QUATERNIONS, OCTONIONS ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Marc GUINOT

Le Groupe de mathématiques de Saumur est de formation trop récente pour que sa notoriété ait pu jusqu'à présent dépasser les rives du Thouet. Conscient du handicap que constitue, à notre époque hypermédiatisée, ce défaut de rayonnement, le Comité directeur de cet estimable groupe d'autoformation permanente a jugé utile de lancer une grande campagne de relations publiques. Les contacts pris du côté de TF 1, de France-Culture et de divers journaux n'ayant rien donné, nous nous sommes tournés vers les revues spécialisées. Malheureusement "*The Mathematical Intelligencer*", la revue allemande bien connue, ne publie que des articles en anglais, et "*Quadrature*", la nouvelle venue, présente une typographie qui laisse encore par trop à désirer. Aussi nous sommes-nous rabattus sur les nombreuses publications des IREM de France et de Navarre dont la plus prestigieuse est sans conteste l'organe officiel de l'IREM de Strasbourg. Par chance, son directeur se lamentait, dans un éditorial récent, sur la difficulté de trouver des articles de haut niveau dont ses lecteurs sont si friands. Il a été facile de le convaincre, dans la torpeur du mois d'août, de l'intérêt que présentent, pour l'image de marque de sa revue, les derniers Travaux du groupe de Saumur sur les rapports étonnants qu'entretiennent la géométrie élémentaire, le corps des quaternions et l'algèbre des octonions.

Moyennant quoi, c'est ce dont il va être question maintenant.

Introduction : les théorèmes de Desargues et de Pappus

Lorsque David HILBERT publia en 1899 son célèbre ouvrage sur les fondements de la géométrie, il ne se contenta pas de dresser une liste d'axiomes à partir desquels on pouvait déduire toute la géométrie traditionnelle, mais, les regroupant par affinité, il s'attacha à mesurer la portée de chacun d'eux en les considérant isolément ou en les modifiant de diverses façons. A la lumière de ces opérations, il montra que certains résultats de la géométrie classique pouvaient s'enrichir de significations nouvelles qui étaient restées cachées jusque là. C'est le cas en particulier des théorèmes de DESARGUES et de PAPPUS dont la validité est liée, comme on le verra, à des propriétés purement algébriques qui sont sous-jacentes à la structure géométrique du plan et de l'espace.

Dans sa version la plus générale, le théorème de DESARGUES est un résultat de géométrie projective qu'il est très facile d'énoncer dans ce cadre. Si on se limite à la géométrie traditionnelle, on est malheureusement contraint de multiplier quelque peu les hypothèses et les conclusions. On peut néanmoins en donner une idée assez précise en considérant dans le plan ordinaire trois droites distinctes, parallèles ou concourantes, puis deux points A et A' sur la première droite, deux

© L'OUVERT 61 (1990)

points B et B' sur la seconde droite, et deux points C et C' sur la troisième droite, tous ces points étant supposés distincts du point de concours éventuel des trois droites considérées. Cette configuration générale permet de considérer les six droites $AB, BC, AC, A'B', B'C'$ et $A'C'$, groupées deux par deux de façon à former les trois paires AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, AC et $A'C'$. La conclusion du théorème dépend alors de la nature des trois paires de droites ainsi envisagées : si chacune des trois paires est constituée de deux droites sécantes, on a alors trois points d'intersection possibles I, J, et K ; la conclusion est que ces trois points sont alignés.

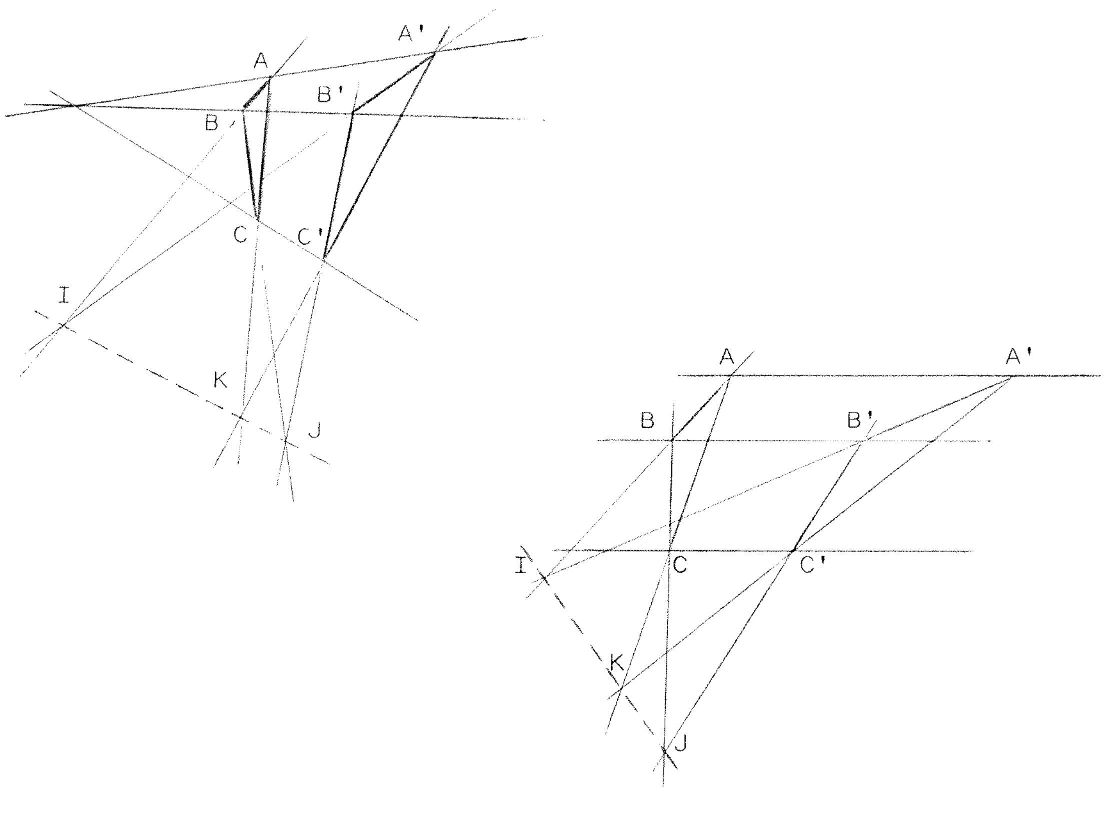

Figure 1

Si les hypothèses précédentes ne sont pas plus vraies pour l'une des trois paires de droites et si on suppose par exemple que la première paire AB et $A'B'$ est formée de droites parallèles distinctes, alors le point I n'existe plus. Dans le langage de la géométrie projective, on dit qu'il est rejeté à l'infini. Dans ce cas, l'alignement des points I, J et K vu précédemment se traduit maintenant par la propriété que la droite JK (si on suppose $J \neq K$) en parallèle à AB et à $A'B'$: elle continue en quelque sorte à passer par I, mais ... à l'infini! Enfin, si deux des trois paires sont constituées de droites parallèles, la conclusion est qu'il en est de même de la troisième paire : l'alignement subsiste encore, mais à l'infini uniquement.

C'est en fait ces phénomènes, faciles à observer sur des figures qui ont conduit DESARGUES, PASCAL et leurs émules à envisager l'existence de *points à l'infini* dans le plan, chaque point à l'infini correspondant finalement à tout un faisceau de droites parallèles. On admirera à ce propos le processus qui a conduit de cette idée relativement simple à la définition passablement sophistiquée des espaces projectifs que donne BOURBAKI dans ses "*Eléments de mathématique*" (Algèbre, Chap. II, § 9, n° 11, nouvelle édition, p. 138). L'auteur offre d'ailleurs une bouteille de champagne à quiconque saura lui expliquer convenablement le sens exact de la définition en question ...

