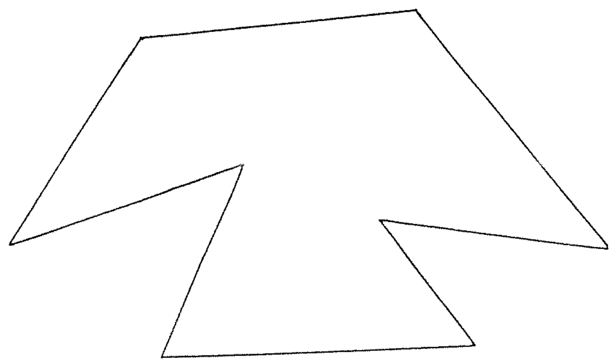
QUADRATURES SANS INTÉGRALES NI CALCULS

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Le mot QUADRATURE est l'un des rares mots du vocabulaire mathématique à être passé dans le langage courant, mais utilisé seulement dans l'expression "QUADRATURE DU CERCLE" pour signifier un problème impossible à résoudre. Ainsi J.-J. ROUSSEAU dans une lettre à MIRABEAU :

> *"Voici dans mes vieilles idées, le grand problème en politique, que je compare à celui de la quadrature du cercle en géométrie et à celui des longitudes en astronomie : trouver une forme de gouvernement qui mette la loi au-dessus de l'homme "*

Est-il utile de rappeler qu'à l'origine, la QUADRATURE d'une surface désignait la construction géométrique d'un carré équivalent (1) à la surface donnée? On utilise aussi le mot QUARRER une surface, du latin QUADRARE : rendre carré. Par exemple QUARRER la surface ci-dessous?



D'où aussi les problèmes célèbres en histoire des mathématiques comme la QUADRATURE de la parabole par ARCHIMÈDE et surtout le fameux problème déjà évoqué de la QUADRATURE du cercle : construire un carré équivalent à un cercle donné (sous-entendu, à la règle et au compas). Peu de problèmes ont suscité autant de recherches, fait dépenser autant d'énergie à trouver sa résolution, moins au total par des mathématiciens de qualité, que par une foule de gens incompétents et superstitieux pour qui la résolution de ce problème représentait une sorte de pierre philosophale capable de donner la clef de la compréhension de l'Univers. Au point qu'en 1754 MONTUCLA éprouva le besoin de publier une

"HISTOIRE des RECHERCHES sur la QUADRATURE du CERCLE"
"Ouvrage propre à instruire des découvertes réelles faites sur ce problème célèbre, et à servir de préservatif contre de nouveaux efforts pour le résoudre".

(1) Dans tout cet article, je qualifierai d'équivalentes deux surfaces de même aire.

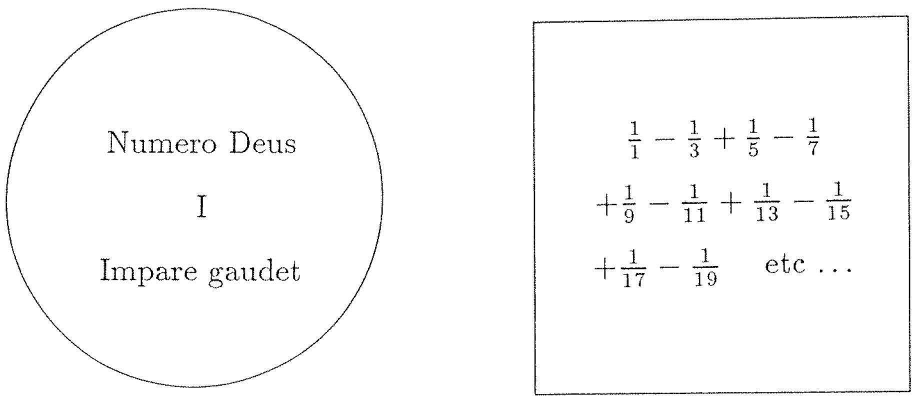
N'est-il pas significatif à cet égard qu'un esprit aussi puissant que LEIBNIZ présente sous la forme suivante sa découverte de la somme de la série

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

dans un article de 1682 :

> "*De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa* "

(Expression en nombres rationnels, de la proportion exacte entre un cercle et son carré circonscrit.)



