MATH.EN.JEANS
ou : L'initiation à la recherche (*)

Pierre AUDIN

M.éthode
d'**A.**pprentissage
des **Th.**éories mathématiques
en
J.umelant
des **E.**tablissements
pour une **A.**pproche
N.ouvelle
du **S.**avoir

1.— "MATh.en.JEANS" : Buts et moyens

C'est dans le cadre de l'opération "1.000 classes, 1.000 chercheurs" que se place le projet "MATh.en.JEANS".

C'est en 85–86 au lycée Braque d'Argenteuil avec l'intervention de Pierre DUCHET comme chercheur mathématicien que commença l'expérience qui débouchera en 89–90 sur "MATh.en.JEANS".

Il s'agit d'initier les élèves **aux maths, aux vraies, aux dures**, en un mot à la **recherche.** Le jumelage pour l'occasion de deux établissements (le lycée J. JAURÈS d'Argenteuil et le lycée RACINE de Paris) permettait de simuler les conditions de la recherche.

Il est important de souligner ici que les élèves participant à "MATh.en. JEANS" n'ont pas été sélectionnés. Ces élèves sont seulement des **volontaires**, qui n'étaient pas les meilleurs de leurs classes, et à qui personne n'a fait subir la moindre enquête préalable, si ce n'est pour la recherche de l'horaire hebdomadaire, en fonction de l'emploi du temps de chacun.

Nous avons placé les élèves dans les conditions véritables de la recherche. Dans chacun des deux établissements, les élèves se sont répartis en groupes de trois ou quatre. Chacun des quatre groupes a choisi un des quatre sujets communs aux deux établissements, sujets auxquels ils ne comprenaient pas grand chose et sur lesquels ils n'ont eu que quelques explications rapides :

(*) Travail effectué dans le cadre d'un Projet d'Action Éducative, participant à l'Opération "1.000 chercheurs, 1.000 classes" réalisé avec l'aide du Ministère de la Recherche et de la Technologie (D.I.S.T.).

SUJET 1 : Combinatoire de l'échiquier. Parcours du cavalier. Placer des tours, des reines, des dominos. Les fins de partie aux échecs. Analyse rétrograde. Les grilles magiques.

SUJET 2 : Géométries non-euclidiennes. Les énoncés équivalents à l'axiome des parallèles. La géométrie euclidienne est une géométrie non-euclidienne. La géométrie de LOBATCHEVSKI. Quadrangles. Sinus et cosinus. Théorème de PYTHAGORE. Axiomatisation de la géométrie utilisable dans l'enseignement et par l'enseignement. Géométries finies.

SUJET 3 : Le nombre d'or. Définition. Rectangles et triangles d'or. Suite de FIBONACCI. La nature. La musique et les arts. Algorithme d'EUCLIDE, paradoxe de Lewis CARROLL, numération. Fractions continues. Application au solitaire.

SUJET 4 : L'infini. L'infiniment grand et l'infiniment petit. Histoire et histoires. La continuité ou les continuités. Le continu, le transfini.

Nous avions ainsi contitué au lycée RACINE de Paris et au lycée Jean JAURÈS d'Argenteuil, quatre équipes de recherche, chacune d'elles ayant la possibilité, à plusieurs reprises, de rencontrer l'équipe correspondante. Il restait à les mettre au travail. Nous leur avons donné les mêmes documents, constitués surtout de la collection complète du "*Petit Archimède*" (1). Nous simulions ainsi une *banque de données*, dans laquelle ils ont obtenu soit beaucoup — voire trop — d'informations, soit pas assez, suivant les sujets.

2.— Déroulement d'une séance hebdomadaire, d'un séminaire, du Congrès

Séances hebdomadaire :

Dans un premier temps, le travail des élèves a essentiellement consisté à comprendre leur sujet, à organiser leur travail de groupe, à prendre des directions de recherche, à trouver des informations dans les documents qui leur étaient fournis. Cela a duré environ six semaines, au bout desquelles ils n'ont plus guère utilisé leurs documents, travaillant de façon presque totalement autonome.

