Annales de Didactique et de Sciences Cognitives

Publication des travaux du séminaire de Didactique des Mathématiques de Strasbourg

Responsable de la publication : **R. DUVAL**

I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
F. 67084 STRASBOURG Cedex

Volume 3 1990

TABLE DES MATIERES

AVANT PROPOS

Ce volume des Annales présente une particularité par rapport aux volumes précédents. Deux articles y sont publiés en allemand. Nous avons longuement hésité entre trois langues : le français, l'anglais et la langues des auteurs. Mais horizon 92 oblige, nous avons opté pour cette dernière solution. Elle présente des inconvénients pour les lecteurs de langue française. Aussi avons-nous adjoint un condensé de ces articles. Nous espérons ainsi faciliter les échanges avec les chercheurs des autres pays de la communauté européenne.

DIDACTIQUE DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES

François PLUVINAGE

From our experience, problem solving in itself is not a goal for mathematics teaching, but components of problem solving constitute valuable objectives in the "Mathematics for All" perspective. We distinguish three stages or phases that the teacher can manage in the classroom : introduction to a problem, search for resolution and presentation of the answer. Each stage, with its own methodology, leads to develop some specific students abilities.

1. La résolution de problèmes : un objectif de l'enseignement général ?

Depuis la parution de l'ouvrage de G.POLYA, *How to solve it*, publié en français sous le titre *Comment poser et résoudre un problème*, on ne s'est pas désintéressé de l'heuristique, mais on n'a guère fait paraître de réflexions globales sur la façon d'aborder la résolution de problèmes dans l'enseignement mathématique. Les études engagées ont porté sur des formes particulières de raisonnement, ou bien ont été limitées à des contenus mathématiques nettement précisés. Or il nous semble qu'il vaut la peine aujourd'hui de compléter de telles études par une réflexion didactique plus générale. Les deux questions auxquelles cette réflexion peut tenter d'apporter des réponses sont les suivantes :

Question 1. L'activité de résolution de problèmes suppose-t-elle en soi l'acquisition de certaines compétences, et si oui lesquelles ?

Question 2. Quel rôle les professeurs ont-ils à tenir par rapport à l'activité de résolution de problèmes et qu'ont-ils à apprendre à leurs élèves ?

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
3 (1990) (p.7 - 34) IREM de Strasbourg

Le présent article ne se propose que de poser quelques jalons ; les éléments de réponse ainsi ébauchés demanderont des études supplémentaires pour être précisés. Avant d'entrer dans le vif du sujet, c'est à dire ces éléments de réponse, il est peut-être bon d'esquisser brièvement le cadre de travail dans lequel nous prétendons nous situer.
Il s'agit d'une *heuristique non spécialisée*, autrement dit de celle qui s'adresse à un public d'enseignement général. En effet, l'ouvrage de Polya déjà cité nous paraît s'adresser à un public qui se trouve ou se trouvera directement engagé dans une activité mathématique en soi, c'est à dire un public en formation scientifique ou technique. Et les mathématiques ne sont pas enseignées qu'à ce seul public. Dans la scolarité obligatoire, il convient sans doute de s'en tenir à une heuristique non spécialisée, en se demandant quel intérêt elle peut présenter du point de vue de la formation générale et quels apprentissages elle autorise.

La première question qui vient alors à l'esprit concerne *l'utilité générale* d'apprendre à résoudre des problèmes de mathématiques. Le mot "problème" est à entendre ici dans le sens qu'il a pour tout mathématicien et non selon l'acception que l'on trouve notamment dans l'expression anglaise "problem solving", laquelle renvoie à des petites questions dont le schéma, standard, de traitement est appris. Donc nos problèmes sollicitent autre chose que la mise en œuvre de procédures routinières. A part cela, ils peuvent très bien être résolus de manière tout à fait simple et brève ; nous en verrons des exemples. Mais leur caractère nouveau, éventuellement surprenant par rapport à ce que l'on sait faire, est ici une condition à remplir impérativement auprès de ceux à qui ils sont proposés. Ceci précisé, le doute s'impose a priori sur le bien-fondé d'un *apprentissage* de la résolution des problèmes dans l'enseignement des *mathématiques pour tous*. On peut certes voir dans la pratique générale des problèmes un exercice intellectuel sain, un éveil à la curiosité, une occasion d'acquérir de l'autonomie. Cela suffit certes à encourager cette pratique dans la scolarité, mais pas à instituer des apprentissages dans lesquels elle soit un **objet**, elle représente un enjeu en elle-même.

Arrivé à ce point de la réflexion, on peut aller jusqu'à dire qu'il n'est pas plus d'intérêt général d'apprendre à résoudre des problèmes que, par exemple, d'apprendre à démontrer (cf. le volume 2 de ces mêmes *Annales*). Mais comme dans ce cas, l'analyse des tâches modifie radicalement la manière de voir. De même que des *blocs constitutifs* de la démonstration, tel que l'est par exemple la rédaction, apparaissent, eux, comme des objets d'apprentissage d'intérêt évident, de même des blocs constitutifs de la résolution de problèmes vont s'avérer constituer d'excellents objets d'apprentissage, à plusieurs points de vue, mathématiques **et** extra-mathématiques. La question se trouve ainsi déplacée : il ne s'agira pas d'apprendre à résoudre des problèmes, mais de viser des *apprentissages propres à différentes phases de la résolution*, envisagées *séparément* les unes des autres.

2. Agglomérer ou dissocier ?

Pour certaines acquisitions, on considère comme normal de mettre en place des apprentissages séparés. Nous ne parlons même pas de formations complètes, qui résultent presque toujours d'un cumul d'assimilations relevant de disciplines séparées, comme par exemple la mécanique automobile, la comptabilité et le droit pour la formation d'un garagiste, mais d'acquisitions bien précises, accessibles en un temps assez court (disons moins d'une année pour fixer les idées). Par exemple, la formation au permis de conduire est de ce type ; et elle dissocie l'apprentissage du code de la route de celui de la conduite d'un véhicule.

Envisagée dans sa globalité, la formation mathématique (même celle des *mathématiques pour tous*) procède d'apprentissages disjoints. Mais d'un point de vue plus local, la dissociation donne lieu à des discussions. Elle a pu être érigée en principe par les propagateurs de l'enseignement programmé : toutes les difficultés devaient être scindées, les pas d'apprentissage préconisés étaient très petits. Mais à trop regarder où l'on met les pieds, on ne voit pas où l'on va et l'on est après coup incapable de refaire le chemin parcouru. C'est pourquoi les textes officiels actuels (notamment les programmes de mathématiques des Collèges et les documents d'accompagnement) expriment pour leur part au contraire la *crainte d'un morcellement* excessif du savoir. En conséquence, les professeurs se voient conseiller une organisation de leur enseignement qui permette les *connexions* entre les principales rubriques : activités numériques, activités géométriques, traitements de données et fonctions.

En gros les conclusions de travaux didactiques vont dans le sens de telles connexions, en mettant en évidence l'importance primordiale de la *structuration des savoirs*, même si c'est sous la forme négative du constat de l'écart entre les connaissances

élémentaires et la capacité à conduire des traitements, en soulignant aussi le rôle du *contrôle*, qui suppose le recours à des registres différents lors du déroulement d'une même procédure. Toutefois, une dissociation des contenus semble pouvoir se justifier dans l'apprentissage lors des phases de mémorisation (mise en mémoire déclarative), mais les conditions méritent une discussion qui n'est pas notre objet ici. L'acquisition de sens bénéficie, elle, largement de l'instauration d'associations convenablement choisies et exploitées, tels les *jeux de cadres* de R.Douady.
En rapport avec ce qui vient d'être énoncé, rappelons une augmentation de réussite spectaculaire sur des "équations à trous" (détermination d'un terme d'une opération connaissant le second terme et le résultat) observée en classe de Sixième, auprès d'élèves qui n'avaient effectué aucun travail préalable particulier à ce type de question, mais qui avaient pratiqué des activités géométriques prévues pour conduire à des calculs : Les écarts avec la population générale, prise comme population témoin, pouvaient, en pourcentage, dépasser 40, comme cela ressort du tableau qui figure dans un article de la revue *Petit x* (cf. [PR87]). Rappelons aussi la manipulation simultanée de périmètres et d'aires, également rapportée dans *Petit x* (cf. [DP85]), construite pour engendrer un apprentissage plus réel que celui qui résulte d'un enseignement séparé des deux notions et qui s'avère incomplet et flou pour beaucoup d'élèves.

Ainsi, les acquisitions conceptuelles peuvent bénéficier d'*associations* convenables *des contenus mathématiques* en jeu. Mais il semble qu'il en va différemment du déroulement des tâches. De nombreux traitements s'effectuent selon des *phases de travail successives*, correspondant à la mise en œuvre de techniques différentes et régies par des critères différents. C'est en particulier ce que nous avons rappelé précédemment à propos de la démonstration et ce que nous avons dit de la résolution de problèmes. Or s'il existe pour chacune des phases successives un nombre de techniques à acquérir en définitive petit, la combinatoire des enchaînements possibles réalise, elle, un univers vite très important de traitements types. Par un exemple pour des traitements passant par 3 phases, dont la première correspondrait à 2 procédures types, la seconde à 15 et la troisième à 4, le nombre total de procédures à assimiler sera de 21, alors que le nombre total de traitements types sera de 120.

L'écart en coût à l'apprentissage s'apprécie aisément. Par ailleurs, dans le déroulement d'un traitement en phases successives, il ne peut pas se produire de contrôle de l'une par une autre ; tout au plus, une contradiction ou un blocage à un endroit vont amener à revenir en arrière, ce qui n'est pas sans intérêt. Mais il est difficile d'imaginer un profit possible pour le déroulement d'une phase dans l'irruption des méthodes d'une autre phase de travail ; l'autonomie de chaque phase, une fois définie la nature des entrées qui lui sont fournies et des sorties auxquelles elle aboutit, est au contraire un élément important.

Les mathématique prennent en compte cette réalité depuis fort longtemps pour certaines activités, en distinguant par exemple : mise en équation, résolution et report, analyse et synthèse, construction et discussion. Mais si on y regarde de près, ces séparations sont proposées dans les cas où *des ruptures subsistent dans le "produit fini"*. Au contraire, quand le "produit fini", une démonstration par exemple, se présente comme une construction d'un seul tenant, la tendance est d'omettre par économie d'exposé la description des phases successives de son élaboration. Et d'ailleurs, il est connu que celles-ci ont même tendance à d'effacer de la mémoire après coup, au profit du seul résultat. L'analyse a posteriori du seul contenu mathématique ne fournira plus aucun indicateur ; c'est une analyse détaillée des tâches qui pourra signaler les changements de phase par lesquels passe l'élaboration.

Dans le cas de la résolution de problèmes, et afin de contribuer à la réflexion globale que nous évoquions en introduction, nous nous proposons une telle analyse des tâches afin de repérer les phases qui méritent d'être dissociées et les apprentissages spécifiques dont ces tâches sont tributaires.

3. Découpage en phases de la résolution de problèmes

D'après deux exemples de problèmes résolus, nous proposons au lecteur de *remonter* de la solution présentée aux phases de son élaboration.

3.1 Premier exemple

Le premier problème est un bon sujet d'activité mathématique en formation des maîtres. Pour ma part, je l'avais entendu énoncé au cours d'une conférence de W. Fowler, l'historien des mathématiques. La solution indiquée est celle que des élèves instituteurs ont effectivement eux-mêmes imaginée, sans aucune suggestion extérieure. Je n'avais plus eu qu'à la mettre en forme avec eux.

$$(1,\overline{001})^2 = (1,001\,001\,001\,\ldots)^2$$

en écriture décimale ?

Note : Il est souvent commode de présenter l'écriture décimale d'une fraction, qui est une écriture où un groupe de chiffres se répète périodiquement, en plaçant une barre au-dessus de la période, c'est-à-dire du groupe de chiffres répétitifs.

Solution :

La longueur de la période n'est pas 6 ou 9, comme beaucoup sont tentés de la proposer si on demande une réponse spontanée, non réfléchie, mais 2997.
On peut obtenir cette réponse, qui risque de paraître a priori inaccessible, en se représentant la multiplication de 1,001 001 001 ... par lui-même, posée conformément à la disposition usuelle d'un produit effectué par écrit.

L'opération posée a un défaut, du fait de l'illimitation des écritures en jeu : elle ne peut pas être commencée.

Heureusement, cela n'empêche pas de la terminer, comme indiquée ci-contre !

D'une ligne à la suivante, un décalage de trois places

```
                 1,001 001 001 ...
               x 1,001 001 001 ...
              ____________________
                  ....................
            1 001 001 001 001 001
        1 001 001 001 001 001 001
    1 001 001 001 001 001 001 001
1 001 001 001 001 001 001 001 001
_________________________________
1, 002 003 004  ?   ?   ?   ?   ?
```

provient de la succession de deux 0 dans le multiplicateur. La virgule est facile à placer : le nombre de départ étant compris entre 1 et 2, son carré est compris entre 1 et 4 ; donc il s'écrit avec une partie entière constituée d'un chiffre (à savoir 1).
Reste à gérer la question de la hauteur de la pile, qui s'élève lorsque l'on prend en compte les chiffres successifs vers la droite de l'écriture du résultat.

Tant que l'on n'atteint pas une retenue de 1000, il n'y a aucune difficulté : la pile s'élève régulièrement et l'on obtiendra 005 après 004, puis 006 après 005, et ainsi de suite en regardant par groupes de trois chiffres. Mais une pile de hauteur 1000 déclenche une retenue, comme indiqué ci-contre. Cette retenue fait passer à 1000 le total de la

```
                        1 ...
                    1 001 ...
       ↑        1 001 001 ...
       |          .   .   .
   998 /          .   .   .
       /          .   .   .
       ↓    ... 001 001 001 ...
           ____________________
            ... 999 000 001 ...
```

pile précédente, ce qui déclenche une nouvelle retenue, pour la pile de hauteur 998. Son total passe alors à 999 et, cette fois-ci, il n'y a plus propagation de retenue.
Nous passons sur une vérification de bonne forme, pour s'assurer que des retenues plus lointaines ne pourraient pas se propager jusqu'à la zone initiale de l'écriture, et donnons le résultat final, où le groupe 998 est "sauté" :

$$(1,001\,001\,001\ldots)^2 = 1,002\,003\,004\ldots\underbrace{997\,999\,000\,001\,002\,003}_{\text{période}}\ldots$$

On voit ainsi apparaître 999 groupes de trois chiffres dans la période, d'où sa longueur 2997.
Nous laissons au lecteur le soin d'examiner précisément en quoi cet exercice offre un intérêt pour une session de formation des maîtres.

Analyse

Le fait de devoir passer outre, lorsque l'on se trouve face à une opération écrite dont le début est inaccessible, est certes une difficulté réelle. Mais il s'agit d'un type d'événement qui, bien qu'il se rencontre dans un certain nombre de problèmes, n'est pas inhérent à la résolution des problèmes.

Plus intéressant est le *choix* effectué, en ce qu'il implique que *d'autres choix* possibles n'ont *pas été retenus*. Par exemple, une connaissance de la périodicité dans l'écriture décimale des fractions conduit à écrire :

$$1{,}\overline{001} = \frac{1000}{999}, \text{ d'où } \left(1{,}\overline{001}\right)^2 = \frac{1\,000\,000}{999 \times 999}.$$

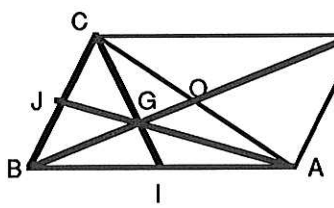
On peut effectuer : 999 x 999 = 998 001, mais on ne voit guère alors comment progresser vers une réponse.
Un autre élément à considérer est le *champ d'application* du traitement effectué pour aboutir à la solution présentée. Par exemple, il est clair qu'un décalage autre que celui provoqué par deux 0 successifs ne modifiera pas la procédure de réponse : On peut traiter de la même façon $(1{,}\ 000100010001...)^2$, qui a une période plus longue, ou $(1{,}010101...)^2$, qui a une période plus courte, ou même $(1{,}1111...)^2$. Or ces deux derniers cas permettent des essais à la calculette, et l'on peut ainsi observer que $(1{,}1111111)^2$ $\boxed{=}$ 1,2345679. On imagine que ce résultat mette sur la piste.
En dehors de ce qui est mis apparemment en jeu dans une solution, ce sont deux éléments : *choix non retenus* et *champ d'application* des procédures employées, qui peuvent mettre en évidence des phases qu'une présentation "lisse" de la réponse ne permettrait pas d'entrevoir. Dans notre premier exemple, une recherche réussie risque fort d'être passée par un essai sur $(1{,}1111...)^2$ ou $(1{,}010101...)^2$, que l'on ne voit nullement dans la solution achevée (pour la petite histoire, ce fut effectivement le cas avec nos élèves-instituteurs).

3.2 Deuxième exemple

Le deuxième exemple est un problème de géométrie qui a été proposé à des élèves de collège (âge : 14 à 15 ans), dans le cadre de recherches sur la démonstration conduites à l'I.R.E.M. de Strasbourg.
Nous proposons son énoncé ici, sans aucune indication de réponse au départ.

Enoncé

Sur un parallélogramme ABCD, on considère les milieux I et J des côtés adjacents BA et BC respectivement. Démontrer que les droites IC et JA se coupent sur une diagonale du parallélogramme.

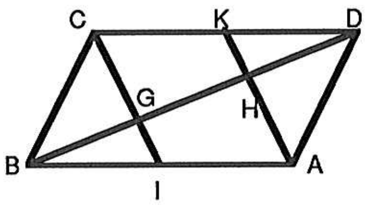


Solution

Les droites CI et AJ sont les médianes du triangle ABC. Elles se coupent donc au point G tel que la droite B est la troisième médiane du triangle.
Ainsi, la droite BG passe par le milieu O du segment AC. Mais on sait que les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Donc les points B,O et D sont alignés. La droite BG qui passe par O passe alors par D.

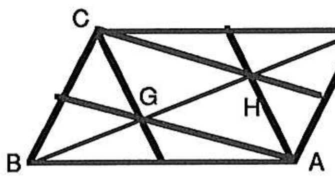
Analyse

Dans cette solution, un *choix* qui n'a *pas été retenu* est d'essayer de déterminer la position du point G sur la diagonale BD. Or, contrairement au problème précédent, ce choix non retenu conduit ici à une seconde solution très simple. Le point G est situé au tiers de la diagonale BD depuis B, ce qui apparaît si l'on trace la droite AK où K est le milieu du côté CD.



Le quadrilatère AICK est un parallélogramme, donc les droites IC et AK sont parallèles. Soit H le point d'intersection des droites AK et BD. Du théorème dit "réciproque du théorème des milieux (de deux côtés dans un triangle)", il résulte que G est le milieu du segment BH : il suffit de considérer le triangle ABH. De même, le point H est le milieu du segment GD (considérer le triangle CDG).

Finalement, la droite CI coupe la diagonale BD en le point G situé au tiers depuis B, et il en sera de même pour la droite AJ, d'où le résultat voulu.



Le *champ d'application* de la solution qui avait été proposée met lui aussi en évidence le point H précédemment introduit. En effet, les triangles ABC et CDA jouent des rôles symétriques dans le parallélogramme (on peut décider de noter B le sommet qui était noté D et vice-versa ; on parle de symétrie de notation). Le partage de la diagonale BD par les points G et H est alors une conséquence de la considération de la solution simultanément pour les deux triangles auxquels elle s'applique.

3.3 Conclusion

En se plaçant du point de vue de la personne confrontée à un énoncé, G. Polya distingue quatre phases :

1 - comprendre
2 - dresser un plan
3 - mettre le plan à exécution
4 - revenir en arrière.

Des analyses précédentes, conduites du point de vue d'un professeur qui est en présence d'une solution (qu'il a lui-même trouvée, ou qu'il a lue, ou qu'il connaissait d'avance), seules trois phases se dégagent *pour l'enseignement :*

Phase 1 : entrée dans le problème
Phase 2 : recherche d'une solution
Phase 3 : rédaction d'une réponse

La phase 1 correspond à la prise en compte des données de l'énoncé pour aboutir à des *choix de traitements*. La phase 2 est celle de la mise en œuvre de traitements avec recours aux *résultats à utiliser*. Dans le numéro 2 des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, on trouvera un examen détaillé de la phase de *rédaction*, à propos de démonstrations.

Dans la suite, nous prétendons que c'est ce découpage qui détermine les unités d'apprentissage autonomes, indépendamment des contenus mathématiques en jeu. Notons que c'est un découpage très analogue qui apparaît pour la communication, avec la *réception*, le *traitement* et l'*émission*, et qui est notamment pris en compte dans le document de présentation de l'*Evaluation à l'entrée en sixième* à l'attention des professeurs ([MEN89], p. 6), dans la page où est présenté un tableau de compétences.

Il s'agira pour nous d'établir :
- qu'il y a réellement des acquisitions propres à chaque phase,
- que l'enseignement est concerné par ces acquisitions (il y a des résultats à attendre d'apprentissages),
- qu'il existe des tâches plus particulièrement adaptées à chacune des phases ; notamment, certains parmi les énoncés mathématiques sont plus propices à la phase 1, d'autres à la phase 2 et d'autres enfin à la phase 3.

4. Caractéristiques propres à chaque phase de la résolution des problèmes

4.1 L'entrée dans le problème

Il est usuel pour les didacticiens de se préoccuper de la dévolution d'un problème, puis de sa résolution, aux élèves. Cela correspond à un certain ensemble d'actions d'enseignement, ayant pour objectif dans un premier temps le passage du problème de l'état “problème du professeur” à celui de “problème d'élèves” (ou du moins du plus grand nombre possible dans un auditoire donné). Bien sûr, on trouve là notamment la compréhension au sens de G. Polya, mais aussi des amorces de plans.

Nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur le fait que notre propos ici est autre. La dévolution d'un problème est pour les élèves concernés un moment qu'ils n'ont pas, eux, à isoler : ils sont alors aux prises avec des contenus mathématiques qui constituent les clefs de la situation. Mais nous nous intéressons ici à des techniques générales susceptibles d'être *apprises*, pour être mise en œuvre dans des situations mathématiques de toutes sortes, à la condition bien sûr que l'on ait en outre accès à leur contenu mathématique.

Une conduite qui est la marque d'une autonomie personnelle est de prendre un peu de recul, d'examiner un problème qui se présente *sans* nécessairement chercher à le résoudre sur le champ. Les techniques générales de nature à favoriser cette conduite, tout en la rendant efficace, sont à notre connaissance :

- l'*organisation des données* de l'énoncé,
- le traitement de *cas particuliers* ou de *situations simplifiées.*

L'antique conseil de faire une figure pour un problème de géométrie (conseil qui est toujours d'actualité) revient à une forme particulière d'organisation des données d'un énoncé. Nous verrons des exemples d'organisation des données autres que cette seule exécution de figure.

Ce qui peut être *appris* par des élèves, non pas à la suite d'un cours isolé sur la méthodologie, mais grâce à une pratique régulière mise en place tout au long d'un enseignement, c'est à se détacher momentanément de l'idée de répondre pour examiner simplement si les données de l'énoncé ont toutes trouvé place et s'il ne s'est pas surajouté l'une ou l'autre "donnée" absente de l'énoncé. A ce stade, le souhait de répondre peut créer des blocages.
Dans la phase d'entrée, le critère n'est pas de répondre mais de bien traduire la situation présentée.
Il est donc possible pour le professeur de solliciter et de corriger des productions issues de cette phase.

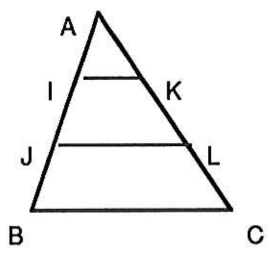
4.2 La recherche d'une solution

L'heuristique s'intéressant plus particulièrement à cette phase, même si on ne la dissocie pas de l'entrée dans le problème faute d'avoir identifié cette première phase, notre propos ici n'aura pas besoin de développements, que l'on peut trouver par ailleurs. Mais rappelons que nous souhaitons ne pas présenter une heuristique spécialisée ; aussi nous nous limiterons ici aux deux techniques qui ont intérêt pour *tout* contenu mathématique :

- l'identification, *la reconnaissance de situations de référence,*
- *l'enrichissement* des informations présentes.

En géométrie, la reconnaissance est celle en particulier d'un certain nombre de figures types, comme, à un niveau très élémentaire, celles d'un triangle avec ses médianes, ou avec ses hauteurs, ou ... L'enrichissement consiste souvent à compléter une figure, pour obtenir une sous-figure qui soit une figure type.

Par exemple, nous avons proposé dans le groupe "Collège"[1] une activité intitulée "du théorème des milieux au théorème des tiers". A partir d'un triangle ABC dont les côtés AB et AC sont partagés en trois segments de même longueur, il s'agit d'établir des parallélismes (IJ et KL avec BC sur la figure).



L'expérience montre que la reconnaissance de la situation d'un triangle avec deux milieux de côtés (AJL avec I et K sur la figure) est très généralement atteinte dans ce cas. Mais la clef, consistant à compléter la figure par un segment joignant B à J ou C à I sur la figure, n'est découverte que par très peu d'élèves dans de "bonnes classes".

Il n'y a rien que de très normal à cela, de la part d'élèves âgés d'environ 14 ans, mais ce n'est certainement pas une raison de ne pas consacrer du temps à cette phase heuristique, au contraire.

1 *Constitution du groupe : C. Hindelang, M. Keyling, C. Mathern, D. Maurette, M. Ortlieb, J.C. Rauscher et l'auteur de ces lignes.*

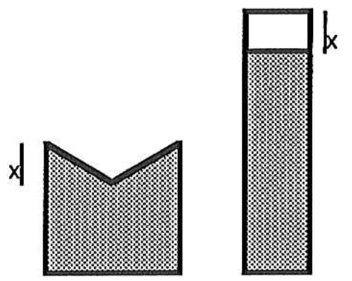
Mais il n'y a pas qu'en géométrie où les mêmes techniques ont un intérêt. Par exemple, reconnaître dans un produit la forme (A + B) (A - B) pour l'écrire $A^2 - B^2$ permettra de résoudre des problèmes d'extremums : ainsi, si A est une constante et B une fonction d'une variable x, c'est lorsque B sera nul que l'expression $A^2 - B^2$ atteindra son maximum. Il n'est pas nécessaire de multiplier de tels exemples, tant ceux-ci abondent dans l'expérience de chacun.

Après plusieurs expériences, nous avons toutefois limité les techniques à promouvoir pour cette phase heuristique, dans l'enseignement général, aux deux techniques indiquées. On trouve d'autres techniques, notamment chez G. Polya, mais celles-ci apparaissent déjà comme spécialisées. Par exemple, l'identification du caractère, euclidien ou affine, d'une situation de géométrie élémentaire nous a paru exiger une maturité mathématique relevant d'une expérience déjà riche. De même, il s'avère que la géométrie par les transformations suppose un préalable important d'utilisation de ces transformations ; par conséquent, compléter une figure, en lui appliquant une transformation qui apparaît au départ sur une partie de la figure, est à placer dans l'heuristique générale, alors que décomposer une transformation en un produit de deux transformations bien choisies relève d'une heuristique déjà spécialisée.