> "*Le carré du Diamètre étant 1, l'aire du cercle sera*
> $$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{17}-\tfrac{1}{19}\quad etc\ldots=$$ "

Aujourd'hui la situation a bien changée, au point que l'on en vient à avoir complètement perdu le sens même du mot QUADRATURE qui est devenu synonyme d'intégration. Par exemple voici la définition donnée par le DICTIONNAIRE des MATHÉMATIQUES de A. BOUVIER et M. GEORGE (éd. P.U.F.) :

> QUADRATURE : calcul d'une intégrale définie ou détermination d'une aire.

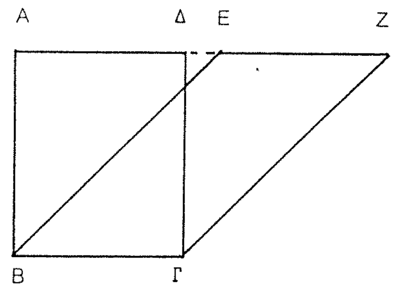
On peut regretter cette perte du sens originel pour nos élèves de collège et lycée qui n'ont ainsi plus l'occasion de faire la moindre quadrature avant la Terminale, et qui alors, ne recontrent plus ce problème qu'en termes de calcul intégral. L'objet de cet article est de présenter quelques activités simples de quadrature pour des élèves de niveau collège ou de Seconde. Elles ont leur source dans les deux premiers livres des ÉLÉMENTS d'EUCLIDE, et ne font donc appel qu'à des connaissances élémentaires et concrètes, tout en pouvant donner lieu à des problèmes relativement élaborés.

Voici les quelques propositions d'EUCLIDE nécessaires pour la suite. On remarquera que ces propositions sont purement géométriques, en ce sens qu'elles ne font appel à aucune formule numérique, pas même l'expression de l'aire d'un triangle comme demi produit d'une base par la hauteur correspondante. Tout est exprimé en termes de surfaces équivalentes.

LES PROPOSITIONS D'EUCLIDE - Livre I [(2)]

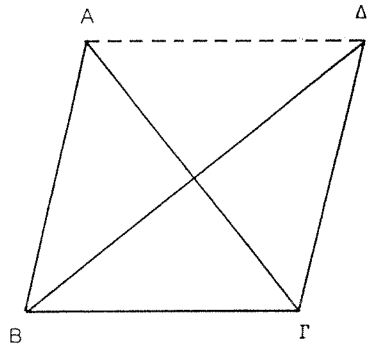
35. Les parallélogrammes construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux [(3)] entre eux.

36. Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.



37. Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

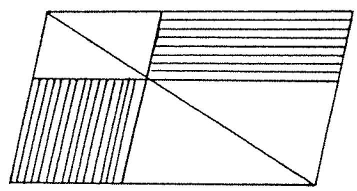
38. Des triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.



39. Les triangles égaux, construits sur la même base et placés du même côté, sont compris entre les mêmes parallèles.

40. Les triangles égaux, construits sur des bases égales et du même côté, sont entre les mêmes parallèles.

43. Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes autour de la diagonale sont égaux entre eux.



QUADRATURE D'UNE FIGURE RECTILIGNE

Principe

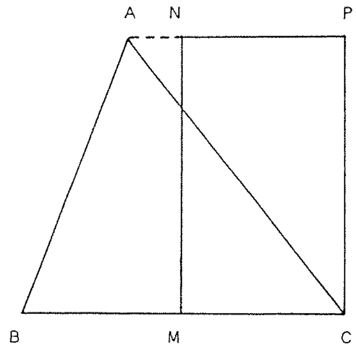
- on décompose la figure en triangles
- on transforme chaque triangle en un rectangle équivalent (construction C_1)

(2) Traduction de F. PEYRARD - Rééd. par Blanchard (1966).
(3) EUCLIDE dit "égaux" là où nous dirions équivalents.

