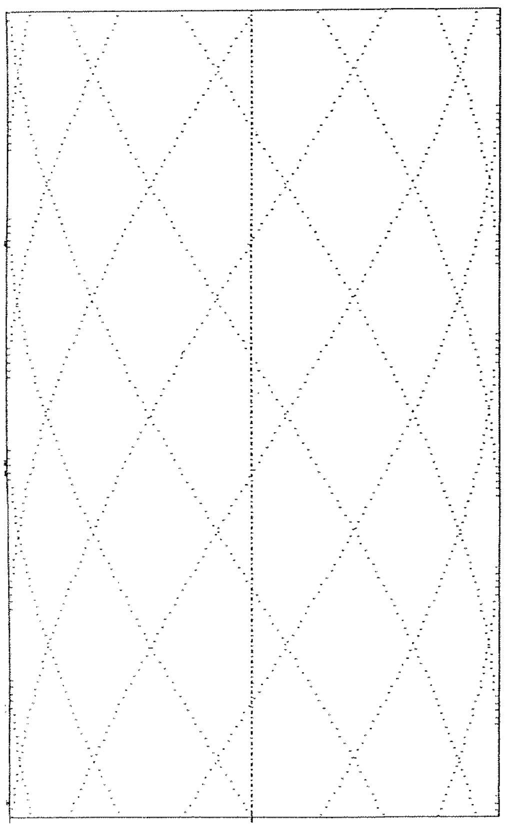
pas = 1



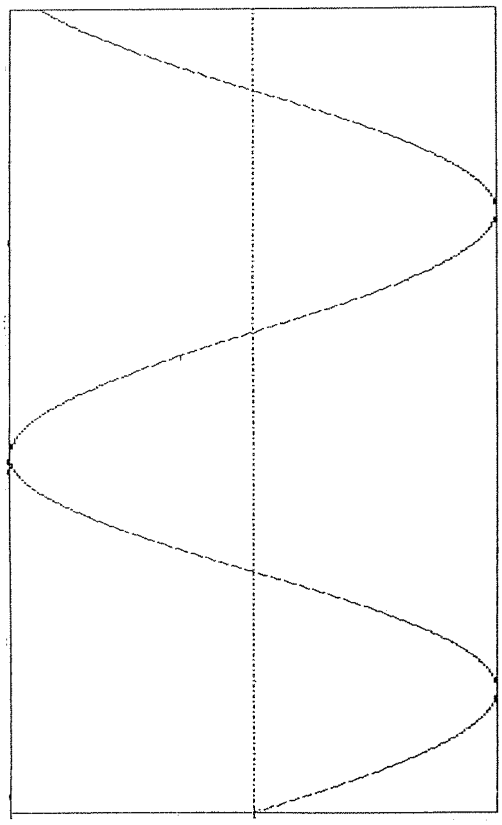
pas = 3



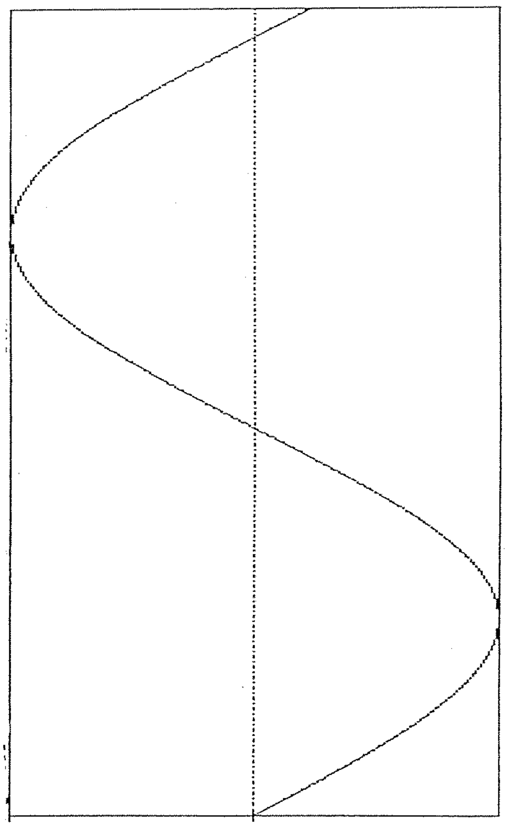
pas = 3.15159



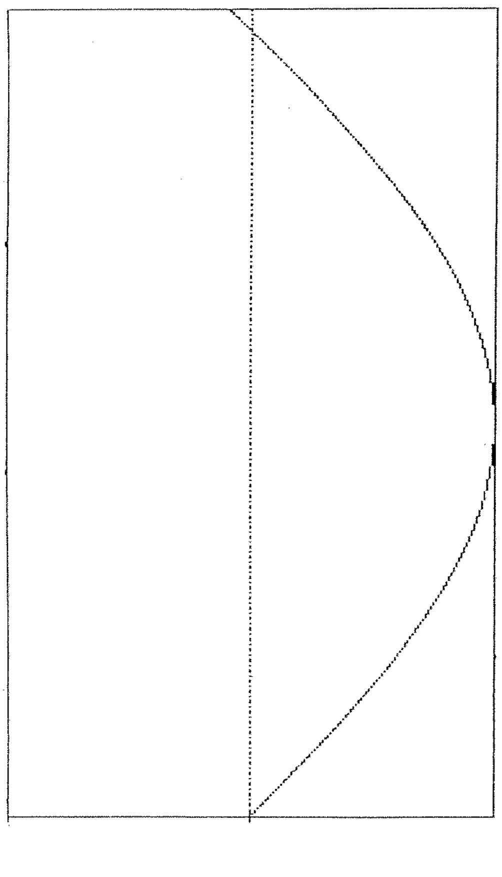
