

A VOS STYLOS

PROBLÈME 13

Énoncé

Un réel x est algébrique si et seulement s'il existe des polynômes à coefficients entiers $P(u, v)$ et $Q(u, v)$ et des entiers u_0, v_0 tels que, en posant

$$u_{n+1} = P(u_n, v_n) \quad ; \quad v_{n+1} = Q(u_n, v_n)$$

on ait $v_n \neq 0$ pour tout n et $(u_n/v_n) \rightarrow x$, quand n tend vers ∞ .

Remarque de 'L'Ouvvert'

Plus généralement, on pourrait chercher à caractériser les nombres $x = \lim \frac{u_n}{v_n}$, où l'on a trois relations de récurrence

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(u_n, v_n, w_n) \\ v_{n+1} &= Q(u_n, v_n, w_n) \\ w_{n+1} &= R(u_n, v_n, w_n). \end{aligned}$$

Combien faut-il de relations de récurrence pour atteindre des nombres tels que e et π (sans parler de la constante γ d'EULER)? Ces questions semblent difficiles.

Solution de Pierre RENFER

1) Condition suffisante

Supposons que x est limite d'une suite (u_n/v_n) du type de l'énoncé. Il s'agit de prouver que x est algébrique. Si x est rationnel, c'est terminé! Si x est irrationnel :

a) Montrons d'abord que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n| = +\infty$

- Pour tout entier $q > 0$, posons :

$$A_q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq |b| \leq q \right\}.$$

L'ensemble A_q est une partie discrète de $\mathbb{R}$ et x est extérieur à A_q . Il existe donc un intervalle de centre x , de rayon $\varepsilon_q > 0$, ne contenant aucun élément de A_q .

- Comme $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$, il existe un entier n_q tel que :

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - x \right| < \varepsilon_q, \text{ pour tout } n \geq n_q.$$

Mais alors : $\frac{u_n}{v_n} \notin A_q$ et $|v_n| > q$, pour tout $n \geq n_q$.

b) • Soit $u^a v^b$ un monôme de degré $d = a + b$.

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^a v_n^b}{v_n^k} \text{ vaut } x^a \text{ si } k = d \text{ et vaut } 0 \text{ si } k > d.$$

Plus généralement, si $P(u, v)$ est un polynôme quelconque de degré d alors : $P(u, v) = H(u, v) + R(u, v)$, où H est la partie homogène de degré d , et R un polynôme de degré strictement inférieur à d .

Et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(u_n, v_n)}{v_n^k} \text{ vaut } H(x, 1) \text{ si } k = d \text{ et vaut } 0 \text{ si } k > d.$$

• Soient H et K les parties homogènes respectives de P et Q .

Si $H(x, 1) = 0$ ou $K(x, 1) = 0$, alors x est algébrique!

Si $H(x, 1) \neq 0$ et $K(x, 1) \neq 0$, alors P et Q ont le même degré.

En effet, si ce n'était pas le cas, en appelant d le plus grand des deux degrés, on pourrait écrire l'égalité (E) :

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{P(u_{n+1}, v_{n+1})/v_{n+1}^d}{Q(u_{n+1}, v_{n+1})/v_{n+1}^d}$$

et la valeur absolue du second membre tendrait vers 0 ou $+\infty$, alors que celle du premier membre tendrait vers $|x| \neq 0$.

Si d est donc le degré commun de P et Q , le passage à la limite dans l'égalité (E) donne :

$$x = \frac{H(x, 1)}{K(x, 1)}.$$

D'où : $xK(x, 1) - H(x, 1) = 0$. Ce qui prouve que x est algébrique!

2) Condition nécessaire

Réciproquement, supposons x algébrique. Il existe un polynôme f de $\mathbb{Z}[X]$ vérifiant : $f(x) = 0$. En remplaçant si nécessaire f par une de ses dérivées, on peut supposer $f'(x) \neq 0$.

• Construisons une suite (x_n) de réels par le procédé de NEWTON, c'est-à-dire :

$$x_{n+1} = g(x_n), \text{ avec } g(X) = \frac{X f'(X) - f(X)}{f'(X)}.$$

• Comme $g'(x) = 0$, il existe un intervalle $I =]x - \alpha, x + \alpha[$ sur lequel $|g'(X)|$ est majoré par $\frac{1}{2}$.

• Si le terme initial x_0 appartient à l'intervalle I , alors la suite (x_n) converge vers x , car :

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{2^n} |x_0 - x| \text{ (théorème des accroissements finis).}$$

A VOS STYLOS

- Choisissons pour x_0 un rationnel $\frac{u_0}{v_0}$ dans I (c'est possible!). Alors tous les termes x_n sont des rationnels $\frac{u_n}{v_n}$, les entiers u_n, v_n vérifiant les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = P(u_n, v_n) \text{ et } v_{n+1} = Q(u_n, v_n)$$

avec

$$P(u, v) = uv^{d-1} f'\left(\frac{u}{v}\right) - v^d f\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$Q(u, v) = v^d f'\left(\frac{u}{v}\right)$$

où d est le degré du polynôme $f(X)$.

3) Remarque

La méthode de NEWTON de la démonstration fournit explicitement les suites (u_n) et (v_n) et la convergence de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est très rapide.

Un exemple :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} \\ f(X) &= X^2 - 2 \\ g(X) &= \frac{2X^2(X^2 - 2)}{2X} = \frac{1}{2}\left(X + \frac{2}{X}\right) \end{aligned}$$

On retrouve l'algorithme babylonien

$$P(u, v) = u^2 + 2v^2 \text{ et } Q(u, v) = 2uv.$$

PROBLÈME 14 (proposé par D. DUMONT)

Enoncé

Démontrer l'égalité suivante pour $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \cdots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{7x^7}{1-x^7} + \cdots$$

Question complémentaire :

Comparer à l'aide d'un micro-ordinateur les vitesses de convergence des deux séries. Comment croît la somme $S(x)$ de ces séries quand x tend vers 1^- ? (problème dont le résultat n'est pas connu par l'auteur).

Indication :

La somme des diviseurs pairs d'un entier n est égale au double de la somme de leurs diviseurs complémentaires (si $d|n$ alors n/d est le diviseur complémentaire de d).

A VOS STYLOS

PROBLÈME 15

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + \sqrt{n}) = 0$ pour tout x . A-t-on $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$?

PROBLÈME 16

Énoncé

Les touches $\oplus$, $\otimes$, $\odot$ de ma calculatrice sont hors d'usage. Comment effectuer les quatre opérations en utilisant seulement des constantes et les touches de soustraction $\ominus$ et d'inversion $\oslash$?

Remarque :

'L'Ouvert' publiera la solution du lecteur proposant une méthode de multiplication qui utilise le plus petit nombre d'opérations (soustractions et inversions).

Lors [du] premier séjour [d'EINSTEIN] en Amérique, en 1921, on lui présenta un questionnaire qui devait évaluer le bagage intellectuel qu'un étudiant emporte dans la vie, ses études universitaires terminées. A la question sur la vitesse du son, [il] répondit :

— “*Je ne sais pas. Je n'encombre pas ma mémoire par des faits que je peux trouver facilement dans une encyclopédie.*”

Albert EINSTEIN

Par Antonina VALLENTIN (1958).