La dernière version du théorème de DESARGUES, avec deux paires de droites parallèles au départ, exprime en fait une propriété assez élémentaire de la géométrie plane classique en rapport avec les notions d'homothétie et de translation :

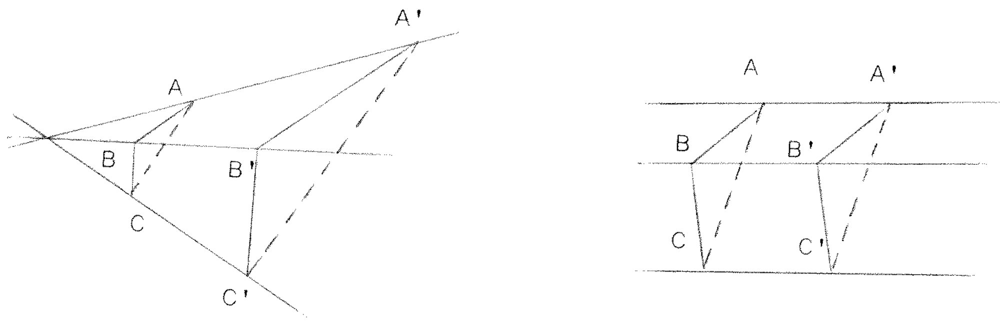

Figure 2

Il est bien évident que DESARGUES (1591 – 1661) n'aurait pas atteint la notoriété qui est la sienne (et qui lui vaut une plaque commémorative à l'entrée de la rue des Trois-Maries à Lyon) s'il s'était contenté de découvrir ce dernier résultat. Mais il se trouve que le cas général illustré par la première version ci-dessus (*fig. 1*) peut se ramener, moyennant un passage par la géométrie dans l'espace, à la version élémentaire en question (*fig. 2*), ce qui fait que d'un point de vue purement logique, cette version élémentaire caractérise le théorème général. Ce n'est pas le lieu ici d'en dire davantage et le lecteur qui désirerait en savoir plus peut toujours se procurer, auprès de l'auteur de cet article, le compte-rendu de la séance du 25 septembre 1989 qui rapporte les travaux du Groupe de mathématiques de Saumur sur cette importante question (CCP 2 208 90 S, Nantes).

L'énoncé du théorème de PAPPUS présente beaucoup d'analogies avec celui du théorème de DESARGUES, mais au lieu de considérer trois droites, on n'en considère que deux, supposées distinctes, avec trois points A, B, C sur la première et trois points A', B', C' sur la seconde. Cette configuration générale permet de considérer les trois paires de droites $A'B$ et AB', $A'C$ et AC', $B'C$ et BC'. S'il n'y a, dans ces trois paires, que des droites sécantes, on a alors trois points d'intersection possibles I, J et K ; la conclusion est que ces trois points sont toujours alignés.

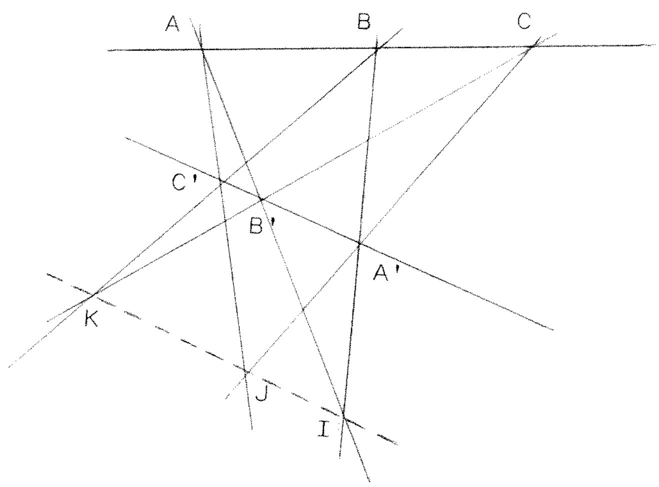

Figure 3

Comme pour le théorème de DESARGUES, le cas général peut dégénérer en plusieurs cas particuliers. Ainsi, si on suppose $(A'B)$ et (AB') parallèles, ainsi que $(A'C)$ et (AC'), la conclusion est qu'il en est de même de $(B'C)$ et de (BC'). En lui-même, ce dernier résultat n'est d'ailleurs pas évident et nous verrons dans ce qui suit qu'il est curieusement lié à une propriété de commutativité. Mais là encore, comme pour le théorème de DESARGUES, on peut ramener la démonstration du cas général à ce cas particulier, moyennant un passage par l'espace (CCP 2 208 90 S Nantes ...).

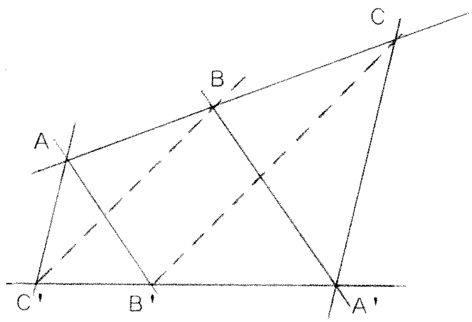

Figure 4

Les propriétés précédentes ne font intervenir que des notions élémentaires de géométrie plane. Il est donc naturel de les formuler (ou de les reformuler) dans le cadre d'une présentation axiomatique ne prenant en compte que ces notions. Pour fixer les idées, nous conviendrons d'appeler **plan d'incidence de type affine** tout ensemble E muni de la structure définie par la donnée d'un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de E vérifiant les conditions axiomatiques suivantes :

(P_1) L'ensemble $\mathcal{D}$ n'est pas vide et si $D \in \mathcal{D}$ aucun des ensembles D et $E - D$ n'est vide.

(P_2) Si a et b sont des éléments différents de E, il existe un ensemble D et un seul, appartenant à $\mathcal{D}$, tel que $a \in D$ et $b \in D$.

(P_3) Si a est un élément de E et si D est un élément de $\mathcal{D}$ tels que $a \notin D$, il existe un ensemble D' et un seul appartenant à $\mathcal{D}$, tel que $a \in D'$ et $D \cap D' = \emptyset$.

Naturellement, dans la pratique, les éléments de E s'appellent des **points** (les points de E), ceux de $\mathcal{D}$ des **droites** (les droites de E) et on peut développer d'une manière générale tout un vocabulaire analogue, inspiré de la géométrie classique, permettant d'affirmer par exemple que par deux points distincts de E il passe une droite de E et une seule (c'est l'axiome (P_2) ci-dessus) ou que par un point extérieur à une droite donnée D de E il passe une droite de E et une seule sans point commun avec D (c'est l'axiome (P_3)). Si on convient de qualifier de **parallèles** deux droites D et D' de E *confondues* ou *sans point commun*, on peut dire aussi que par un point donné de E passe une droite de E et une seule parallèle à une droite donnée.

Naturellement, comme toujours dans ce genre de présentation, il ne faut pas se laisser abuser par le vocabulaire : les éléments d'un plan d'incidence de type affine peuvent être de nature aussi variée que l'on veut et si on se hasarde à qualifier de *rectilignes* les droites de E, ce ne peut être que par pure convention. Au rebours de la tradition classique, ce sont les axiomes qui fixent les définitions et non l'inverse!

La terminologie ci-dessus est empruntée à Jacqueline LELONG-FERRAND qui définit, comme nous l'avons fait, les *plans de type affine* dans son livre "*Les fondements axiomatiques de la géométrie*" (P.U.F., 1985). Il existe aussi une définition analogue pour des plans d'incidence *de type projectif* dont nous n'aurons pas à faire usage et pour lesquels la notion de droites parallèles n'existe pas. Je me suis permis d'ajouter qu'il s'agissait de plans *d'incidence* pour souligner la nature très élémentaire des axiomes utilisés. Dans la suite, nous parlerons de *plans de type affine* sans autre précision.

