DES AVATARS DE LA SÉRIE HARMONIQUE ALTERNÉE

Jean LEFORT

C'est un exercice classique que de démontrer la divergence de la série harmonique $\Sigma\frac{1}{n}$ et la convergence vers $\ell n2$ de la série harmonique alternée $\Sigma\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Cela traduit la semi-convergence de la série harmonique alternée. Rappelons qu'une série est semi-convergente si elle converge alors que la série des valeurs absolues diverge (si cette dernière converge également on dit que la série est absolument convergente).

On démontre que l'ordre de sommation des termes d'une série absolument convergente n'influe pas sur le résultat final alors que pour une série semi-convergente tout peut arriver. En effet un théorème dû à RIEMANN énonce qu'on peut réordonner les termes pour obtenir n'importe quel nombre donné à l'avance. La démonstration repose sur le fait que la sous-série des termes positifs et celle des termes négatifs divergent. Pour obtenir la somme s (positive par exemple), on ajoute dans l'ordre les termes positifs pour dépasser s puis on compense avec les termes négatifs jusqu'à être sous s ...et ainsi de suite dans un mouvement de bascule infini.

On peut traduire autrement ces propriétés de l'ordre de sommation des termes d'une série. Pour les séries absolument convergentes on peut parler de commutativité infinie, c'est-à-dire qu'on peut toujours *commuter* un nombre infini de termes, deux par deux, aussi grande soit la *distance* qui les sépare dans la série initiale. Exemple :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$
$$a_0 + a_2 + a_1 + a_4 + a_6 + a_3 + \ldots + a_{4p} + a_{4p+2} + a_{2p+1} + \ldots$$

ont même somme si la première est absolument convergente. On a bien dans la deuxième écriture, utilisation de la commutativité infinie puisque la *distance* entre la position initiale et finale d'un terme est arbitrairement grande.

Au contraire, pour les séries semi-convergentes cette commutativité infinie n'existe pas. Cependant on peut toujours commuter un nombre infini de termes à condition que la distance entre la position initiale et finale d'un terme reste bornée quels que soient les termes choisis. Il n'y a donc dans ce cas que commutativité finie. A titre d'exemple considérons le réarrangement suivant de la série harmonique alternée :

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

ce qui correspond à

$$a_0 + a_1 + a_3 + a_2 + a_5 + a_7 + a_4 + a_9 + a_{11} + \cdots + a_{2n} + a_{4n+1} + a_{4n+3} + \cdots$$

le regroupement

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})-\frac{1}{8}+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10})-\frac{1}{12}\dots\\ =\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\dots\end{aligned}$$

montre que la somme vaut $\frac{1}{2}\ell n2$.

• La méthode de RIEMANN permet de construire un réarrangement donnant une somme s fixée a priori. Mais cette méthode est peu agréable, car elle ne permet pas de connaître le nième terme du réarrangement sans avoir calculé les précédents et de plus elle ne fonctionne que dans un sens, c'est-à-dire qu'il semble difficile de connaître s à partir de la donnée du réarrangement. Cela résulte du fait que le théorème de RIEMANN est très général puisqu'il s'applique à une serie semi-convergente quelconque. Nous allons faire beaucoup mieux dans le cas de la série harmonique alternée.

Nous définissons un regroupement (m, n) de la série harmonique alternée comme étant la série obtenue en écrivant les m premiers termes positifs puis les n premiers termes négatifs puis les m termes positifs suivants puis les n termes négatifs suivants et ainsi de suite. Par exemple :

$$(2) \qquad 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots$$

est un regroupement (2,1).

Utilisons la théorie des séries entières pour calculer la somme de (2). Nous pouvons écrire (2) sous la forme :

$$(2') \qquad x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}\dots$$

où l'on fera ultérieurement $x = 1$. Or pour $|x| < 1$, (2') est absolument convergente. Il est alors possible d'utiliser la commutativité infinie et nous pouvons écrire (2') sous la forme :

$$(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\dots)-(\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{4}+\frac{x^{12}}{6}\dots)$$

soit $\frac{1}{2}[\ell n(1+x)-\ell n(1-x)]+\frac{1}{2}\ell n(1-x^4)$ qui se réduit à $\frac{1}{2}\ell n[(1+x)^2(1+x^2)]$.