Les enseignants, eux, on appris à se taire. Quand les élèves se fourvoyaient dans de fausses pistes ou des contre-sens, il n'était pas question de leur apporter la bonne parole ou *le* resultat *juste* sous prétexte de ne pas laisser dire de bêtises. Le prof était présent pour répondre à la demande, et encore, ses réponses ne devaient pas être des réponses dans le sens habituel qu'un prof peut donner à ce mot : nous les mettions sur la piste, nous leur proposions des directions qu'ils prenaient ou pas, nous leur indiquions des sources, qu'ils consultaient ou pas. D'autres fois, nous allions à leur rencontre, leur posant nous-mêmes des questions, pour les obliger à affiner leurs réponses, ou les amener à envisager des situations auxquelles ils n'avaient pas pensé, et pour lesquelles leurs réponses étaient incomplètes.

(1) donnée en double exemplaire par l'A.D.C.S. (Association pour le Développement de la Culture Scientifique), éditrice de feu "*Le Petit Archimède*", et de l'actuel "*Jeune Archimède*".

Séminaires

A trois reprises, les élèves des deux lycées se sont rencontrés, comme dans un *vrai* séminaire, pour confronter leurs travaux, échanger leurs idées, ouvrir leur champ de recherche, ou préciser leur direction de travail. Ces séminaires ont eu lieu des samedis, de 9h à 17h, dans l'un ou l'autre des établissements, avec l'aide des administrations locales et/ou des collègues (mathématiques, histoire-géographie, dessin industriel, musique).

L'emploi du temps de ces séminaires était le suivant : d'abord, visite de l'établissement, lors du premier séminaire tenu dans l'établissement; ensuite, réunion plénière avec Pierre DUCHET, pour un exposé mathématique n'ayant pas de lien privilégié avec l'un des sujets. Puis, quelques plages horaires pour permettre aux groupes de se rencontrer, sujet par sujet, avec ou sans enseignant, avec ou sans Pierre DUCHET (nous nous efforcions, à trois, d'assurer une rotation convenable sur les quatre groupes). L'objectif, outre de tenir un séminaire spécialisé sujet par sujet, était de préparer une présentation de l'état de la recherche à l'ensemble des élèves par chacun des groupes.

C'était donc la phase suivante : chaque groupe, complet, à tour de rôle, *passait* devant les autres, pendant environ 20 minutes, en supportant le feu plus ou moins nourri des questions qui venaient aussi bien des enseignants et du chercheur que des autres élèves. Les élèves ont généralement trouvé cette séance éprouvante, mais cela s'est avéré payant, car cela les a obligés à préciser leurs énoncés, à se rendre compte de problèmes qu'ils n'avaient pas soupçonnés.

Certaines définitions étaient mal comprises (définition du nombre d'or, d'une injection, d'une surjection), certains problèmes mal énoncés (parcours de tous les sommets ou de toutes les arêtes d'un graphe, axiome ou postulat des parallèles), certaines solutions mal exposées (convergence de $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}$ vers 2), certaines conjectures présentées comme théorèmes, etc. En bref, ils ont dû vulgariser leur travail, en s'obligeant à être à la fois clairs et convaincants.

Dans ces courses contre la montre qu'ont constituées ces trois séminaires, la dernière étape était le bilan que Pierre DUCHET tirait à chaud sur leur travail, leur méthode de travail, l'avancement de leur travail, les directions à suivre d'ici le prochain séminaire ou le Congrès.

Notre rôle pendant ces séminaires

En aidant les élèves à formuler leurs questions et leurs réponses, nous leur avons apporté un langage, et nous leur avons aussi donné quelques théorèmes dont ils avaient besoin pour poursuivre l'étude de leur sujet :

Les élèves de 1ère qui cherchaient les géodésiques sur la sphère en découpant un chemin en petits morceaux assimilables à des segments n'avaient pas assez de temps devant eux pour *redécouvrir le calcul infinitésimal*; ils ont admis que ces géodésiques sont les grands-cercles, et ont poursuivi l'étude de la géométrie de la sphère.