- on transforme tous ces rectangles en des rectangles équivalents ayant tous une dimension commune de façon à obtenir un unique rectangle en les accolant (construction C_2)
- on transforme ce dernier rectangle en un carré équivalent (consctruction C_3).

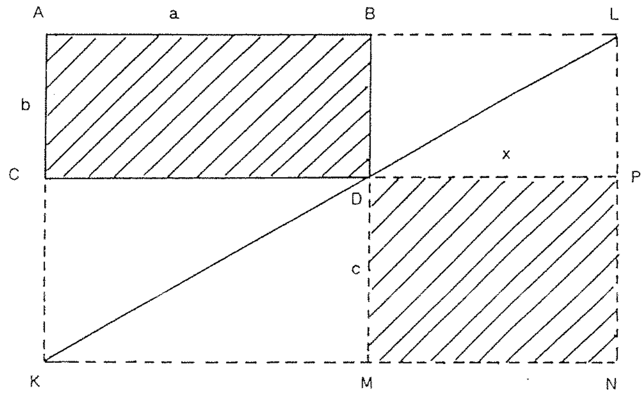
Construction C_1

Le triangle ABC est équivalent au rectangle $MNPC$ où M est le milieu de $[BC]$ (cf. EUCLIDE prop. I 36-38).



Construction C_2

Le rectangle (parallélogramme) $ABCD$ de côtés $a \times b$ est équivalent au rectangle $DMNP$ de côtés $c \times x$, c donné (cf. EUCLIDE prop. I 43).

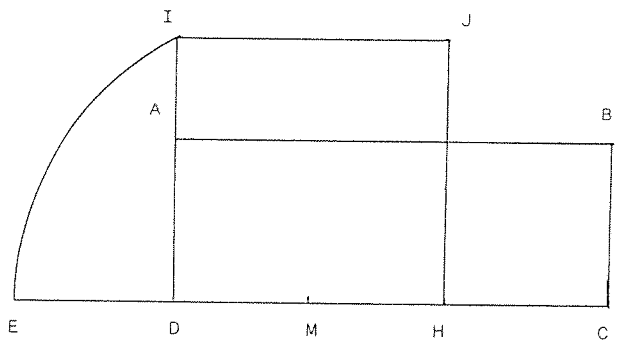


Construction C_3
(cf. EUCLIDE prop. II 14)

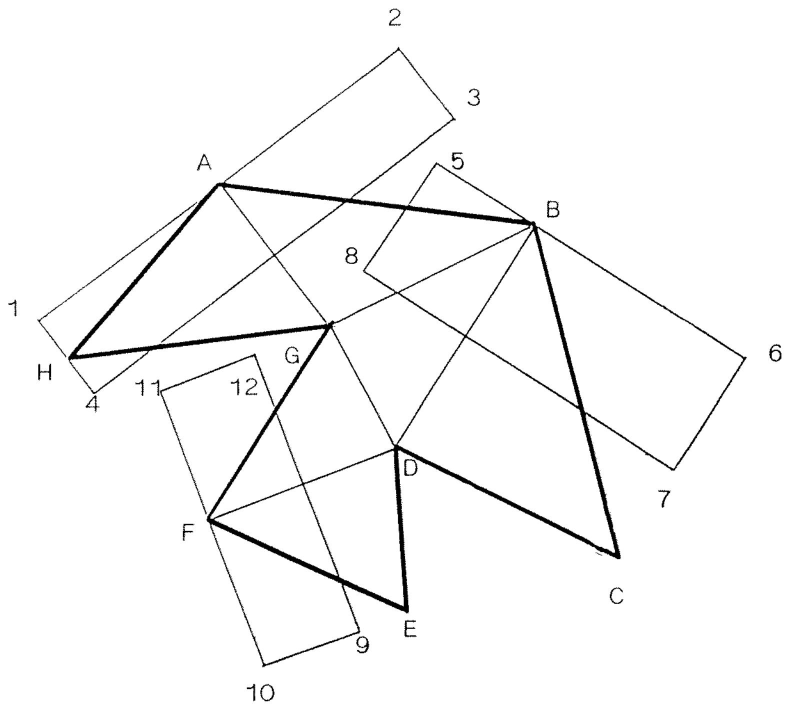
Le rectangle $ABCD$ étant donné, soit $DE = DA$ et M milieu de EC. Le demi cercle de centre M et de rayon ME coupe le prolongement de DA en I. Comme le triangle EIC est rectangle, on a