4.3 La rédaction d'une réponse

La rédaction d'une réponse à un problème n'est pas stéréotypée (sinon, c'est que le "problème" n'était qu'un exercice standard). Elle s'appuie sur le travail antérieur, essentiellement en procédant à des vérifications et à une organisation. Pour ce qui est de la vérification, le "dénivelé" cognitif auquel elle est généralement associée (c'est-à-dire le fait qu'elle se situe à un niveau nettement plus simple que la découverte du résultat) a pour conséquence l'absence de difficulté de présentation, à la seule condition que l'on n'ait pas omis de procéder à une vérification lorsqu'il en faut une.
Les problèmes conduisant à une équation du second degré ayant deux racines, dont seule l'une convient, sont souvent de ce type.

Voici un autre exemple, que nous comptons proposer à des élèves de Troisième en attendant à ce qu'il ne conduise pas à des difficultés de rédaction (mais l'expérience dira s'il en est bien ainsi). Il s'agit d'un carré de côté noté 2a, duquel on retire un triangle isocèle de hauteur x, et d'un rectangle a x 4a, duquel on retire un morceau rectangulaire a x x.



La première question est celle de l'égalité des aires obtenues et la seconde de trouver x tel que, de plus, les deux figures aient même périmètre. Une solution s'appuie sur le théorème de Pythagore pour obtenir la seule longueur inconnue du "carré tronqué", puis sur un travail dans le registre algébrique. La reconnaissance du fameux triangle 3 - 4 - 5 conduira à une vérification très simple.
Dans un tel exemple, la solution revient à une (bonne) exploitation des données et le théorème utilisé ("le" théorème de Pythagore) apparaît comme un *outil* au service de cette exploitation. Sans risque d'erreur, on peut avancer que les théorèmes qui, tels celui de Pythagore, "crachent" une valeur inconnue à partir de données convenables, sont à tous les niveaux :

1° d'application facile,
2° d'une grande popularité auprès des élèves ou étudiants.

A titre d'exemples, citons le fait que les extremums atteints par une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ sont les zéros de sa dérivée, celui que les valeurs propres d'une matrice sont les zéros de son polynome caractéristique, le théorème de Huygens sur les moments d'inertie ; on peut ainsi voir que de tels théorèmes "cracheurs de résultats" se rencontrent dans tous les domaines des mathématiques de l'algèbre à la mécanique, en passant par l'arithmétique, l'analyse, etc...

Au contraire, une rédaction qui exige une organisation n'est pas une tâche a priori évidente. Elle correspond à une véritable phase du travail, dont les caractéristiques ont été présentées dans le volume 2 des mêmes Annales, sous la plume (informatisée mais néanmoins magistrale) de R. Duval et M.A. Egret. Interviennent en particulier dans la rédaction :

- la distinction entre le *contenu* et le *rôle* d'un énoncé,
- la démarche par *substitution* d'énoncés, grâce à des règles de substitution.

Antérieurement, nous avion parlé de distinguer *contenu* et *statut* des énoncés, mais après discussion nous préférons nous rallier au point de vue de cet argumentateur si perspicace qu'est J.B. Grize. En effet, pour des spécialistes de l'argumentation, la notion de statut d'un énoncé est propre à un individu placé dans des circonstances précises ; par exemple, un énoncé peut être une évidence, une conjecture plus ou moins plausible, une absurdité, ... Mais une absurdité pour l'un peut très bien être une évidence pour son voisin et une conjecture pour un troisième. Et une même personne peut également attribuer d'un jour à l'autre des statuts très différents à un même énoncé, selon l'évolution des informations qu'elle possède. Un exemple bien connu dans l'enseignement est celui d'une inégalité comme $2 - 3 > 2 - 5$ qui passe du statut d'absurdité à celui de vérité assez évidente (hm !) lorsque l'on apprend les nombres relatifs.
Au contraire du statut d'un énoncé, son rôle (hypothèse, résultat intermédiaire, conclusion partielle ou conclusion complète) est bien fixé, de manière immuable, par le problème dans la solution duquel l'énoncé est formulé.

La démarche par substitution d'énoncés, les théorèmes étant vus alors comme des règles de substitution (ce qui les distingue des théorèmes précédemment envisagés), a été abondamment décrite et commentées dans les articles de R. Duval et M.A Egret précités. Nous n'y revenons donc pas.

L'observation nous a conduit (cf. notre article dans le précédent volume de ces Annales) à relever une caractéristique supplémentaire de la rédaction mathématique de base, génératrice d'une difficulté que nous avons intitulée difficulté d'*élaboration théorique.*
Cette caractéristique peut ainsi être formulée : - *le défini est définitif* -.

Ceci signifie que si un objet mathématique, par exemple un point, a été introduit d'une certaine façon, il devient interdit de l'introduire d'une autre façon sans vérifier la coïncidence. On remarquera que la méconnaissance ou le non respect de cette caractéristique ne se traduit pas par des marques nettes de défaut d'un réseau de démonstration ; il faut chercher spécifiquement une double occurrence d'un même élément en position initiale (un point de départ) dans le réseau pour repérer un défaut.

Au passage, on remarquera qu'au contraire la langue joue souvent sur les multiples façons d'introduire un même élément du discours (toit, foyer, pénates, chez soi, ... par exemple, pour désigner sa maison), l'identité de cet élément étant de l'ordre du présupposé. C'est donc le caractère autonome, ou complet si l'on préfère, du discours mathématique qui introduit des limitations contraignantes, et c'est pourquoi nous avons imputé la caractéristique signalée ici à l'élaboration théorique, autrement dit à la mise en place d'un édifice mathématique globalement bien construit.

A un niveau plus avancé, on aborderait à partir de là des considérations de logique, des propositions et des prédicats. Mais le lecteur comprendra que, par exemple, des questions fines de négation comportant des quantificateurs dépassent le niveau "mathématiques pour tous" de la scolarité obligatoire. Nous nous en tiendrons donc pour la rédaction aux caractéristiques énoncées jusqu'ici, sans préjudice de questions qui pourraient s'imposer à la suite d'observations ou de discussions ultérieures.

5. Situations spécifiques à chacune des phases

Il y a deux façons de promouvoir les différentes phases de la résolution d'un problème et de développer spécifiquement les compétences correspondantes :
1° choisir des problèmes dont la solution correspond à un travail presque exclusif dans l'une des trois phases,
2° construire des situations de manière à ce que chaque phase de résolution corresponde à des activités précises et que les changements de phases soient marqués par des modifications des tâches proposées.

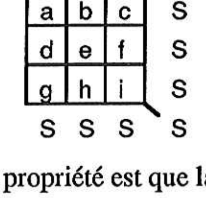
Certainement, un enseignement devra recourir à l'une et l'autre de ces deux façons, pour s'avérer efficace par rapport à l'acquisition de compétences relatives à chaque phase. En effet, des choix exclusifs de la première risqueraient de conduire à l'idée que la forme du travail est entièrement tributaire des problèmes considérés, qu'il n'y a pas une méthodologie générale. Au contraire, des choix exclusifs de la seconde risqueraient de laisser les élèves désarmés devant des problèmes énoncés de la manière usuelle, sans propositions de travail particulier (autre que la seule résolution).

C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous envisageons les deux façons à propos de chacune des trois phases, en les illustrant par des exemples choisis parmi les situations que nous avons eu l'occasion de rencontrer, lors de diverses observations ou expérimentations.

5.1. Illustrations de l'entrée dans les problèmes.

Certains problèmes se trouvent pratiquement résolus de manière complète dès achèvement de la phase d'entrée, supposée correctement conduite.

Un exemple se trouve dans une expérience de C. Moritz, qui remonte à quelques années déjà, sur l'exploitation au collège du thème des carrés magiques. Un carré magique donne lieu à la même somme, dite *somme magique*, pour les termes d'une ligne quelconque, d'une colonne quelconque ou d'une diagonale.



Pour un carré magique 3x3, une propriété est que la somme magique S est le triple du terme central (e sur la figure). L'observation de quelques cas particuliers conduit assez vite à conjecturer cette propriété. L'établir se réduit pratiquement à un travail d'*entrée*, c'est à dire :

— introduction de lettres pour désigner les termes,

— écriture des relations déterminées par l'énoncé du problème.

Certes, quand on a écrit entre autres :

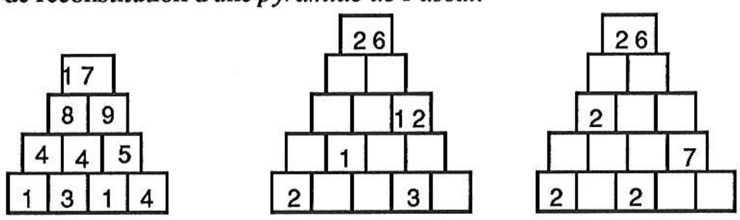
$$S = a + e + i$$
$$S = d + e + f$$
$$S = g + e + c$$

il reste à effectuer la somme membre à membre pour obtenir :

$$S = a + d + g + 3e + i + f + c = 2S + 3e,$$

d'où il résulte que S = 3e. Le travail n'est donc pas tout à fait achevé à la fin de la phase d'entrée, mais il ne reste plus rien à faire qui puisse bloquer (voir le compte-rendu de C. Moritz).

A titre d'exercice de didactique, nous proposons au lecteur de repérer les différences de situation qui résultent de différences de valeurs entre des énoncés relatifs à un même problème de reconstitution d'une *pyramide de Pascal.*



Une *pyramide de Pascal* Deux *énoncés* du même problème

Comme le triangle de Pascal, une pyramide dite de Pascal est telle que deux termes voisins d'une même rangée s'ajoutent pour donner naissance à un terme de la rangée supérieure, à la place qui touche les deux.termes considérés. Un problème se fabrique en supprimant d'une pyramide de Pascal certains termes et en demandant de reconstituer les valeurs manquantes au vu des termes présents. Des exemples ont été demandés aux élèves dans l'évaluation en 6ème organisée par l'A.P.M.E.P. sous la direction d'Antoine Bodin. Bien sûr, il faut choisir judicieusement les places à laisser vides, mais ceci n'est pas notre question ici. De même que précédemment, une introduction de variable s'avère nécessaire pour chacun des deux cas présentés ici. Mais une seule variable peut suffire.

Un énoncé qui a été proposé à un niveau plus avancé, à savoir celui du premier cycle universitaire, avec un insuccès à peu près total, montre bien à quel point l'apprentissage de l'entrée dans les problèmes peut être défaillant actuellement.

L'énoncé, qui avait été proposé par M. El Faqih dans le cadre d'une évaluation initiale des étudiants, est le suivant :
" Une application f de l'ensemble des nombres réels dans lui-même est supposée vérifier pour tout x la propriété

$$f^3(x) = 1 \text{ , où } f^3 = f \circ f \circ f \quad (\text{ainsi : } f^3(x) = f(f(f(x)))).$$

Déterminer f(1)."

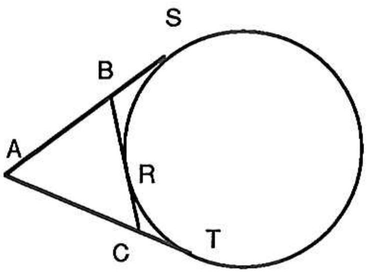
Le simple parti pris d'exploiter les données, donc ici de remplacer le 1 de f(1) par $f^3(x)$, où x est arbitraire, suffit pratiquement à conduire à la réponse. En effet :

$$f(1) = f(f^3(x)) = f(f(f(f(x)))) = f^3(f(x)) = 1.$$

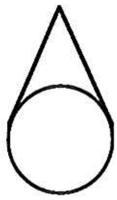
Or moins de 10% des bacheliers scientifiques entrent ainsi dans le problème.

Pour donner l'occasion au lecteur de se convaincre lui-même du fait que ne pas chercher d'emblée à résoudre un problème, mais se contenter d'organiser ses données et ses contraintes, est en définitive *la* démarche payante pour certains cas, voici un exemple. Cet exemple a été publié dans un bulletin de l'A.P.M.E.P., comme un problème non complètement trivial. Son énoncé est :
" En 2h30, un automobiliste a parcouru 250 km, et pourtant il prétend que lors de toute durée de 1h, il a parcouru une distance de 90 km. Peut-il avoir raison ?"
Nous suggérons de préparer un graphique avec en abscisse les durées, de 0 à 2h30, et en ordonnée les distances, de 0 à 250 km. En y portant les points dont l'énoncé impose la place sur ce graphique (par exemple : l'automobile est à l'instant 0 au départ, donc à la distance 0), on aboutira à la vision d'une réponse, qu'il suffira de mettre en forme.

Le problème que nous avons intitulé "Au revoir les enfants" (d'après le film de Louis Malle, dont une scène montre une variante de ce problème) est de ce type, c'est à dire résoluble ou presque dès la phase d'entrée. Dans la thèse de A. Mesquita [M89], on pourra trouver le compte-rendu d'une observation faite sur une variante de ce problème. L'énoncé du problème est indiqué sous la figure.



Comparer le périmètre du triangle ABC aux longueurs AS ou AT



Situation de base : un cercle et deux segments de tangentes

Un premier essai de travail dans une classe fut entrepris pour le groupe du "Suivi scientifique des collèges" et cet essai se solda par un échec relatif, malgré l'indication de la situation de base. Mais, pour les essais ultérieurs, il s'avéra suffisant de demander aux élèves de noter les égalités de segments repérées, pour aboutir au contraire à une obtention très générale de réponses exactes.

On peut remarquer que certains logiciels d'aide à la démonstration sont élaborés avec la préoccupation d'entrer dans le problème. Citons par exemple le module d'*exploration de la figure* du logiciel de Rennes ([G88], avec une critique dans [GIA89]).

La demande qui a été faite aux élèves pour le problème "Au revoir les enfants", nous conduit à aborder les situations spécifiquement conçues pour le développement des compétences qui correspondent à l'entrée dans un problème. D'autres textes ont déjà présenté ces situations, notamment ceux qui ont paru dans les bulletins du "Suivi scientifique des collèges" ; nous nous contenterons ici de les citer, en les commentant brièvement du point de vue qui nous intéresse dans le présent développement. Bien sûr, nous ne prétendons pas donner une liste exhaustive. En particulier, des extensions hors du domaine de la géométrie méritent d'être envisagées.

– Constructions points par points.
De telles constructions supposent une situation dans laquelle les contraintes indiquées laissent une latitude (généralement un degré de liberté). Leur mise en œuvre conduit ainsi à exploiter des variations possibles à l'intérieur d'un cadre donné de contraintes.

- *Programmes de construction*

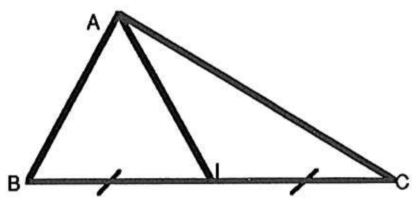
Les dessins exécutés selon un programme, donné sous formes d'instructions qui s'enchaînent, constituent l'un des exercices de passage d'un registre d'expression à un autre, exercices fondamentaux pour l'organisation de données.

- *Figures muettes*

Des figures accompagnées d'une description, mais dépourvues de lettres qui désignent leurs éléments remarquables, amènent pour que ces désignations soient retrouvées à pendre en compte le jeu mutuel des contraintes issues de la description.

- *Reproduction de certaines figures codées ou accompagnées d'hypothèses, de "film" de constructions.*

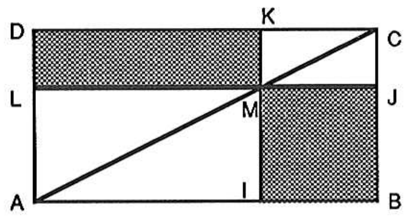
Les reproductions demandées ne sont pas identiques à l'original, mais modifiées en ce qui concerne l'un ou l'autre élément. Si les seules constructions auxiliaires nécessaires pour la reproduction sont les constructions standard de mise en place des éléments indiqués (exemple : construction du milieu I d'un segment AB au vu de l'égalité IA = IB), la situation conduit à une exploration des déterminations et des contraintes caractéristiques de la phase d'entrée. Sinon, l'activité relève de la phase de recherche d'une solution, comme ce sera par exemple le cas pour le problème de reproduire une figure analogue à la figure ci-contre, mais avec pour longueurs AB = 5 cm, AI = 6 cm et AC = 10 cm.



5.2 Illustration de la recherche d'une solution

La phase de recherche d'une solution est celle qui a suscité le plus de réflexions. Aux études concernant les contenus en jeu s'ajoutent les travaux sur l'heuristique. Nous insisterons donc plus particulièrement sur la transmission entre la phase d'entrée dans le problème et cette phase de recherche, moins fréquemment envisagée.

Par rapport au problème précédemment intitulé "Au revoir les enfants", le problème introduit par Euclide, en liaison avec ses réflexions sur les rapports de grandeurs (et notamment de longueurs), illustre bien l'apparition d'une phase heuristique.Pourtant il ne repose a priori que sur des considérations de symétrie aussi évidentes que celles



Problème d'Euclide : Egalité des aires hachurées ?

qui interviennent dans "Au revoir les enfants". Des rectangles tels que AIML sur la figure sont partagés en deux par leur diagonale. Quelle est alors la différence entre les deux problèmes, qui fait qu'ici des récapitulatifs d'égalités d'aires ne seront pas décisifs comme l'ont été précédemment ceux des égalités de longueurs ? C'est que précédemment la question concernait un périmètre , auquel on n'a accès que par la somme des longueurs des segments en jeu, tandis qu'ici la question concerne des rectangles, objets de base pour les aires de surfaces planes. Et ces rectangles doivent apparaître comme des résidus d'une démarche, la reconfiguration, portant sur des triangles (MKDL est ce qui reste de ACD quand on lui a retiré AML et MCK). Certes, dans l'un et l'autre problème, les objets de la conclusion (un périmètre, des aires) ne sont pas des résultats d'instructions élémentaires de construction, autrement dit, ne peuvent être des objets premiers dans une construction (comme peut l'être un milieu). Il n'y a donc pas de nécessité à propos de ces deux problèmes de rendre attentif à la distinction entre contenu et rôle d'un assertion. C'est d'ailleurs pourquoi nous considérons ces deux problèmes comme des problèmes "publicitaires" pour la démonstration, car la phase de rédaction y sera très réduite. Ceci n'empêche pas les deux problèmes cités de relever d'une approche différente. Nous renvoyons à [MA89] pour plus de détails sur la résolution du problème d'Euclide.

L'extraction d'informations est bien illustré par l'activité de reconfiguration sollicitée dans le problème d'Euclide.

L'enrichissement est typiquement illustré par la résolution du "théorème des tiers" (cf. 4.2) ou par le dernier exemple proposé en 5.1 (un triangle avec une médiane). Dans le dernier cas, la clef est la considération du point A' symétrique de A par rapport à I, qui conduira à la construction d'un triangle ABA' de côtés connus.

Dans tous ces exemples cependant, la phase de résolution est commandée par la phase d'entrée. On peut très bien conduire cette phase de résolution à un ratage par une gestion didactique maladroite de la phase d'entrée, comme cela apparaît dans un article très honnête de Ph. Capponi [C88] sur un échec dans l'exploitation du problème d'Euclide. Nous avons du mal à imaginer un problème pour lequel la phase d'entrée se réduise au point d'être inexistante. Elle précédera donc la phase de résolution.

Des situations qui nous paraissent spécifiquement adaptées au développement de compétences pour la phase de résolution sont les suivantes (liste non exhaustive, limitée à des situations expérimentées).

- *Messages décrivant certaines figures*

La transmission d'une figure au moyen d'un message est une activité qui conduit souvent à compléter, enrichir la figure donnée pour se ramener à une figure fondamentale connue. Par exemple, une description faisant état d'un "rectangle avec coin coupé" sera d'emblée plus évocatrice qu'un relevé de parallèles, perpendiculaires, sécantes. Nous nous limitons ici à certaines figures, celles qui ne conduisent pas à prendre des justifications en charge pour leur description. Dans le cas contraire, la même activité est à relier à la phase de rédaction d'une réponse.

- *Figures douteuses*

Des figures qui laissent planer un doute sur la réalité d'une propriété apparente, par exemple un parallélisme, conduisent à une exploitation systématique de leurs sous-figures qui sont des figures fondamentales (ou : figures clefs).

- *Reproduction de certaines figures*

Pour ceci, nous renvoyons à ce qui a été indiqué en 5.1, où figurait déjà ce type de situations.

5.3 Illustrations de la rédaction

Il y a un travail spécifique de rédaction lorsque des précisions de rôle des énoncés en jeu ou des discussions de validité s'avèrent nécessaires. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a rien à rédiger dans le cas contraire, mais simplement que la rédaction s'en tient en quelque sorte à un compte-rendu de ce qui a été fait antérieurement.

Par exemple, le "théorème des tiers" déjà cité donne lieu à un travail spécifique de rédaction : il demande d'utiliser deux fois le théorème relatif aux milieux de deux côtés d'un triangle et une fois le théorème réciproque (voir [R89]). Le choix entre un théorème et le théorème réciproque est typiquement un choix tributaire du rôle des énoncés en jeu.

De même, la construction du triangle, dont on donne les longueurs de deux côtés et de la médiane issue du sommet commun à ces deux côtés, ne s'avère possible que sous réserve de vérification d'une inégalité triangulaire.

Il est très important, pour la conduite d'une classe, de ne pas réserver l'activité de rédaction aux élèves qui ont mené à bien les deux phases précédentes de la résolution d'un problème. Ce sont d'ailleurs souvent ces élèves qui ont le moins besoin d'apprendre à rédiger. D'où l'importance, signalée par d'autres articles de ces mêmes Annales, de consacrer une place en soi, séparée des autres phases, à la phase de rédaction.

Des situations qui se sont avérées intéressantes, pour l'évolution de compétences à présenter une solution, sont les suivantes :

- *Vérifications*

Une solution étant donnée, par exemple un programme réalisant une construction voulue étant indiqué, il s'agit d'examiner les conditions dans lesquelles ce programme peut être exécuté. De tels tests relatifs aux hypothèses du problème, ne relèvent pas pour nous du niveau "évaluation" de la classification NLSMA, car in ne s'agit que d'apprécier localement la marge de manœuvre que laissent subsister des hypothèses.

- *Messages décrivant certaines figures*

Nous renvoyons à 5.2 où cette activité est déjà mentionnée.

- *Production d'énoncés*

Dans des conditions bien précises, les élèves peuvent être productifs sur la fabrication d'énoncés. Nous renvoyons pour cela à notre article du précédent numéro de ces mêmes Annales, mentionnant une production d'énoncés acceptables par une majorité (55 % d'élèves de quatrième (13-14 ans).

- *Réseaux*

Le travail sur des réseaux organisant la démarche mathématique est tout spécialement adapté à la phase de rédaction. Il est décrit dans les articles de R. Duval et M.A. Egret de ces mêmes Annales.

6 Conclusion

L'enseignement des mathématiques a d'autres finalités que la transmission du savoir mathématique. En particulier, c'est cet enseignement qui conduit à apprendre à utiliser correctement les divers registres d'expression au service de la communication, et à passer de l'un à l'autre de ces registres. On comprend que les compétences à entrer dans l'étude d'une question qui vous est posée, à faire preuve d'imagination dans des essais de traitement, à présenter correctement les résultats obtenus sont d'une utilité générale qui déborde largement le cadre des mathématiques ou même des disciplines scientifiques. C'est pourquoi les efforts à leur consacrer dans l'enseignement méritent d'être comparables à ceux que l'on consacre à l'acquisition de contenus mathématiques. Ils risquent d'ailleurs d'être payants même de ce point de vue, en contribuant à une appropriation moins coûteuse des contenus mathématiques.

Références

Note : le sigle *ESM* désigne la revue Educational Studies in Mathematics, Kluwer, Pays-Bas, le sigle *RDM* désigne la revue Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, Grenoble

[B82] N. Balacheff, 1982, Preuve et Démonstration en Mathématiques au Collège, *RDM*, vol.3 n° 3, pp. 261-282

[BO89] A. Bodin, 1989, L'Evaluation du Savoir Mathématique, *Bulletin APMEP*, n° 368, pp. 195-219

[C88] B. Capponi, 1988, Mesure et Démonstration, *Petit x*, n° 17, pp. 29-48

[DP85] R. Douady et M.J. Perrin, 1984 & 1985, Aires de Surfaces Planes, *Petit x*, n° 6, pp. 5-33 et n° 8, pp. 5-30

[DE89] R. Duval et M.A. Egret, 1989, L'Organisation Déductive du Discours, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol.2, ULP Strasbourg

[GG85] G.Glaeser, 1985, *La Didactique Expérimentale des Mathématiques (chapitre 3)*, 2ème rédaction augmentée, publication de l'ULP, IREM de Strasbourg

[G88] R. Gras, 1988, Aide Logicielle aux Problèmes de Démonstration, *Petit x*, n° 17, pp. 65-83

[GR82] J.B. Grize, 1982, *De la Logique à l'Argumentation*, librairie Droz, Genève

[GIA89] D. Guin et le groupe I.A., 1989, Réflexions sur les Logiciels d'Aide à la Démonstration en Géométrie, *Ann. de Did. et de Sc. Cogn.*, vol.2, ULP Strasbourg, pp. 89-109

[M89] A.L. Mesquita, 1989, *L'Influence des Aspects Figuratifs..*, thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg

[MA89] A.L. Mesquita, 1989, Sur une Situation d'Eveil à la Déduction en Géométrie, *ESM*, vol.20 n° 1, pp. 55-77

[MEN89] Ministère de l'Education Nationale, Direction de l'Evaluation et de la Prospective, 1989, *Evaluation à l'Entrée en Sixième, Présentation*, Document diffusé aux professeurs de France et de Navarre

[MO80] C. Moritz, 1980, *Descriptif du Film "Sur un Thème de Carrés Magiques"*, publication de l'IREM, ULP Strasbourg

[P65] G.Polya, 1965 (date de la traduction française de *How to Solve It*), *Comment Poser et Résoudre un Problème*, Dunod, Paris

[R89] J.C. Rauscher, 1989, Le "Théorème des Tiers", in *Suivi Scientifique classe de Troisième*, Bulletin Inter-IREM, pp. 75-79

EVALUATION DES EFFETS D'UNE PEDAGOGIE D'AMELIORATION DES COMPETENCES EN LECTURE

Claude RAISKY

The degree reached in the mastering of reading acknowledge is one of the element of success or failure at secondary education level. A good number of pedagogical tools are nowadays available to meet the difficulties that may arise. But, on one hand theese tools take little account of the latest researchs about the act of reading and, on the other hand, have been but little submitted to evaluation.
We have tested a pedagogical process for the improvement of the reading capacity which uses the computing tool. This process devotes a great part to drilling activities which aim at improving the speed of reading as well as the understanding of the textes which are read.
Even if they reveal a few changes in the habilities of the individuals, the results we could notice are far from meeting our expectations. Beyond that evidence, our observations also comfort the idea that the reading concept actually implies various mental activities which cannot be evaluated as a whole and which require specific pedagogical treatment.