Les élèves qui cherchaient à comparer les cardinaux d'ensemble infinis ont admis qu'au lieu d'une bijection entre deux ensembles, ils pouvaient se contenter de deux injections ou de deux surjections d'un ensemble dans l'autre.

Les élèves de 2nde qui avaient besoin de démontrer la convergence d'une suite, et qui avaient déjà des difficultés avec un raisonnement par récurrence ont admis qu'une suite croissante majorée est convergente.

Les élèves qui savaient que le problème du placement des huit dames sur un échiquier 8×8 a quatre-vingt-douze solutions n'ont pas fait semblant de l'oublier, mais ont cherché à comprendre comment obtenir une solution, et comment s'obtiennent toutes les solutions.

Mais nous, profs et chercheur, nous nous sommes refusés à leur faire une démonstration. Nous leur avons donné (quelquefois) ces outils parce que l'avancement de leur travail exigeait qu'on les leur donne. Mais il s'agissait de leur démonstration, et ce sont eux qui nous demandaient le soutien théorique dont ils avaient besoin à ce moment-là. Notre travail de *direction de recherche* a essentiellement consisté à nous taire, ou à les provoquer pour redynamiser leur travail.

Le Congrès de Vaugrigneuse

C'est le *quatrième séminaire*. A la différence des autres séminaires, ce week-end s'est tenu au château de Vaugrigneuse. Nous disposions de plus de temps pour que les élèves peaufinent leur travail, puisqu'il s'est tenu du samedi matin au dimanche soir. L'objectif donné aux élèves était l'exposé habituel de séance plénière, devant un public inhabituel : mathématiciens, parents d'élèves, enseignants, pour l'essentiel. Les élèves ont pu profiter du parc du château, d'autant que nous, organisateurs, avons souvent été pris par des tâches inhabituelles (pour aller vite : organisation pratique, mise au point d'un programme, mondanités, accueil des invités). Notre pression sur les élèves s'en est trouvée relâchée, ce qui ne les a pas empêchés de mener à bien leur travail.

Le Congrès et ses suites

Pendant toute l'année, au lieu de devoir *répéter nos explications* comme en cours, nous avons eu le plaisir d'observer les élèves se construire leurs mathématiques. A Vaugrigneuse, cela devint le plaisir de les regarder présenter leurs travaux à des mathématiciens sous le charme, à des profs et des élèves étonnés ou à des parents fiers comme ils l'auraient été s'ils avaient assisté à une *audition* d'un chérubin apprenti musicien.

La dernière phase de leur travail a été de **communiquer** leurs travaux : expositions, articles, ... car il ne sert à rien de trouver quelque chose si on n'est pas capable de le faire savoir aux autres. Pourtant, c'est la phase la moins réussie : les élèves avaient surtout envie de continuer à faire des maths, plutôt que de revenir sur ce qu'ils avaient déjà fait. Trois des quatre groupes ont tout de même écrit des articles, comme des professionnels, pour "*Tangente*" et "*Quadrature*", qui acceptaient de publier des articles après avoir jugé de la qualité de leur travail et de leur exposé public.

Le dernier séminaire a donc eu un fonctionnement différent des trois premiers : il avait pour objectif la réalisation d'une exposition sur le déroulement de leur travail dans "MATh.en.JEANS". La motivation et l'intérêt des élèves pour cette exposition ont été croissant, à croissance exponentielle. Commencée à 9 heures, en visionnant la cassette vidéo réalisée sur "MATh.en.JEANS", la journée s'est terminée à 19 heures, parce que **nous** avons obligé les élèves à s'arrêter : il restait quelques panneaux à plastifier, et, eux voulaient finir. (Entre-temps, la plastification du premier panneau terminé avait relancé le moral des troupes qui n'était alors pas bien haut.)