pas =4



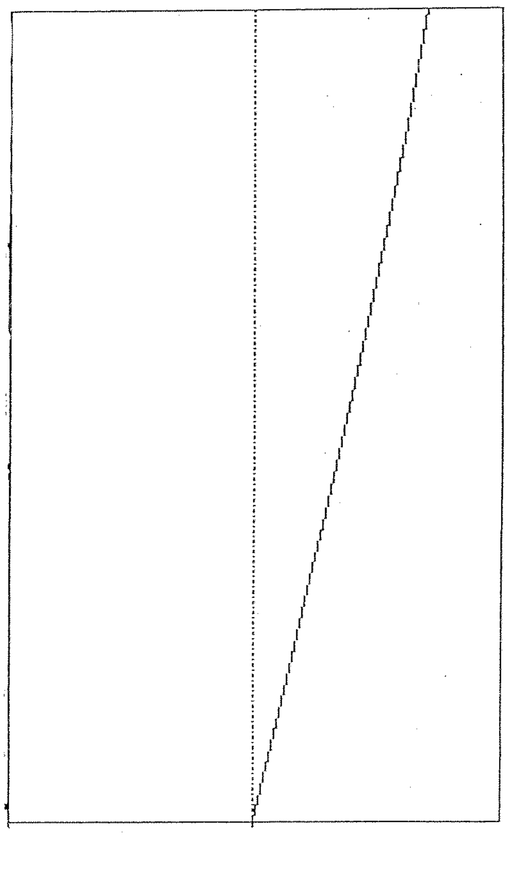
pas = 6.27



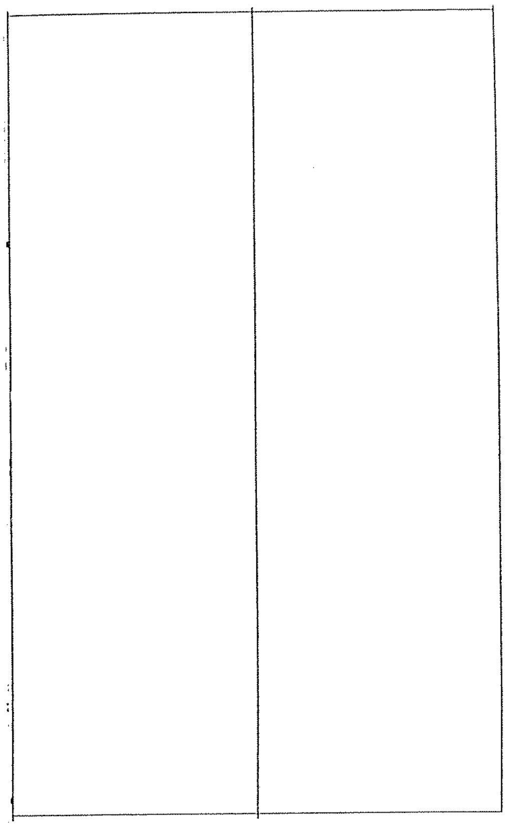
pas = 6.275



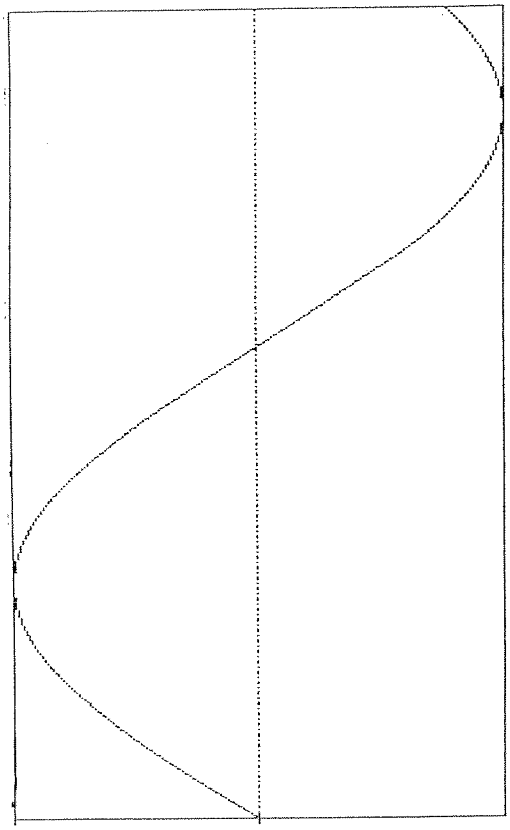
pas = 6.27912