Vu le caractère très général des axiomes donnés plus haut, il existe de très nombreux exemples de plans de type affine. Il en est un, assez connu, qui ne contient que quatre points A, B, C, D et six droites $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}$, $\{C, D\}$. Un autre exemple a été donné, en 1902 par l'américain MOULTON. Il consiste à prendre les droites d'un plan ordinaire, rapporté à un repère orthonormé, et à remplacer les droites de coefficient directeur < 0 par des lignes brisées faites de deux demi-droites D_+ et D_- se joignant sur l'axe des abscisses et formant entre elles un angle défini de telle sorte que le coefficient directeur de D_- soit le double de celui de D_+.

Les autres droites restant inchangées, on vérifie sans trop de peine que l'ensemble de ces "*lignes de* MOULTON" satisfait aux axiomes des plans de type affine. On peut dire que les *droites* du plan de MOULTON ainsi obtenu subissent une sorte de réfraction sélective qui ne s'applique que dans le cas des pentes négatives!

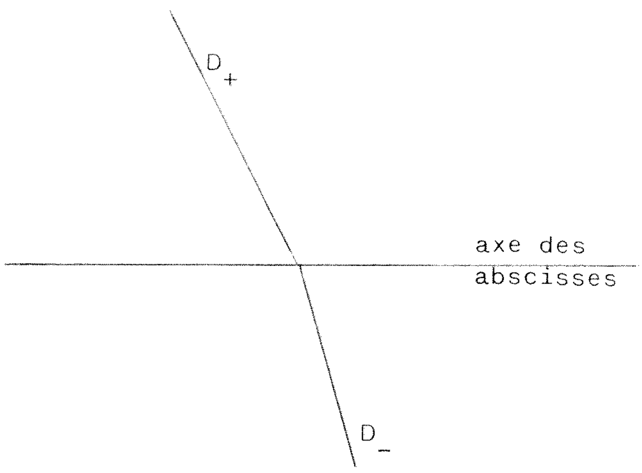

Figure 5

Avec des exemples aussi variés, on peut s'interroger alors sur ce que deviennent, dans le cadre des plans de type affine, les théorèmes de DESARGUES et de PAPPUS. Nous nous proposons de voir deux modèles assez semblables, l'un construit à partir de la notion de quaternion, l'autre fondée sur la notion plus générale d'octonion, et où les théorèmes de PAPPUS et de DESARGUES subissent des distorsions aussi inattendues qu'intéressantes.

Première partie : PAPPUS, DESARGUES et le corps des quaternions

On sait qu'une introduction pédagogiquement mal conduite des nombres complexes peut entraîner chez certains adolescents fragiles, dressés à voir dans tout carré un nombre positif, des troubles psychologiques graves que le Dr MUSIL a analysés dans un ouvrages célèbre sous le vocable de *désarrois* (Verwirrungen) (*). A fortiori, c'est avec d'infinies précautions qu'on devrait parler, pour la première fois, d'un système algébrique qui viole le principe de commutativité. Comme je m'adresse ici, heureusement, à des lecteurs avertis, depuis longtemps au fait des bizarreries de leur science préférée et qui ont déjà des connaissances sur les quaternions, je me contenterai de rafraîchir leur mémoire en leur rappelant simplement que l'on sait définir en mathématiques un ensemble particulier, noté $\mathbb{H}$, muni de deux lois de composition $(x, y) \to x + y$ et $(x, y) \to xy$, contenant trois éléments privilégiés i, j et k, de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(H_1) $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{H}$.

(H_2) L'addition et la multiplication de $\mathbb{H}$ prolongent respectivement l'addition et la multiplication des nombres réels.

(H_3) L'addition dans $\mathbb{H}$ est commutative et associative.

(H_4) La multiplication dans $\mathbb{H}$ est associative et distributive par rapport à l'addition.

(H_5) Si a est un nombre réel et si $x \in \mathbb{H}, ax = xa$.

(*) Cf. "*Les désarrois de l'élève* TÖRLESS" (die Verwirrungen des Zöglings TÖRLESS) de Robert MUSIL, Le Seuil, 1960.

(H_6) Tout élément x de $\mathbb{H}$ peut s'écrire sous la forme d'une somme $a+bi+cj+dk$ où a, b, c, d sont des nombres réels.

(H_7) On a $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Les éléments de $\mathbb{H}$ sont appelés des **quaternions** (ou plus précisément des **quaternions d'Hamilton**). D'après le premier axiome (H_1), tout nombre réel est un quaternion.

Si x et y sont des quaternions, $x + y$ (la somme) et xy (le produit) sont encore des quaternions. Lorsque x et y sont des réels, les résultats précédents sont, d'après (H_2), les réels que l'on connaît déjà avec les mêmes notations et les mêmes noms. Il n'y a donc pas de confusion possible.

Si x est un quaternion, x^2 (le carré de x) représente naturellement le produit xx. Les relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ de (H_7) montrent que les quaternions i, j, k, ne sont pas des réels.

Nous ne développerons pas en détail les conséquences bien connues des axiomes (H_3) et (H_4). Notons simplement que si x est un quaternion quelconque, on a $0 + x = x$, $1x = x$ et $0x = 0$. Pour démontrer les deux premières égalités (qui ne figurent pas dans la liste des propriétés données plus haut), il suffit d'utiliser (H_6) et d'écrire x sous la forme $a + bi + cj + dk$. La dernière relation est un peu plus délicate à établir. On commence par remarquer que $(0i)i = 0i^2 = 0(-1) = 0$ grâce à (H_7) et à (H_2), donc que $(0i + 0)i = (0i)i = 0$. Comme $(0i + 0)i$ est aussi égal à $(0i)i + 0i = 0 + 0i = 0i$, on voit finalement que $0i = 0$. Par le même raisonnement, on démontre que $0j = 0$ et $0k = 0$. Le cas général s'obtient alors sans problème. Moyennant quoi, il n'est pas difficile de voir que, muni de l'addition et de la multiplication, l'ensemble $\mathbb{H}$ est un anneau. En outre, de la relation $ijk = -1$ donnée dans (H_7) on tire $ijk^2 = -k$. Comme $k^2 = -1$ on trouve $ij = k$. De façon analogue, on a $jk = i$ et par suite $j^2k = ji$ donc $ji = -k$. Le lecteur vérifiera de la même manière que $jk = -kj = i$ et que $ki = -ik = \; j$.

Tout cela permet de développer le produit général de deux quaternions :

$$(1) \qquad (a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) = aa' - bb' - cc' - dd' + \\ (ab' + ba' + cd' - dc')i + (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k$$

étant entendu que les coefficients sont tous réels.

Si on prend $a' = a, b' = -b, c' = -c$ et $d' = -d$ dans la formule précédente, on obtient

$$(2) \qquad (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

comme on le vérifie aussitôt.

On déduit de là qu'un quaternion qui s'écrit $a + bi + cj + dk$ avec a, b, c, d réels ne peut être nul que si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, donc si $a = b = c = d = 0$ puisqu'on a affaire à des nombres réels. On peut alors préciser l'énoncé de (H_6) en affirmant que tout quaternion s'écrit d'une manière et d'une seule $a+bi+cj+dk$ où a, b, c, d sont des réels. Ainsi, se donner un quaternion revient à se donner quatre nombres réels bien déterminés, rangés dans un certain ordre : c'est évidemment là l'origine du mot *quaternion*.

Une autre façon d'interpréter ce résultat est de munir le groupe additif $\mathbb{H}$ de la loi *externe* $(a,x) \longrightarrow ax$ (où x est un quaternion quelconque et a un nombre réel). On voit immédiatement que l'on obtient ainsi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 4 pour lequel le système $(1,i,j,k)$ est une base.