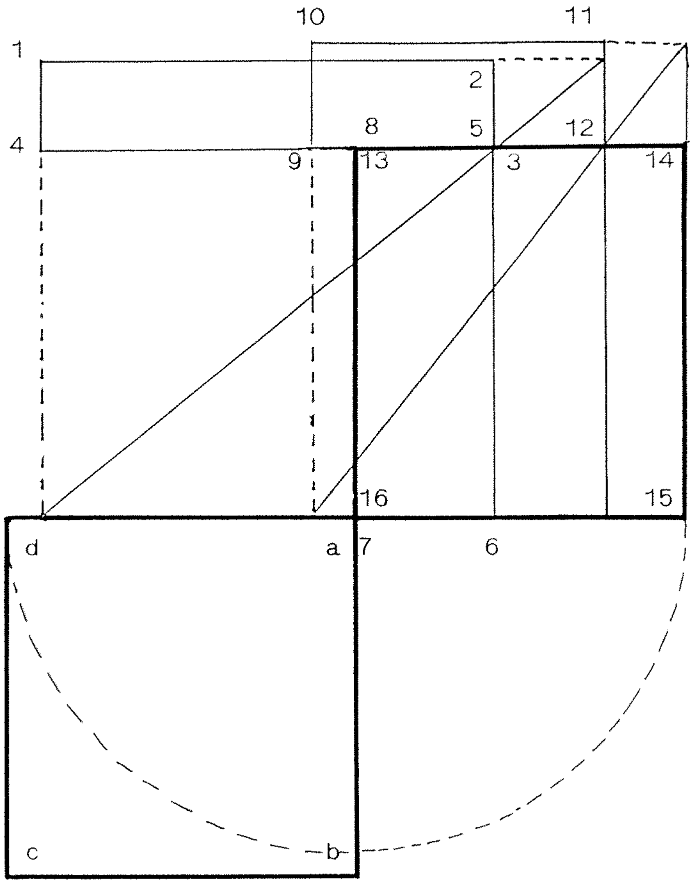
$$ID^2 = ED.DC$$

$$ID^2 = AD.AB.$$



ID est donc le côté du carré équivalent au rectangle. C'est l'ensemble de ces constructions qui ont été successivement réalisées pour la quadrature de la surface $ABCDEFGH$ sous la forme du carré $abcd$ (voir figure en face).


2
3
A
5
B
8
1
6
H
G
4
11
12
D
7
F
C
E
9
10

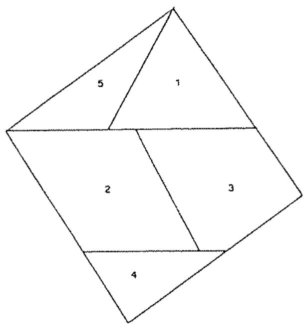

10
11
1
2
8
5
12
4
9
13
3
14
16
15
d
a
7
6
c
b

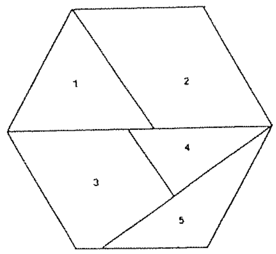
On s'est arrangé pour regrouper les six triangles constituant la surface deux par deux, selon une base commune ce qui donne les trois rectangles 1-2-3-4; 5-6-7-8; 9-10-11-12.