3.— Les résultats des élèves, groupe par groupe

Ensemble : l'exposition

L'exposition, terminée in extremis par les élèves de Racine avant la fin des cours au lycée Racine, fait le point sur l'ensemble des sujets abordés par chaque groupe avec contrôle de l'ensemble des élèves. Mis à part le Congrès de Vaugrigneuse, c'est la seule production collective des élèves.

Combinatoire

Les thèmes abordés et les résultats obtenus sont les suivants :
— Parcours hamiltoniens du cavalier sur l'échiquier 5×5 (864 solutions) : études sur le 8×8.
— Placements de Tours sans prise mutuelle possible sur le $n \times p$ (existence de solutions optimales, dénombrements).
— Même problème pour les Dames : méthode pour obtenir les 92 solutions sur le 8×8; 2 solutions sur le 4×4, 10 solutions sur le 5×5.
— Placement de dominos sur des échiquiers tronqués; rôle de la parité; variantes serbo-croates (échiquiers troués).
— Réalisation de graphes : nombre d'arêtes dans le graphe du cavalier; parcours eulériens (CNS).

Ce groupe était celui qui disposait du plus grand nombre de documents. Il y en avait certainement trop, et c'est sans doute ce qui les a coincés dans leur travail. Car, pour chaque thème (ou presque), l'un des élèves trouvait le résultat dans l'un des numéros du "*Petit Archimède*" avant que le groupe ne l'ait trouvé lui-même. L'ensemble est donc plutôt hétéroclite.

Nombre d'or

Les thèmes abordés et les résultats obtenus sont les suivants :
— Historique, nombre d'or, arts, sciences ....
— Musique et nombre d'or.
— Convergence de la suite de FIBONACCI vers le nombre d'or (démonstration

presque complète); paradoxe de Lewis CARROLL.
— $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} \to 2$ (démonstration complète; conjecture générale).
— Périodicité de la suite des derniers chiffres des nombres de FIBONACCI.
— Définitions du nombre d'or (équations du second degré ...).

Le groupe disposait aussi de nombreux documents. C'est la raison pour laquelle les élèves ont eu, au début, du mal à décider des thèmes qu'ils allaient traiter. Beaucoup des résultats qu'ils ont obtenus individuellement ne sont donc pas ressortis dans le travail collectif. Finalement, les thèmes traités sont ceux pour lesquels ils avaient le moins de documents : paradoxe de Lewis CARROLL et radicaux itérés.

Géométries non-euclidiennes

Les thèmes abordés et les résultats obtenus sont les suivants :
— Étude de la **demi-sphère** ouverte avec demi-équateur moins un point. Vérification des axiomes de HILBERT sur cette demi-sphère : le postulat d'EUCLIDE n'est pas vérifié.
— Démonstration du **premier axiome** dans la géométrie de la sphère (par deux points ...).
— Le problème du *Jardinier* : comment planter des arbres à la mode de chez JEANS.
— **Géométrie sphérique** : (i) comparaison plan-sphère (points, droites, segments, angles, triangles); (ii) intersection de deux grands cercles; (iii) définition de la mesure d'un angle (par la longueur d'un arc); (iv) somme des angles d'un triangle *normal* (démonstration).
— **Axiomatique de la géométrie JEANS** (en collaboration avec P. DUCHET) : théorie catégorique ayant pour modèle la géométrie sphérique.

C'est le groupe qui avait le moins de documents à sa disposition : à part l'Encyclopaedia Universalis et le Géométricon (*), ils n'avaient rien. Nous leur avons fourni la liste des axiomes de HILBERT, et un petit historique de l'évolution de la définition de *droite*. Ils ont donc tout produit eux-mêmes, jusqu'au jour où Pierre DUCHET a dérapé ... Dérapage contrôlé, mais dérapage tout de même, par rapport à l'esprit dans lequel nous menions “MATh.en.JEANS” : ce manque de documents a titillé Pierre DUCHET, qui a fait, une fois, un cours de la géométrie non-euclidienne que les élèves *voulaient* créer à ... ces élèves eux-mêmes.