En sens inverse, on peut se servir de cette propriété pour définir $\mathbb{H}$: il suffit de considérer l'ensemble $\mathbb{R}^4$ des quadruplets de nombres réels et de définir une addition et une multiplication en posant

$$(a,b,c,d)+(a',b',c',d')=(a+a',b+b',c+c',d+d')$$

et

$$\begin{aligned}(a,b,c,d)\times(a',b',c',d')=(&aa'-bb'-cc'-dd',ab'+ba'+cd'-dc',\\ &ac'+ca'+db'-bd',ad'+da'+bc'-cb').\end{aligned}$$

Quitte alors à identifier $\mathbb{R}$ à une partie de $\mathbb{R}^4$ en confondant tout réel a avec le quadruplet $(a,0,0,0)$, on vérifie aisément que l'on a toutes les propriétés (H_1) à (H_7) énumérées plus haut. Il faut naturellement poser $i=(0,1,0,0), j=(0,0,1,0)$ et $k=(0,0,0,1)$.

Mais ce qui est le plus important, c'est que $\mathbb{H}$ est un exemple de corps non commutatif, le premier à avoir été découvert, et ce par W.R. HAMILTON le 16 octobre 1843 (la précision est de sir William Rowan soi-même!).

La non commutativité de la multiplication résulte de l'unicité de l'écriture $a+bi+cj+dk$ car, de ce fait, un quaternion $x=a+bi+cj+dk$ ne peut être égal à son opposé $-x=-a-bi-cj-dk$ que si x est nul. On a en particulier $i\neq -i, j\neq -j$ et $k\neq -k$, ce qui veut dire aussi, d'après ce qu'on a vu, que $jk\neq kj, ki\neq ik$ et $ij\neq ji$.

Pour démontrer que malgré cela $\mathbb{H}$ est un corps, il est commode d'associer successivement à tout quaternion $x=a+bi+cj+dk$ le **quaternion conjugué** $\bar{x}$, égal par définition à $a-bi-cj-dk$, le **module** (ou **valeur absolue**) $|x|$ égal à $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ et, si $x\neq 0$, l'**inverse** x^{-1} égal par définition à $(a-bi-cj-dk)(a^2+b^2+c^2+d^2)^{-1}$. On a alors effectivement la relation $xx^{-1}=x^{-1}x=1$ si $x\neq 0$. On vérifie en outre que

$$(3)\qquad x\overline{x}=\overline{x}x=|x|^2 \quad\text{et}\quad \overline{\overline{x}}=x \text{ si } x\in\mathbb{H}$$

$$(4)\qquad \overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y} \quad\text{et}\quad \overline{xy}=\overline{y}\,\overline{x} \text{ si } x,y\in\mathbb{H}$$

$$(5)\qquad x=\overline{x}\iff x\in\mathbb{R}$$

Signalons qu'un quaternion $x=a+bi+cj+dk$ est dit **pur** si $a=0$. Il revient au même de dire que $\bar{x}=-x$. Il en est ainsi de i, de j et de k. Tout quaternion x s'écrit alors d'une manière et d'une seule sous la forme $a+y$ où a est un réel et y un quaternion pur. Cela permet de parler de la **partie réelle** et de la **partie pure** de n'importe quel quaternion.

Notons pour finir que l'absence de commutativité peut être précisée en montrant qu'un quaternion q ne peut permuter avec tous les autres que si q est un réel. Comme la réciproque est vraie (axiome (H_5)), on résume cela en disant que $\mathbb{R}$ est le **centre** du corps $\mathbb{H}$.

Mais il est temps de passer de l'algèbre à la géométrie en montrant que les quaternions peuvent servir à définir un modèle de plan de type affine que l'on peut présenter en convenant d'associer à tout triplet (a, b, c) de quaternions l'ensemble, que l'on notera $D(a, b, c)$, des couples (x, y) de quaternions tels que $ax+by+c = 0$. Ainsi $D(a, b, c)$ est-il toujours un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{H} \times \mathbb{H} = \mathbb{H}^2$.

Si $a = b = c = 0$, on a évidemment $D(a, b, c) = \mathbb{H}^2$, alors que si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, on a $D(a, b, c) = \emptyset$. Ce ne sont pas là, naturellement, les cas les plus intéressants.

Théorème 1.— Si on écarte le cas des ensembles $D(0, 0, c)$ où $c \in \mathbb{H}$, les ensembles $D(a, b, c)$ qui restent forment un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de $\mathbb{H}^2$ satisfaisant aux axiomes (P_1), (P_2), (P_3) de l'introduction. Autrement dit, muni de la structure définie par l'ensemble $\mathcal{D}$ en question, $\mathbb{H}^2$ est un plan de type affine.

Le premier résultat qui nous sera utile pour la démonstration peut être énoncé sous forme de lemme.

Lemme 1.— Quels que soient les quaternions a, b, c, on a $D(a, b, c) = D(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ pour tout $\lambda \neq 0$ dans $\mathbb{H}$.

Par définition, un couple (x, y) de $\mathbb{H}^2$ appartient à $D(a, b, c)$ si et seulement si $ax + by + c = 0$. Si $\lambda \neq 0$, cette relation équivaut à $\lambda(ax + by + c) = 0$ (en utilisant l'inverse λ^{-1} de λ pour justifer l'implication réciproque). Comme $\lambda(ax + by + c) = \lambda(ax) + \lambda(by) + \lambda c = (\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)$, le résultat annoncé est établi.

Par définition, les éléments de $\mathcal{D}$ sont les sous-ensembles de $\mathbb{H}^2$ de la forme $D(a, b, c)$ où a, b, c sont des quaternions tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Il nous sera alors commode dans la suite d'appeler $\mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{D}''$) l'ensemble des parties de $\mathbb{H}^2$ de la forme $D(a, b, c)$ où $b \neq 0$ (resp. $a \neq 0$). On a ainsi par conséquent $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$.

Enfin, si a et b sont des quaternions quelconques, on notera $\Delta'(a, b)$ (resp. $\Delta''(a, b)$) l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ tels que $y = ax + b$ (resp. $x = ay + b$).

Lemme 2.— Tout ensemble de la forme $\Delta'(a, b)$ appartient à $\mathcal{D}'$. Réciproquement tout ensemble qui appartient à $\mathcal{D}'$ est de la forme $\Delta'(a, b)$. On a des résultats analogues pour $\Delta''(a, b)$ et $\mathcal{D}''$.

Par définition, l'ensemble $\Delta'(a, b)$ est constitué des couples $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ tels que $y = ax + b$. Comme cette relation s'écrit $ax - y + b = 0$, on voit que $\Delta'(a, b) = D(a, -1, b)$, ce qui montre que $\Delta'(a, b)$ appartient à $\mathcal{D}'$. Inversement, un ensemble qui appartient à $\mathcal{D}'$ est de la forme $D(a, b, c)$ avec $b \neq 0$. D'après le lemme 1, il s'écrit aussi $D(-b^{-1}a, -1, -b^{-1}c)$ et on vérifie facilement que ce dernier ensemble n'est autre que $\Delta'(-b^{-1}a, -b^{-1}c)$. On raisonne de même pour la dernière partie du lemme.

Passons alors à la vérification des axiomes (P_1), (P_2) et (P_3). Il est bien clair tout d'abord que l'ensemble $\mathcal{D}$ n'est pas vide car on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$ où ni $\mathcal{D}'$ ni $\mathcal{D}''$ ne sont vides : le premier contient $D(0,1,0)$, le second $D(1,0,0)$.

Pour démontrer ensuite que tout ensemble $D \in \mathcal{D}$ est différent à la fois de $\mathbb{H}^2$ et de $\emptyset$, le mieux est de distinguer deux cas selon que $D \in \mathcal{D}'$ ou que $D \in \mathcal{D}''$. Dans le premier cas, d'après le lemme 2, D est de la forme $\Delta'(a,b)$, de sorte que $(x,y) \in D$ si et seulement si $y = ax + b$. Si on choisit alors $x = 0$ et $y = b$, on obtient un élément de D et si on choisit $x = 0$ et $y = b'$, avec $b' \neq b$, on obtient un élément de $\mathbb{H}^2$ qui n'appartient pas à D. D'où le résultat annoncé dans ce cas. On raisonne de même si $D \in \mathcal{D}''$.