Maintenant un théorème d'ABEL nous permet d'affirmer que la somme de (2) est égale à la limite de celle de (2') quand x tend vers 1. C'est-à-dire que (2) a pour somme $\frac{3}{2}\ell n2$.

Prenons un autre exemple avec un regroupement (3,2) :

$$(3) \qquad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\dots$$

se transforme en la série entière

$$(3') \qquad x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^{12}}{4} + \frac{x^{14}}{7} + \frac{x^{18}}{9} + \frac{x^{22}}{11} - \frac{x^{18}}{6} \ \ldots$$

soit

$$(x^2 + \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + \ldots) - (\frac{x^6}{2} + \frac{x^{12}}{4} + \frac{x^{18}}{6} + \ldots)$$

où nous reconnaissons $\frac{1}{2}[\ell n(1+x^2) - \ell n(1-x^2)] + \frac{1}{2}\ell n(1-x^6)$ ce qui montre que (3) a pour somme $\frac{1}{2}\ell n 6$.

D'une façon générale, pour un regroupement (m,n) nous écrivons pour les termes positifs $\frac{x^{n(2p-1)}}{2p-1}$ et pour les termes négatifs $-\frac{x^{m(2p)}}{2p}$ ce qui conduit à la somme :

$$\frac{1}{2}[\ell n(1+x^n) - \ell n(1-x^n)] + \frac{1}{2}\ell n(1-x^{2m})$$

pour la série entière et à $\ell n 2 + \frac{1}{2}\ell n(\frac{m}{n})$ pour la série harmonique alternée regroupée en (m,n), c'est-à-dire alternativement m termes positifs et n termes négatifs.

Intéressons nous maintenant au cas où nous n'avons pas un regroupement (m,n), mais une alternance irrégulière avec cependant conservation de l'ordre naturel pour les sous séries des termes positifs et négatifs. Posons λ_p égal au rapport du nombre de termes positifs au nombre de termes négatifs de rang inférieur ou égal à p. Si λ_p admet une limite λ quand p tend vers l'infini il semble naturel d'admettre que le réarrangement de la série harmonique alternée converge vers $\ell n 2 + \frac{1}{2}\ell n\lambda$, puisque c'est une généralisation du cas précédent où λ valait $\frac{m}{n}$.

Soit $\Sigma_{k=1}^{\infty} u_k$ le réarrangement de la série harmonique alternée : soit m_p et n_p le nombre de termes respectivement positifs et négatifs de rang inférieur à p. Nous pouvons écrire

$$\Sigma_{k=1}^{p} u_k = \Sigma_{j=1}^{m_p} \frac{1}{(2j-1)} - \Sigma_{j=1}^{n_p} \frac{1}{2j}.$$

Il est bien connu que la suite de terme général $E_p = \Sigma_{k=1}^{p} \frac{1}{k} - \ell n p$ converge en décroissant vers γ, la constante d'Euler, quand p tend vers l'infini. Ceci nous permet de traiter les termes négatifs :

$$\Sigma_{j=1}^{n_p} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2}\Sigma_{j=1}^{n_p} \frac{1}{j} = \frac{1}{2}\ell n \ n_p + \frac{1}{2}E_{n_p}$$

mais comme

$$\Sigma_{j=1}^{2m_p} \frac{1}{j} = \Sigma_{j=1}^{m_p} \frac{1}{2j-1} + \Sigma_{j=1}^{m_p} \frac{1}{2j}$$

(en séparant les termes d'ordre pair de ceux d'ordre impair), nous avons aussi :

$$\Sigma_{j=1}^{m_p} \frac{1}{2j-1} = \Sigma_{j=1}^{2m_p} \frac{1}{j} - \Sigma_{j=1}^{m_p} \frac{1}{2j} = \ell n 2m_p + E_{2m_p} - \frac{1}{2}\ell n m_p - \frac{1}{2}E_{m_p}$$

et finalement en regroupant :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} \Sigma_{k=1}^{p} u_k &= \lim_{p\to\infty} [\ell n 2m_p - \frac{1}{2}\ell n m_p - \frac{1}{2}\ell n n_p + E_{2m_p} - \frac{1}{2}E_{m_p} - \frac{1}{2}E_{n_p}] \\ &= \ell n 2 + \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty} \ell n \frac{m_p}{n_p} \\ &= \ell n 2 + \frac{1}{2}\ell n \lambda\end{aligned}$$

qui est bien le résultat que nous attendions (*).