1 - ORIGINE DE LA RECHERCHE ET HYPOTHESES DE TRAVAIL

Les travaux présentés ici ont été réalisés dans le cadre de l'I.N.R.A.P. (Institut National de Recherches et d'Applications Pédagogiques) dépendant du Ministère de l'Agriculture et qui a pour mission de mener les recherches pédagogiques nécessaires à l' évolution de l'enseignement technique agricole et d'assurer une part de la formation permanente de ses formateurs.
Ils ont été menés dans plusieurs établissements d'enseignement agricole.

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
3 (1990) (p. 35-74) IREM de Strasbourg

Origine de la recherche

Elle est née de la convergence de plusieurs constats et interrogations.

1 - Les élèves accueillis par l'enseignement agricole bien qu'en général fort motivés par leurs études sont néanmoins touchés par l'échec scolaire .

2 - La formation utilise encore aujourd'hui très largement l'écrit comme support des savoirs à acquérir par les apprenants. Des compétences limitées dans les diverses tâches de réception de l' écrit constituent un sérieux handicap scolaire.

3 - Des mesures extrêmement importantes -au moins sur le plan quantitatif- sont prises depuis plusieurs années pour lutter contre l'illettrisme mais, dans le même temps, on se préoccupe beaucoup moins des adolescents en cours de scolarité, en particulier de ceux qui dans les années prochaines devront fournir le gros des 80% qui atteindront le niveau IV et qui actuellement sortent du système scolaire avec, au mieux, un diplôme de niveau V.

4 - Les enseignants ayant en charge ces élèves rencontrant des difficultés dûes pour beaucoup à un défaut de maîtrise de la langue écrite, à la réception et à la production, sont demandeurs de moyens pédagogiques efficaces pour pallier ces carences.

5 - Actuellement, le marché de l'outil pédagogique est envahi par des produits, utilisant pour beaucoup le support informatique, dont les éditeurs vantent les mérites sans que rien ne puisse confirmer ou infirmer ceux-ci.

6 - Dans l'inventaire des articles de revues pédagogiques françaises concernant les <u>Recherches en didactique du français langue maternelle</u> publié par l'I.N.R.P. en 1985, on n'en trouve que 7% sur la lecture parus entre 1970 et 1983 (Sprenger-Charolles et al, 1985).

Ce constat éclaire le malaise des enseignants pris entre les sonnettes d'alarme qui ne cessent de retentir et des travaux de recherches pédagogiques modestes en nombre. Cette carence est encore plus ressentie par les enseignants du cycle secondaire que par ceux du primaire puisque les trois quarts des travaux recensés par Liliane Sprenger-Charolles portent sur les apprentissages premiers de la lecture.

Et pourtant, chez les chercheurs fondamentalistes, qu'ils soient linguistes ou psycho-linguistes, on constate au contraire une abondance de travaux dont la production va croissante. Aujourd'hui, ce sont plusieurs milliers d'articles qui sont publiés annuellement dans le monde.

Il y a donc un hiatus énorme entre une pédagogie de la lecture qui ne sait trop *comment faire face aux besoins aujourd'hui révélés -entre autre par le* Rapport sur l'illettrisme en France- (Espérandieu et al, 1984) *et des recherches expérimentales dont la plupart des enseignants n'ont encore aujourd'hui jamais entendu parler.* En effet, sauf en quelques trop rares exceptions, le matériel pédagogique actuellement disponible en France méconnaît pour l'essentiel les recherches actuelles et leurs résultats.

7 -*L'évaluation* rigoureuse des effets de l'utilisation de ces outils et méthodes est *très peu développée.* La loi du marché explique certes pour une grande part cette disparité: tester un outil coûte cher et prend du temps, ce n'est pas "compétitif".
Mais elle tient aussi aux difficultés inhérentes à une telle entreprise.
En effet une telle évaluation doit répondre aux mêmes exigences de rigueur méthodologique que toute recherche expérimentale mais en même temps, pour que les résultats soient transférables dans d'autres situations, elle doit être réalisée au plus près des conditions réelles de l'enseignement. On se trouve ainsi devant une double difficulté: si on choisit une perspective strictement expérimentale, on aura pour règle de contrôler toutes les variables et pour ce faire, de réduire au maximum le nombre de celles-ci. On s'éloignera alors assez considérablement des conditions réelles de l'enseignement et un fort doute subsistera quant aux résultats obtenus quand on passera du laboratoire à la salle de classe. Inversement, si on s'installe dans celle-ci, il sera pratiquement impossible de contrôler toutes les variables. Le divers de la réalité de la relation pédagogique devra être réduit à quelques dimensions sans que l'on soit véritablement assuré que les choix opérés constituent la grille de lecture la plus adéquate des phénomènes étudiés.

C'est ce faisceau de raisons qui est à l'origine de l'étude présentée ici.

Dans celle-ci, nous nous sommes proposé d'évaluer les effets d'un dispositif d'amélioration des compétences en lecture auprès d'adolescents scolarisés.
L'objectif est double: *d'une part fournir des références les plus rigoureuses possibles sur le dispositif lui-même et d'autre part contribuer à affiner des outils d'évaluation de compétences en lecture.* Cette entreprise s'est révélée difficile: la recherche pédagogique s'est jusqu'à aujourd'hui assez peu préoccupée de l'évaluation des effets de l'action pédagogique. Les évaluations portent dans la plupart des cas non pas directement sur les

acquisitions précises réalisées, mais sur leur expression médiatisée par un dispositif de reconnaissance sociale : on évalue l'efficacité pédagogique d'un maître par exemple à travers la réussite ou l'échec de ses élèves à un examen (voir par ex. Isambert-Jamati, Grospiron, 1984). En ce qui concerne la lecture, ce type d'évaluation ne peut être utilisé : il n'y a pas dans les examens du système scolaire français d'épreuve de lecture. Nous sommes donc contraints de regarder de beaucoup plus près ce qui éventuellement change dans les performances d'élèves auxquels on fait suivre des séances d'amélioration de leurs compétences en lecture. C'est la démarche qui avait été suivie par F. Stoll pour évaluer de façon comparative deux méthodes d'amélioration de la vitesse de lecture chez des adultes (Stoll, 1974). C'est aussi la nôtre mais nous l'avons complétée par une observation du travail des élèves tout au long de leur apprentissage et par une enquête que nous leur avons soumise.

Le dispositif pédagogique dont nous avons choisi d'évaluer les effets, réunit un ensemble d'exercices se rattachant à des modèles théoriques et à des voies d'approche de l'acte lexique différents. Ainsi certains exercices privilégient le travail de gymnastique visuelle, d'autres trouveraient sans doute plus leur fondement dans une analyse des échanges linguistiques inspirée de l'interactionisme social, telle qu'elle a été développée par Jean Paul Bronckart et ses collaborateurs à l'Université de Genève. (Bronckart et al, 1985, chap. II). Ce sont surtout les exercices que nous avons appelés "Travaux sur documents"

L'évaluation que nous avons réalisée porte sur deux aspects:

Les effets d'ordre cognitif: nous faisons l'hypothèse que les performances dans diverses tâches de lecture des élèves qui auront suivi l'entraînement seront améliorées.

Les effets dans le domaine des attitudes vis-à-vis des activités de lecture. L'étude s'est limitée ici à une approche qualitative.

Au delà des résultats enregistrés nous verrons que se posent les problèmes suivants:

Avec quels tests peut-on évaluer le savoir-lire?

Mesure t-on toujours la même chose avec les différents tests?

Qu'est-ce que lire? Peut-on considérer que cela recouvre une compétence unique? Nous faisons plutôt l'hypothèse qu'en réalité le terme "lecture" recouvre un ensemble de tâches complexes dont on peut certes faire l'hypothèse qu'elles recèlent un noyau de capacités communes mais qui n'en sont pas moins différentes.

2 - METHODE DE TRAVAIL

21. Protocole expérimental

Nous avons procédé de la façon suivante et chronologiquement :

1 - Constitution d'un "groupe expérimental" et d'un "groupe témoin".

2 - Passation par tous les individus d'épreuves d'évaluation des compétences en lecture (pré-tests).

3 - Entraînement du groupe expérimental avec observation et enregistrement des réactions des acteurs.

4 - Passation d'épreuves finales par tous (post-tests).

5 - Enquête auprès des élèves.

L'ensemble des travaux s'est étendu sur 5 mois, pour permettre au groupe expérimental de suivre un nombre d'heures d'entraînement assez élevé pour qu'un effet puisse en être attendu, cet entraînement prenant place dans l'emploi du temps hebdomadaire des classes concernées.

22. Dispositif pédagogique utilisé

221. Le dispositif devait répondre à plusieurs exigences :

• être facilement utilisable par tout enseignant

• proposer un ensemble d'exercices qui permette d'entraîner des élèves à l'utilisation de l'écrit, à la réception, selon trois directions :

- un entraînement sensori-moteur
- un entraînement à la "lecture active"
- un entraînement au recours et à l'utilisation de l'écrit dans des tâches de recherche d'informations en vue d'une production (aspect motivationnel et intégration de toutes les autres capacités en lecture).

• permettre une individualisation du travail et des progressions en tenant compte des savoirs et savoir-faire des élèves.

222. C'est pour répondre à ces exigences que le dispositif suivant, comportant trois volets, a été retenu.

a) **Un travail sur micro ordinateur utilisant le logiciel ELMO** (Entraînement à la Lecture sur Micro-Ordinateur) diffusé par l'A.F.L. (Association Française pour la Lecture). L'utilisation du micro-ordinateur permet d'introduire la dimension ludique dans l'activité scolaire, en même temps qu'il autonomise le travail des élèves auxquels une part non négligeable de la gestion de leur apprentissage est confiée.

Le logiciel ELMO a été choisi pour les raisons suivantes :

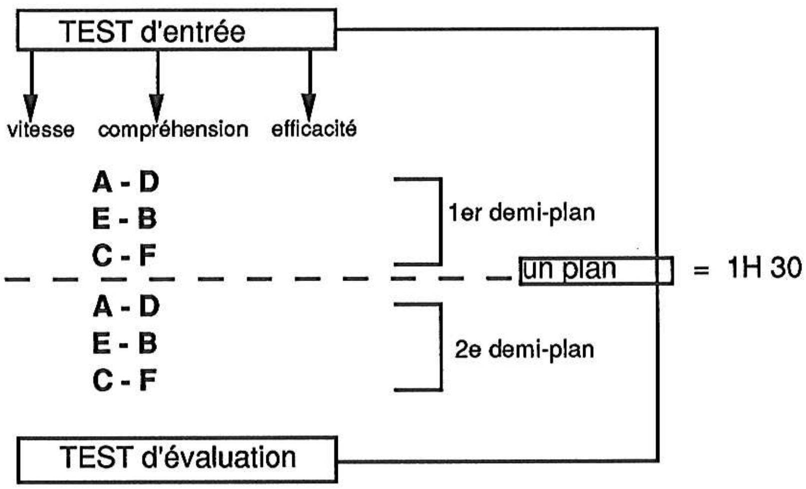
• il est, de notre point de vue, *le plus fiable* actuellement sur le marché français et il présente l'avantage recherché de *tenir compte des résultats des élèves pour programmer les exercices qui leur sont proposés.* La régulation se fait en jouant sur deux paramètres : la "difficulté" des textes utilisés, calculée à l'aide d'un indice de lisibilité classique (indice de Flesch adapté par G. Henry) et la vitesse d'exécution demandée.

• il en existe une version nano-réseau, matériel que nous étions contraints d'utiliser.

• *les exercices qu'il propose sont pour l'essentiel ceux que l'on rencontre dans les autres logiciels*, tous inspirés des travaux de Richaudeau (1966) sur l'entraînement à la lecture rapide, application des recherches menées au début du siècle par Emile Javal (1905). Ce sont, légèrement modifiés, les exercices que l'on trouvait déjà dans les Fichiers ATEL (1979) élaborés par plusieurs de ceux qui plus tard produiront ELMO. Ces exercices relèvent pour une part d'un entraînement sensori-moteur, pour une autre d'un entraînement à la lecture active. Il s'agit d'entraîner les élèves à lire plus vite et à mieux "anticiper" pour les faire passer, selon les concepteurs du produit, d'une lecture encore entachée de "déchiffrement" à une lecture productive de sens, directement. Le principe sur lequel repose cette affirmation étant le suivant: le passage par un décodage grapho-phonétique est à proscrire absolument, c'est une grave entrave à la véritable lecture, ce n'est qu'un *"moyen de "survie" dans un monde où l'écrit est présent partout mais ce n'est ni un moyen de s'informer ni une activité de loisir"*.(J.Foucambert, F.M Blondel, J.C Le Touze, Présentation d'ELMO, A F L 1984).Au contraire, *«lire consiste à prélever des informations dans la langue écrite pour construire directement une signification»* (Foucambert - 1976, p. 53). L'idéal, selon ces auteurs, étant de lire notre écriture alphabétique comme, selon eux, on lit du chinois : écriture idéographique, il est un *«langage pour l'œil»* (1). Selon les diffuseurs du produit, le "bon lecteur" se juge par sa **vitesse de lecture**, qui dépasse les 15.000 mots/heure (AFL-1986, p. 53) signe qu'il s'est totalement débarrassé du handicap du décodage grapho-phonétique.

Le logiciel ELMO se compose de séries de 6 exercices différents. Deux séries de 6 exercices constituent un "plan". Chaque "plan" est précédé d'un Test qui mesure la vitesse de lecture de l'utilisateur et sa compréhension à travers des questions sur le texte. Les scores à ces différents tests déterminent la vitesse d'affichage et la difficulté des textes utilisés dans le "plan" suivant. Le logiciel offre la possibilité de faire au maximum 13 "Plans".

Plan de l'entraînement



Un entrainement d'une vingtaine d'heures permet de faire 10 à 12 plans
(d'après Fichier de présentation d'ELMO)

La description des exercices A, B, C, D, E, F, (voir page suivante) nous montre qu'il s'agit essentiellement d'exercices visant à développer *la rapidité de lecture.*

(1) En réalité, l'écriture du chinois moderne comporte nombre d'indications phonétiques. Un caractère présentant souvent un double aspect : une partie idéographique et une partie phonétique.

Les exercices d'ELMO

	série A	série B	série C	série D	série E	série F
BUT	Favoriser l'élargissement du champ utile lors d'une fixation de l'œil ; et en même temps accroître la familiarisation avec le vocabulaire fondamental.	Travailler au niveau des points de fixation du regard, mais, cette fois, au cours de l'activité de lecture. Donner l'habitude de lire les empans de plus en plus larges sans possibilité de retours en arrière.	Améliorer les possibilités de discrimination. En même temps, puisque l'entraînement se fait sur un matériel choisi pour sa fréquence, assurer une révision permanente du corpus le plus fondamental.	Développer la rapidité d'exploration d'un texte	Renforcer les comportements d'anticipation, c'est-à-dire mobiliser toute l'information déjà recueillie pour prévoir au mieux l'information à venir	Contraindre à la lecture d'un texte à une vitesse supérieure à un minimum déterminé.
CONTENU	140 listes de 20 mots	46 textes	460 séries de 20 mots	46 textes et 460 questions	46 textes progressifs, dans lesquels 20 mots ont été retirés.	46 textes.
PROGRESSION	Les mots sont choisis dans les 43 premiers échelons de l'échelle Dubois-Buyse. Le temps d'exposition varie sur une échelle à 12 positions.	assurée, pour les textes, par l'augmentation de leur difficulté évaluée à travers un indice de lisibilité. Au cours de l'exercice, la progression contraint à des fixations de plus en plus larges et de plus en plus rapides.	assurée par l'accroissement de la vitesse de présentation. Les 8600 mots sont repris parmi les 7000 mots des 43 premiers échelons de l'échelle Dubois-Buyse.	assurée uniquement par le degré de difficulté et la longueur des textes.	assurée par la difficulté des textes et par la réduction de l'intervalle entre les mots à trouver ; dans les premiers textes, un mot sur dix a été retiré, dans les derniers, un mot sur cinq.	assurée par une augmentation de la difficulté des textes.
PRINCIPE	Proposer, dans un temps très court, des mots de plus en plus longs afin de donner la possibilité et l'habitude de fixations englobant des empans d'écrit de plus en plus larges.	Donner à lire un texte préalablement découpé en empans d'une longueur moyenne déterminée, de telle manière que chaque empan apparaisse un temps extrêmement court et que le déplacement de l'œil pour aller vers l'empan suivant soit plus grand, donc plus net et plus régulier, que dans une lecture ordinaire.	Repérer très rapidement un mot signal parmi des mots qui ont avec lui, un certain nombre de ressemblances : ceci afin d'exercer la qualité de la vision globale et l'habitude de ne pas prendre des indices trop partiels.	Faire parcourir un texte le plus rapidement possible pour localiser la réponse à une question, mais sans jamais le lire.	Demander de retrouver, d'après le sens qui précède, le mot qui manque.	Effacer un texte à vitesse régulière en commençant par le début. Le lecteur conduit sa lecture comme il l'entend, mais ne doit pas se faire rattraper.

D'APRES PRESENTATION D'ELMO - AFL

b) **des exercices utilisant le support papier**, extraits de méthodes d'amélioration des compétences en lecture destinées à des adolescents scolarisés. La ligne directrice de ce volet de la progression pédagogique est la suivante : reprendre les exercices effectués avec le micro-ordinateur pour en comprendre le mécanisme et ce faisant, catégoriser les difficultés rencontrées. Cette opération devant permettre une mise à distance des difficultés rencontrées par les élèves, leur permettant ainsi de les comprendre pour y porter une attention accrue.

c) **Des "travaux sur documents"**

Ce troisième volet du travail a été conçu au départ comme le **réinvestissement** de tout ce que les élèves apprenaient avec ELMO et lors des séances d'exercices. Très vite, il nous est apparu que les choses n'étaient pas si simples. En réalité il ne s'agit pas simplement pour l'élève d'utiliser ses compétences en lecture mais de les mettre au service de tout un processus qui, partant de documents écrits, aboutit à une production qui exprime en le synthétisant le résultat de ce processus.

Un tel travail n'est pas nouveau. Les différents ordres d'enseignement y font de plus en plus souvent appel. Ce que nous avons néanmoins tenté de faire, c'est, en nous appuyant sur l'analyse des tâches à effectuer, d'en décomposer les moments, de repérer les capacités les plus saillantes qu'elles mettent en œuvre et ainsi de construire une véritable méthodologie de travail utile aux enseignants et aux élèves.

Pour ce faire nous avons élaboré un guide de travail. Il a pour fonctions de cadrer précisément ce que les élèves ont à faire, de repérer les tâches qu'ils maîtrisent mal, et de leur permettre ainsi de remédier avec le plus de précision possible à leurs carences.

Cette articulation de trois types d'activités de lecture se situe dans le cadre de ce qui est préconisé par les diffuseurs du logiciel ELMO. C'est en accord avec eux que cette expérimentation s'est déroulée.

Le temps consacré par les élèves à ce travail a été le suivant :
- de 10 à 15 heures de travail sur micro-ordinateur avec le logiciel ELMO. Ce temps de travail est, selon les animateurs de l'A F L, suffisant pour que des changements déterminants interviennent dans les résultats en lecture d'un individu.
- 15 heures de travail avec le professeur de Français pour faire des exercices liés à la lecture,
- de 15 à 20 heures de travail de groupe, encadré par un ou plusieurs formateurs de

diverses disciplines (français, mathématiques, anglais, documentation, histoire-géographie, technique agricole).

23. Population concernée

Le processus décrit plus haut a concerné deux populations distinctes d'élèves de l'enseignement agricole. La première formée d'élèves de classes de 4è et 3è préparatoires et de pré-apprentis, la seconde d'élèves de 2nde agricole (2nde de détermination à option). Ici, nous ferons surtout référence aux résultats et observations recueillis auprès des élèves de la première population (dorénavant Niveau I). Ils paraissent en effet d'autant plus intéressants que pratiquement, ces élèves se situent parmi ceux qui, dans l'enseignement secondaire présentent, en moyenne le plus de difficultés en lecture. La seconde population (Niveau II) permettra de préciser certains points. Les effectifs étaient de 103 et 43 témoins pour le Niveau I, de 65 et 28 témoins pour le niveau II.

Ces deux groupes n'ont pu, pour des raisons d'ordre pratique, être constitués comme de véritables échantillons. Une enquête auprès des élèves nous a permis de cerner leurs caractéristiques les plus saillantes. Celles du groupe d'élèves de Niveau II sont comparables à celles de la population générale des élèves des classes de Seconde, avec toutefois une proportion accrue de ruraux, mais on sait qu'aujourd'hui les caractéristiques scolaires de ceux-ci sont très proches de celles de la population globale. En revanche, nos élèves du Niveau I, présentent des caractéristiques qu'il est intéressant de noter.

Ce sont des garçons (89 %) entre 15 et 17 ans. Ils ont comme langue maternelle le français à l'exception d'un groupe d'Alsaciens bilingues. D'origine rurale pour beaucoup, ils habitent à moins de 50 km de l'établissement fréquenté mais sont néanmoins internes pour les 3/4. Leurs pères ou tuteurs sont des agriculteurs (40 %) ou des employés ou ouvriers (32 %). Leurs mères ou tutrices sont agricultrices, employées ou ouvrières essentiellement pour celles qui occupent un emploi salarié, plus de la moitié étant sans profession.

Le niveau culturel de la famille, mesuré en terme de diplôme scolaire des parents, est faible (niveau VI ou V).

Scolairement, ces élèves ont dû rencontrer des difficultés antérieurement puisqu'ils sont plus de 95 % à avoir redoublé au moins une fois, et plus de 53 % à avoir redoublé deux fois. Mais, et c'est là une caractéristique importante qui se retrouve dans la plupart des formations agricoles, ils ont un projet professionnel clair qui pour 71 %

d'entre-eux concerne la production agricole (y compris l'horticulture) ou le secteur para-agricole. 75 % d'entre-eux estiment être bien orientés. Leurs ambitions scolaires dépassent les réalités statistiques actuelles (ce pourrait être un signe encourageant pour la volonté générale d'élévation du niveau des formations). Ce bilan montre que s'il s'agit bien d'élèves "en échec scolaire", ils ont néanmoins certaines attitudes positives vis-à-vis des formations qu'ils suivent.

24. Les épreuves d'évaluation des compétences en lecture. Pré tests et Post-tests.

241. Nous avons vu que le logiciel ELMO est doté de tests qui permettent d'évaluer au début du travail et après chaque "plan", les performances en lecture des utilisateurs.Ces tests mesurent la vitesse de lecture d'un texte (en nombre de mots/heure) et la compréhension qui en résulte, à travers un questionnaire de type Q.C.M. A partir de ces deux valeurs est calculé un "coefficient d'efficacité" selon la formule suivante :

$$EF = \frac{\text{Nb signes du texte x 3.6 x compréhension}}{\text{Durée en secondes}}$$

Ce coefficient est ensuite transformé en "efficacité pondérée" qui prend en compte la difficulté du texte considéré. Cette difficulté est évaluée à l'aide de la *formule courte de lisibilité de G. Henry* (G. Henry 1975 p.90-91).

Dans notre analyse, nous n'avons retenu que les deux premières valeurs : la vitesse, en mots/heure et la compréhension exprimée par un pourcentage de bonnes réponses. En effet, d'une part les différences de longueur entre les textes proposés ne nous sont pas apparues significatives quant à la compréhension, d'autre part, la notion de lisibilité, au sens où elle a été mise en œuvre par Flesch et De Landsheere (Flesch, 1951, De Landsheere, 1973) n'apparait plus aujourd'hui ni théoriquement fondée, ni pratiquement utile .

Ces tests proposés par ELMO ne nous ont pas paru suffisants bien que ce soient les seuls retenus par Foucambert et Chrétien pour une évaluation des effets de l'utilisation du logiciel menée au sein de l'INRP (Foucambert, Chrétien, 1986). En effet, ces tests sont des applications directes des exercices sur lesquelles les élèves ont travaillé avec ELMO et on peut penser que seul l'effet d'entraînement strictement instrumental peut être ainsi apprécié et non l'acquisition de compétences plus larges, transférables à d'autres situations, en particulier celles faisant appel non plus à l'écran cathodique mais au support papier. C'est pourquoi, nous avons soumis les élèves à trois autres tests : un test de closure et deux tests de lecture-compréhension utilisant tous les trois le support papier.

242. Le test de CLOSURE

On connait le principe de ce test (Flesch 1951 et De Landsheere - 1973) Dans un texte, un mot sur cinq a été remplacé par un espace blanc, de taille toujours égale. Le sujet doit reconstituer le texte en retrouvant les mots ainsi supprimés. Pour ce faire, il dispose d'un temps fixé à l'avance. Le score est établi en prenant le pourcentage de mots correctement restitués.

Ce test est considéré par ses inventeurs comme particulièrement révélateur de la compréhension que le lecteur a d'un texte. Présenté par G. Henry (1975) comme permettant, pour une population donnée, de tester la lisibilité d'un texte, il permet aussi, sur un texte étalonné, de situer la performance d'un individu par rapport aux scores d'une population de référence. G. Henry ajoute que, en deçà d'un certain score (35% environ), un texte se révèle fort difficile pour le sujet considéré et qu'inversement, un score de plus de 55% est la marque d'un texte particulièrement facile.

Pour le choix des textes supports du test, nous avons opté pour l'utilisation de textes déjà étalonnés. Nous avons donc choisi des textes, utilisés par G. Henry lui-même pour ses travaux. Nous avons ainsi retenu deux textes, pour chacune de nos populations, que G.Henry présente comme équivalents quant à leur niveau de difficulté pour des populations de niveaux scolaires comparables à ceux des nôtres. Ce niveau de difficulté est déterminé par G.Henry soit par des tests de Closure, soit par le calcul, les deux voies selon lui fournissant des indications très voisines.

Nous verrons que cette équivalence des textes choisis n'a pas été vérifiée. Cela ne va pas sans poser le problème de la fiabilité du test de Closure.

243. Les tests de lecture-compréhension

Rappelons que notre ambition était d'évaluer les effets d'une pédagogie de l'amélioration des compétences en lecture. Mais parmi la gamme très étendue des activités que l'on range, dans le langage courant, sous le terme de lecture, nous avons choisi de nous intéresser plus particulièrement à certaines qui, à notre avis, sont des facteurs de réussite ou d'échec scolaire.

La première est celle qui consiste à lire un texte pour en extraire l'essentiel de l'information. C'est celle qui est à l'œuvre dans la révision de cours, la lecture d'articles, d'ouvrages de documentation, et dans l'apprentissage de leçons. La rapidité avec laquelle une telle activité est réalisée est à l'évidence importante, de même que sa qualité : précision, exhaustivité des informations extraites. La deuxième est la recherche d'informations dans un texte, guidée par des interrogations préalables. Tout "travail sur documents", très largement utilisé aujourd'hui dans toutes les disciplines, met en œuvre cette activité.