Les rectangles 1-2-3-4 et 9-10-11-12 sont transformés en rectangles dont l'un des côtés est égal à 5-6 pour former au total l'unique rectangle 13-14-15-16 sur lequel est alors effectué l'opération de quadrature de la construction C_3.

UN CASSE TÊTE (4)

On demande de découper un hexagone régulier en morceaux, qui réagencés autrement, donnent un carré (ou réciproquement).





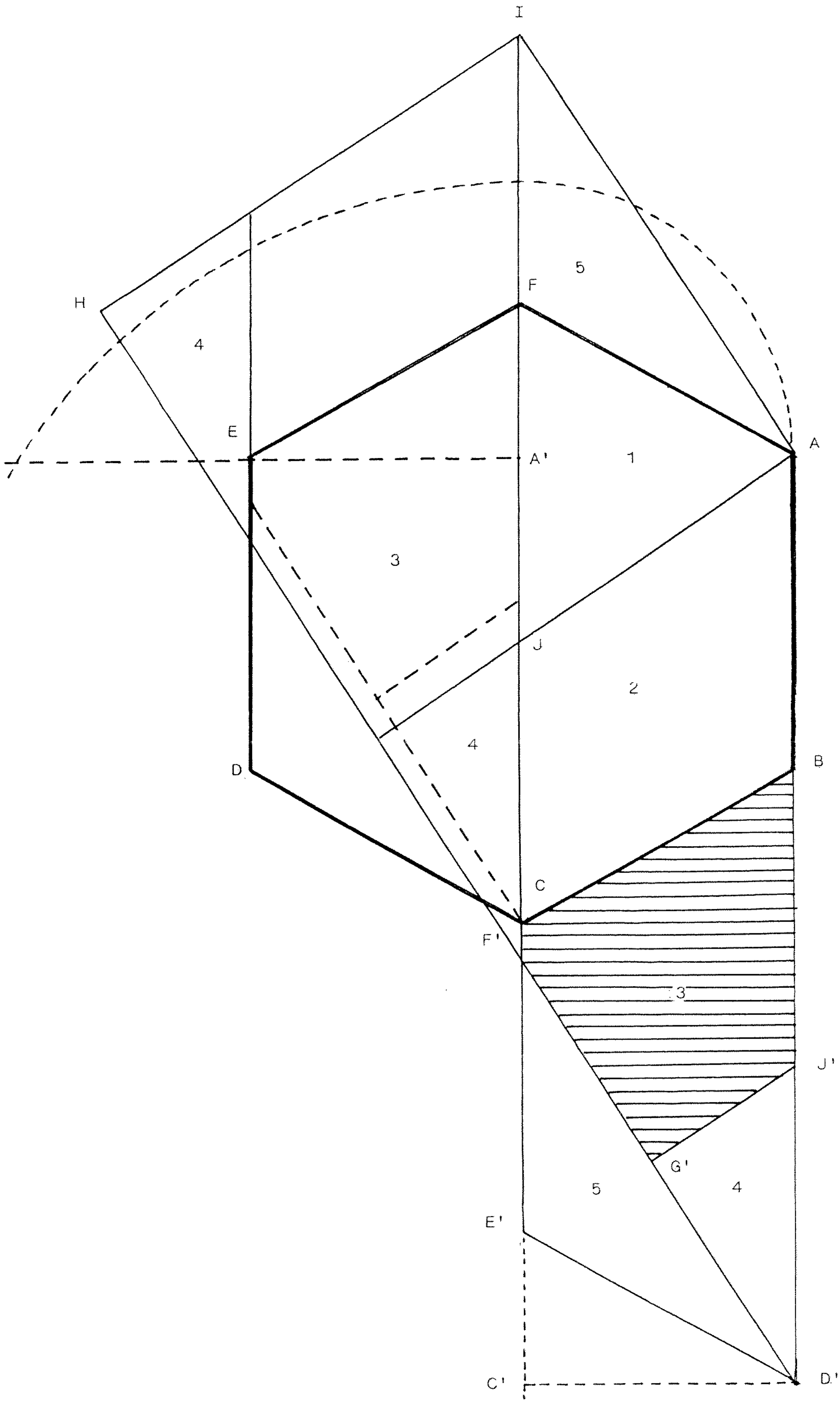
Solution (voir figure en face) : Soit l'hexagone régulier $ABCDEF$, équivalent au parallélogramme $AD'E'F$ ou au rectangle $AA'C'D'$. Transformons ce rectangle en un carré équivalent (quadrature) par la construction C_3 et plaçons ce carré selon $AGHI$, de façon que I soit sur la diagonale FC. Alors (EUCLIDE prop. I 40) comme le parallélogramme $AIF'D'$ est équivalent au carré $AIHG$ et qu'ils ont une base commune AI, ils sont entre les mêmes parallèles, c'est-à-dire que H, G, F', D' sont alignés. Soit $(J'G')$ parallèle à (AG) tel que $HG = GG'$. Nous mettons ainsi en évidence cinq morceaux numérotés 1-2-3-4-5 qui remplissent ensemble à la fois l'hexagone $ABCDEF$ et le carré $AGHI$, et exactement. On trouvera dans le livre de FOURREY de nombreux autres casses-têtes et puzzles de ce genre.