Cela ne retire rien à l'intérêt de ce produit (géométrie “JEANS”)., ni aux résultats obtenus par les élèves, grâce, il faut **bien** le dire, aux élèves de seconde, qui ont fait preuve de beaucoup d'imagination.

L'infini

Les thèmes abordés et les résultats obtenus sont les suivants :
— La **bijection** comme moyen privilégié de comparer les infinis.

(*) Offert par les éditions Belin, en double exemplaire, un pour chaque établissement.

— Bijections explicites entre **segments** (ouverts, semi-ouverts, fermés) et droite.
— $1 + (1/2) + (1/4) + (1/8) + (1/16) + \ldots \to 2$.
— Démonstration originale de $1 + (1/2) + (1/3) + (1/4) + \ldots \to \infty$.

C'est le groupe le plus *scolaire*, et aussi le plus productif quant à la quantité des résultats obtenus. Le plus *scolaire*, car le seul groupe qui n'ait pas vraiment travaillé en groupe, mais plutôt en juxtaposition de travaux individuels. Les élèves de seconde se sont acharnés sur la somme de la série géométrique de raison 1/2 sans jamais vouloir profiter des connaissances des autres à propos des séries géométriques, ni écouter leurs conseils.

Mais les élèves étaient accrochés et déterminés, et ils ont obtenus de nombreux résultats tout en se posant beaucoup de questions de nature philosophique sur l'infini.

4.— Conclusion(s)

Travail personnel, en groupe, avec aide éventuelle de l'enseignant, en *séminaire* avec le groupe correspondant, avec supervision du chercheur C.N.R.S., ont permis aux élèves de produire de nouvelles mathématiques, pas tant en ce qui concerne les résultats obtenus que les démonstrations qu'ils ont inventées (par exemple, démonstration inédite d'un résultat connu : divergence de la série harmonique). Ils ont produit **leurs** mathématiques. Hors la structure de la classe, ils ont pratiqué un **loisir**, faisant des maths *comme d'autres font du tennis*. Ils ont fait des maths ensemble, acceptant de se tromper ensemble, de se faire contester ou rectifier par les autres, de donner des explications et de convaincre.

Face à notre plaisir subsiste une inquiétude de taille. Les élèves demandent à ce que ce travail reste en marge de leur scolarité : il s'agit de culture et (de leur point de vue ...) cela ne regarde pas l'école. Ils ne veulent pas que l'expérience s'intègre au cours; et eux-mêmes n'utilisent pas leur travail, leurs méthodes, leurs résultats, leurs acquis dans le déroulement du cours classique. Ainsi, dans un *devoir à choix multiple* où les élèves de 1ère S avaient à choisir les exercices à traiter dans une liste d'énoncés trop longue, aucun élève de "MATh.en.JEANS" n'a choisi de traiter un exercice en rapport avec son sujet de recherche.

Le seul point nouveau dont j'ai pu juger, pour les élèves que j'avais aussi en classe, est qu'ils participaient davantage au cours, au fur et à mesure que l'année s'écoulait. Mais leurs résultats n'ont guère évolué, et ils n'ont pas été, loin s'en faut, les meilleurs élèves de mes classes. Quant à ceux qui avaient d'autres enseignants en cours, plusieurs disaient être en complet décalage avec leur prof, n'ayant même pas toujours droit à la parole alors que c'est un droit qu'ils ont effectivement conquis, entre eux **et** face aux adultes!

Pourtant, pour nous les mathématiques ne sont pas un catalogue de recettes plus ou moins utiles à ingérer. Les mathématiques sont vivantes; l'enseignement des mathématiques devrait donner le goût d'en faire, devrait donner les moyens d'en faire. Ce ne sont pas les résultats qu'il faut apprendre mais les méthodes. Ce n'est pas la difficulté d'une discipline qu'il faut revendiquer, mais l'efficacité, la force, voire aussi la beauté d'un raisonnement qu'il faut transmettre. Et si l'Economie désire des créateurs, si l'Education Nationale veut susciter des vocations et former des profs de qualité, si la Recherche veut s'éviter un vieillissement important de ses cadres, c'est bien ces mathématiques là qu'il faut enseigner.