Ce sont les tests que nous avons appelés COM.A qui correspondent à la première activité, la deuxième correspondant aux tests notés COM.B.

244. Les tests COM.A

Ils se déroulent de la façon suivante : on présente à l'élève un texte d'une page environ en lui donnant la consigne suivante : *«vous lisez ce texte sans perdre de temps mais de façon à bien le comprendre. Vous aurez ensuite à répondre à des questions de compréhension. Votre temps de lecture est enregistré.»*.

On enregistre donc le temps de lecture à l'issue de laquelle, lorsque l'élève déclare qu'il a terminé, on cache le texte et on lui présente un questionnaire auquel il doit répondre. Le questionnaire est un Q.C.M., ceci pour éviter que des obstacles d'ordre rédactionnel ne viennent perturber l'exercice. Par ailleurs, les questions posées prennent toujours appui sur des mots, des expressions du texte et les réponses proposées sont dans la plupart des cas elles aussi directement liées à des éléments du texte. C'est dire que peu de "calcul" est requis pour choisir les réponses et que les obstacles linguistiques ont été au maximum réduits, hormis ceux résidant dans le texte lui-même. En nous référant à l'analyse des questionnaires de compréhension faite par R. Duval et à la catégorisation des questions qu'il propose, on peut affirmer que les questionnaires proposés sont simples (Duval, 1986).

245. Les tests COM.B (cf. annexe)

Ces tests se présentent ainsi : on donne à l'élève un texte relativement long (2 pages au Niveau I, 4 à 5 pages au Niveau II) et en même temps un questionnaire du même type que celui utilisé dans COM.A. La consigne donnée est la suivante : *«vous remplissez le questionnaire à l'aide du texte et le temps que vous allez mettre pour faire cet exercice va être chronométré»*.

La tâche à exécuter est donc fort différente de celle à l'œuvre dans COM.A. Les stratégies d'utilisation du texte, son maniement, son mode de lecture, la façon dont le lecteur va aller à la recherche d'indices vont nécessairement briser la linéarité de la lecture. Ce type de tâche est rarement pris en compte dans les travaux théoriques sur la lecture alors que les pédagogues savent que tant que ce degré de maniement d'un texte n'est pas atteint, l'élève, toujours enfermé dans la linéarité, ne fera que des usages limités de l'écrit. C'est cette raison qui nous a conduits à faire le choix d'évaluer les élèves dans cette épreuve.

246. Le choix des textes des tests COM.A et COM.B

Nous avons voulu choisir des textes dont le contenu se situait dans l'univers des préoccupations scolaires des élèves et dont la forme (vocabulaire, syntaxe, structure) ne pouvait pas constituer un fort obstacle à la compréhension. Pour ce faire, j'ai demandé à des enseignants de diverses disciplines de me fournir des textes, les plus divers possibles, que leurs élèves utilisaient effectivement, soit en classe, soit hors de la classe dans le cadre de leurs travaux personnels ou de groupe.

Dans ce corpus important, j'ai opéré des découpages pour fabriquer des textes présentant une unité de sens et de longueur acceptable. C'est parmi ces textes, que, en collaboration avec les enseignants jouant le rôle d'experts, j'ai opéré un tri qui m'a fait retenir six à sept textes pour chaque test. Après fabrication des questionnaires correspondants, les épreuves ainsi constituées ont été passées par un groupe d'une vingtaine d'élèves. Ont été retenus pour chaque épreuve deux textes avec leurs questionnaires en prenant comme critère de choix que les moyennes et les écarts-types des résultats (temps et compréhension) ne diffèrent pas de plus de 20 %. Néanmoins les résultats obtenus témoignent de niveaux de difficultés sensiblement différents pour les deux modalités d'un même test. Les conditions dans lesquelles nous avons conduit ces travaux ne nous ont pas permis de mettre en œuvre des procédures qui auraient pu éventuellement aboutir à des modalités du même test plus équivalentes.

La méthode d'analyse des résultats prend en compte cette difficulté.

247. Plan de passation des tests;

Pour chaque catégorie de test, l'élève passe un pré-test et un post-test. C'est pourquoi deux séries de tests : CLO.11, CLO.12 - COM.A.11, COM.A.12 - COM.B.11, COM.B.12. étaient nécessaires.En effet,une expérimentation réalisée antérieurement nous avait montré que même à plusieurs mois d'intervalle, la même épreuve ne peut être utilisée. Les résultats de la seconde passation sont trop nettement améliorés: les moyennes des scores deviennent trop fortes et la dispersion trop faible pour que des comparaisons puissent encore avoir un sens.

Chaque groupe d'élèves (classe) est divisé en deux sous-groupes A et B auxquels les tests sont soumis de la façon suivante.

	Pré-test			Post-test		
groupe A	CLO.1	COM.A.1	COM.B.1	CLO.2	COM.A.2	COM.B.2
groupe B	CLO.2	COM.A.2	COM.B.2	CLO.1	COM.A.1	COM.B.1

A l'issue de chaque série de tests nous disposons des données suivantes, pour tous les élèves:

- Pour le test de closure - le % de bonnes réponses
- Pour COM.A - le temps de lecture
  - le taux de compréhension (% de bonnes réponses)
- Pour COM.B - le temps de l'exercice
  - le taux de compréhension

A ces données, s'ajoutent, pour les groupes expérimentaux, les résultats aux tests T d'ELMO.

25. Observation du travail et enquête auprès des élèves

Les moyens mis en œuvre ont été les suivants :

• trois sessions de regroupement des enseignants concernés avec information mutuelle sur l'avancement du travail, les modalités précises de fonctionnement, les problèmes rencontrés.

• trois visites dans chaque établissement participant au travail avec rencontre des enseignants, des élèves et de l'administration.

• entretiens systématiques en fin d'expérimentation avec les acteurs : élèves (par groupe de quatre ou cinq), professeurs, chefs d'établissement.

▪ En fin de parcours nous avons soumis aux élèves une enquête comportant deux volets. Le premier visait à les identifier et à les caractériser socialement et scolairement (voir plus haut). Le second visait à recueillir leur avis sur le travail effectué. Bien entendu, les élèves servant de groupe témoin n'ont rempli que la première partie de cette enquête.

Ce suivi avait 3 objectifs :

-réguler le travail en décelant le plus rapidement possible certains dysfonctionnements et en y portant remède ;

-recueillir des éléments de jugement sur la faisabilité dans un cadre scolaire du dispositif pédagogique retenu.

-recueillir le maximum d'informations sur les attitudes des élèves et de leurs professeurs.

26. Méthode d'analyse des données

Avant de pouvoir soumettre les données recueillies aux traitements statistiques proprement dits, nous avions à résoudre le problème suivant : les épreuves passées en pré-test et celles passées en post-test par un individu sont différentes. On a vu qu'il ne pouvait être question de comparer directement les résultats obtenus dans la mesure où l'équivalence des deux modalités d'un même test n'était pas parfaitement assurée. La solution que nous avons choisie a consisté à construire des **classes de réussite** pour chaque série de données.

Ceci implique que nous avons retenu l'hypothèse qu'un individu donné doit se situer dans la même classe de réussite, qu'il passe la modalité 1 ou la modalité 2 d'un test. Pour tenir compte de cette approximation, nous avons été conduit à construire pour chaque variable un nombre limité de classes, soit quatre. Ceci ne nous a pas paru gênant dans la mesure où ce qui nous intéressait, c'était de ***dégager des grandes tendances***. Il serait en effet illusoire, dans les conditions naturelles dans lesquelles nous avons travaillé et qui impliquent que nombre de conditions ne peuvent être contrôlées strictement, de penser qu'une grande précision de la mesure puisse être atteinte. Le traitement des données doit donc prendre en compte cette marge d'imprécision.

Les classes constituées sont d'égale ampleur avec quelques corrections qui permettent d'englober les valeurs extrêmes. Ces classes tiennent compte des seuils habituellement choisis pour catégoriser les niveaux de réussite dans des épreuves comparables à celles que nous avons utilisées.

Pour juger des progrès éventuels réalisés par un individu dans telle ou telle épreuve nous avons comparé la classe où il se situait en pré-test avec celle où il se situait en post-test. Ceci nous a permis, pour chaque série de données de déterminer ceux qui avaient progressé, ceux qui avaient régressé et ceux qui avaient stagné.

3 - RESULTATS

31. Les résultats enregistrés avec le didacticiel ELMO

311. Tout au long du travail, les élèves ont systématiquement noté les performances réalisées dans les divers exercices proposés par le logiciel ELMO. Néanmoins, suivant en cela l'avis des concepteurs de l'outil (INRP et AFL), nous n'avons retenu comme indicateurs de réussite que les résultats aux épreuves T qui marquent la fin d'un ensemble d'exercices.

Selon les auteurs et en référence à leurs thèses selon lesquelles une lecture lente est la manifestation d'un détour par un décodage grapho-phonétique, obstacle pour l'accession au sens, les résultats aux épreuves T peuvent s'analyser ainsi, déterminant 6 types de lecteurs :

Type 1	de 3 à 5 000 mots/heure	déchiffreurs lents
Type 2	de 5 à 10 000 mots/heure	déchiffreurs moyens
Type 3	de 10 à 15 000 mots/heure	l'oralisation domine toujours
Type 4	de 15 à 20 000 mots/heure	lecteurs lents
Type 5	de 25 à 35 000 mots/heure	lecteurs moyens
Type 6	+ 35 000 mots/heure	lecteurs rapides

Le seuil des 15000 mots/heure est celui de la lecture efficace, celui à partir duquel "l'écrit devient un langage pour l'oeil" Par ailleurs, les auteurs calculent qu'en dessous d'un seuil d'efficacité de 42, on n'a pas affaire à de véritables lecteurs. Ce seuil correspond à une vitesse moyenne de 12 000 mots/heure et à une compréhension de 60 %. En dessous d'une compréhension de 35 %, les valeurs ne sont plus significatives.

312. Résultats aux tests T ELMO

Contrairement à l'option prise par les concepteurs du logiciel qui pour évaluer les progrès réalisés retiennent le Test No 1 comme point de départ, nous avons éliminé celui-ci. En effet, nous l'avons jugé non significatif: ses résultats faibles ne sont que la manifestation des difficultés rencontrées par les utilisateurs lors de la prise en main de l'appareil et du logiciel.

Les progressions des élèves ont été plus ou moins rapides.

Ceci tient pour une part aux difficultés rencontrées dans certains cas du fait d'un fonctionnement peu fiable des Nano-réseaux mais aussi à la rapidité avec laquelle les élèves ont fait les exercices. Ceci nous a conduit, dans le traitement ultérieur des données à distinguer deux groupes d'élèves au sein du groupe expérimental: d'une part ceux qui avaient passé au moins 5 tests T (4 plans suivis) et d'autre part ceux qui en avaient passé au maximum 4 (3 plans au plus). Cette partition n'est pas arbitraire mais tient compte de l'avis des concepteurs de ELMO : en-deçà du seuil retenu, on ne pourrait pas attendre d'effets décisifs de l'entraînement, c'est au-delà que le "saut qualitatif" dont ils parlent interviendrait.

313 Résultats aux épreuves T :

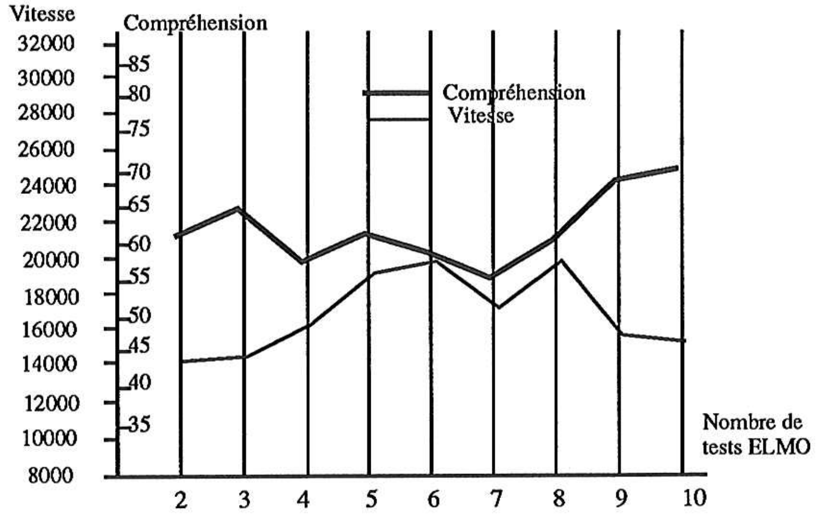
1.Moyennes des scores des élèves Niveau I

	Vitesse en mots/heure	Compréhension en %	Efficacité	Efficacité pondérée
T N° 2	14 138	61	47	41
T N° 3	14 310	64	51	45
T N° 4	16 302	57	52	47
T N° 5	19 117	61	64	58
T N° 6	19 727	57	58	52
T N° 7	17 275	55	52	47
T N° 8	19 750	59	66	60
T N° 9	15 821	68	61	56
T N° 10	15.706	70	60	55

* Nous n'avons pas retenu les Tests N° 11 et N° 12, trop peu d'élèves les ayant passés.

Représentation graphique : (graphique n°1)

Résultats ELMO Niveau I

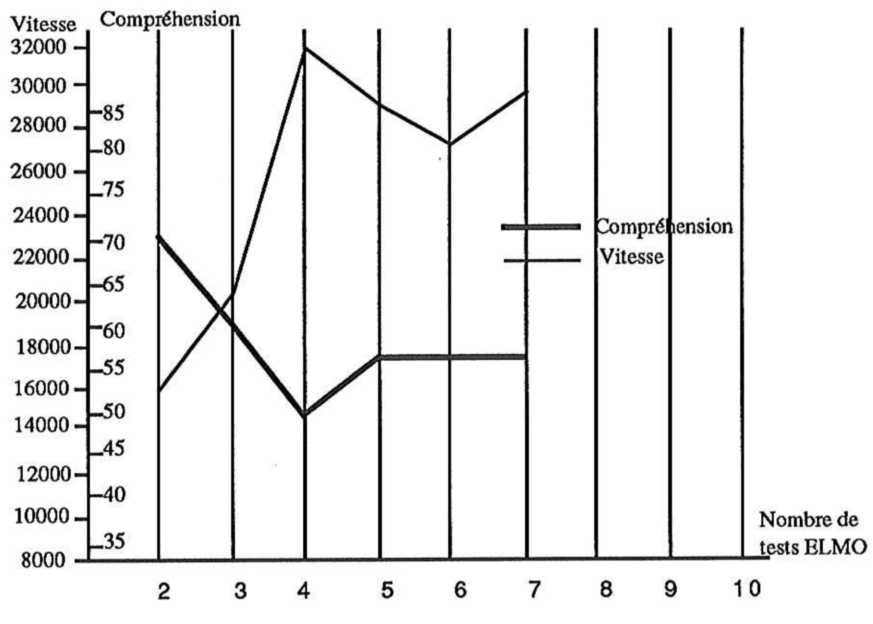


2. Moyennes des élèves **Niveau II**

	Vitesse en mots/heure	Compréhension en %	Efficacité	Efficacité pondérée
T N° 2	16 049	70	64	58
T N° 3	20 531	60	69	62
T N° 4	31 572	50	85	77
T N° 5	28 677	56	87	80
T N° 6	26 980	56	85	78
T N° 7	30 167	56	95	88

Représentation graphique:(graphique no 2)

Résultats ELMO niveau II

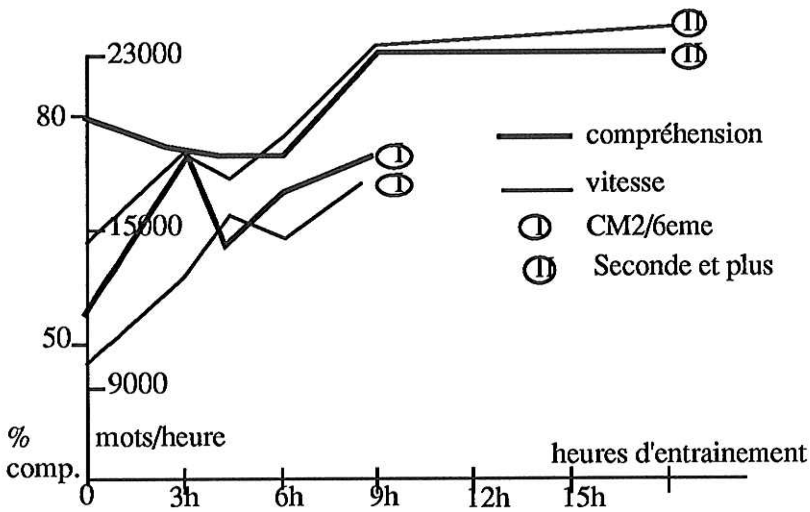


3. Quelques éléments de comparaison :

Dans une étude réalisée à l'INRP (Foucambert, Chrétien, 1986) concernant l'évolution des scores aux Tests ELMO, les auteurs présentaient les conclusions suivantes, qui peuvent s'appliquer selon eux à l'ensemble des utilisateurs d'ELMO.

- Dans un premier temps, la vitesse de lecture croît assez rapidement pour dans un deuxième temps croître moins vite et même diminuer pour reprendre ensuite une progression jusqu'à un palier.
- La compréhension, quant à elle, a tendance à baisser, dès le début de l'entraînement, dans le cas où elle se situe à un niveau relativement élevé, pour remonter au moment où la vitesse reprend sa croissance.
- L'efficacité, quant à elle, suit une courbe semblable.
- Le moment de la chute des performances se situe entre 3 et 6 heures d'entraînement.

Ceci peut se représenter de la façon suivante:



D'après FOUCAMBERT et CHRETIEN *Evaluation autour d'ELMO* Actes de lecture No 7, 1984

4. La comparaison des résultats attendus et de ceux que nous avons obtenus nous amène aux commentaires suivants.

1. Les évolutions enregistrées sont nettement amorties par rapport aux effets escomptés.
2. Il semble y avoir un net décalage vers la droite des courbes. En effet, il faut attendre les tests 6, 7, 8 pour les élèves de Niveau I, et 5 ou 6 au Niveau II, pour que les changements annoncés aient lieu. Or ces tests correspondent en moyenne à un temps d'entraînement de l'ordre de 7 à

10 heures selon les individus alors que Foucambert et Chrétien affirment que 5 à 6 heures suffisent.

3. Au Niveau I (graphique n°1), la remontée des performances après le fléchissement, signe pour les concepteurs du didacticiel d'un changement de stratégie de lecture, ne se manifeste qu'en ce qui concerne la compréhension, la vitesse rechutant au contraire pour ne dépasser que de fort peu le seuil de ce qui est présenté comme devant être le signe d'une "bonne lecture".

4. Au niveau II (graphique n° 2),si on constate globalement une augmentation de la vitesse de lecture, la compréhension quant à elle semble se stabiliser à un niveau fort médiocre. C'est dire que l'on rejoint là les résultats obtenus par Stoll (Stoll 1974) auprès d'un groupe d'étudiants ayant suivi un entraînement à la lecture rapide (avec un matériel papier). La vitesse de lecture progresse mais la compréhension a tendance à chuter.

32 Les résultats aux tests de closure

On a vu précédemment que le choix des tests de Closure a été déterminé par la double nécessité de proposer des épreuves convenant à la population concernée et de pouvoir comparer les résultats en Post-Test à ceux du Pré-Test.

C'est ce qui a motivé le choix d'épreuves étalonnées G.Henry. Pour le Niveau I nous avons porté notre choix sur deux textes sans doute assez faciles pour le niveau d'élèves considérés (deux dernières années de l'enseignement secondaire inférieur). Néanmoins, dans la mesure où nous avions à faire à des élèves de niveau scolaire formellement équivalent à ceux de G. Henry mais se trouvant dans des filières adaptées aux élèves scolairement peu performants, il nous a paru adéquat d'utiliser ces deux textes.

Les tableaux suivants présentent, en haut, les résultats collectés par G. Henry et en dessous les résultats que nous avons nous même recueillis, en Pré-test et en Post-test.

Scores obtenus (moyennes) pour les deux textes utilisés au niveau I (G. HENRY - 1975, p. 107)

	Niveau 1 Degré supérieur de l'enseignement primaire	Niveau 2 Deux dernières années de l'enseignement secondaire inférieur.	Niveau 3 Deux dernières années de l'enseignement secondaire supérieur
l'essence (CLO11)	34,72	59,38	67,22
l'appareil circulatoire (CLO 12)	23,02	60,39	63,82

(1) Niveau de référence

***Résultats mesurés* (149 élèves de 4è Prép. et C.P.A.)**

		Moyenne	Ecart-type
CLO11	Pré-test	59,61	11,02
	Post-test	63,68	9,10
CLO 12	Pré-test	40,37	13,36
	Post-test	43,22	12,68

La comparaison de ces deux séries de données montre que, contrairement à ce qu'on trouve chez G.Henry, *les différences sont grandes entre les scores obtenus aux deux textes.* Si pour le texte 11 les scores obtenus par notre groupe d'élèves sont comparables, avec une amélioration entre les Pré-Tests et les Post-Tests, ceux obtenus au texte 12 sont de 20 points inférieurs à ceux présentés par G. Henry, avec toujours une amélioration légère entre Pré-Test et Post-Test.

Au niveau II, les textes choisis ont été étalonnés par G.Henry grâce à une formule de lisibilité, ce procédé étant pour lui équivalent à un test de closure.

Scores de lisibilité (formule courte) des deux textes utilisés au Niveau II (G. Henry p 109)

	NIVEAU 1	NIVEAU 2	NIVEAU 3
Texte 1 L'homme sur la lune	27	49	59
Texte 2 Comment préserver l'équilibre de vos enfants	31	50	57

Résultats enregistrés pour 101 élèves de 2nd
(niveau intermédiaire entre niv.2 et niv. 3)

		MOYENNE	ECART-TYPE
Texte 1	Pré-test	40,41	7,32
	Post-test	42,97	6,65
Texte 2	Pré-test	63,92	7,55
	Post-test	66,89	8,46

Les différences notées au Niveau I se retrouvent ici, légèrement accentuées même.

Ce constat nous amène à deux conclusions, la première concernant directement notre recherche, la seconde beaucoup plus générale :

1 -Il serait tout à fait hasardeux de vouloir comparer en valeur absolue les résultats à deux tests de Closure, même si un étalonnage préalable peut les faire considérer comme équivalents. Notre comparaison utilisant des classes de réussite tourne cette difficulté.

2 - L'utilisation du test de Closure, soit pour juger de la "lisibilité" d'un texte, soit pour situer un individu ou un groupe d'individus par rapport à une population apparait problématique. Certes nous n'avons utilisé qu'une seule modalité sur les cinq possibles des différents tests, mais si on acceptait cette objection cela signifierait que les résultats à un closure sont très fortement liés à la modalité utilisé. Que l'on supprime un mot sur cinq du texte en commençant par le 1er, le 2e, etc. changerait beaucoup de choses. Il faudrait alors soit utiliser à chaque fois toutes les modalités du test soit utiliser toujours la même, mais alors on peut gager que le closure ne pourrait pas être utilisé pour juger de la lisibilité d'un texte. On peut faire l'hypothèse que si des différences telles que celles que nous mettons en évidence apparaissent c'est sans doute que sont à l'oeuvre des variables non contrôlées et qui ont échappé aux concepteurs du test de closure.

33. Comparaisons des résultats des élèves aux différents tests

Plusieurs tests : cela se justifie.

1. ***Rappel***: pour évaluer les effets de l'ensemble des activités d'entraînement à la lecture suivies par les élèves (ELMO, Exercices, Travaux sur documents), nous avions prévu trois tests auxquels nous ajoutons les épreuves T du logiciel ELMO. Nous avons donc pour chaque individu, en pré-test et en post -test la série de données suivantes:

- Test T de ELMO	Vitesse de lecture Compréhension
- Un test de Closure	Compréhension
- Un test de lecture-compréhension (COM. A)	Temps de lecture Compréhension
- Un test de recherche d'informations dans un texte (COM. B)	Temps de l'exercice Compréhension

Nous avons justifié le recours à plusieurs tests par deux considérations.

D'une part nous faisions l'hypothèse que la lecture recouvre en fait des tâches complexes très diverses même si au coeur de ces différentes tâches on retrouve des activités communes que les psycho-linguistes décrivent comme un processus de traitement de l'information. Nous pensions par exemple que ce que mesure un test de Closure : la capacité d'anticipation dans un texte, révélatrice de la compréhension que l'on en a, n'est qu'une composante d'autres activités de réception de l'écrit. Ceci signifie que ce que l'on désigne souvent par le terme de "stratégies de lecture" recouvrirait en fait non pas des modalités diverses de mise en oeuvre des mêmes capacités mais bien des ensembles de capacités différentes, mises en oeuvre selon des modalités diverses.

D'autre part nous voulions vérifier que d'éventuelles modifications dans les résultats d'un individu à des exercices utilisant le support écran étaient transférées dans des tâches utilisant le support papier.

Notre dispositif expérimental ne peut pas avoir la prétention de valider totalement ces hypothèses mais, la mise en relation des résultats enregistrés aux tests utilisés, permet sans doute de les préciser et de fonder des travaux ultérieurs.

12. Comparaison des résultats (les résultats analysés ici sont ceux des élèves du Niveau I) :

1) Corrélations entre les résultats aux Pré-tests:

(Ensemble de la population soit N=149)

	Closure	COM. A Temps.	COM. A Résultats	COM. B Temps	COM B Résult.
Closure	1000				
A T	0.165	1 000			
A R	0.309	0.061	1 000		
B T	0.036	0.476	0.233	1 000	
B.R	0.347	0.033	0.328	0.184	1.000

Au seuil de .05, on constate que plusieurs résultats sont liés, bien qu'assez faiblement pour la plupart (corrélations soulignées).

Ainsi les résultats au test de Closure ne permettent d'expliquer que 9,5 % des résultats au questionnaire du Test A et 19 % de ceux au questionnaire du Test B.

La corrélation la plus forte se remarque entre le temps de l'exercice A et le temps de l'exercice B (0,476). Près du quart des élèves (22,65 %) auraient donc tendance à être soit lents soit rapides, quel que soit l'exercice effectué. Notons aussi une corrélation non négligeable (r = 0,328) entre AR et BR.

Quant à la corrélation, faible, entre la compréhension en COM A et le temps en COM B, elle apparait plus difficile à interpréter. On pourrait suggérer qu'un individu qui se sent à l'aise en général pour comprendre un texte, a tendance à travailler vite à chaque fois qu'il a à utiliser un texte, quel que soit le type de tâche, et inversement.