• La valeur de la somme du réarrangement de la série harmonique alternée ne dépend que de la densité in fine des termes positifs par rapport aux termes négatifs. Si maintenant nous nous donnons un nombre λ irrationnel quelconque, nous pouvons facilement construire un réarrangement de la série harmonique alternée qui admette pour somme $\ell n 2 + \frac{1}{2}\ell n \lambda$. Prenons le cas où $\lambda > 1$ et alternons $E[p\lambda] - E[(p-1)\lambda]$ termes positifs avec un terme négatif, p prenant les valeurs entières successives 1, 2, 3 ...(E désignant la fonction partie entière). La densité relative après l'écriture de p termes négatifs est comprise entre

$$\frac{E[p\lambda]}{p} \quad \text{et} \quad \frac{E[(p+1)\lambda]}{p}$$

quantités qui tendent toutes deux vers λ quand p tend vers l'infini. Dans le cas où $\lambda < 1$, il suffira d'alterner un terme positif avec $E[p\frac{1}{\lambda}] - E[(p-1)\frac{1}{\lambda}]$ termes négatifs pour obtenir également une densité relative ayant λ pour limite.

Par exemple pour $\lambda = e^{2-\ell n\ 4} \simeq 1,84726\ldots$ nous obtenons successivement

$$\begin{gathered} E(p\lambda) : 0,1,3,5,7,9,11,12,14,16,18,20,\ldots \\ E(p\lambda) - E((p-1)\lambda) : 1,2,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2,\ldots \end{gathered}$$

et la série :

$$\begin{gathered} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} \\ + \frac{1}{17} - \frac{1}{10} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{12} + \frac{1}{23} - \ldots \end{gathered}$$

qui converge vers 1.

De même pour $\lambda = e^{1-\ell n\ 4} \simeq 0,67957\ldots$ nous obtenons successivement :

$$\begin{gathered} E(\frac{p}{\lambda}) : 0,1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,\ldots \\ E(\frac{p}{\lambda}) - E(\frac{p-1}{\lambda}) : 1,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,\ldots \end{gathered}$$

(*) Cette démonstration est adaptée de COWEN, DADIDSON et KAUFMAN (Amer. Math. Monthly, Dec. 1980).

et la série :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}$$
$$-\frac{1}{14}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\frac{1}{13}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\cdots$$

qui converge vers $\frac{1}{2}$.

Ce que nous venons de voir avec la série harmonique alternée est spécifique à celle-ci. Considérons en effet une suite (u_n) alternée décroissante en valeur absolue avec, pour fixer les idées, $u_1 > 0$. Alors :

1) Si $\lim_{n\to\infty} n|u_n| = +\infty$, on peut toujours trouver un réarrangement de la série Σ_n de densité relative $\lambda = 1$ dont la somme est un nombre réel arbitraire.

2) Si $\lim n|u_n| = 0$, on peut trouver un réarrangement $\Sigma u'_n$ de densité relative $\lambda < 1$ avec $\Sigma u'_n = \Sigma u_n$.

A ce sujet on pourra consulter : PRINGSHEIM : "*Über die Werthveränderungen bedingt convergierten Reihe und Produkte*".– Mathematische Annalen, 22 (1883) 455–503.

> Un très vieil ami de mon père, sorti premier de l'école normale, avait dû à cet exploit de débuter dans un quartier de Marseille : quartier pouilleux, peuplé de misérables où nul n'osait se hasarder la nuit. Il y resta de ses débuts à sa retraite, quarante ans dans la même classe, quarante ans sur la même chaise.
>
> Et comme un soir mon père disait :
>
> — "Tu n'as donc jamais eu d'ambition?
>
> — Oh mais si! dit-il, j'en ai eu! Et je crois que j'ai bien réussi! Pense qu'en vingt ans, mon prédécesseur a vu guillotiner six de ses élèves. Moi, en quarante ans, je n'en ai eu que deux, et un gracié de justesse. Ça valait la peine de rester là."
>
> Marcel PAGNOL
> La gloire de mon père.