Il y a à cela beaucoup de moyens simples à la portée des enseignants : l'utilisation des textes historiques, l'enseignement de méthodes mais aussi l'enseignement de l'Histoire des maths, l'introduction d'une dimension philosophique dans le cours. Mais même un pédagogue talentueux ne peut pas pour l'instant mettre ses élèves en situation réelle de recherche mathématique dans le cadre de son cours. Cela exige des élèves motivés (même faibles), une perte de temps importante qui ne permettra pas de *boucler le programme*, un travail par lui-même difficile à noter (la recherche **doit** se faire en groupe et non dans des tours d'ivoire) et qui ne prépare pas à *l'examen* qui ne sert qu'à contrôler des savoir-faire.

Et l'authenticité de la recherche menée par les élèves ne peut être assurée que par un intervenant extérieur : un chercheur! La formation d'un prof ne lui permet pas de tenir le rôle de directeur de recherche. Et le discours du prof est visiblement suspect aux yeux des élèves qui le connaissent trop. Le contact avec le chercheur est essentiel pour eux. Pour différentes raisons, l'une d'elles — et non la moindre — étant de rencontrer un travailleur véritable, différent du seul qu'ils ont l'habitude de côtoyer : leur prof.

Car les motivations des élèves de "MATh.en.JEANS" sont diverses : attrait pour les mathématiques, recherche d'une activité de type soutien pour des élèves qui se sentent en difficulté et se trompent sur nos objectifs, activité périscolaire en concurrence avec l'Ecole, établissement de rapports plus profonds avec d'autres élèves de leur lycée, avec des élèves d'un autre lycée, d'un autre milieu socio-culturel, rencontre avec un métier mystérieux, ou avec une *bête curieuse*, ou tout simplement curiosité pour quelque chose d'original qui démarre dans leur lycée ...

Pour la plupart, ils ont produit des mathématiques par eux-mêmes, ils ont *séché*, ils se sont découragés, ils se sont pris par la main et ont surmonté leurs découragements, ils ont parlé d'égal à égal avec leurs profs, avec des mathématiciens, ils ont trouvé des mathématiques mais ils ont aussi découvert la réalité des mathématiques qui se font. Ils ne deviendront sans doute pas tous des mathématiciens, des enseignants ou des ingénieurs, mais le devenir leur semble désormais concevable. Et si au début de l'année ils n'osaient pas trop dire aux copains qu'ils faisaient des maths en plus du cours, sans y être obligés, en fin d'année c'étaient leurs copains qui leur demandaient des explications ou des nouvelles sur ce qu'ils faisaient. Premier pas vers une dédramatisation des mathématiques.

ANNEXE : Exemples de résultats d'élèves

On trouvera les grandes lignes de travaux réalisés par des élèves. Il ne saurait être question ici, de faire le tour de toutes les questions traitées et nous nous contenterons des résultats originaux de deux des groupes.

Exemples de résultats traités par le groupe "l'infini"

"Un hôtel au nombre de chambres fini affiche complet; un voyageur arrive et souhaiterait en obtenir une, mais l'hôtelier ne peut que le renvoyer gentiment. Ce voyageur continue sa route et arrive devant un autre hôtel qui affiche lui aussi complet. Toutefois cet établissement comprend un nombre infini de chambres. Peut-il convaincre l'hôtelier de lui donner une chambre?"

Ce problème a été parfaitement formulé, puis traité par les élèves, qui en ont réinvesti la solution dans l'établissement d'une bijection entre segment ouvert et segment semi-fermé. Ils ont par ailleurs acquis une maîtrise suffisante de l'infini pour que l'un d'entre eux nous propose une démonstration **originale** de la divergence de la série harmonique. Le principe en est simple et surprenant : après avoir remarqué que $(1/2)+(1/4)+(1/8)$ ne dépasse pas 1, mais que $(1/2)+(1/4)+(1/8)+(1/5)$ si, il minore la série harmonique par la série $1+1+1+\ldots$ en groupant les termes par paquets de plus en plus gros dans lesquels il minore certains groupements par 1/2, d'autres par 1/4, d'autres par 1/5, d'autres par 1/8, et tous les autres par ... 0 :