L'analyse des résultats aux post-tests fournissent des corrélations comparables bien qu'encore un peu plus faibles, les seules significatives étant les suivantes :

- Closure/AR r = 0,224
- Closure/BR r = 0,262
- AT/BT r = 0,392

Ces résultats nous montrent certes que les différents tests utilisés, mettant en oeuvre des tâches différentes ne sont pas totalement indépendants. Mais leurs liens sont assez ténus pour que nous puissions affirmer que le recours à leur diversité est justifiée.Un seul d'entre eux, comme il est souvent pratiqué, ne fournit que des indications trop limitées sur les aptitudes des lecteurs dans des tâches proches de celles qu'ils ont à effectuer dans leur activité scolaire. Ces résultats doivent aussi inviter à des recherches beaucoup plus fines pour accéder aux processus de la réalisation des tâches complexes effectuées dans les situations diverses d'utilisation de l'écrit à la réception.

2) Relations entre les résultats aux exercices sur micro-ordinateur et ceux obtenus aux autres exercices.

Corrélations entre les résultats du groupe EX1 (ayant passé au moins 5 Tests ELMO)

	Closure	COMA Tps	COMA Comp.	COMB Tps	COMB Comp
Vitesse ELMO		-.602	-.287	-.271	
Compréhension ELMO	.248				

Dans chaque case, en haut, corrélations pour les Pré-tests,en bas pour les Post-tests.
Seules les valeurs significatives ont été notées. (r> .24 au seuil de .05 pour ddl=66)

Commentaires: En Pré-test, on constate une forte corrélation *négative* entre la vitesse aux tests Elmo et les vitesses dans les autres tests. Cette corrélation négative disparait en Post-test mais il n'apparait pas de corrélation positive. *Il serait donc pour le moins hardi d'affirmer qu'une bonne vitesse d'exécution d'exercices de lecture du type de ceux présentés dans les tests Elmo entraîne nécessairement une bonne vitesse* *d'exécution dans des exercices utilisant un support papier.*

En Post-test, la seule corrélation significative se situe entre Vitesse ELMO et Comp.COMA, et elle est négative. Nous retrouvons là la tendance déjà notée: *la compréhension évolue dans le sens inverse de la vitesse.*

Les corrélations entre les scores en compréhension sont soit absentes (entre Comp.ELMO et Comp.COMA et Comp. COMB) soit faible (entre Comp.ELMO et Closure, on se trouve à la limite de signification au seuil .05). *On ne peut donc pas induire une compétence générale de l'ordre de la compréhension à partir des résultats aux exercices ELMO.*

Les conclusions des deux points qui précédent confirment que nous avions raison de prévoir des tests papier-crayon.
En effet on ne peut pas induire à partir des résultats enregistrés à des exercices sur écran, des compétences dans des exercices voisins sur support papier.
Ce point est totalement méconnu par les concepteurs d'ELMO comme par ceux de tous les autres didacticiels du même type. Ils postulent cet effet, sans tenter de le vérifier.

34. Evolution des performances aux tests CLO, COMA, COMB. Comparaison entre groupe expérimental et groupe témoin (Niveau I)

1. Résultats.

Les tableaux qui suivent présentent les données chiffrées obtenues.

Dans ceux-ci, on remarque qu'apparaissent *deux groupes expérimentaux,* comme nous l'avons signalé précédemment: l'un constitué des élèves ayant effectué au moins quatre séries complètes d'exercices avec le logiciel ELMO (ils ont passé au moins 5 tests), l'autre regroupe ceux qui ont fait une, deux ou trois séries d'exercices (2, 3 ou 4 tests).

Ces deux groupes ont par ailleurs suivi un programme d'exercices de lecture et de travaux sur documents durant un temps comparable.

CLOSURE		Régression	Stabililité	Progression	Effectifs
EX 1	NB	6	36	26	68
	%	8,82	52,94	38,23	
EX 2	NB	10	14	11	35
	%	28,57	40	31,42	
T	NB	10	13	20	43
	%	23,25	30,23	46,51	

EX 1 : groupe expérimental ayant passé au moins 5 tests ELMO
EX 2 : groupe expérimental ayant passé 2, 3 ou 4 tests ELMO
T : groupe témoin

TEST A Temps		Régression	Stabililité	Progression	Effectifs
EX 1	NB	7	32	29	68
	%	10,29	47,05	42,64	
EX 2	NB	0	17	18	35
	%	0	48,57	51,42	
T	NB	3	25	15	43
	%	6,97	58,13	34,88	

TEST A Réponses		Régression	Stabililité	Progression	Effectifs
EX 1	NB	27	19	22	68
	%	39,70	27,94	32,35	
EX 2	NB	13	14	8	35
	%	37,14	40	22,85	
T	NB	15	13	15	43
	%	34,23	30,23	34,88	

TEST B Temps		Régression	Stabililité	Progression	Effectifs
EX 1	NB	17	15	36	68
	%	25	22,05	52,94	
EX 2	NB	3	21	11	35
	%	8,57	60	31,42	
T	NB	8	16	19	43
	%	18,6	37,2	44,18	

TEST B Réponses		Régression	Stabililité	Progression	Effectifs
EX 1	NB	25	27	16	68
	%	36,76	39,7	23,52	
EX 2	NB	17	11	7	35
	%	48,57	31,42	20	
T	NB	21	13	9	43
	%	48,83	30,23	20,93	

2. Interprétations.

Nous avons comparé, pour chaque test, successivement les résultats :

- du groupe EX 1 à ceux du groupe T,
- du groupe EX 2 à ceux du groupe T,
- du groupe EX 1 à ceux du groupe EX 2.

Au seuil de 0,05, les différences significatives quant à l'évolution des scores entre les groupes sont les suivantes :

- **pour le test de Closure :** entre EX 1 et T
entre EX 2 et T

Il apparaît donc qu'*on peut raisonnablement faire l'hypothèse d'un effet de l'entraînement suivi, sur l'évolution des scores à ce type de test.* Mais dans la mesure où la différence n'est pas significative entre EX 1 et EX 2, on peut aussi faire l'hypothèse que l'effet serait plutôt attribuable aux exercices de type papier/crayon plutôt qu'à l'entraînement sur micro-ordinateur dans la mesure où la durée de cet entraînement ne parait pas avoir d'influence.

Quant au sens de l'effet, il jouerait plutôt en faveur d'une *consolidation des résultats* (moins de régressions) qu'en faveur de progrès accrus (moins de progrès) : la valeur centrale -celle de la stabilité- enregistrant une différence de plus de 20 points entre les groupes expérimentaux et le groupe témoin.

- pour le test A :

• Le temps : les différences n'apparaissent pas ici significatives : l'évolution marquée vers une amélioration des performances entre le début et la fin de l'année parait indépendante de l'entraînement suivi.

• Les résultats au questionnaire de compréhension : là encore, pas de différence significative entre les groupes. Dans chacun de ceux-ci, en gros un tiers des effectifs régresse, un tiers stagne, un tiers progresse.

- pour le test B :

• Le temps : c'est sur cette variable que les écarts sont les plus importants, non entre les groupes expérimentaux et le groupe témoin, mais entre les deux groupes expérimentaux. Ceux qui ont fait au moins 4 séries d'exercices progressent pour plus de 52% mais régressent aussi pour 25% alors que ceux qui ont fait au plus trois séries d'exercices ne progressent que pour 41 % d'entre eux mais restent stables pour 60 %. *L'entraînement poursuivi accentuerait donc les différences* : plus on s'entraîne, plus on a tendance soit à travailler vite soit à ralentir son rythme de travail. Mais il faut noter, et ceci nous paraît important, qu'il existe une corrélation négative (- 0,539) entre l'évolution de la vitesse et celle de la compréhension. *Dans cette épreuve l'augmentation de la vitesse* *de travail se paye pour 25 % des individus par une diminution de la compréhension.*

• En compréhension aucune différence significative d'évolution entre groupe témoin et groupes expérimentaux n'est notable.

3. Ces conclusions peuvent être complétées par l'examen des corrélations entre les évolutions des résultats entre les Pré-tests et les Post-tests

Corrélations: seules sont notées les corrélations significatives

Pour le groupe EX1(au moins 4 "plans" suivis avec ELMO)

Closure / COM A Tps = - 0,263
id / COM B Comp.= 0,248
id / COM B Tps = 0,440
id / COM B Comp= - 0,316
COM B Tps / COM B Comp= - 0,539

Pour le groupe EX2 (moins de 4 "plans"):

Vit.ELMO / Comp.ELMO = 0,432
id / COM A Tps = 0,391

Pour le groupe témoin :

COM A Tps / COM A Comp = - 0,542

Commentaires

1). En ce qui concerne le groupe T, on constate que, sauf dans un cas, les évolutions des performances se font de façon indépendante.

La corrélation négative et assez forte qui apparait entre le Temps et la Compréhension au test COM.A pourrait s'expliquer par un excès d'attention porté à cet exercice par les élèves. Passant pour la deuxième fois ces tests, ils ont sans doute adopté une stratégie plus studieuse que la première fois, visant plus un bon score en compréhension qu'en rapidité, ce que confirme l'examen des résultats.

2) Le groupe EX2 quant à lui ne manifeste pas non plus de liens nombreux entre les évolutions de ses scores aux différents tests. Les seules corrélations significatives qui apparaissent, entre la vitesse au test ELMO et la compréhension à ce même test d'une

part et d'autre part entre cette même vitesse et le temps de lecture en COMA, pourraient s'expliquer ainsi:

- la première pourrait traduire le fait que, d'un test à l'autre, certains apprennent plus vite que d'autres à utiliser le micrto-ordinateur, cette maîtrise trouvant un effet à la fois dans la vitesse d'exécution et dans la compréhension. Si on retient cette hypothèse, il s'agirait donc d'un artefact lié à l'utilisation de la machine, ce que peut confirmer le fait que cette corrélation ne se retrouve pas chez ceux qui sont allés plus loin dans l'utilisation du logiciel (groupe EX1) et dont on peut supposer qu'ils ont tous acquis une habilité de manipulation à peu près équivalente. Cette habilité a été effectivement constatée : au delà de 4 ou 5 tests les élèves travaillent beaucoup plus vite et sans faire appel à une aide extérieure.

- Quant à la seconde, elle s'expliquerait par le fait que les 2 exercices se ressemblent. Centré sur la vitesse au début de son apprentissage avec ELMO, l'élève a tendance à transférer cette attitude dans des exercices semblables sur support papier.

3) Le groupe EX1 quant à lui présente des corrélations plus nombreuses et plus variées. *Il y aurait donc quelque effet à attendre d'un entraînement plus long.* Les liens entre les évolutions des scores peuvent se regrouper en trois catégories:

- *une évolution fortement liée entre le temps à COMA et celui à COMB, mais non liée à l'évolution de la vitesse en ELMO.* Dans les exercices papier-crayon, les progrès en vitesse seraient donc assez généraux.
- une liaison *négative* entre l'évolution de la vitesse aux tests COMA et COMB et la compréhension qui en résulte. On a vu précédemment que les élèves progressaient globalement en vitesse d'exécution , on voit ici que ce progrès se paye par une diminution de la compréhension puisque les 4 corrélations entre l'évolution des vitesses d'exécution et celle des taux de compréhension sont toutes négatives, 2 n'étant certes pas significatives au seuil de .05, mais les 2 autres l'étant fortement.
- des corrélations entre Closure et COMA Temps (négative) et entre Closure et COMB Comp.(positive) difficiles à interpréter. La seconde parait logique: on comprend que l'évolution du score en Closure soit liée à l'évolution du score en COMB, il s'agit dans les deux cas de compréhension. La première quant à elle apparait plutôt paradoxale dans la mesure où un gain en Closure correspond à une perte de temps en COMA. A moins que, le temps n'étant pas chronométré

en Closure (il est assez long pour permettre même aux élèves les plus lents de mener l'exercice dans les meilleures conditions), on puisse interpréter la corrélation négative comme une rançon que paierait au temps l'élève trop consciencieux. On a déjà précédemment fait appel à ce type d'explication il semble se confirmer ici, au moins à titre d'hypothèse.

35 . L'enquête d'opinion auprès des élèves et les entretiens avec les formateurs

1. Les opinions des élèves

■ Dans les réponses, aux deux niveaux, I et II, ce qui frappe, c'est le ***pourcentage élevé d'opinions positives.*** Manifestement le travail sur ordinateur est plébiscité puisque plus de 91 % le trouvent intéressant voire passionnant. Quand on ajoute à ce bilan les 73 % qui déclarent que ce travail leur a appris quelque chose et les 64 % qui affirment qu'il correspondait à leurs besoins, on peut avoir quelques éléments d'explications de l'engouement de certains enseignants pour l'utilisation de l'informatique. Et de plus les élèves jugent le travail facile à 95 % !

Quant aux autres séquences pédagogiques réalisées au cours de l'année (exercices - travaux sur documents), ils sont jugés selon les mêmes tendances, mais à un degré moindre. On retrouve là, bien sûr, des activités connues des élèves mais intégrées dans un ensemble pédagogique dont ils ne peuvent pas ne pas sentir la volonté de cohérence, même si celle-ci a été parfois difficile à réaliser. On peut penser qu'isolées, ces activités auraient été moins appréciées : ceci ne fait que confirmer le fait qu'à partir du moment où on propose aux élèves des progressions pédagogiques à la cohérence fortement affirmée, ceux-ci réagissent positivement.

Néanmoins, il ne faut pas passer sous silence le quart d'élèves du Niveau I qui ont trouvé exercices (25%) et travaux sur documents(27%) trop longs et ennuyeux. Mais ils ne sont que 10 % et 11 % à déclarer ne pas avoir travaillé sérieusement. Dans la mesure où on peut considérer ces chiffres comme valides ils sont plutôt encourageants pour des élèves dont on s'accorde à dire habituellement qu'ils n'acceptent - ou subissent - que difficilement les activités scolaires.

■ Les réponses à la question ouverte qui était formulée ainsi: "Si vous pensez que le travail fait vous a appris quelque chose, dites quoi", révèlent aussi des opinions fortement positives.

Catégories de réponses: 1: progrès en lecture
2: progrès d'ordre méthodologique
3: savoirs divers
4: autres

Réponses des élèves du Niveau I

	1. Lecture	2. Méthodes	3. Connaissances	4. Autres	Total
Nb de réponses	67	16	6	31	152
% du nb de réponses fournies	55,83	13,33	5,00	25,83	100%
% par rapport aux élèves ayant répondu à l'enquête (70)	95,71	22,85	8,57	44,28	*

Une analyse plus fine fait apparaître que dans la catégorie "Lecture", la plupart des réponses concernant la vitesse (46,23%) et la compréhension (38%).
* le % dépasse les 100 % puisque les élèves pouvaient fournir plusieurs réponses.

Réponses des élèves du Niveau II

	1. Lecture	2. Méthodes	3. Connaissances	4. Autres	Total
Nb de réponses	67	16	6	31	120
% du nb de réponses fournies	55,83	13,33	5,00	25,83	100%
% par rapport aux élèves ayant répondu à l'enquête (70)	95,71	22,85	8,57	44,28	*

2. Les opinions des enseignants (Bilan des entretiens)

22. Satisfaits de leur travail

Certes, on a souvent constaté qu'une innovation pédagogique lorsqu'elle était pleinement assumée par un enseignant renforçait considérablement ses liens avec ses élèves. Mais dans ce cas il est notable que le dispositif pédagogique mis en place visait pour une part à permettre aux élèves de travailler de façon plus autonome (travail sur micro-ordinateur, travaux sur documents). Or les enseignants notent qu'en gagnant en autonomie, (ce sur quoi tous insistent), les élèves deviennent non seulement plus studieux, plus attentifs, mais encore que les échanges pédagogiques prennent une autre dimension. On a constaté qu'il y a eu souvent passage d'un modèle de transmission du savoir à un modèle de co-construction des savoirs, des savoir-faire et des savoir-être.

23. Satisfaits de leurs élèves

Le point le plus saillant du bilan est le suivant: *tous les enseignants notent que l'attitude de leurs élèves en face de l'écrit a changé* : il est devenu pour eux un objet beaucoup plus familier, la défiance vis-à- vis de la chose écrite que l'on constate trop souvent, en particulier dans les classes de notre Niveau I, qui regroupent des élèves réputés peu studieux a considérablement diminué.

En ce qui concerne les opinions et les attitudes, tant des élèves que des enseignants, le bilan est très nettement positif. Il contraste donc singulièrement avec celui beaucoup plus mitigé que l'analyse des résultats chiffrés fait apparaître.
Il ne suffirait donc pas, en pédagogie, que maîtres et élèves soient satisfaits du travail accompli et même qu'ils aient l'impression qu'il a porté des fruits pour que de réels effets, d'ordre cognitif, existent.

CONCLUSION

■ Confronté au problème des différences importantes que l'on constate chez les adolescents dans l'efficience des tâches mettant en œuvre la lecture, nous nous sommes intéressé aux moyens d'améliorer leurs compétences dans ce domaine.

Les avancées dans la connaissance des processus mentaux pilotant l'acte lexique peuvent laisser espérer que d'ici quelques années on pourra disposer d'outils de diagnostic fin des dysfonctionnements de ces processus et de procédés de remédiations adaptés aux déficits mis en évidence.

Mais en attendant que la psychologie vienne compléter la boîte à outils du pédagogue, celui-ci se doit de répondre aux besoins de ses élèves avec les moyens dont il dispose. Nous pensons que l'usage de ces moyens, ceux que le marché lui fournit essentiellement et qu'il "bricole" sans cesse, peut être rendu plus efficace. L'étude des conditions de leur mise en œuvre et surtout de l'évaluation de leurs effets doit permettre cette efficacité : l'enseignant choisira en meilleure connaissance de cause, en sachant quels résultats il pourra escompter.

C'est ainsi que nous avons construit un plan expérimental permettant d'évaluer un dispositif pédagogique d'amélioration des compétences en lecture utilisant le logiciel ELMO.

■ Synthèse des résultats

1 - Les tests de lecture couramment utilisés ne sont pas pour autant au-dessus de tout soupçon. En particulier le test de Closure nous a montré qu'il devait être manié avec circonspection.

2 - On ne peut pas inférer du résultat à un type de test les résultats à un autre type de test. Pour évaluer les compétences en lecture d'un individu, il est donc souhaitable de lui soumettre plusieurs tests, correspondant de fait à des tâches complexes différentes.

3 - Dans des tâches pourtant très voisines, les performances sont différentes selon que l'on utilise l'écran cathodique ou le support papier. Cet enseignement infirme ce qu'avancent les concepteurs et les vendeurs de logiciels d'entraînement à la lecture.

4 - La comparaison entre les élèves qui ont suivi l'entraînement et le groupe témoin nous montre que, globalement, les effets de l'entraînement sont fort modestes et portent essentiellement sur la vitesse.

5 - Si un entraînement visant à accélérer la vitesse de lecture produit quelque effet, toutefois assez modéré, contrairement à ce qu'affirment les diffuseurs d'ELMO, il apparait que l'augmentation de la vitesse n'est pas nécessairement liée à une augmentation de la compréhension. Plus, dans certaines tâches, c'est même l'inverse qui se produit, et de façon massive.

6 - L'évolution des scores aux différents tests nous montre que pour les élèves qui ont fait le maximum d'exercices sur micro-ordinateur, cette évolution de la vitesse se retrouve dans chaque type d'exercice mais elle est d'autant plus sensible que les sujets sont plus performants au départ. Il en résulte une augmentation des différences inter-individuelles.

Ce bilan s'il n'est pas totalement négatif est pour le moins loin de confirmer ce qui est annoncé par les concepteurs des outils utilisés.

En revanche, on a vu que les attitudes des élèves en face des exercices qui leur ont été proposés ont été pour la plupart d'entre eux très positives.

Cette apparente contradiction doit inviter à quelque modestie. En quelques dizaines d'heures de travail, on ne modifie pas profondément les compétences en lecture d'adolescents. Il faut dire que ceux qui le prétendent se trompent et induisent leurs clients en erreur.Mais cette contradiction doit être aussi un encouragement à poursuivre le travail. La modification des attitudes peut être le point d'ancrage d' améliorations futures. Pour ce faire il serait à notre avis nécessaire de:

- voir comment investir les quelques progrès réalisés dans d'autres apprentissages

- modifier assez profondément le dispositif pédagogique lui-même en centrant les exercices beaucoup plus sur les problèmes de compréhension que sur l'agilité visuelle

- dépasser le simple constat que nous avons fait de la diversité des activités de lecture : des études sont en cours pour tenter de dégager les composantes principales des tâches complexes qu'elles mettent en œuvre. Des résultats dans ce domaine devraient faciliter l'intervention pédagogique tout en fournissant des cadres plus rigoureux pour contruire des épreuves d'évaluation des compétences.

REFERENCES

A.F.L., Lire, c'est vraiment simple quand c'est l'affaire de tous.- Paris, MDI - SERMAP. 1976

A.F.L., ELMO, le guide. Paris, AFL ed.,1986

BRONCKART J.P., et al., Le fonctionnement des discours. Neufchâtel-Paris, Delachaux et Niestlé 1985.

DUVAL. R, Lecture et compréhension des textes (Modèles théoriques et exigences didactiques). Strasbourg, Université Louis Pasteur 1986

ESPERANDIEU V., LION A., BENICHOU J.P., Des illettrés en France, rapport au Premier Ministre. Paris, La Documentation Française 1984.

Fichier ATEL, Paris MDI ed. 1979.

FLESCH R , How to test readibility. New-York, Harper and Row 1951

FOUCAMBERT J., La manière d'être lecteur, Paris, MDI 1974

FOUCAMBERT J., CHRETIEN P., Evaluation autour d'ELMO in *Actes de lecture* n° 7 1984.

HENRY G., Comment mesurer la lisibilité . Paris, Nathan-Bruxelles, Labor 1975

ISAMBERT-JAMATI V., GROSPIRON M.F., Types de pédagogie du français et différenciation sociale des résultats. L'exemple du travail autonome de deuxième cycle long. in *Etudes de linguistique appliquée* n° 54. Avril-Juin 1984.

JAVAL E., Physiologie de la lecture et de l'écriture. Paris, Retz 1978 (1ère ed. 1905, Paris, Alcan).

Evaluation des compétences en lecture

DE LANDSHEERE G., Le test de Closure,. Paris, Nathan-Bruxelles, Labor.1973.

RICHAUDEAU F., GAUQUELIN M. et F., La lecture rapide, Paris CEPL 1966 Bruxelles Marabout 1969.

SPRENGER-CHAROLLES et al., Recherches en didactique du français langue maternelle, Paris INRP 1985.

STOLL F., Evaluation de trois types d'exercices de lecture rapide, in *Le travail humain* Volume 37, n° 2 1974, pp. 249-262.

REFLEXIONS ET EXPERIENCES SUR L'INTRODUCTION DES NOMBRES NEGATIFS

L.HEFENDEHL - HEBEKER

L'histoire des mathématiques montre qu'il s'est passé plusieurs siècles avant que les nombres négatifs soient non seulement reconnus comme un outil indispensable mais aussi philosophiquement acceptés. Il y avait à cela des difficultés de sens sous-jacentes à une compréhension des nombres, selon laquelle le concept de nombre était subordonné à celui de grandeur. Comment représenter des grandeurs qui sont moins que rien ? On a cherché en vain un modèle concret homogène qui explique de façon satisfaisante toutes les opérations de calcul avec les négatifs.

Au début du 19ème siècle il s'est produit un changement de point de vue fondamental. Pouvant se caractériser comme passage du point de vue concret à un point de vue formel, il a conduit à une interprétation correcte des nombres négatifs. Ce changement, commencé avec M. Ohm et G. Peacock, a trouvé son point d'aboutissement chez H. Hankel. Il consiste à fonder le modèle expliquant les négatifs sur un élargissement du domaine des nombres dans le cadre d'une arithmétique formelle, indépendamment de toute considération de contenu comme la quantité ou la grandeur.

L'idée directrice en a été le principe de la permanence des lois formelles. Les opérations de l'arithmétique formelle doivent être définies de telle manière que les opérations de l'arithmétique ordinaire (et par suite celles de l'arithmétique des nombres naturels) y apparaissent comme des cas particuliers. Cette compatibilité formelle règle le conflit entre la signification intuitive et la construction abstraite, de la manière suivante :

— Les nouveaux objets de l'arithmétique formelle, comme par exemple les négatifs ou les complexes, sont de nature purement intellectuelle. Ce sont des "choses pensées" (Hankel) auxquels peuvent correspondre, ou non, des objets réels.

— Ces nouveaux objets ne sont d'aucune manière coupés de toute signification relative à un contenu, au contraire. Avec le domaine élargi des nombres, s'ouvre un espace plus large, d'interprétation et d'utilisation. Si aucun moyen incontestable n'avait été obtenu auparavant pour dégager les nombres négatifs de la lecture des phénomènes, on peut désormais les introduire dans des domaines variés avec un plus grand succès, et, par exemple, les reconnaître en physique comme un moyen économique de description.

Les élèves doivent aussi accomplir ce passage du point de vue concret au point de vue formel, pour l'acquisition des nombres négatifs. Des recherches didactiques ont souligné que, pour cela, ils devaient franchir des obstacles intellectuels analogues à ceux rencontrés dans l'histoire des mathématiques. Pour une didactique des nombres négatifs deux questions surgissent alors :

(1) Jusqu'où un contenu intuitif lié à des données observables donne-t-il accès aux nombres négatifs, conformément au principe didactique selon lequel on va "de l'intuition au concept" c'est-à-dire "du concret au général"?

(2) Le point de vue formel peut-il être développé de façon continue à partir du concret ou un moment de rupture doit-il nécessairement être introduit dans le processus d'apprentissage ? Comment doit-on organiser la situation conduisant à ce saut si une construction formelle d'extension au sens mathématique ne peut pas être exigée des élèves ?

De nombreux modèles didactiques ont été proposés pour l'introduction des nombres négatifs, par exemple celui des flèches. Ceci utilise le fait que le corps des rationels est isomorphe à un espace vectoriel de dimension 1. Mais de tels modèles ne peuvent échapper à la difficulté suivante : certes on peut repérer la structure algébrique dans le modèle, si on possède déjà le point de vue théorique; mais à l'inverse peut-on dégager cette structure à partir du modèle ?

Einführung der negativen Zahlen

A la suite de pré-expériences qui nous ont conduit à cette approche du problème, nous avons entrepris une nouvelle expérience d'enseignement pour introduire les nombres négatifs. Elle s'est déroulée selon les étapes suivantes :

(1) Révision préparatoire des nombres et de leur signification. Une reprise des acquisitions arithmétiques antérieures doit faciliter la thématisation explicite du changement de point de vue nécessaire.

(2) Démarrage : compter en descendant en dessous de zéro; compter dans les deux sens sur la droite numérique Le comptage a été utilisé comme une technique introductive fondamentale et a servi pour s'orienter dans l'ensemble linéairement ordonné des nombres relatifs. Il a été mis en relation avec les opérations d'addition et de soustraction naïvement comprises.