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE ET SES GÉNÉRALISATIONS

EUCLIDE donne deux démonstrations du théorème de PYTHAGORE dans ses ÉLÉMENTS, sans d'ailleurs jamais mentionner le nom de PYTHAGORE. (EUCLIDE ne mentionne aucun nom dans ses ÉLÉMENTS). La première est l'aboutissement du Livre I, proposition 47 et s'appuie essentiellement sur les propositions 36 à 40 rappelées plus haut.

Prop. 47 : "*Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit*".

(4) D'après E. FOURREY, Curiosités géométriques, Vuibert (1938) dont on ne saurait assez recommander la lecture.

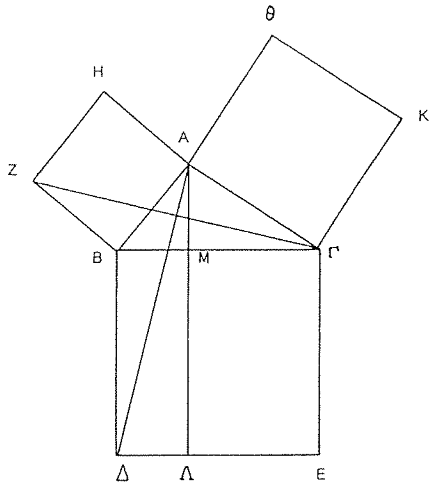

I
H
F
5
4
E
A'
1
A
3
J
2
4
D
B
C
F'
3
J'
G'
5
4
E'
C'
D'

Voici en abrégé la démonstration d'EUCLIDE :

Les triangles ΒΓΖ et ΑΒΔ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux respectivement.

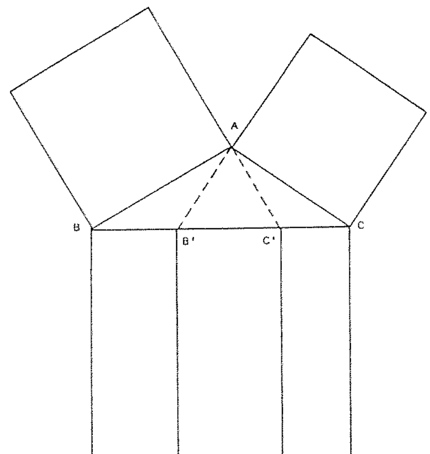
Or, le carré ΑΒΖΗ vaut le double du triangle ΒΓΖ, le rectangle ΒΔΛΜ vaut le double du triangle ΑΒΔ.

Ce rectangle est donc équivalent au carré ΑΒΖΗ.



De la même manière le rectangle ΓΕΛΜ est équivalent au carré ΑΓΚΘ. Ce qui démontre la proposition.