Considérons maintenant deux éléments A et B différents dans $\mathbb{H}^2$. Notons-les (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Comme la condition $A \neq B$ signifie que l'on a $x_A \neq x_B$ ou $y_A \neq y_B$, on distingera deux cas.

Supposons d'abord $x_A \neq x_B$. Alors, s'il existe un ensemble $D \in \mathcal{D}$ contenant A et B, cet ensemble appartient nécessairement à $\mathcal{D}'$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $D \notin \mathcal{D}'$. Alors D appartient à $\mathcal{D}''$, ce qui veut dire que D est de la forme $\Delta''(a,b)$, autrement dit que $(x,y) \in D$ si et seulement si $x = ay + b$. Si a n'est pas nul, cette relation équivaut à $y = a^{-1}x - a^{-1}b$. Cela montrerait que $D = \Delta'(a^{-1}, -a^{-1}b)$, donc que $D \in \mathcal{D}'$, contrairement à l'hypothèse. Si a est nul, on a $x = b$ pour tout couple $(x,y) \in D$. Cela impliquerait en particulier que $x_A = x_B = b$, contrairement aux hypothèses. D'où la contradiction recherchée.

Ainsi, tout ensemble $D \in \mathcal{D}$ qui contient A et B est nécessairement de la forme $\Delta'(a,b)$ où a et b sont deux quaternions. On a donc simultanément

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

ce qui donne $a(x_B - x_A) = y_B - y_A$, donc $a = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ et $b = y_A - ax_A$ avec cette valeur de a. Cela démontre l'unicité de l'ensemble D.

Considérons alors l'ensemble $D = \Delta'(a,b)$ avec $a = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ et $b = y_A - ax_A$. Il est évident que A appartient à D à cause du choix de b. Quant à B, son appartenance à D résulte de ce que $ax_B + b = ax_B + y_A - ax_A = a(x_B - x_A) + y_A = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}(x_B - x_A) + y_A = y_B - y_A + y_A) = y_B$. On raisonnerait de même si on avait $y_A \neq y_B$ mais en démontrant au préalable que tout ensemble $D \in \mathcal{D}$ contenant A et B appartient nécessairement à $\mathcal{D}''$.

Reste à vérifier l'axiome (P_3). Pour cela, considérons un ensemble $D \in \mathcal{D}$ et un élément $A = (x_A, y_A)$ de $\mathbb{H}^2$ n'appartenant pas à D. Il s'agit de rechercher un ensemble $D' \in \mathcal{D}$ contenant A et sans élément commun avec D.

Supposons d'abord que D appartienne à $\mathcal{D}'$, donc que D est de la forme $\Delta'(a,b)$ et montrons que l'ensemble D' appartient aussi nécessairement à $\mathcal{D}'$. Dans le cas contraire, D' serait de la forme $\Delta''(c,d)$ avec $c, d \in \mathbb{H}$. On aurait en outre $c = 0$ car si cela n'était pas, la relation $x = cy + d$ (qui exprime qu'un couple $(x,y) \in \mathbb{H}^2$

appartient à D') serait équivalente à $y = c^{-1}x - c^{-1}d$, de sorte que l'on aurait $D' = \Delta'(c^{-1}, -c^{-1}d)$, contrairement au fait que $D' \notin \mathcal{D}'$. On voit ainsi que D' serait simplement l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ tels que $x = d$. Dans ces conditions, l'ensemble $D \cap D'$ ne peut être vide contrairement à l'hypothèse car si on pose $x = d$ et $y = ad + b$ on obtient un couple (x, y) commun à D et à D'. D'où la contradiction recherchée.

Ainsi, si $D \in \mathcal{D}'$, l'ensemble D' cherché appartient aussi à $\mathcal{D}'$. On a donc $D = \Delta'(a, b)$ et $D' = \Delta'(c, d)$. Dans ces conditions, on a nécessairement $c = a$ car dans le cas contraire le système

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

aurait une solution unique, donnée par $x = (c - a)^{-1}(b - d)$ et $y = a(c - a)^{-1}(b - d) + b$, ce qui est contraire au fait que $D \cap D' = \emptyset$.

On n'a donc pas le choix pour c et d : on a nécessairement $c = a$ et $d = y_A - cx_A = y_A - ax_A$. D'où l'unicité. Réciproquement, si on pose $D' = \Delta'(c, d)$ avec $c = a$ et $d = y_A - ax_A$, il est clair que A appartient à D'. En outre, $D \cap D' = \emptyset$ car un couple (x, y) commun à ces deux ensembles devrait vérifier à la fois

$$y = ax + b \quad \text{et} \quad y = ax + y_A - ax_A.$$

On aurait donc $y_A = ax_A + b$, ce qui signifierait que A appartient à D, contrairement à l'hypothèse. D'où le résultat. Comme on peut raisonner de la même manière dans le cas où $D \in \mathcal{D}''$, la démonstration du théorème peut être considérée comme achevée.

Si on examine en détail cette démonstration, on remarque que les seules propriétés des quaternions utilisées sont les règles de calcul qui font que $\mathbb{H}$ est un corps. On pourrait donc étendre considérablement le th. 1 en démontrant que pour tout corps K, commutatif ou non, l'ensemble $K^2 = K \times K$ est un plan de type affine.

On peut appliquer désormais le vocabulaire de la géométrie plane à l'ensemble $\mathbb{H}^2$ (qu'on appellera de ce fait le **plan de Hamilton**) et considérer en particulier qu'un couple (x, y) de deux quaternions est un point. On dira naturellement que x est l'**abscisse** et y l'**ordonnée** de ce point, les deux constituant les **coordonnées** du point.

Si a, b, c sont des quaternions tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite : on dira que c'est la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Par définition, toute droite du plan $\mathbb{H}^2$ admet une équation de ce type.

Comme on l'a vu au cours de la démonstration du th. 1, certaines droites de $\mathbb{H}^2$ peuvent être définies par une équation de la forme $y = ax + b$ (resp. de la forme $x = ay + c$) qu'on appellera une **équation réduite de première espèce** (resp. de

seconde espèce). Toute droite admet donc une équation réduite soit de première espèce soit de seconde espèce.

On notera en particulier que l'ensemble $\mathbb{H} \times \{0\}$ (resp. $\{0\} \times \mathbb{H}$) est une droite du plan de HAMILTON, admettant une équation réduite de première espèce (resp. de seconde espèce), savoir $y = 0$ (resp. $x = 0$). On dira que cette droite est l'**axe des abscisses** (resp. l'**axe des ordonnées**). Plus généralement, on dira qu'une droite de $\mathbb{H}^2$ est **horizontale** (resp. **verticale**) si elle est parallèle à l'axe des abscisses (resp. à l'axe des ordonnées).

Proposition 1.— Pour qu'une droite de $\mathbb{H}^2$ admette une équation réduite de première espèce (resp. de seconde espèce) il faut et il suffit que cette droite ne soit pas verticale (resp. horizontale).

Supposons qu'une droite D admette une équation de la forme $y = ax + b$. Alors D ne peut avoir qu'un point commun avec l'axe des ordonnées, à savoir $(0, b)$. Cela veut dire que D est sécante à l'axe des ordonnées, donc non verticale.

Supposons que D ne soit pas verticale. Si elle n'admettait pas d'équation de la forme $y = ax + b$, elle admettrait une équation de la forme $x = ay + b$. Dans cette équation, le quaternion a devrait être nul sinon on pourrait écrire, d'une manière équivalente, $y = a^{-1}x - a^{-1}b$, ce qui est impossible par hypothèse. Par suite, la droite D serait constituée de tous les couples $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ avec $y = b$. Si $b = 0$, D serait confondue avec l'axe des ordonnées. Si $b \neq 0$, D n'aurait aucun point commun avec cet axe. Dans tous les cas, D serait verticale, ce qui n'est pas. On raisonne évidemment de même pour la seconde partie du théorème.