(3) Les nombres positifs et négatifs en situation d'utilisation. A cette étape on a discutré de l'utilisation des nombres négatifs dans des situations pratiques (thermomètres, niveaux, bilans)

(4) Addition et soustraction des nombres rationnels. Cette étape a été la plus difficile ; elle exigeait l'abandon du point de vue naïf et une première familiarisation avec le point de vue formel. A l'aide d'une séquence de problème typiques, des règles de calcul possibles ont été un moment discutées, alors les règles "officiellement valables" ont été révélées par l'enseignante. A l'aide d'un modèle de plaquettes, elles ont été représentées; des séquences de problèmes, destinés à faire apparaître la permanence des lois formelles, ont été proposés pour renforcer la confiance dans leur pertinence.

(5) Multiplication et division des nombres rationels. La procédure coûteuse concernant l'addition/soustraction a tellement ancré la compréhension de l'aspect formel de l'arithmétique que la multiplication s'est trouvée très vite acquise à l'aide d'une table et que la division l'a été plus rapidement encore comme l'opération inverse correspondante.

ÜBERLEGUNGEN UND ERFAHRUNGEN ZUR EINFÜHRUNG DER NEGATIVEN ZAHLEN

L. HEFENDEHL-HEBEKER

A fundamental step in the history of negative numbers was the transition from the concrete to the formal point of view.
By this step, the last resistance to negative numbers, wich resulted from a concrete-based thinking, was conquered.
Pupils as well have to achieve the step from concrete-based thinking to a formal point of view and to grasp the negative numbers as autonomous mental objetcts. The fundamental didactical problem is how to support this transition. The present paper deals with this problem and especially discusses the role of didactical models and a teaching experience within this context.

1. DIE EINFÜHRUNG DER NEGATIVEN ZAHLEN ALS DIDAKTISCHES PROBLEM

1.1 Zur Entwicklungsgeschichte der negativen Zahlen : geistige Hindernisse und ihre Überwindung

Für die Wissenschaft Mathematik sind die negativen Zahlen heute kein Problem mehr. Mit der Methode der Einbettung einer Halbgruppe in eine Gruppe lassen sie sich in eleganter Weise konstruktiv aus der Menge der natürlichen Zahlen gewinnen. Diese Methode gehört zu den Grundtechniken der modernen Algebra. Mit ihrer Hilfe läßt sich auch ein weiterer Schritt im Aufbau des Zahlensystems vollziehen: die Erweiterung des Ringes der ganzen Zahlen zum Körper der rationalen Zahlen. Die praktisch-rechnerische Beherrschung der "relativen Zahlen" und sachgerechter Einsatz in Anwendungssituationen sind auf Hochschulniveau zur selbstverständlichen Routine geworden.

©Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
3 (1990) (p.78-102) IREM de Strasbourg

Jedoch ist seit dem ersten Auftauchen der negativen Zahlen in der Mathematikgeschichte mehr als ein halbes Jahrtausend vergangen, bis dieses Stadium der begrifflichen Durchdringung erreicht war und die negativen Zahlen in einem umfassenden Zahlensystem einen wohlbestimmten Platz zugewiesen bekamen. Welchen Entwicklungsprozeß die negativen Zahlen dabei durchgemacht haben und welche geistigen Hindernisse zu überwinden waren, hat Glaeser (1981) eindrücklich geschildert (vgl. auch Freudenthal 1983 und 1989). Ich möchte einige Aspekte dieser Entwicklung kurz skizzieren, sofern sie für die nachfolgenden didaktischen Überlegungen von Bedeutung sind (s. auch Tropfke 1980).

Erstmals in der Mathematikgeschichte treten negative Zahlen um das 2. Jh. n. Chr. in dem chinesischen Werk "Neun Bücher über die Kunst der Mathematik" auf, und zwar im Zusammenhang mit Sachproblemen, die auf Systeme linearer Gleichungen führen. Diophant formulierte die Rechenregel "Minus mal minus ergibt plus, plus mal minus ergibt minus." Dabei dachte er jedoch an die Ausrechnung von Ausdrücken der Form $(a-b) \cdot (c-d)$ mit abzuziehenden positiven Zahlen und nicht an echte negative Zahlen. Negative Gleichungslösungen sah er als unstatthaft an.

Spätestens im 15. Jahrhundert tauchten dann auch negative Zahlen sozusagen als "reine Zahlen" in formalen Rechnungen auf. Cardano arbeitete schließlich unbedenklich mit negativen Gleichungslösungen.

Seit Beginn des 17. Jahrhunderts setzte sich die Anerkennung der negativen Zahlen durch - zuerst zaghaft, dann immer entschiedener. Ihre Bewährung lag auf der Hand: sie ermöglichten es, das Lösen von Gleichungen in allgemeingültiger Weise zu schematisieren.

Diophant betrachtete noch fünf verschiedene Typen von quadratischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten und behandelte sie getrennt:

$$
\begin{aligned}
ax^2 &= bx \\
ax^2 &= b \\
ax^2 + bx &= c \\
ax^2 + c &= bx \\
ax^2 &= bx + c
\end{aligned}
$$

Werden auch negative Koeffizienten zugelassen, so kann man alle diese fünf Typen zu einer einzigen Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ zusammenfassen.

Die Rechenregeln ermöglichen es, Diophants verschiedene Lösungsverfahren zu einem Lösungsschema zu vereinheitlichen. Dieses liefert insbesondere die ursprünglich allein interessierenden positiven Lösungen der verschiedenen Gleichungstypen. (vgl. H.-H. 1989).

Folgenreich erwies sich die Einführung der negativen Zahlen im Laufe der Zeit auch in der Geometrie. Es wurde möglich, geometrische Figuren in einem von Problem und Figur unabhängigen Koordinatensystem in allgemeingültiger Weise durch algebraische Ausdrücke zu beschreiben. Jedoch versuchte Descartes, der den Grundstein für den Einsatz analytischer Methoden in der Geometrie legte, die negativen Zahlen als "racines fausses" noch zu vermeiden und Aufgabenstellungen so umzuformulieren, daß sie positive Lösungen bekamen.

Jedenfalls werden in der Algebra seit dem 17. Jh. negative Zahlen allgemein benutzt.

> "Ihre Deutung bleibt aber lange problematisch. Was soll man sich unter Größen vorstellen, die *weniger sind als nichts*? Die Deutung als Schulden ist ja nur für einen eng begrenzten Problemkreis brauchbar. In der Geometrie lassen sich positive und negative Zahlen als entgegengesetzt gerichtete Strecken auffassen." (Tropfke 1980, S. 148)

Dieses Zitat enthält im Kern alle Schwierigkeiten, die dafür verantwortlich waren, daß die begriffliche Einordnung der negativen Zahlen noch bis ins 19. Jahrhundert hinter ihrer formalen rechnerischen Beherrschung zurückblieb. Glaeser (1981) diagnostiziert "große Inseln des Unverständnisses" (de larges îlots d'incompréhension) und beschreibt einen Komplex von sechs prinzipiellen Schwierigkeiten, mit denen Mathematiker und Denker zu verschiedenen Zeiten immer wieder gekämpft haben.

1 Die Unfähigkeit, isolierte negative Größen rechnerisch zu handhaben
  Diese z.B. bei Diophant vorhandene Schwierigkeit ist die einzige, die vom 17. Jahrhundert an generell überwunden war.
2 Die Schwierigkeit, isolierten negativen Größen einen Sinn zu verleihen. So schreibt noch d'Alembert in der 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts in dem Artikel "Négatif" der Enzyklopädie von Diderot:

> "Es gibt also in einem wirklichen und absoluten Sinn keine isolierte negative Größe, -3, abstrakt genommen, vermittelt dem Geist keine Idee; aber wenn ich

> sage, daß ein Mann einem anderen -3 Taler gegeben hat, so heißt das in verständlicher Sprache, daß er ihm 3 Taler abgenommen hat."

3 Die Schwierigkeit, die Vorstellung einer einheitlichen Zahlengeraden auszubilden. Man beharrte auf der qualitativen Differenz zwischen den negativen und den positiven Quantitäten und visualisierte diese mit Hilfe zweier entgegengesetzt gerichteter Halbgeraden. Man begriff also die positiven und negativen Zahlen nicht einheitlich als "relative Zahlen".

4 Die Doppelgesichtigkeit der Null. Entsprechend der Orientierung an gegensätzlichen Größenvorstellungen verstand man die Null lange Zeit als *absolute Null*, unterhalb derer man sich nichts mehr vorstellen konnte. Der Übergang zur *Null als Ursprung*, den man beliebig auf einer orientierten Achse eintragen konnte, mußte erst noch vollzogen werden. Symptomatisch für diese Schwierigkeit und ihren Konflikt mit den formalen Rechenregeln ist ein Ausspruch aus den "Gedanken" von Pascal:

> "Ich kenne Leute, die nicht begreifen können, daß Null übrigbleibt, wenn man von Null Vier wegnimmt."

5 Das Verhaftetsein im Stadium der konkreten Operationen. Man versuchte, den Zahlen und ihren Rechenoperationen irgendwie einen konkreten Sinn zu verleihen. Dieses Bestreben äußert sich auch in dem o.g. Zitat von d'Alembert.

6. Die Suche nach einem einheitlichen konkreten Modell, das alle Rechenoperationen zufriedenstellend erklärt. Die Deutungskraft des beliebten Guthaben - Schulden - Modells ist jedoch auf die Addition und Subtraktion beschränkt, und man muß bei der Deutung von Gleichungen wie (-5) - (-7) = +2 bereits zu Idealisierungen oder Kunstgriffen übergehen (vgl. H.-H. 1988). Spätestens jedoch für die Begründung der Minus-minus-Regel der Multiplikation, die besagt, daß das Produkt zweier negativer Zahlen negativ ist, muß man auf formale Argumente zurückgreifen.

Bei diesen Schwierigkeiten handelt es sich zumeist um Facetten eines übergeordneten Hauptproblems: man blieb dem aristotelischen Zahlverständnis treu, wonach der Zahlbegriff dem Größenbegriff untergeordnet ist. Größen sind aber von Natur aus an die Vorstellung von etwas Positivem gebunden (vgl. hierzu Schubring 1986).

Einführung der negativen Zahlen

Erst im 19. Jahrhundert vollzog sich ein grundlegender Sichtwechsel, der das lange Ringen um eine angemessene Deutung der negativen Zahlen beendete. Es entwickelte sich der Begriff *Erweiterung des Zahlensystems* als Leitgedanke für das Verständnis insbesondere der negativen und komplexen Zahlen. Dabei vollzog sich in der Deutung der Zahlen der Übergang vom konkreten zum formalen Standpunkt.

Dieser Sichtwechsel wurde von den Mathematikern Martin Ohm und George Peacock angebahnt und von Hermann Hankel in seinem Werk "Theorie der complexen Zahlensysteme" (1867) zur Vollendung geführt. Wie Hankel im Vorwort programmatisch darlegt, "kann der Begriff der Zahl rein formal und ohne Rücksicht auf den der Größe gefaßt werden; letzterer tritt nur hinzu als anschauliches Substrat jener Formen."

Ausgehend von den positiven ganzen Zahlen, die er auch die absoluten Zahlen nennt, gelangt Hankel durch sukzessive formale Erweiterungsschritte zu immer umfassenderen Zahlensystemen bis hin zu den Quaternionen. Als grundlegendes heuristisches Hilfsmittel dient ihm dabei das Prinzip der Permanenz formaler Gesetze. Seine Vorgehensweise und die Bedeutung des Permanenzprinzips möchte ich anhand der Einführung der negativen Zahlen kurz skizzieren.

Hankel geht aus von den absoluten Zahlen. Ihre Verwendung als Ordinal- bzw. Kardinalzahlen ermöglicht es, die Rechenoperationen und ihre grundlegende Gesetze anschaulich zu begründen. Zu diesen gehören das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz der Addition und Multiplikation, das Distributivgesetz, die Neutralität der 1 bezüglich der Multiplikation sowie die Eindeutigkeit der Umkehroperationen, soweit letztere ausführbar sind.

Dieses System von Gesetzen reicht bereits aus, um aus ihnen alle weiteren Folgerungen über das Rechnen mit positiven ganzen Zahlen formal abzuleiten, ohne daß man dabei auf reale Bedeutungen der Zahlen und ihrer Rechenoperationen explizit zurückgreifen müßte. Umgekehrt ist dieses System daher auch ausreichend, um die Rechenoperationen formal zu definieren und das System der absoluten Zahlen durch iterierte Addition der Einheit zu erzeugen. Die Zahl 0 wird hinzugenommen als Symbol, das stets der Bedingung $a+0=a$ genügt.

Einführung der negativen Zahlen

Die Differenz zweier Zahlen c und b definiert Hankel formal so: c - b sei diejenige Zahl, welche der Gleichung

$$(c - b) + b = c$$

genügt. Nun ist für den Fall, daß b größer als c ist, innerhalb der positiven Zahlen die Subtraktion c-b unmöglich.

> "Nichts hindert uns jedoch, daß wir in diesem Falle die Differenz c-b als ein *Zeichen* ansehen, welches die Aufgabe löst und mit welchem genau so zu operieren ist, als wenn es eine numerische Zahl aus der Reihe 1,2,3,... wäre." (Hankel, a.a.O.)

Hankel zeigt, daß es genügt, sich auf Zeichen der Form 0-a oder kurz -a zu beschränken. Auf diese Weise führt er neue negative Zahlen ein. Mit der Zahlenmenge muß nun auch der Zahlbegriff erweitert werden. So stellt Hankel den "actuellen", in der Anschauung konstruierbaren Zahlen die "rein intellectuellen", "mentalen" oder "formalen" Zahlen gegenüber. Letztere sind "Ausdruck gewisser formaler Beziehungen beliebiger Objekte zueinander."

So wird das jahrhundertelang verfolgte Bestreben, das Rechnen mit negativen Zahlen anhand konkreter Modelle zu begründen, aufgegeben:

> "Die Bedingung zur Aufstellung einer allgemeinen Arithmetik ist daher eine von aller Anschauung losgelöste, rein intellectuelle Mathematik, in welcher nicht Quanta oder ihre Bilder ... verknüpft werden, sondern intellectuelle Objekte, Gedankendinge, denen actuelle Objecte oder Relationen entsprechen können aber nicht müssen." (Hankel, a.a.O.)

Dennoch soll diese "rein intellectuelle Mathematik" nicht einzig der Forderung nach logischer Widerspruchsfreiheit als einer Grundbedingung jeglicher Mathematik genügen und darüberhinaus willkürlich gestaltet werden dürfen. Vielmehr sollen die Operationen der formalen Arithmetik so definiert werden, daß sie die Operationen der gewöhnlichen Arithmetik als Spezialfälle oder Exempla enthalten, genauer: daß "die formalen Operationen, auf actuelle Zahlen angewandt, dieselben Resultate geben, als die anschaulichen

Operationen der gemeinen Arithmetik." Dann müssen aber die Gesetze der formalen Arithmetik mit denen der gemeinen Arithmetik verträglich sein.

Deshalb sollen möglichst viele von den grundlegenden Gesetzen der gemeinen Arithmetik bei formalen Zahlbereichserweiterungen erhalten bleiben; zumindest aber dürfen die Gesetze der formalen Arithmetik denen der gemeinen Arithmetik nicht widersprechen. In diesem Sinne ist die Erweiterung von den komplexen Zahlen zu den Quaternionen, bei der die Kommutativität der Multiplikation aufgegeben werden muß, zulässig; nicht zulässig wäre es dagegen, explizit ein antikommutatives Gesetz

$$a \cdot b = -(b \cdot a)$$

zu fordern, weil eine solche Formel im Bereich der natürlichen Zahlen nicht nur nicht allgemeingültig sondern falsch ist. Die gemeine Arithmetik muß in diesem Sinne in die formale Arithmetik eingebettet sein. Das ist der Kerngedanke des Prinzips der Permanenz formaler Gesetze.

Die methodische Bedeutung dieses Prinzips bedingt seine heuristische Verwendung. Man rechnet mit den neuen Zahlen, als ob bestimmte Rechengesetze weiterhin gültig wären, und erschließt somit notwendige Bedingungen für die Definition der Rechenoperationen im erweiterten Bereich. Hat man beispielsweise zwei negative ganze Zahlen -a und -b, so gelten per definitionem die Gleichungen

$$-a + a = 0$$

$$-b + b = 0$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit b und die zweite mit -a und rechnet, als ob das Kommutativgesetz der Multiplikation, das Distributivgesetz und die Regel $0 \cdot x = 0$ weiterhin gültig wären, so erhält man

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = 0$$

$$(-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b = 0$$

Dann muß man aber aufgrund der Definitionsgleichung für negative Zahlen die bekannten Vorzeichenregeln folgern:

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Freudenthal (1983) hat diese Vorgehensweise ausführlich erläutert.

Die Rechenregeln sind hiermit keineswegs bewiesen. Sie sind aufgrund von Annahmen, in deren Auswahl man prinzipiell frei ist, nahegelegt. Es muß anschließend gezeigt werden, daß eine durch diese Regeln definierte Multiplikation ganzer Zahlen tatsächlich die Multiplikation natürlicher Zahlen im oben geforderten Sinne fortsetzt.

Somit haben Hankel und seine Vorkämpfer die fruchtlose Suche nach zwingend erklärenden Modellen aufgegeben und im Rahmen einer formalen Mathematik Zahlbereiche unabhängig von inhaltlichen Fundierungen wie Anzahl oder Größe erweitert. Damit waren die erweiterten Zahlbereiche aber keineswegs von inhaltlichen Bedeutungen abgehoben, im Gegenteil: es eröffnete sich ein breiter Interpretations- und Anwendungsspielraum. War es zuvor nicht gelungen, die relativen Zahlen und ihre Struktur in unstrittiger Weise aus Phänomenen abzulesen, so konnte man sie nun mit um so größerem Erfolg in vielfältige Bereiche hineinlesen:

- Die Einführung des Vektorbegriffes ermöglichte das Rechnen mit gerichteten Strecken, und man erkannte im eindimensionalen Raum der geometrischen Vektoren ein Modell für die rationalen bzw. reellen Zahlen.

- In der Physik wurde es sinnvoll, von negativen Spannungen, Geschwindigkeiten, Kräften ... zu reden. Man erhält hiermit hilfreiche Beschreibungsmittel und vereinfachte rechnerische Zugänge.

Dabei ist es erstaunlich, wie sich Gewohnheiten, die wir aus der Anwendung positiver Zahlen kennen, durchhalten lassen:

- Werden für einen Term, der eine im ersten Quadranten eines Koordinatensystems verlaufende Halbgerade beschreibt, auch negative Einsetzungen zugelassen, so wird damit die Fortsetzung der Halbgeraden zu einer Geraden erfaßt. Weil sich die negativen Zahlen in dieser Weise in der Geometrie bewähren, spricht Freudenthal (1983; 1989) vom geometrisch-algebraischen Permanenzprinzip.

- Der Höhenunterschied zwischen zwei Orten kann bei Einbeziehung negativer Höhenangaben weiterhin durch Subtraktion ermittelt werden.

- Die Mitte eines Intervalls kann überall auf der Zahlengeraden nach dem formalen Verfahren der Mittelbildung berechnet werden.

Man kann sogar Probleme, die nur im Bereich der positiven Zahlen sinnvoll sind und auch nur positive Lösungen haben, unter Einbeziehung negativer Zahlen schneller und effektiver lösen. Ein einfaches Beispiel hierfür liefert die folgende Geometrie-Aufgabe (Kirsch 1987):

> "Ein Quadrat wird durch Anlegen eines 8 cm^2 großen Rechtecks zu einem Rechteck von 6 cm Länge. Welche Seitenlängen hat das Quadrat (und das angelegte Rechteck)?"

Die beiden Lösungen 2 und 4 lassen sich durch Probieren ermitteln. Eine systematische Lösung der quadratischen Gleichung $\mathbf{x^2 - 6x + 8 = 0}$ setzt aber bereits die Multiplikation negativer Zahlen voraus.

Der Aufbau des Zahlensystems nach der Leitlinie des Permanenzprinzips führt also zu einer Vielzahl an Passungen. Deshalb betont M. Wagenschein (1988), daß die Rechenregeln für negative Zahlen zwar Erfindungen sind, aber es sind solche, "die sich anpassen." Und E. Schuberth fügt erläuternd hinzu:

> "Es gibt auch in der Mathematik Freiheitsmomente. Wir können uns für das eine oder das andere entscheiden. Der Hinweis auf das Permanenzprinzip (oder anderes) ist kein l o g i s c h e s Argument. Wir haben die Freiheit, uns zum einen oder anderen zu entscheiden. In den Folgen sind wir aber nicht mehr frei. Wir erzeugen Harmonie, indem wir den einen Fall (daß minus mal minus plus ist) wählen. Zugleich schließen wir uns damit den Entscheidungen anderer Menschen in der Vergangenheit und Gegenwart an."

1.2. Empirische Befunde

Neuere empirische Untersuchungen bestätigen, daß Schüler/innen beim Umgang mit negativen Zahlen ähnliche geistige Hürden überwinden müssen, wie sie in der Geschichte der negativen Zahlen aufgetreten sind. D. Coquin-Viennot (1985) und G. Malle (1987, 1989) haben jeweils eine Reihe von aufeinanderfolgenden Stadien bei der Aneignung der negativen Zahlen nachgewiesen. Trotz unterschiedlicher Nuancierungen dieser beiden Untersuchungen zeigt sich die folgende gemeinsame Grundlinie.

Die negativen Zahlen werden zunächst wie positive Zahlen behandelt und erscheinen als positive Zahlen in bestimmten Interpretationen, nicht aber als eigenständige Denkobjekte. Sie werden verwendet, um Gegensätze auszudrücken, z.B. Guthaben-Schulden, über Null - unter Null. Solche Deutungen orientieren sich an Größenvorstellungen und können durch Schreibweisen wie +5, -5 ausgedrückt werden. Entsprechend diesem Verständnis werden die negativen Zahlen spiegelbildlich zu den positiven angeordnet. Vermeintlich gilt die Beziehung $-5 < -7$, weil 5 DM Schulden weniger sind als 7 DM Schulden.

Deshalb müssen Vorstellungen ausgebildet werden, die die positiven und negativen Zahlen in einer linear geordneten Mengen von "relativen Zahlen" vereinigt. Erst dann kann in elementar zugänglichen Aufgaben wie -10°C + 5°C = -5°C oder -10 DM - 5 DM = -15 DM die Addition oder Subtraktion einheitlich als Vermehren bzw. Vermindern gedeutet werden; in der Spiegelbildanordnung dagegen erscheinen diese Beispiele als Verminderung der Unter-Null-Temperatur bzw. als Erhöhung der Schulden.

Erst im letzten Stadium, das nicht von allen Schüler/innen erreicht wird, bildet sich ein theoretisches Verständnis der negativen Zahlen heraus. Hier bekommen im Alltagsverständnis kaum verwendete Schreibweisen wie $2 - (-5) = 7$ einen Sinn, hier wird auch Einsicht in den definitorischen Charakter der Rechenoperationen gewonnen.

In diesem Lernprozeß verflechten sich ständig unterschiedliche schulische, gesellschaftliche und allgemein menschliche Erfahrungsbereiche. Alte und neue Regeln mischen sich mit Vorwissen und konkreten Vorstellungen, inhaltliche Bedeutungen mit formalen Umformungsprozeduren. Somit bietet das Thema eine verwirrende Vielfalt von Aspekten.

Dabei wählen nur erfolgreiche Schüler/innen instinktiv passend aus, weniger erfolgreiche greifen daneben. (Andelfinger 1985)

1.3 Grundfragen einer Didaktik der negativen Zahlen

Bei der Einführung der negativen Zahlen stellt sich zum ersten Mal im Arithmetikunterricht unumgänglich die Notwendigkeit des Übergangs vom konkreten zum formalen Standpunkt.

In der Grundschule steht die Arithmetik in enger Verbindung zu inhaltlichen Vorstellungen. Zahlen und Rechenoperationen werden durch Abstraktion aus Handlungen an konkreten Gegenständen gewonnen, das Rechnen wird aus Handlungswissen entwickelt und durch dieses Wissen inhaltlich gestützt.

Zahlen haben mit Anzahlen, Ordnungen, Größen zu tun. Addieren stellt sich das als Weiterzählen, Hinzufügen, Vermehren; Subtraktion erscheint dementsprechend als Zurückzählen, Wegnehmen, Vermindern und wird schließlich auch im Sinne des Ergänzens bzw. der Unterschiedsbestimmung gedeutet. Multiplikation ist Mehrfach-Nehmen, Division Einteilen und Messen. Auch bei der Bruchrechnung verwendet man noch ein Angebot an inhaltlichen Interpretationen, die Anhalt an der realen Umwelt haben und durch Alltagswissen gestützt werden (vgl. H.-H. 1988 und 1989b). Jedoch stehen hier bereits Uminterpretationen gegenüber dem Vorwissen an: die Multiplikation mit einem Bruch muß als Anteil-Bildung gedeutet werden und kann eine Verkleinerung bewirken, dementsprechend kann man mit Hilfe der Division entgegen aller ganzzahligen Gewohnheit beliebige Vergrößerungen erzielen.

Vom Standpunkt des konkreten, auf inhaltliche Sinngebungen gerichteten Denkens scheint sich bei negativen Zahlen die Welt endgültig auf den Kopf zu stellen: hier kann die betragsgrößere Zahl plötzlich die kleinere sein, hier kann Addition Verringerung und Subtraktion Vermehrung bedeuten, von den Regeln der Multiplikation relativer Zahlen ganz zu schweigen. Dennoch sind die Regelungen sinnvoll (vgl. hierzu 1.1.), und die bisherigen Vorstellungen über die Rechenoperationen mit positiven Zahlen können als Spezialfälle fortbestehen (vgl. Winter 1989).

Dann stellt sich aber grundsätzlich die Frage, ob sich die relativen Zahlen überhaupt von anschaulich-inhaltlichen Sinngebungen her erschließen lassen, getreu den didaktischen Grundsätzen "von der Anschauung zum Begriff" und "vom Konkreten zum Allgemeinen". Die Geschichte der Mathematik hat dies nicht vermocht. Nun wäre es aber denkbar, daß nach dem Sichtwechsel, der durch Hankel und seine Vorgänger vollzogen wurde, wirksamere didaktische Aufbereitungen möglich werden, weil nun die Struktur der relativen Zahlen geeignet in konkrete Situationen hineingelesen werden kann. Dies ist das Problem der didaktischen Modelle, dem ich nachfolgend einen eigenen Abschnitt widmen möchte.

Und weiter: Läßt sich überhaupt in irgendeiner Weise der formale Standpunkt kontinuierlich aus dem konkreten entwickelten (Coquin-Viennot 1985 bestreitet das) oder ist zwangsläufig eine Unstetigkeitsstelle im Lernprozeß zu überspringen? Wie will man dann den Anstoß zu diesem Sprung geben, wenn eine formale Erweiterungskonstruktion im Sinne der Hochschulmathematik für die angegebene Schulstufe zu anspruchsvoll ist?