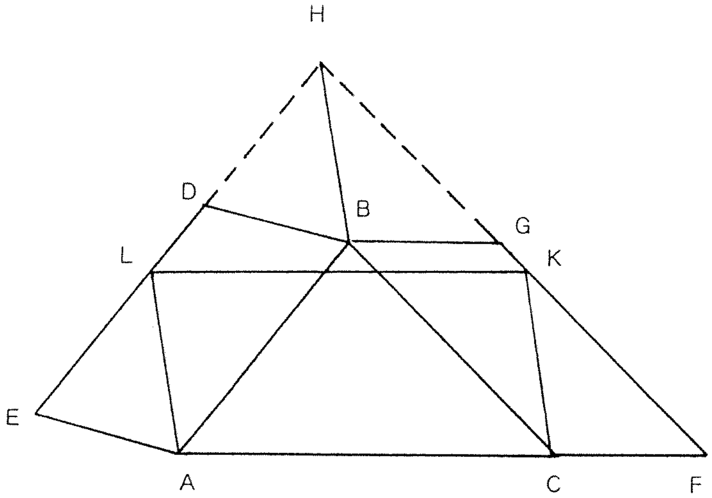
THABIT IBN-QURRA (826-901) donne une généralisation intéressante du théorème de PYTHAGORE, valable pour un triangle ABC quelconque. Soient sur $[BC]$ les points B' et C' tels que $\widehat{AB'B} = \widehat{AC'C} = \widehat{BAC}$. Alors, la somme des carrés construits sur AB et AC est égale à la somme des rectangles de côtés $BC \times BB'$ et $BC \times CC'$.



(Si l'angle en A est aigu, les rectangles $BDD'B'$ et $C'EE'C$ se chevauchent.)

Plus générale encore est la proposition suivante dûe à PAPPUS d'ALEXANDRIE (environ 320 après J.-C.).

Soit un triangle ABC **quelconque**, et $ABDE$, $BCFG$ deux parallélogrammes **quelconques** construits sur les deux côtés AB et BC. Soit H le point de rencontre de ED et FG. Si on mène par A et C les parallèles à BH, qui coupent respectivement (ED) et (FG) en L et K, alors le quadrilatère $ALKC$ est un parallélogramme équivalent à la somme des parallélogrammes $ABEH$ et $BCFG$.



Le lecteur en trouvera facilement la démonstration.

PARTAGER UN TRIANGLE EN TROIS TRIANGLES D'AIRES PROPORTIONNELLES À DES NOMBRES m, n, p, DONNÉS

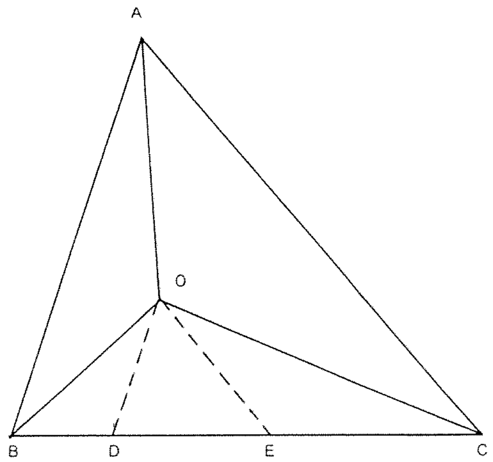
Enfin signalons cette autre application des propositions d'EUCLIDE dûe à Jordanus NEMORARIUS (environ 1260 ap. J.-C.) dans un livre intitulé "*De Triangulis*".

Problème : Le triangle ABC étant donné, ainsi que les nombres m, n, p; trouver un point O à l'intérieur du triangle tel que les triangles OAB, OBC, OAC soient proportionnels aux nombres m, n, p.

Et voici la solution très élégante et fort simple de NEMORARIUS.

Partageons le segment $[BC]$ en segments proportionnels à m, n, p selon les points D et E.

Menons par D et E les parallèles aux côtés AB et AC respectivement.



Le point O intersection de ces parallèles répond à la question. Là aussi, je laisse au lecteur le plaisir de justifier cette solution (la figure a été réalisée avec $m = 2$; $n = 3$; $p = 4$).