$$\begin{gathered}(1/2)+(1/3)+(1/4)+(1/5)+(1/6)+(1/7)+(1/8)+(1/9)+(1/10)\\ >(1/2)+0+(1/4)+(1/5)+0+0+(1/8)+0+0>1\end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered}(1/11)+(1/12)+\cdots+(1/100)=\\ (1/11)+(1/12)+(1/13)+(1/14)+(1/15)+(1/16)+(1/17)+(1/18)+(1/19)+(1/20)\\ +(1/21)+(1/22)+(1/23)+(1/24)+(1/25)+(1/26)+(1/27)+(1/28)+(1/29)+(1/30)\\ \ldots+(1/91)+(1/92)+(1/93)+(1/94)+(1/95)+(1/96)+(1/97)+(1/98)+(1/99)+(1/100)\\ >(10/20)+0+(10/40)+(10/50)+0+0+(10/80)+0+0>1\end{gathered}$$

etc. C'est-à-dire que des 90 termes allant de 1/11 à 1/100, il n'en conserve que 40, la somme des 40, donc des 90, étant minorée par 1. Il me semble qu'il faut avoir bien compris les manipulations sur l'infini pour mettre au point, tout seul, cette démonstration.

Le problème du jardinier : exemple de résultat traité par le groupe "géométries non-euclidienne"

Le "*Problème du jardinier*" a été posé par Pierre DUCHET aux élèves lors du premier séminaire "MATh.en.JEANS" : "Peut-on planter des arbres de telle manière qu'ils ne soient pas tous alignés et que toute droite déterminée par deux quelconques d'entre eux contienne au moins trois de ces arbres? Quelle réponse peut-on apporter à un jardinier du plan, à un jardinier de la sphère?" Sur le plan, les élèves obtiennent deux solutions avec un ensemble infini de points.

• Les trois droites

On choisit trois droites parallèles D_1, D_2, D_3. Ces droites sont constituées d'une infinité de points que l'on assimile à des arbres. On considère deux droites, par exemple D_1 et D_2. On prend un point A sur D_1 et un point B sur D_2. Lorsque l'on trace la droite D qui passe par ces deux points, elle passe obligatoirement par un troisième point C, appartenant à la troisième droite D_3 (fig. 1).

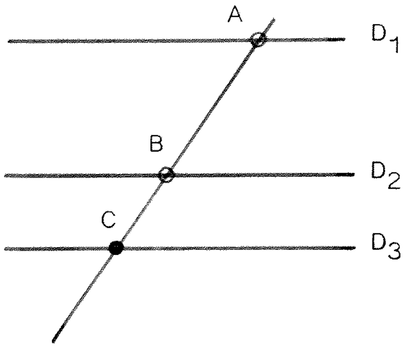


Figure 1

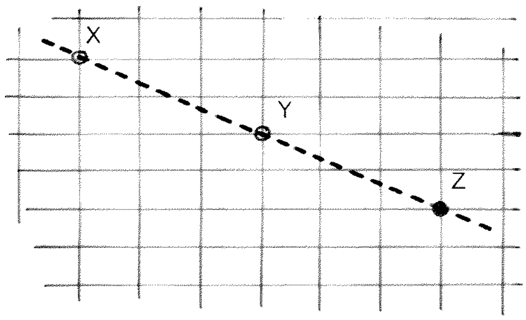


Figure 2

Remarque : D_1, D_2, D_3 ne sont pas nécessairement équidistantes. Cette solution est infinie, avec la puissance du continu, ce qui fait beaucoup d'arbres, et beaucoup de travail pour notre pauvre jardinier.