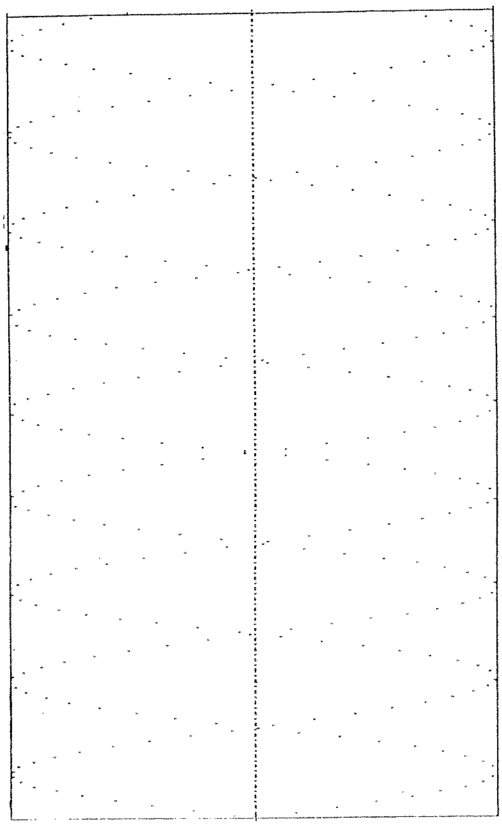
pas = 6.2822



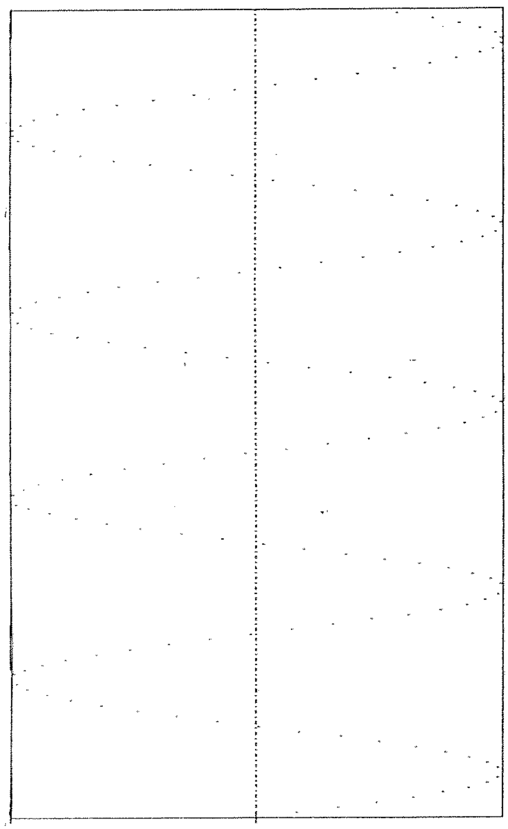
pas $= 2\pi$



pas $= 6.29$



pas $= 15.621$



pas $= 2 \times 15.621 = 31{,}242$