Proposition 2.— Si une droite D de $\mathbb{H}^2$ admet une équation réduite de première espèce (resp. de seconde espèce) celle-ci est unique.

Supposons que D admette deux équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. Il s'agit de montrer que $a = a'$ et $b = b'$. Comme le point $(0, b)$ appartient à D d'après la première équation, on a $b' = b$ d'après la seconde. Comme le point $(1, a + b)$ appartient aussi à D d'après la première équation, on a de même $a' + b' = a + b$. D'où $a' = a$ puisque $b' = b$. On raisonne de même pour les équations de seconde espèce.

On accorde souvent une importance particulière aux droites admettant une équation de première espèce. Si une droite D admet une équation de ce genre $y = ax + b$, le quaternion a (unique d'après la prop. 2) sera appelé le **coefficient directeur** de D. Si D n'admet pas d'équation réduite de première espèce (autrement dit si D est verticale), on convient d'appeler coefficient directeur de D un symbole ∞ qui a pour seule particularité de ne pas être un quaternion. Cette terminologie s'explique par le résultat suivant.

Proposition 3.— Pour que deux droites du plan de HAMILTON $\mathbb{H}^2$ soient parallèles il faut et il suffit qu'elles aient même coefficient directeur.

Supposons d'abord que D et D' soient deux droites de même coefficient directeur

a. Si $a = \infty$, D et D' sont toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées, donc parallèles entre elles.

Si a est un quaternion, alors les équations réduites de première espèce de D et de D' peuvent s'écrire respectivement $y = ax + b$ et $y = ax + b'$ où b et b' sont des quaternions. Si $b = b'$, D et D' sont confondues. Si $b \neq b'$, D et D' n'ont pas de point commun car si (x_0, y_0) en était un, on aurait à la fois $y_0 = ax_0 + b$ et $y_0 = ax_0 + b'$, donc $b = b'$. Bref, dans tous les cas, D et D' sont parallèles.

Supposons maintenant D et D' parallèles et appelons a et a' leurs coefficients directeurs respectifs. Si D est parallèle à l'axe des ordonnées, il en est de même de D', et l'on a $a = \infty$ et $a' = \infty$, donc $a = a'$. Si D est sécante à l'axe des ordonnées, il en est de même de D', de sorte que D et D' admettent des équations réduites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ avec a et a' dans $\mathbb{H}$.

Si $D = D'$, il est clair que $a = a'$ et $b = b'$. Si D et D' sont distinctes, elles n'ont pas de point commun, ce qui veut dire que le système $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ n'a pas de solution. Or si $a \neq a'$, sa résolution conduit immédiatement à la solution $x = (a - a')^{-1}(b' - b)$ et $y = a(a - a')^{-1}(b' - b) + b$; d'où encore $a = a'$. CQFD.

Proposition 4.— Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{H}^2$. Si $x_A = x_B$, le coefficient directeur de la droite (AB) est ∞; si $x_A \neq x_B$, c'est un quaternion égal à $(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$.

Si $x_A = x_B$, la droite (AB) est confondue avec la droite d'équation $x = x_A$ comme on le vérifie aussitôt. Comme cette dernière est parallèle à l'axe des ordonnées, il en est de même de (AB) dont le coefficient directeur est de ce fait ∞.

Si $x_A \neq x_B$, l'équation réduite de (AB) est $y = ax + b$ avec $a = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ et $b = y_A - ax_A$ comme on le vérifie sans peine (et comme on l'a déjà vu, en fait, dans la démonstration du th. 1). D'où le résultat.

Ces résultats étant acquis, nous allons pouvoir étudier la validité des théorèmes de Desargues et de Pappus dans le plan $\mathbb{H}^2$. Pour le théorème de Pappus, la question va être vité réglée par un contre-exemple. Posons en effet $A = (1, 0), B = (i, 0), C = (j, 0), A' = (0, 1), B' = (0, -i)$ et $C' = (0, -j)$, ce qui donne trois points A, B, C sur l'axe des abscisses et trois points A', B', C' sur l'axe des ordonnées. Montrons par le calcul, en utilisant la prop. 4, que $A'B \parallel AB'$ et $A'C \parallel AC'$ alors que $B'C \nparallel BC'$, ce qui contredira les résultats illustrés par la figure 4 de l'introduction.

On a en effet successivement pour les coefficients directeurs

$$\begin{aligned}
(y_B - y_{A'})(x_B - x_{A'})^{-1} &= (-1)(i)^{-1} &&= (-1)(-i) = i \\
(y_{B'} - y_A)(x_{B'} - x_A)^{-1} &= (-i)(-1)^{-1} &&= (-i)(-1) = i \\
(y_C - y_{A'})(x_C - x_{A'})^{-1} &= (-1)(j)^{-1} &&= (-1)(-j) = j \\
(y_{C'} - y_A)(x_{C'} - x_A)^{-1} &= (-j)(-1)^{-1} &&= (-j)(-1) = j \\
(y_C - y_{B'}(x_C - x_{B'})^{-1} &= i(j)^{-1} &&= -ij \quad = -k \\
(y_{C'} - y_B)(x_{C'} - x_B)^{-1} &= (-j)(-i)^{-1} &&= -ji \quad = +k.
\end{aligned}$$

On peut donc énoncer le résultat suivant.

Théorème 2.— Dans le plan de HAMILTON $\mathbb{H}^2$, le théorème de PAPPUS n'est pas valable.

Les calculs précédents montrent que le mal vient essentiellement du fait que $ij \neq ji$. Plus généralement, comme les propositions 1 à 4 sont encore valables en remplaçant partout $\mathbb{H}$ par un corps quelconque K, on peut penser que l'on a l'équivalent du th. 2 lorsque K est un corps non commutatif. Prenons en effet des éléments x, y, x', y' non nuls dans K et posons $A = (1,0), B = (x,0), C = (y,0), A' = (0,1), B' = (0,x'), C' = (0,y')$, de sorte que A, B, C (resp. A', B', C') sont des points de l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) de K^2. Alors les coefficients directeurs de $A'B, AB', A'C, AC', B'C$ et BC' sont respectivement $-x^{-1}, -x', -y^{-1}, -y', -x'y^{-1}$ et $-y'x^{-1}$. Si on veut que $A'B \parallel AB'$ et $A'C \parallel AC'$, il est nécessaire de prendre $x' = x^{-1}$ et $y' = y^{-1}$. Dans ces conditions, pour que $B'C \parallel BC'$ il faut et il suffit que $-x^{-1}y^{-1} = -y^{-1}x^{-1}$. Cela revient à avoir $xy = yx$, ce qui n'est pas réalisé si x et y sont deux éléments non permutables de ce corps.

Inversement, on peut montrer que lorsque K est un corps commutatif le théorème de PAPPUS est valable dans le plan K^2 construit sur ce corps (cf. par exemple le livre de J. LELONG-FERRAND déjà cité).

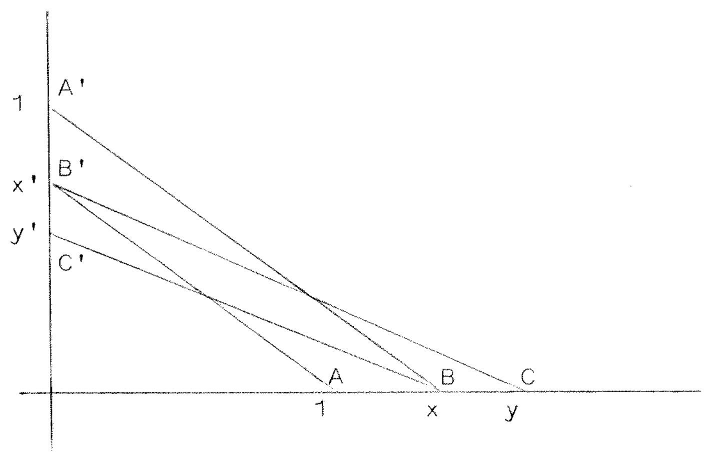

Figure 6

En ce qui concerne le théorème de DESARGUES, sa validité repose en définitive sur la possibilité de définir, dans le plan considéré, des *translations* et des *homothéties* convenables (cf. fig. 2 de l'introduction). Cela peut se faire par voie purement algébrique.