• Le plan quadrillé

On trace une infinité de droites parallèles et équidistantes. On trace également une infinité de droites parallèles et équidistantes, orthogonales aux premières. Les arbres, toujours assimilés à des points, sont situés à l'intersection de ces droites. Si l'on prend deux points X et Y sur le quadrillage, on obtient comme troisième point Z aligné aux deux autres, le symétrique de X par rapport à Y (fig. 2).

La solution est encore infinie, mais dénombrable cette fois-ci. De fait, il n'existe pas de solution finie dans le plan.

• Par contre, sur la sphère, il existe des solutions finies :

On définit une droite comme un grand cercle; les arbres sont toujours des points. On place trois points distincts, non alignés: A, B, C. Puis on trace tous les grands cercles passant par deux de ces points; chaque grand cercle contient au moins deux des points donnés (fig. 3).

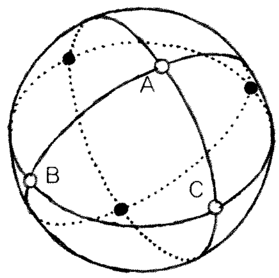
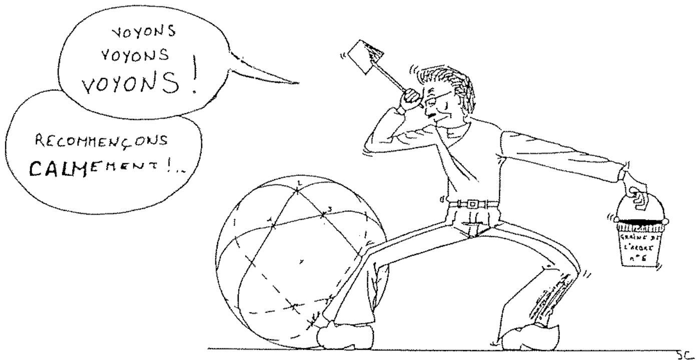


Figure 3

On prendra comme troisième point de chaque droite les *autres* intersections de ces droites (marquées +), ce qui donne une solution à cinq arbres. Sur le plan, ce problème n'a que des solutions infinies, alors que sur la sphère, une solution finie existe. Voir "*Quadrature*" n° 7, pour l'article de synthèse écrit par les élèves et Pierre DUCHET, présentant l'axiomatique de la *géométrie JEANS*.



Quel avenir pour "MATh.en.JEANS"? Dès cette année scolaire, cinq nouveaux jumelages auront lieu : trois entre le lycée Racine et les Lycées Jaurès, Braque, d'Argenteuil, Balzac de Mitry-Mory; un en Alsace; un entre deux collèges, à Noisy le Grand et Torcy. Pour coordonner ces jumelages, Pierre AUDIN et René VEILLET ont obtenu chacun de la Direction des Lycées et Collèges une décharge de deux heures. C'est peu; c'est aussi une première marque d'intérêt de la part de l'Education Nationale. Espérons que ce ne sera pas la dernière.

Les jumelages nouvelle cuvée 1991 se retrouveront les 20 & 21 avril 1991 à Strasbourg, pour tenir un Congrès des "*Jeunes Mathématiciens*". Les lecteurs de '*L'Ouvert*' qui voudront juger sur pièces peuvent prendre contact avec les responsables de "MATh.en.JEANS".

Responsables de l'expérience "MATh.en.JEANS" :

Pierre DUCHET, mathématicien en combinatoire, chercheur C.N.R.S.
(16-1) 48.92.14.79

Pierre AUDIN, professeur de mathématiques au Lycée Jean Racine de Paris

(16-1) 42.00.32.29 serveur APMEP : 36.14 / APM2 / BAL / A80
36.15 / APMEP / BAL / A80

René VEILLET, professeur de mathématiques au Lycée Jean Jaurès d'Argenteuil

(16-1) 39.80.43.33 serveur APMEP : 36.14 / APM2 / BAL / V29
36.15 / APMEP / BAL / V29

(On peut se procurer la cassette vidéo VHS-Sécam, de 13 minutes, réalisée sur l'expérience "MATh.en.JEANS" en 1989-90 auprès de l'A.P.M.E.P. 26, rue Duméril 75013 PARIS.)