1.4. Das Dilemma der didaktischen Modelle

Didaktische Modelle sind "in sich logisch-schlüssige Denkgebäude, die ein bestimmtes Lehrplan-Thema methodisch geschickt aufbereiten." (Andelfinger 1985).

Zur Einführung der negativen Zahlen sind zahlreiche solche Modelle entwickelt worden. Deren Verwendung birgt ein Dilemma, das mit der in 1.2. formulierten Grundsatzfrage zusammenhängt. Ich möchte dieses an zwei Modellen für die additive Struktur der relativen Zahlen, nämlich dem Guthaben-Schulden-Modell und dem sogenannten Pfeilmodell erläutern.

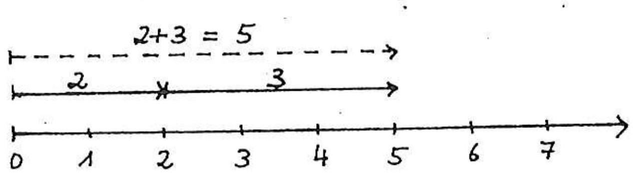
Das Guthaben-Schulden-Modell liefert wirksame Stützen zum Verständnis von Aufgaben des Typs $-5 + 7 = 2$ oder $8 - 12 = -4$. Es handelt sich hierbei um die Addition/Subtraktion einer positiven Zahl von/zu einer beliebigen ganzen bzw. rationalen Zahl. Jedoch sind bereits zur Erklärung von Gleichungen wie $(-5) - (-7) = 2$ Kunstgriffe erforderlich, denn normalerweise wird durch das Erlassen von Schulden kein Guthaben geschaffen. Der kommerzielle Erfahrungsbereich muß also bereits mit theoretischen Augen betrachtet und passend zur algebraischen Struktur interpretiert werden, obwohl er eigentlich die Ausbildung eines theoretischen Standpunktes erst motivieren soll. Anders formuliert:

> "Die zugerichtete Erfahrung muß zur Erklärung des neuen Begriffes herhalten. Als Deformation ihrerseits erklärungsbedürftig muß sie als Erklärung dienen, - ein klassischer Zirkel. ... Ich kann die algebraische Struktur ... hineinsehen, aber ich kann sie nicht zwingend daraus *ableiten*. Die Voraussetzung für das So-sehen ist eine Definition, eine theoretische Grundlage; ich brauche eine Theorie, *um so sehen* zu können." (Bauersfeld 1983)

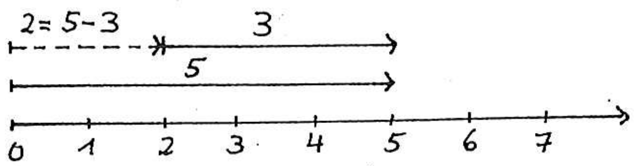
Das Pfeilmodell bewegt sich ganz im mathematischen Kontext und macht Gebrauch von der Tatsache, daß der Körper der rationalen (bzw. reellen) Zahlen isomorph zu einem eindimensionalen geometrischen Vektorraum ist. Deshalb lassen sich Zahlen als Vektoren darstellen; der Betrag bestimmt die Länge, das Vorzeichnen die Richtung.

Die Addition und Subtraktion positiver Zahlen läßt sich im Pfeilmodell mit Hilfe der "Fuß-an-Spitze-Regel" bzw. der "Spitze-an-Spitze-Regel" darstellen. Diese Regeln bauen auf der Vorstellung des Aneinanderlegens bzw. Abschneidens von Strecken auf. Für ihre Verwendung zwei Beispiele:

(1) $2+3=5$:

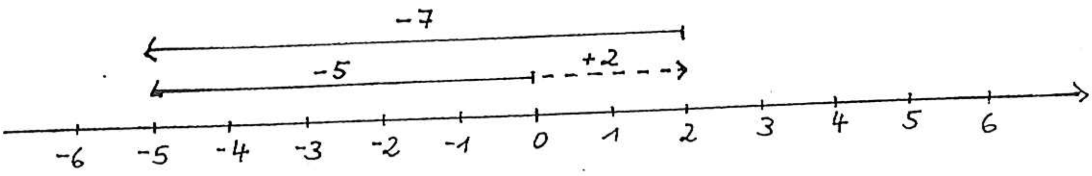


(2) $5-3=2$:



Der Hinzunahme negativer Zahlen entspricht die Hinzunahme linksgerichteter Pfeile. Die Erarbeitung der additiven Struktur des erweiterten Zahlbereichs setzt nun in der Modellebene an. Dort trifft man die Entscheidung, die Verknüpfungsregeln für Rechtspfeile auf die gesamte Pfeilmenge zu übertragen; an dieser Stelle ist das definitorische Moment versteckt. Daraufhin erhält man Darstellungen wie die folgende:

$(-5) - (-7) = + 2$:



Die am geometrischen Modell gewonnenen Beobachtungen werden nun innerarithmetisch betrachtet und zu Verknüpfungsregeln für Zahlen zusammengefaßt.

Auch hier besteht die Notwendigkeit, die Problemebene und die Modellebene und die Isomorphie zwischen beiden gleichzeitig zu erarbeiten. Zu dieser ohnehin komplexen Anforderung stellt sich wiederum die Frage: Zwar kann ich, wenn ich den theoretischen Standpunkt bereits besitze, die algebraische Struktur in das Modell hineinsehen; kann ich sie aber umgekehrt auch zwingend aus dem Modell ablesen? Meine Erfahrungen mit dem Modell zeigen überdies, daß die geometrische Einkleidung der Gleichung $(-5) -(-7) = 2$ deren Fremdheit nicht mindert. Einer elementaren, auf allgemein menschlichen Erfahrungen beruhenden Sinnerwartung zufolge müßten die drei Minuszeichen auf der linken Seite ein "besonders negatives" Ergebnis bewirken.

Aus diesen Überlegungen resultiert die zusammenfassende These: Didaktische Aufbereitungen, die einen Erfahrungsbereich von einer theoretischen Perspektive her strukturieren, führen die Schüler/innen nicht zwangsläufig zu dieser Perspektive hin.

2. Ein Unterrichtsversuch zur Einführung der negativen Zahlen

Nach einer Reihe von Vorerfahrungen, deren Aufarbeitung zu den Überlegungen in 1. führten, habe ich im Herbst 1988 das Unterrichtsthema "negative Zahlen" erneut in einer siebten Gymnasialklasse unterrichtet. Darüber möchte ich in diesem Abschnitt berichten.[1)]

2.1 Vorentscheidungen

Die Analysen in 1. und weitere didaktische Überlegungen geben Anlaß zu Hypothesen, die die Vorentscheidungen für die Planung folgendermaßen bestimmt haben:

(1) Aufbereitung der bisherigen Lerngeschichte

Da die negativen Zahlen einen Sichtwechsel in der arithmetischen Lerngeschichte eines Schülers/ einer Schülerin erforderlich machen, sollte man diesen Sichtwechsel auch explizit thematisieren. Dazu könnte es nützlich sein, die bisherige Lerngeschichte in Form einer Wiederholung über Zahlen aufzuarbeiten.

(2) Das Zählen als einführende Grundtechnik

Die Grundschuldidaktik besinnt sich wieder zunehmend auf die Bedeutung des Zählens als grundlegende Handlung für den Zahlerwerb (vgl. Padberg 1986). Das Vorwärts- und Rückwärtszählen könnte auch eine nützliche einführende Übung zur Orientierung in der linear geordneten Menge der relativen Zahlen sein. Diese Aktivität knüpft vermutlich an elementare Bewegungs- und Richtungsschemata an.

G. Malle (1987, 1989) vermutet aufgrund empirischer Studien, daß die betreffende Jahrgangsstufe solche Schemata mitbringt und zur Lösung einfacher Aufgaben wie $-7 + 12 = 5$ einsetzt.

(3) Zum Verhältnis zwischen Arithmetik und Anwendungssituationen

Sowohl die Begriffsgeschichte der negativen Zahlen wie auch die Anlaysen zu den didaktischen Modellen scheinen dafür zu sprechen, die negativen Zahlen zunächst im arithmetischen Kontext zu erarbeiten und erst dann ihre Verwendung in Anwendungssituationen zu thematisieren. Kurz: anschließende Interpretation statt versuchter hinführender Ableitung.

---

1) *Der Unterrichtsversuch wurde durch eine Sachbeihilfe der Deutschen Forschungsgesellschaft unterstützt.*

(4) Zur Erarbeitung der Rechenoperationen

Seit Hankel erfolgt die kanonische Erarbeitung der Rechenregeln für ganze bzw. rationale Zahlen im arithmetischen Kontext nach dem Permanenzprinzip. Eine exakte Herleitung im Sinne dieser Zahlbereichserweiterungsidee ist jedoch sehr anspruchsvoll. Sie ist aufgrund des heuristisch-hypothetischen Charakters logisch schwierig und strapaziert zudem die Geduld der Schüler/innen, die häufig zunächst einmal nur wissen wollen, wie "es geht". Deshalb kann es im Zweifelsfall ehrlicher sein, im Unterricht zunächst die Rechenregeln zu verraten und dann zu untersuchen, warum diese sich bewähren. Am Ende sollte die Einsicht stehen, die Wagenschein sinngemäß so formuliert hat: Es handelt sich um Setzungen, aber um solche, die sich anpassen.

(5) Zur Rolle des Permanenzprinzips

Gemäß (4) wird darum das Permanenzprinzip nicht nur zu heurististischen Zwecken eingesetzt. Ebensogut können auch Permanenzphänomene und "Passungen" (s.1.1) zur nachträglichen Rechtfertigung der Rechenoperationen studiert werden.

2.2 Erfahrungen

Abschließend soll über den Verlauf des Unterrichtsversuches und dabei gewonnene Erfahrungen zusammenfassend berichtet werden. Detaillierte Erkenntnisse über den Verlauf der Interaktion und der Lernprozesse soll eine interpretative Mikroanalyse der Unterrichtstranskripte erbringen. Diese ist jedoch noch nicht abgeschlossen.

a) Vorbereitende Wiederholung über Zahlen und ihre Bedeutung (2 Stunden)

Gemäß der Vorentscheidung (1) wird die Einführung der negativen Zahlen durch Reflexion der bisherigen Zahlenwelt vorbereitet. Dies geschieht unter der Zielvorgabe: "Wir stellen uns vor, wir müßten ein Rechenbuch für das erste Schuljahr planen. Welche Zahlen sollen wir behandeln und was sollen wir über diese Zahlen sagen?" Durch diese Rollendistanzierung möchte ich eine freiere Atmospäre schaffen und den Eindruck einer Prüfungssituation vermeiden.

Anhand von Beispielen erarbeiten wir Verwendungsarten von natürlichen Zahlen (z.B. als Anzahlen, Ordnungszahlen oder Maßzahlen) sowie Bedeutungen der Anordnung und der Grundrechenarten, Zusammenhänge zwischen den Grundrechenarten, Rechengesetze. Zur Unterstützung der Reflexion teile ich in der ersten Stunde ein Grundschullehrbuch, in der zweiten ein Arbeitsblatt mit bildlichen Darstellungen zur Multiplikation und Division aus.

Die Schüler/innen argumentieren auffallend oft mit Äpfeln. Das Zählen von Äpfeln scheint für sie ein primärer Bereich der Bedeutung von Zahlen und des Rechnens zu sein. Zum Beispiel heiß es:

$5 < 8$ bedeutet: 5 Äpfel sind weniger als 8 Äpfel

$4 + 2 = 6$ bedeutet: 4 Äpfel und 2 Äpfel zusammenzählen.

Andere Deutungen der Rechenarten, die mir im Blick auf die weitere Unterrichtsplanung wichtig sind, muß ich durch Impulse hervorrufen, z.B. die Addition als Weiterzählen, die Subtraktion als Zurückzählen.

Die Bruchzahlen werden in dieser Phase nur kurz gestreift. Die Reaktionen auf meinen Versuch, die Rechentechniken zu hinterfragen, lassen schwankenden Boden ahnen.

b) Einstieg: Zurückzählen unter Null; Vorwärts- und Rückwärtszählen an der Zahlengeraden (2 Stunden)

Diese Phase wird durch Vorentscheidung (2) bestimmt. Die Schüler/innen wissen längst, daß es negative Zahlen gibt. Sie kennzeichnen sie als "Zahlen unter Null". Wir brauchen nur vorhandenes Wissen zusammenzutragen und unter Hinzunahme einiger Fachbegriffe zu strukturieren und zu festigen.

Wir zählen zunächst in Einerschritten unter Null zurück und bezeichnen die entstehenden Zahlen als negative ganze Zahlen. Wir ordnen die ganzen Zahlen auf einer Zahlengeraden an. Diese zeichnen wir gleich in zwei Ausfertigungen: horizontal und vertikal. In die "Lücken" tragen wir auch Bruchzahlen ein. Wir besprechen die Symmetrie der Zahlengerade und machen an der "Aufwärtsrichtung" die Kleinerrelation fest. Dabei thematisieren wir auch, daß im Bereich der negativen Zahlen die festgesetzte Anordnung entgegengesetzt zur Anordnung der Beträge verläuft.

Die anschließende Übungsphase ist dem Vorwärts- und Rückwärtszählen auf der Zahlengeraden gewidmet. Aufgaben wie

von -8 um 22 aufwärtszählen

von +10 um 15 aufwärtszählen

notieren wir anfangs in der Schreibweise

$-8 \xrightarrow{+22}$, $+10 \xrightarrow{-15}$

Diesen Aufgabentyp variieren wir, indem wir die Leerstelle auch bei der Ausgangszahl oder der Schrittzahl ansetzen. Solange es sich um überschaubare ganze Zahlen handelt, tauchen keine Schwierigkeiten auf, und es besteht kein Bedürfnis nach Regelformulierung.

Schließlich vereinfachen wir die Schreibweisen zu - 8 +22 bzw. +10 -15. Das paßt zu der Gewohnheit, das Vorwärts- und Rückwärtszählen als Addition bzw. Subtraktion aufzufassen. Diese Prozedur muß ich ausdrücklich veranlassen. Die Schüler/innen wären zum Teil lieber bei der einleuchtenden Pfeilschreibweise geblieben.

Die Hinzunahme von Dezimalbrüchen und, noch schwieriger, gewöhnlichen Brüchen, erfordert dann aber Zusatzüberlegungen. Zur Lösung der Aufgabe +27,64 -32,97 biete ich Hilfsfragen an. Wie weit ist es bis zur Null und wieviel fehlt dann noch? Nicola formuliert es plastischer: "Man muß ausrechnen, wieviel das Minus mehr ist als das Plus."

c) Positive und negative Zahlen in Verwendungssituationen (2 Stunden)

In dieser Stunde reflektieren wird anhand eines Arbeitsblattes die Verwendung negativer Zahlen in Sachsituationen (Thermometer, geographische Höhen, Bilanzen einer Firma, eine Graphik zur Bevölkerungsbewegung). Wir deuten die Anordnung sachbezogen und erörtern Sprechweisen wie:

- Der Mehrverbrauch von Heizöl betrug -12,6%.
- Die Bevölkerungsbewegung in Mittelfranken ergab ein Saldo von -2297.

Abschließend machen wir Rechenübungen, z.B.:

- Ein Bankkonto weist 82,-- DM Guthaben aus, 100,-- DM werden bar abgehoben. Später trifft eine Gutschrift über 43,-- DM ein.

Inzwischen verfügen wir über Additions- bzw. Subtraktionsaufgaben, bei denen das erste Glied und das "Ergebnis" beliebige rationale Zahlen sind, das zweite Glied aber eine positive Zahl ist. Ich werde diese Aufgaben künftig *einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben* nennen.

> "Von einer *Addition* oder *Subtraktion negativer Zahlen* ist hierbei - wie in den genannten Anwendungssituationen - noch nicht die Rede. Erst mit *ihrer* Einführung wird die naive, allein mit dem gesunden Menschenverstand zu bewältigende Stufe des Umgangs mit den negativen Zahlen verlassen." (Kirsch 1973)

Zwei Schüler initiieren selbst das Verlassen der naiven Stufe, indem sie nach der Lösung von Aufgaben der Art 3 - (-14) fragen. Man scheint allgemein überzeugt zu sein, daß solche Rechnungen möglich sind. Mike gibt dafür eine interessante Begründung: "Denn sonst bringen die Zahlen ja nichts." Vielleicht empfindet er, daß die negativen Zahlen bisher im Sinne von G. Malle hauptsächlich als positive Zahlen in bestimmten Interpretationen verwendet wurden und wartet nun auf das eigentliche Neue.

d) Addition und Subtraktion rationaler Zahlen (7 Stunden)

Diese Phase des Unterrichtes beansprucht besonders viel Zeit und ist im Nachhinein gesehen die Schwierigste. Denn hier muß insbesondere eine erste Gewöhnung an formale Sichtweisen erfolgen. Ich verfahre im Sinne der Vorentscheidungen (3) und (4). Insbesondere initiiere ich keine konkretisierenden Argumente (etwa über Guthaben und Schulden), lasse solche aber zu, wenn sie von den Schülerinnen und Schülern selbst kommen.

In den ersten beiden Stunden erarbeiten wir die Rechenregeln zur Addition und Subtraktion. Dazu lege ich je ein Aufgabenblatt mit einer Aufgabenserie vor. Aus Symmetriegründen sind hier auch positive Zahlen konsequent mit Vorzeichen geschrieben, z.B.

(+3) + (-7). Es muß offen bleiben, ob damit formale Übersichtlichkeit oder zusätzliche Verwirrung geschaffen wird.

Ich lasse jeweils über mögliche Aufgabenlösungen diskutieren. Dabei kommen vielfältige Vorstellungen zutage:

- Matthias zeigt ansatzweise ein Gefühl für die Permanenz arithmetischer Grundregeln, wenn er die Zahlensätze (-3) + 0 = -3 und 0 + (-22) = -22 so begründet: "Wenn man von Null was draufzählt oder Null dazuzählt, dann bleibt es gleich."

- Nico kämpft indessen mit dem vierten von Glaeser nachgewiesenen Hindernis (s. 1.1). Er plädiert nämlich dafür, daß (+3) + (-3) = +3 gilt, "weil wenn man (+3) + 0 macht, dann kommt ja auch +3 heraus, und -3 ist ja noch weniger als Null." Ich signalisiere Nico, daß viele Menschen ähnlich gedacht haben wie er.

- Insgesamt zeigt sich, wie verwirrend dieses *doppelgesichtige Rechnen* (Andelfinger 1985) ist. Zum Beispiel veranschlagt Matthias für (-3) + (-7) das Ergebnis +4, weil "-7 von -3 abgezogen wird." Hier werden die Bedeutungen von Vorzeichen und Rechenzeichen vermischt, obwohl wir sie ausführlich thematisiert haben.

Diese Diskussionsphase schneide ich jeweils nach einiger Zeit ab, und verrate, welcher Rechenweg sich unter Fachleuten durchgesetzt hat. Diesen gebe ich vor, indem ich den Schüler/innen zeige, wie man eine "doppelgesichtige Aufgabe" in eine einfache Aufgabe umformt:

$$(+5) + (-7) = +5 - 7 = -2$$

$$(-7) - (-3) = -7 + 3 = -4$$

Bei der Addition wird die Umformungsanweisung schnell akzeptiert, zumal Jens sie engagiert mit dem Schuldenmodell erläutert, bei der Subtraktion erzeugt sie zunächst Irritationen. Nicola formuliert schließlich eine aus ihrer Sicht völlig berechtigte Sinnfrage. Wozu betrachtet man denn diese aufwendigen Schreibweisen, wenn man sie am Ende doch auf die einfacheren zurückführt? Hier zeigt Jens, der auch die Frage nach der Lösung von 3 - (-14) gestellt hatte, wiederum Ansätze zu einem fortgeschrittenen Standpunkt. Er weiß, daß man die doppelgesichtige Schreibweise benötigt, um arithmetische Ausgangsprobleme zu formulieren.

Während der anschließenden Rechenübungen erkennen wir auch Regeln über das Umwandeln von Plus- in Minusaufgaben und umgekehrt. Irgendwann stellt ein Schüler die naheliegende Frage: Wozu braucht man das alles?

Darauf reagiere ich mit zwei verschiedenen Maßnahmen. Zunächst stellen wir ganzzahlige Additions- und Subtraktionsaufgaben im Plättchenmodell dar (dieses wird in der didaktischen Literatur auch zuweilen durch das Stichwort "Killermethode" charakterisiert). Wir verwenden schwarze und rote Spielsteine zur Darstellung von Plus- und Minuspunkten, und es wird vereinbart, daß je ein Pluspunkt und ein Minuspunkt zusammen den Wert Null haben. In diesem Modell kann man das ursprüngliche Verständnis der Addition und Subtraktion als Hinzufügen und Wegnehmen beibehalten, wenn man den Kunstgriff der geeigneten Ergänzung nullwertiger Punktepaare einbezieht.

Schließlich bearbeiten wir ein Aufgabenblatt mit folgenden Aufgabentypen:

(1) Permanenzreihen, also Aufgabenserien wie die folgenden, (+3) - (+2) =; (+3) - (+1) =; (+3) - 0 =; (+3) - (-1) =... Dazu formulieren wir die Beobachtung: Regelmäßig gebaute Aufgabenreihen haben regelmäßige Ergebnisse.

(2) Aufgabenserien, die exemplarisch belegen, daß das Kommutativgesetz weiterhin gilt und daß die Subtraktion Probe zur Addition bleibt.

(3) Die Rechtecksaufgabe aus 1.1 (dort am Schluß).

Die ersten beiden Aufgabentypen zeigen den Schüler/innen offenbar in einleuchtender Weise, daß sich die neuen Rechenregeln besser an arithmetische Gewohnheiten anpassen, als es ursprünglich den Anschein hatte. Das verläuft im Sinne von Vorentscheidung (5). Zu Aufgabe (3) ermitteln wir die beiden Lösungen 2 und 4 durch Probieren. Es ist der Klasse leicht einsichtig zu machen, daß solche probierenden Verfahren bei komplizierteren Zahlen aussichtslos werden. Als Ausblick teile ich mit, daß der erweiterte Zahlbereich es ermöglicht, solche Aufgaben durch ein einfaches systematisches Rechenverfahren zu lösen. Auf Wunsch führe ich die Lösung der Aufgabe vor.

e) Multiplikation und Division rationaler Zahlen (2 Stunden)

Inzwischen sind einige Schüler/innen neugierig geworden, ob für die Multiplikation und Division analoge Umformungsregeln von doppelgesichtigen in einfache Aufgaben existieren. Die letzten beiden Grundrechenarten machen keine Mühe mehr. Die Anstrengung um die additive Struktur scheint einen Trainingseffekt hinterlassen zu haben.

Die Multiplikation erarbeiten wir anhand einer Tabelle :

·	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
+5	-25	-20	-15	-10	-5	0	+5	+10	+15	+20	+25
+4	-20	-16	-12	-8	-4	0	+4	+8	+12	+16	+20
+3	-15	-12	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9	+12	+15
+2	-10	-8	-6	-4	-2	0	+2	+4	+6	+8	+10
+1	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	+5	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4	-5
-2	+10	+8	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6	-8	-10
-3	+15	+12	+9	+6	+3	0	-3	-6	-9	-12	-15
-4	+20	+16	+12	+8	+4	0	-4	-8	-12	-16	-20
-5	+25	+20	+15	+10	+5	0	-5	-10	-15	-20	-25

Zu Beginn sind nur die Zahlen am linken und oberen Rand eingetragen; das innere Feld ist leer. Der Deutlichkeit halber werden die positiven Zahlen schwarz, die negativen rot geschrieben. In der Überzeugung, daß die Null ihre bekannte Rolle bei der Multiplikation behält, tragen wir zunächst das "Nullerkreuz" ein. Dann füllen wir das rechte obere Feld mit schwarzen Zahlen. Dabei brauchen wir nur das kleine Einmaleins anzuwenden.

Wir folgen einem Schülervotum und nehmen uns als nächstes das linke obere Feld vor. Die Ergebnisse scheinen klar zu sein: $5 \cdot (-3) = -15$. Eine von allen akzeptierte Begründung lautet: Wenn man fünfmal drei Minuspunkte bekommt, so hat man 15 Minuspunkte. Hierbei scheint das Plättchenmodell nachzuwirken. Für das rechte untere Feld wird wie selbstverständlich das Kommutativgesetz beansprucht. Ein naives Verständnis für das Permanenzprinzip deutet sich darin an.

Die Regelmäßigkeiten der Tabelle, unterstützt durch die Farbengebung, sind nun so prägnant, daß für das linke untere Feld kein Zweifel mehr besteht. Wir füllen es einfach nach den angelegten formalen Gesetzmäßigkeiten aus und gestehen uns ein, daß uns keine inhaltlichen Vorstellungen zur Begründung einfallen.

Die Rechenregeln sind einfach zu formulieren. Die Klasse scheint nun überzeugt zu sein, daß für die Division analoge Regeln gelten müssen. Deshalb erarbeiten wir die Division sozusagen im Handstreich. Die mühsame Prozedur um die Addition/Subtraktion hat offenbar das Verständnis für die formale Seite der Arithmetik gestärkt.

f) Rechenübungen zur Festigung (2 Stunden)

In dem vereinbarten Zeitrahmen verbleiben nur noch zwei Stunden, um den Kalkül zu festigen. Eine interessante Episode soll aus dieser Phase noch festgehalten werden.

Eine Aufgabe aus dem Lehrbuch sieht vor, daß der Termwert von $(x-1)^2$ für die ganzen Zahlen von -5 bis +5 berechnet wird. Einige Schüler/innen bezweifeln die Richtigkeit der Ergebnisse, weil sie keine "regelmäßige" Reihe (sprich: keine arithmetische Progression) bilden. Die im Kontext von d) formulierte Charakterisierung der Permanenzreihen hat sich als erfreulich einprägsam erwiesen, jedoch zugleich eine nicht beabsichtigte (wenngleich verständliche) Bedeutungseinengung erfahren.

2.3 Schluß

Der vorgesehene zeitliche Rahmen ist damit ausgeschöpft. Es bestätigt sich erneut die Erfahrung vieler Lehrer/innen, daß die von den Lehrplänen veranschlagte Zeit nicht ausreicht, um die negativen Zahlen erschöpfend zu behandeln. Gern hätte ich noch einige Passungen thematisiert, um zu zeigen, in welchem Sinne unsere Zahlenwelt die beste aller möglichen ist. Insbesondere hätte ich gern die Bewährung der negativen Zahlen in der Geometrie besprochen. Doch das muß ein Langzeitprogramm bleiben.

Literatur:

Alembert, Jean (d'): Artikel Négatif der *Enzyklopädie*

Andelfinger, B. (1985): Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen. Soest: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung

Bauersfeld, H. (1983): Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: Bauersfeld, H. u.a.: *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln* II. Köln: Aulis (IDM-Band 6).

Coquin-Viennot, D. (1985): Complexité mathématique et ordre d'acquistition: une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6, n^{o} 2-3, 133-192.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht.