Nous dirons qu'une application t de $\mathbb{H}^2$ dans lui-même est une **translation algébrique** (ou simplement une translation) s'il existe des quaternions a et b tels que $t(x,y)=(x+a,y+b)$ quel que soit $(x,y)\in\mathbb{H}^2$. De façon précise, l'application $(x,y)\to(x+a,y+b)$ ainsi définie sera appelée la translation d'**opérateur** (a,b) dans $\mathbb{H}^2$.

On vérifie facilement que la translation d'opérateur (a,b) est une bijection dont la bijection réciproque est la translation d'opérateur $(-a,-b)$ et que si on compose la translation d'opérateur (a,b) avec la translation d'opérateur (a',b'), on obtient la translation d'opérateur $(a+a',b+b')$. On peut dire, en résumé, que l'inverse d'une translation est une translation et qu'il en est de même du produit de deux translations quelconques. En fait, les résultats qui nous seront utiles sont les deux suivants :

Proposition 5.— Si A et B sont deux points de $\mathbb{H}^2$, il existe une translation t de $\mathbb{H}^2$ et une seule qui transforme A en B.

Si on pose $A=(x_A,y_A)$ et $B=(x_B,y_B)$, il est facile de voir que la translation d'opérateur (x_B-x_A,y_B-y_A) transforme effectivement A et B et que c'est la seule à avoir cette propriété.

Proposition 6.— Soient A,B deux points de $\mathbb{H}^2$, et A',B' leurs images respectives par une même translation t de $\mathbb{H}^2$.

Si $A\neq B$, alors $A'\neq B'$ et les droites AB et $A'B'$ sont parallèles.

Si $A\neq A'$, alors $B\neq B'$ et les droites AA' et BB' sont parallèles.

Posons $A=(x_A,y_A),B=(x_B,y_B),A'=(x_{A'},y_{A'}),B'=(x_{B'},y_{B'})$, et supposons que l'on ait $t(x,y)=(x+a,y+b)$ quels que soient x,y dans $\mathbb{H}$. Si $A\neq B$, il est évident que $A'\neq B'$ puisque t est une bijection. Pour voir que $AB\parallel A'B'$ déterminons les coefficients directeurs de ces droites. Si $x_A=x_B$, on a $x_{A'}=x_{B'}$ puisque $x_{A'}=x_A+a$ et $x_{B'}=x_B+a$; dans ce cas, les coefficients directeurs sont égaux à ∞. Si $x_A\neq x_B$, on a aussi $x_{A'}\neq x_{B'}$ pour la même raison. En outre, les deux coefficients directeurs sont $(y_B-y_A)(x_B-x_A)^{-1}$ et $(y_{B'}-y_{A'})(x_{B'}-x_{A'})^{-1}=(y_B+b-y_A-b)(x_B+a-x_A-a)^{-1}=(y_B-y_A)(x_B-x_A)^{-1}$. D'où le résultat cherché.

Si $A\neq A'$, alors $B\neq B'$ car l'égalité $B=B'$ signifierait que $x_B=x_{B'}$ et $y_B=y_{B'}$, donc que $a=b=0$ puisque $x_{B'}=x_B+a$ et $y_{B'}=y_B+b$, ce qui impliquerait $A'=A$.

Pour voir que $AA'\parallel BB'$, calculons encore les coefficients directeurs. Si $x_A=x_{A'}$, alors $x_B=x_{B'}$ car le quaternion a est nécessairement nul. Les coefficients directeurs sont donc tous deux égaux à ∞. Si $x_A\neq x_{A'}$, alors $x_B\neq x_{B'}$, car a ne peut être nul. Les deux coefficients directeurs sont alors $(y_{A'}-y_A)(x_{A'}-x_A)^{-1}=$

ba^{-1} et $(y_{B'} - y_B)(x_{B'} - x_B)^{-1} = ba^{-1}$. D'où le deuxième résultat et la proposition.

Corollaire 1.— Si A, B, C, D sont des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et si A', B', C', D' sont leurs images par la translation t, alors la relation $AB \parallel CD$ entraîne la relation $A'B' \parallel C'D'$.

Cela résulte de la première partie de la proposition précédente et de la transitivité de la relation de parallélisme.

Corollaire 2.— Si A, B, C dont des points alignés (resp. non alignés) de $\mathbb{H}^2$, et si A', B', C' sont leurs images par t, alors A', B', C' sont alignés (resp. non alignés).

Les résultats étant évidents si deux des trois points sont confondus, on peut supposer A, B, C deux à deux distincts. Dans ce cas-là, dire que A, B, C sont alignés (resp. non alignés) revient à dire que les droites AB et AC sont parallèles (resp. sécantes). On a des résultats analogues pour A', B', C'. Il suffit donc d'appliquer le cor. 1 soit en utilisant la translation t, soit en utilisant la translation réciproque.

Nous allons pouvoir appliquer les résultats précédents pour démontrer une première moitié du théorème de DESARGUES, celle où l'on suppose que l'on a six points répartis sur trois droites parallèles. De façon précise, considérons trois droites distinctes parallèles D_A, D_B, D_C, puis deux points A et A' sur D_A, deux points B et B' sur D_B, et deux points C et C' sur D_C, placés de façon que $AB \parallel A'B'$ et $BC \parallel B'C'$. Il s'agit de montrer que $AC \parallel A'C'$.

Si $A = A'$, il est facile de voir que l'on a successivement $B = B'$ et $C = C'$, de sorte que la conclusion est évidente dans ce cas-là. On peut donc supposer $A \neq A'$. Appelons alors t l'unique translation de $\mathbb{H}^2$ qui transforme A et A' (prop. 5). Alors t transforme le point B en un point B_1, pour lequel on a, d'après la prop. 6, $AA' \parallel BB_1$ et $AB \parallel A'B_1$. La première propriété montre que B_1 se trouve sur la droite D_B et la seconde que B_1 se trouve sur la parallèle à AB passant par A' ; B_1 est donc à l'intersection des deux droites.

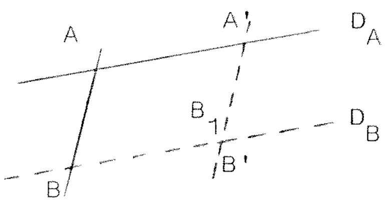

Figure 7

Comme $AB \parallel A'B'$, B' a exactement la même propriété. On a donc $B_1 = B'$. Cela veut dire que la translation t transforme B en B'. Par le même raisonnement, mais en utilisant le fait que $BC \parallel B'C'$, on voit que t transforme aussi C en C'. Dès lors, le parallélisme de AC et de $A'C'$ découle de la prop. 6. Pour démontrer la seconde moitié du théorème de DESARGUES (celle où les six points sont répartis sur trois droites concourantes) nous aurons recours aux *homothéties* du plan $\mathbb{H}^2$.

Nous dirons qu'une application h de $\mathbb{H}^2$ dans lui-même est une **homothétie algébrique** (ou simplement une homothétie) s'il existe un quaternion a non nul tel que $h(x,y) = (xa, ya)$ quel que soit $(x,y) \in \mathbb{H}^2$. De façon plus précise, l'application $(x,y) \to (xa, ya)$ ainsi définie sera appelée l'homothétie **de rapport** a dans $\mathbb{H}^2$. On notera que le *rapport* a est placé à droite. On vérifie aussitôt que l'homothétie de rapport a est une bijection de $\mathbb{H}^2$ dans lui-même dont la bijection réciproque est l'homothétie de rapport a^{-1} et que si on compose, dans cet ordre, l'homothétie de rapport a avec l'homothétie de rapport b (b quaternion non nul), on obtient l'homothétie de rapport ab.

L'inverse d'une homothétie est donc une homothétie et le produit de deux homothéties une troisième homothétie. On aura surtout besoin des trois résultats suivants.

Proposition 7.— Si h est une homothétie de $\mathbb{H}^2$ et si A est un point quelconque, les points $0 = (0,0), A$ et $A' = h(A)$ sont alignés.

Ce résultat est évident si $A = 0$.

Si $A \neq 0$, alors $A' \neq 0$ car si $A = (x,y)$ avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, on a $A' = (xa, ya)$ avec $xa \neq 0$ ou $ya \neq 0$. Pour démontrer alors que $0, A$ et A' sont alignés, il suffit de montrer que les droites OA et OA' sont parallèles, ce qui se fait aisément avec les coefficients directeurs. Celui de OA est yx^{-1} si $x \neq 0$ ou ∞ si $x = 0$; celui de OA' est $(ya)(xa)^{-1} = yaa^{-1}x^{-1}$ si $x \neq 0$, ∞ sinon. D'où le résultat.

Proposition 8.— Si A et B sont deux points du plan $\mathbb{H}^2$, distincts de 0 et alignés avec 0, il existe une homothétie et une seule qui transforme A en B.

Posons $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$. Comme $0, A$ et B sont alignés, les droites OA et OB sont confondues. Elles ont donc le même coefficient directeur m. Si $m = \infty$, on a $x_A = x_B = 0$. Par suite, $y_A \neq 0$ et $y_B \neq O$ (car $O \neq A, B$) et si on pose $a = y_A^{-1} y_B$, on obtient un quaternion non nul pour lequel on a $y_B = y_A a$. Comme la relation $x_B = x_A a$ est trivialement vérifiée, on voit que B est l'image de A par l'homothétie de rapport a. Si $m \neq \infty$, c'est un quaternion, égal à la fois à $y_A x_A^{-1}$ et à $y_B x_B^{-1}$. De l'égalité $y_A x_A^{-1} = y_B x_B^{-1}$ qui en résulte, on déduit $y_B = (y_A x_A^{-1}) x_B = y_A (x_A^{-1} x_B)$. Comme $x_B = x_A (x_A^{-1} x_B)$, on voit que $y_B = y_A a$ et $x_B = x_A a$ avec $a = x_A^{-1} x_B$, ce qui veut dire que B est l'image de A par l'homothétie de rapport a.

Pour justifier l'unicité, considérons deux homothéties h et k telles que $h(A) = B$ et $k(A) = B$. Cela veut dire qu'il existe des quaternions a et b tels que $x_B = x_A a, y_B = y_A a, x_B = x_A b$ et $y_B = y_A b$. On a donc $x_A a = x_A b$ et $y_A a = y_A b$.

Comme l'un des éléments x_A, y_A au moins n'est pas nul (car $0 \neq A$), on en déduit que $a = b$, donc que $h = k$. CQFD.

Proposition 9.— Soient A, B deux points de $\mathbb{H}^2$ et A', B' leurs images respectives par une même homothétie h. Alors si $A \neq B$, on a $A' \neq B'$ et $AB \parallel A'B'$.

Il est évident que la relation $A \neq B$ implique $A' \neq B'$ puisque h est bijective.

Pour vérifier que $AB \parallel A'B'$, il suffit de calculer les coefficients directeurs de ces droites. Posons pour cela $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), A' = (x_{A'}, y_{A'})$ et $B' = (x_{B'}, y_{B'})$. Par hypothèse, il existe un quaternion $a \neq 0$ tel que $x_{A'} = x_A.a$, $y_{A'} = y_{A'}.a$, $x_{B'} = x_B.a$ et $y_{B'} = y_B.a$.

Si $x_A = x_B$, on a alors immédiatement $x_{A'} = x_{B'}$ et par suite, dans ce cas, les coefficients directeurs cherchés sont égaux à ∞. Si $x_A \neq x_B$, alors $x_{A'} = x_A.a$ est naturellement différent de $x_{B'} = x_B.a$ et l'on a $(y_{B'} - y_{A'})(x_{B'} - x_{A'})^{-1} = (y_B.a - y_A.a)(x_B.a - x_A.a)^{-1} = [(y_B - y_A)a][(x_B - x_A)a]^{-1} = (y_B - y_A)aa^{-1}(x_B - x_A)^{-1} = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$. CQFD.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la seconde moitié du théorème de DESARGUES. Considérons pour ce faire trois droites (distinctes) concourantes D_A, D_B, D_C, deux points A et A' sur D_A, deux points B et B' sur D_B, deux points C et C' sur D_C, tous distincts du point de concours, tels que $AB \parallel A'B'$ et $BC \parallel B'C'$. Il s'agit de montrer que $AC \parallel A'C'$. Supposons d'abord que le point de concours des trois droites soit l'origine $O = (0, 0)$ de $\mathbb{H}^2$. Alors les points O, A et A' sont alignés. D'après la prop. 8, il existe une homothétie h qui transforme A en A'. Alors h transforme le point B en un point B_1 qui, aligné avec O et B (prop. 7), est nécessairement sur $OB = D_B$, et pour lequel on a $AB \parallel A'B_1$ (prop. 9). Cela montre que B_1 est à l'intersection de D_B et de la parallèle à AB passant par A'.

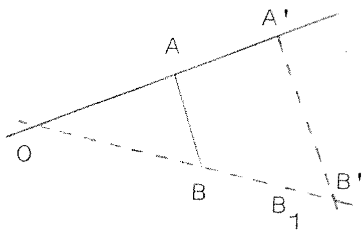

Figure 8

Comme B' a la même propriété (puisque $A'B' \parallel AB$), on a nécessairement $B_1 = B'$. Ainsi, l'homothétie h transforme B et B'. Par le même raisonnement, en utilisant le fait que $BC \parallel B'C'$, on voit que h transforme aussi C en C'. Dès lors, le parallélisme cherché découle de la prop. 9. Reste à examiner le cas où les trois droites D_A, D_B, D_C sont concourantes en un point I quelconque. Appelons t la translation qui transforme I en O (prop. 5). Alors t transforme les six points A, B, C, A', B', C' en six points que l'on notera $A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1$. Comme t *conserve le parallélisme* (cor. 1 de la prop. 6), on a $A_1B_1 \parallel A'_1B'_1$ et $B_1C_1 \parallel B'_1C'_1$.

Comme t *conserve l'alignement et le non-alignement* (cor. 2 de la prop. 6), on voit aussi que les droites $A_1A'_1, B_1B'_1$ et CC'_1 sont concourantes en O. Par suite, d'après la démonstration précédente, on a $A_1C_1 \parallel A'C'_1$. Comme $AC \parallel A_1C_1$ et $A'C' \parallel A'_1C'_1$, on en déduit que $AC \parallel A'C'$. CQFD.

Résumons :

Théorème 3.— Dans le plan de HAMILTON $\mathbb{H}^2$, le théorème de DESARGUES est valable.

On exprime souvent ce résultat en disant que $\mathbb{H}^2$ est un **plan arguésien** (l'adjectif *arguésien* étant dérivé du nom de DESARGUES comme *cartésien* l'est de celui de DESCARTES). Ainsi, contrairement à ce qui a lieu pour le théorème de PAPPUS, l'absence de commutativité pour la multiplication n'influe pas sur la validité du théorème de DESARGUES. Pour mettre ce dernier en défaut, il va nous falloir modifier les règles de calcul sur les quaternions, quitter les corps qui nous sont familiers et ne pas hésiter à abandonner l'associativité ...

à suivre ...