Freudenthal, H. (1989): Einführung der negativen Zahlen nach dem geometrisch-algebraischen Permanenzprinzip. *mathmatiklehren* 35, 26-37.

Glaeser, G. (1981): Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 2, No 3, 303-346.

Hankel, H. (1867): *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen.* Leipzig.

Hefendehl-Hebeker, L. (1988): "... das muß man doch auch noch anders erklären können!" Protokoll über einen didaktischen Lernprozeß. *MU* 34, H.2, 4-18.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989a): Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion. Geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. mathematiklehren 35, 6-12.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989b): Erfahrungen mit den negativen Zahlen im Gymnasium. mathematiklehren 35, 48-58.

Kirsch, A. (1973): Die Einführung der negativen Zahlen mittels additiver Operatoren. *MU* 19 (1973), H.1, 5-39.

Kirsch, A. (1987): *Mathematik wirklich verstehen. Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen. Köln*: 1987.

Malle, G. (1988): Die Entstehung neuer Denkgegenstände - untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In: Dörfler, W. und Fischer, R. (Hrsg.): *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung*. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 16, Wien 1988, 259-319.

Malle, G. (1989): Die Entstehung negativer Zahlen als eigene Denkgegenstände. *mathematiklehren* 35, 14-17.

Padberg, F. (1986): *Didaktik der Arithmetik*. Zürich.

Schubring, G. (1986): Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *"petit x"*, No 12, 5-32.

Tropfke, J. (1980): Geschichte der Elementarmathematik 4th Ed., Vol. 1: *Arithmetik und Algebra*. Berlin-New York.

Wagenschein, M./Schuberth, E./Buck, P. (1988) : Minus mal minus. *Forum Pädagogik* 2/1988, 56-61.

Winter, H. (1989): Da ist weniger mehr - die verdrehte Welt der negativen Zahlen. *mathematiklehren* 35, 22-25.

POURQUOI LES ELEVES ASIATIQUES SURCLASSENT-ILS LES AMERICAINS (EN MATHS) ?

J.P. FISCHER

Recent studies show large cross-cultural differences in mathematics achievement as early as first grade of school. Asian children (Japan, Taiwan, and Korea) surpass their American counterparts. The author reviews the findings, analyses the factors, and draws some conclusions for numerical cognition and learning.

La comparaison internationale de Husén (1967) avait déjà, entre autres, mis en évidence, une supériorité des élèves japonais sur leurs homologues américains en mathématiques. Mais cette comparaison portait exclusivement sur des élèves du secondaire, à deux niveaux de la scolarité: le premier à l'âge de 13 ans, le deuxième à la fin des études secondaires.

Des comparaisons récentes portant essentiellement sur l'école primaire complètent et étendent l'étude de Husén. L'issue de ces comparaisons - à savoir la supériorité asiatique - était certes suggérée, mais non impliquée, par l'étude de Husén. En outre, et surtout, une étude portant sur l'école primaire présente, pour la comparaison Japon-E.-U., l'avantage d'éviter le dédoublement du système scolaire dû aux *juku*.(1)

En effet, les *juku* , dont les publicités tapageuses couvrent les murs des villes, constituent un réseau parallèle et parasitaire. Or les *juku* , qui devaient, en principe, préparer aux examens d'entrée à l'université, concernent beaucoup plus le secondaire que le primaire, même s'ils ont étendu leur influence jusqu'à la dernière année de cette dernière(2). On a pu estimer ainsi que, dans certaines villes, 80% des élèves de la dernière classe du primaire allaient dans un *juku* (Leclercq, 1984).

(1) On désigne sous ce terme, qui signifie littéralement lieu pour apprendre, des centres où sont donnés des cours supplémentaires de préparation aux examens. A Taiwan, les *buxiban* pourraient jouer un rôle analogue aux *juku* japonais.

(2) Au Japon l'école primaire s'étend sur 6 ans. L'âge d'entrée des élèves, à savoir 6 ans, est à peu près le même dans tous les pays comparés dans cet article (sauf en Suède).

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
3(1990) (p.103-141) IREM de Strasbourg

En conséquence, et dans la mesure où les *juku* usent de méthodes pédagogiques visant avant tout la réussite immédiate aux examens, nous évitons aussi en grande partie l'opposition qualitative bien connue: imitation de modèles, mémorisation de connaissances, etc... du côté japonais, spontanéité, créativité, compréhension des connaissances, etc... du côté américain. Une telle opposition semble en effet beaucoup mieux s'appliquer à l'école secondaire (collèges et surtout lycées) qu'à l'école primaire. Par exemple, à propos de l'école primaire japonaise, Leclercq (p. 56) écrit:

« Il est fréquent que l'école primaire soit bien un lieu d'épanouissement de la personnalité de l'enfant grâce à une pédagogie qui laisse libre cours à la vitalité et à la fantaisie du jeune âge en réduisant au minimum les contraintes de la discipline. La place faite dans les programmes à l'éducation musicale et artistique contribue largement à instaurer l'ambiance détendue dans laquelle les enfants semblent apprendre avec plaisir et sans contrainte excessive. On peut aussi souvent constater qu'est respectée la démarche pédagogique pour entraîner les moins bons avec les meilleurs et éviter les redoublements de classe. »

Enfin, un autre avantage de l'école primaire provient du fait que les sujets qui y sont traités sont plus élémentaires. Il en résulte en effet que les processus cognitifs impliqués devraient être plus simples et mieux connus chez les plus jeunes élèves. D'éventuelles différences cognitives seront donc plus faciles à détecter et à analyser dans le primaire que dans le secondaire. D'ailleurs Husén étudiait surtout des variables générales comme l'âge d'entrée à l'école, le nombre d'élèves par classe, le sexe, etc ...

Pour ce qui concerne ces éventuelles différences, nous interpréterons assez longuement (partie 3 de l'article) la seule différence authentiquement cognitive que nous croyons avoir repérée dans la littérature examinée. Mais au préalable (partie 2) nous décrirons plusieurs recherches qui ont étudié des causes spécifiques possibles de cette supériorité asiatique.

Mais venons-en maintenant (partie 1) aux preuves de la supériorité elles-mêmes. En effet, cette supériorité ne manque pas de soulever certaines questions intrigantes. Par exemple, pourquoi les Etats-Unis, qui ont incontestablement plus de psychologues titulaires d'un doctorat (et dont une bonne partie s'intéresse à l'éducation: cf. Rosenzweig & Sinha, 1988) que tout le reste du monde, voient-ils leurs élèves surclassés par les "petits" coréens, chinois ou japonais ?

1. LES PREUVES DE LA SUPERIORITE ASIATIQUE

Dans la présentation du livre édité par Stevenson, Azuma et Hakuta (1986), le critique de la revue *Science* - l'une des deux revues scientifiques multidisciplinaires les plus diffusées au monde - souligne que les élèves japonais **surpassent à un degré impressionnant** leurs homologues américains en mathématiques. Bien qu'il ne fasse aucune réserve d'ordre méthodologique, nous voudrions préciser la supériorité asiatique dans cette première partie. Non seulement quantitativement, mais aussi qualitativement: Quels tests a-t-on utilisés ? Quels élèves a-t-on interrogés ? En effet, sa netteté et sa généralité conditionnent la suite de cette contribution puisque, si elles s'avéraient fragiles ou restreintes, les analyses causales de la partie 2 et, a fortiori, nos interprétations plus théoriques de la partie 3, seraient beaucoup moins justifiées.

1.1. La recherche principale

La recherche principale qui a mis en évidence la supériorité asiatique en mathématiques dès l'école primaire est décrite le plus complètement dans Stigler, Lee, Lucker et Stevenson (1982). Cette recherche est aussi résumée dans - ou sert de point de départ à - plusieurs autres articles de Stevenson et de ses collaborateurs. En fait, ce que nous appelons ici recherche principale n'est qu'une partie d'un projet plus vaste qui portait d'ailleurs essentiellement sur la lecture. Mais comme c'est en mathématiques que les résultats - à savoir les déficiences des élèves américains principalement - ont été les plus nets, les mathématiques ont davantage retenu l'attention des chercheurs et des revues. Nous ne détaillons ici que la comparaison en mathématiques en 1ère et 5ème année, mais nous ferons néanmoins référence aux résultats en maternelle[(1)], ainsi qu'à ceux sur le langage pour, précisément, souligner les contrastes avec ceux de mathématiques.

La population expérimentale. La population testée est constituée par 480 élèves chinois de Taipei (Taiwan), 480 élèves japonais de Sendai (Japon) et 480 élèves de Minneapolis (Etats-Unis). Pour chaque pays, les 240 x 2 élèves proviennent de deux niveaux scolai-

(1) Nous utiliserons, dans tout ce texte, l'appellation française *maternelle,* plutôt que la traduction *jardin d'enfants* du terme anglais *Kindergarten.*

res: les 1ère et 5ème année de l'école primaire. Les 240 élèves d'un même pays et du même niveau scolaire proviennent de 20 classes, elles-mêmes issues de 10 (13 aux E.-U.) écoles différentes et implantées dans les villes concernées.
Ces dernières ont été choisies, entre autres, parce qu'elles étaient de taille comparable. Dans chacune des 20 classes, 12 élèves ont été retenus pour être soumis au test: 4 forts, 4 moyens et 4 faibles, les filles et les garçons étant représentés de manière égale. Précisons aussi que les élèves en difficulté, qui sont dans des écoles spécialisées aux Etats-Unis, ont été éliminés au Japon et et à Taiwan sur la base d'un test spécifique.

La construction du test. A cause des biais culturels, dont les auteurs de la recherche avaient tout à fait conscience, l'élaboration du test a fait l'objet d'attentions particulières. Dans chacune des villes, la collection de manuels la plus répandue a été sélectionnée pour repérer, à une 1/2 année près, les moments d'introduction des différents concepts et habiletés qui constituent le programme de l'enseignement primaire. Cette analyse a, secondairement, fait apparaître que les programmes japonais étaient plus avancés que les programmes américains, mais que ces derniers étaient eux-mêmes, quoique moins nettement, plus avancés que ceux de Taiwan. Ceci est à retenir pour la suite. Après cette analyse comparative des manuels scolaires, 70 items ont été retenus pour le test. En général, ces items concernent bien entendu des concepts et habiletés introduits dans les trois pays, mais 8 items font cependant exception car ils portent sur des sujets qui ne sont introduits que dans deux des trois pays. Les 70 items ont alors été rangés d'après l'ordre moyen (moyenne des trois, ou éventuellement deux, pays) d'introduction scolaire des sujets sur lesquels ils portent. L'item correspondant au sujet le plus précocément introduit porte le numéro 1, celui correspondant au sujet le plus tardivement introduit le numéro 70.

Les items. Donnons d'abord quelques exemples d'items.
Item 16: 17 - 4 =
Item 19: Il y avait 9 maisons dans une rangée. La maison de Suzanne était la 3 à partir de la gauche. Laquelle était-elle à partir de la droite ?
Item 21: 8 - 6 + 7 =
Item 47: 102,9 + 56 =

Bien que la méthode de construction du test n'exclue nullement la géométrie ou la mesure, le choix de nos exemples suggère - et un commentaire de Stevenson, Lee et Stigler (1986) ne fait que renforcer ce point de vue[(1)] - que la partie numérique a été prépondérante dans le test.
Mais un autre exemple d'item dans lequel on représente un pavé rectangulaire rempli avec 3x3x2 cubes-unités et pour lequel il faut préciser le nombre de cubes-unités, montre que la géométrie, ou la mesure, n'était pas totalement absente. De plus, comme la partie numérique constitue de loin la partie la plus importante des programmes primaires, il ne semble pas que le manque de généralité soit un point à retenir dans la discussion des résultats de cette recherche principale. D'ailleurs, Stigler (1988) signale l'existence de résultats non encore publiés montrant une supériorité japonaise dans à peu près tous les domaines reliés aux mathématiques: problèmes originaux, estimation, visualisation, calcul mental complexe, connaissances conceptuelles à propos des mathématiques, etc ...

La passation. La passation est suffisamment originale, et intéressante en elle-même, pour être décrite avec quelque précision. Les élèves qui ont été soumis individuellement au test, environ 6 mois après le début de l'année scolaire, se sont vu proposer en premier l'item n°1 en 1ère année, et l'item n°35 en 5ème année avec, à ce dernier niveau de la scolarité, une possibilité de retour à des items antérieurs en cas d'échec initial aux items 35 à 38. Les items étaient ensuite proposés par ordre croissant, et le test arrêté en cas d'échec à 4 items consécutifs. Le score d'un élève est le numéro du dernier item qu'il a réussi[(1)].

Les résultats. La comparaison filles-garçons n'ayant pas conduit à des différences significatives, et l'écart-type des scores ne semblant rien révéler de particulier non plus, nous rapportons simplement, dans le tableau 1 de la page suivante, les moyennes en fonction du pays et du niveau de la scolarité.

(1) Pour décrire les 70 items, Stevenson, Lee et Stigler (p. 693) précisent que : « Certains items ne nécessitaient que du calcul, alors que d'autres nécessitaient l'application de principes mathématiques à des problèmes-histoires »(*story problems*).
(1) L'attribution du score n'est pas claire: Stigler et al. (1982, p.320) parlent du nombre total d'items qu'a "passés" l'élève. En outre, la procédure d'arrêt du test rapportée dans Stevenson, Lee et Stigler (1986 p.693) n'est pas la bonne (Stigler, communication personnelle). Nous rapportons ici la procédure d'arrêt (correcte) décrite dans Stigler et al.

Pourquoi les élèves asiatiques surclassent-ils les américains ?

pays / année	Etat-Unis	Taiwan	Japon
1ère	17,1	21,2	20,1
5ème	44,4	50,8	53,3

Tableau 1: Comparaison des scores moyens dans les 3 pays
(d'après Stevenson, Lee & Stigler, 1986 table 1 p.695)

Le résultat le plus net qui apparaît sur ce tableau est que les E.-U. sont derrière les deux autres pays. En effet, tant en 1ère qu'en 5ème année, les élèves américains ont le score moyen le plus faible, alors que la première place revient une fois à Taiwan et une fois au Japon.

La différence entre pays est hautement significative pour chacun des deux niveaux de la scolarité ($p<.001$). De plus, et surtout, les scores des élèves américains sont significativement inférieurs à ceux des élèves taiwanais et à ceux des élèves japonais ($p<.01$). Stevenson, Lee et Stigler ont aussi analysé ces scores en respectant la structure classe. Bien entendu, la supériorité asiatique se retrouve aussi dans les représentations graphiques qui résultent de cette analyse (voir p.694). Mais ce qui est surtout frappant dans cette analyse, et apparaît le mieux sur la figure présentée dans Stevenson et al. (1986, p.205), c'est le contraste Japon-E.-U. en 5ème année: toutes les 20 classes japonaises se situent au-dessus des classes américaines, i.e. la classe japonaise la plus "médiocre" a été plus performante que la classe américaine la plus "brillante" !

Quelques observations complémentaires. En maternelle, les enfants américains se sont déjà montrés inférieurs (en mathématiques) aux japonais, mais se situent à la hauteur des enfants taiwanais.

Egalement, le graphique incluant les maternelles suggère que la supériorité asiatique augmente avec le niveau scolaire (Stevenson, Lee et Stigler, p.694).

Enfin, notons que les résultats sont en accord avec un constat de Husén (1967), à savoir qu'un faible effectif de classe ne conduit pas à des performances supérieures. En effet, le nombre moyen d'élèves par classe a été, dans la présente recherche, de 47 à Taiwan et de 39 au Japon, contre seulement 21 aux E.-U.

1.2. Les études complémentaires

1.2.1. Extension aux Coréens

Song et Ginsburg (1987) ont étendu la comparaison à un troisième pays asiatique: la Corée (du Sud). Ils ont utilisé un test standard - le TEMA (Test of Early Mathematical Ability) - mesurant à la fois les pensées mathématiques formelle et informelle. Le test de Stigler et al. (1982), nous l'avons souligné, n'est pas purement numérique; en revanche, celui de Song et Ginsburg, semble bien l'être. En effet, les items proposés à des enfants ou élèves de 4 à 8 ans, étaient: grandeur relative (des nombres), comptage et calcul, pour les mathématiques informelles; connaissances conventionnelles (lecture et écriture des nombres), faits numériques (addition, soustraction et multiplication), calculs écrits (addition et soustraction), concepts de base dix, pour les mathématiques formelles.

Outre ce manque de généralité, la construction de l'échantillon des 315 sujets coréens testés soulève également quelques réserves: alors que les 538 sujets américains qui leur sont comparés, ainsi que les 67+68 enfants coréens de 4 et 5 ans, sont à peu près représentatifs du paysage socio-économique de leur pays respectif, les 60+60+60 élèves coréens de 6, 7 et 8 ans, sont plutôt défavorisés sur le plan socio-économique. Cependant, comme ce biais éventuel n'a guère pu qu'atténuer le résultat principal (néanmoins significatif) obtenu, cela n'est pas trop gênant.

Les items du TEMA ont été administrés par ordre (présumé) de difficulté croissante. En conséquence, une procédure d'arrêt du test analogue à celle de Stigler et al. (1982) a pu être appliquée. Le score d'un élève est alors, pour cette épreuve, le nombre d'items qu'il a réussi.

Les résultats, pour les élèves de 7 et 8 ans confirment tout à fait la supériorité asiatique trouvée par Stigler et al. au niveau de la 1ère (et de la 5ème) année: les élèves coréens ont été significativement supérieurs aux américains ($p<.01$ pour le moins). Par contre, au niveau des 4, 5 et 6 ans, soit il n'y a pas de différence significative (mathématiques formelles), soit il y a une supériorité américaine (mathématiques informelles). Ceci affine incontestablement l'observation de la non-différence entre enfants américains et taiwanais, au niveau de la maternelle, trouvée par Stigler et al. De manière générale, le pattern de résultats trouvé attire l'attention sur le fait que c'est pour les mathématiques typiquement scolaires que l'on trouve une supériorité coréenne. Il étend par là l'observation que les élèves (et non les enfants) asiatiques sont supérieurs à leurs homologues américains aux premières années d'école. Certes, la "démonstration" de Song et Ginsburg ne concerne que le domaine numérique, mais, d'une part et encore une fois, celui-ci est prépondérant dans les premiers apprentissages scolaires, d'autre part et surtout, Song et Ginsburg ont pris soin de contrôler que ce ne sont pas exclusivement les connaissances mécaniques (tables de multiplication par exemple) qui sont la source de cette supériorité.

Une autre recherche (Miura, Kim, Chang & Okamoto, 1988) permet d'illustrer la supériorité coréenne en 1ère année d'école, mais concerne plus généralement les 3 pays asiatiques ici en question.
Cette recherche porte sur la représentation des nombres et inclut un test beaucoup plus ponctuel que le TEMA de Song et Ginsburg. Ceci, avec le fait que les enfants testés sont plutôt de milieu favorisé, explique peut-être la divergence, au niveau des plus jeunes enfants, avec les résultats de Song et Ginsburg.
Miura et al. ont comparé des Coréens de 1ère année et de maternelle[1], à des élèves taiwanais, japonais, et américains de 1ère année. Ils demandaient à leurs jeunes sujets de construire les nombres 11, 13, 28, 30 et 42. Pour ce faire, les élèves avaient des cubes-unités et des barres de dix unités à leur disposition. Après une première construction, l'expérimentateur incitait l'élève à en trouver une autre, essentiellement différente.
S'intéressant à la représentation des nombres, Miura et al. insistent surtout, dans la présentation des résultats, sur la différence de stratégie: les élèves américains privilégient les constructions avec exclusivement des cubes-unités (ce qui correspond à une représentation du nombre par comptage un par un), alors que les asiatiques de 1ère année privilégient les représentations par groupes, canoniques le plus souvent (par exemple, pour 42, 4 barres et 2 cubes-unités) ou non (par exemple, pour 42, 3 barres et 12 cubes-unités).
Mais pour la comparaison de performances entre pays, ce sont les réussites elles-mêmes qu'il nous faut regarder. Si l'on définit une réussite (complète) à ce test comme la construction de deux collections essentiellement différentes pour chacun des 5 nombres proposés, les résultats montrent alors des réussites coréennes très nettement supérieures aux

(1) La présence d'un groupe maternelle d'enfants coréens s'explique en partie par le fait que, au moment de l'expérience, les élèves coréens de 1ère année étaient légèrement et en moyenne plus âgés que les élèves de 1ère année qui leur sont comparés (à cause de l'année scolaire coréenne qui commence en mars).

réussites américaines. En effet, 98% (39 sur 40) des élèves coréens de 1ère année ont réussi le test, contre seulement 13% (3 sur 24) des américains, les chinois (76%) et japonais (79%) se situant à des places intermédiaires mais avec des pourcentages quand même plus proches de ceux des Coréens que de ceux des Américains. Et la comparaison en maternelle ne fait que renforcer cette supériorité coréenne: 100% (20 sur 20) des enfants coréens de maternelle ont en effet réussi le test !

1.2.2. Extension aux asiatiques américains

Les élèves d'origine asiatique ont souvent de bonnes performances scolaires (en maths) dans les pays où leurs familles ont pu émigrer. Tsang (1984) l'a souligné dans la conclusion de sa revue de recherches. Nous nous limiterons donc à deux recherches plus récentes, dont l'une - Miura (1987) - sera facile à résumer puisqu'elle utilise la même méthodologie et le même test que la recherche de Miura et al. (1988) que nous venons de décrire. Commençons donc par elle.

Les sujets asiatiques, de 7 ans en moyenne, étaient cette fois-ci 21 élèves, asiatiques américains, fréquentant une "école du samedi" à San Francisco. Ces élèves parlaient, de manière prédominante, le japonais dans leur famille. Au moment de leur interrogation, ils se répartissaient sur deux niveaux scolaires américains: les 1ère et 2ème année d'école(1) . Les élèves américains (non d'origine asiatique) qui leur ont été comparés fréquentaient un lycée privé de la péninsule de San Francisco. Cette école, précise Miura, pratiquait un examen d'entrée et appliquait les programmes avec rigueur.

L'analyse des résultats a conduit Miura à observer la même différence de stratégie que dans l'expérience précédemment rapportée: les américains de souche privéligient les constructions du nombre avec, exclusivement, des cubes-unités, alors que les américains japonais préfèrent les constructions utilisant aussi des barres de dix. Egalement, **les américains japonais sont arrivés plus souvent** - 4,14 fois (sur 5 maximum possible) en moyenne, contre seulement 3, 25 fois aux américains de souche - **aux**

(1) Les "écoles du samedi" sont fréquentées par des enfants dont les parents, japonais, envisagent de retourner au Japon. Elles sont partiellement financées par le Ministère japonais de l'Education et ont pour but d'apprendre aux élèves à lire et à écrire les caractères japonais complexes. L'âge d'entrée respecte celui de l'année scolaire japonaise qui débute en avril: ceci explique pourquoi les 21 élèves se répartissaient sur 2 niveaux scolaires américains. Et aussi pourquoi, interrogés en octobre, ils avaient, en fait, une expérience scolaire en moyenne à peu près comparable à celles des américains interrogés en février, en 1ère année d'école.

deux représentations du nombre, essentiellement différentes, demandées dans le test. Notons toutefois que ce résultat n'est que faiblement significatif: p=.10.

Nous compléterons cette étude ponctuelle de Miura par une étude beaucoup plus générale. Elle a en effet porté sur quelques 28000 élèves des écoles publiques de Montgomery County (Maryland). Cette étude a permis de comparer les élèves américains asiatiques, blancs (non hispaniques), hispaniques, et noirs. Ses auteurs ont relevé les élèves en-dessous du niveau standard de leur niveau de scolarité à un test de mathématiques non clairement précisé par Norman (1988) qui résume et commente l'étude. De la 3ème à la 6ème année scolaire, à laquelle s'arrête le graphique présenté par Norman, on peut voir que **les américains asiatiques sont les moins en difficulté**. La différence avec les américains blancs est certes faible. Mais celle avec les américains hispaniques, et encore davantage celle avec les américains noirs, est importante. Cette étude ayant suscité des critiques de lecteurs, précisons encore que ces critiques ne concernent pas la hiérarchie que nous venons de rapporter. Elles concernent principalement l'accroissement de la différence et ses facteurs, et la différence entre sexes qui est aussi commentée par Norman.

1.3. Conclusions

A l'issue de cette première partie, que conclure: la supériorité asiatique, parfois effectivement impressionnante, est-elle réelle ? les pratiques pédagogiques, scolaires ou parentales, qui y conduisent n'ont-elles pas aussi de conséquences négatives ?

1.3.1. La supériorité est-elle réelle ?

Nous avons pu faire, en cours de présentation des recherches, l'une ou l'autre réserve méthodologique. Par exemple, le fait que le test proposé par Song et Ginsburg (1987) soit exclusivement numérique. Nous pouvons en faire d'autres. Par exemple et notamment le non-contrôle, dans aucune recherche nous semble-t-il, des **T**emps de **R**éponse (TR). De plus, et ceci ne fait que renforcer le bien-fondé de notre réserve, le fait que les passations des tests soient faites par des expérimentateurs différents dans les cultures comparées, empêche même un contrôle "grossier" des temps de réponse. Ce non-contrôle permet alors d'envisager un possible artefact. En effet, si l'on fait l'hypothèse que les Asiatiques sont plus réfléchis, ou plus perfectionnistes au sens de Siegler (1988), cela expliquerait bien leurs performances supérieures lorsque le temps n'est pas contrôlé. Et Stigler, interrogé sur ce point, a confirmé cette différence de personnalité. Une analyse récente a ainsi mis en évidence des différences significatives entre Asiatiques et Américains dans le nombre d'items abordés versus résolus correctement: les amériains ont abordé plus d'items, mais ont eu beaucoup moins de réussites dans les items abordés (Stigler, communication personnelle). Néanmoins, il convient de remarquer qu'un tel comportement de réponse pourrait lui-même être une conséquence de la pédagogie des maîtres. Stigler (1988; voir aussi le paragraphe 2.2.2) souligne par exemple que les maîtres japonais ne "bousculent" pas leurs élèves: on peut donc penser que cela s'est répercuté sur le mode de réponse (réfléchi, posé, ..) des élèves japonais aux tests. D'ailleurs, Huteau (1987), bien qu'il consacre un paragraphe aux études interculturelles, ne rapporte aucune recherche sur le style cognitif asiatique, au moyen de tests de Dépendance-Indépendance du Champ, qui pourrait étayer une différence de personnalité d'origine génétique. Nous pensons donc que le non-contrôle des temps de réponse, même s'il a pu contribuer à la supériorité asiatique, ne doit pas être vu comme un artefact. En outre, ces résultats obtenus au primaire semblent en parfaite continuité avec ceux du secondaire. En effet, toutes les observations, au niveau du secondaire, convergent pour dire que les élèves asiatiques sont nettement plus performants que les américains, que ce soient les comparaisons "anciennes" de Husén (1967), ou des comparaisons plus récentes. Par exemple, celle de la *National Science Foundation* , qui montre que 40% des enfants coréens de treize ans sont capables de résoudre un problème mathématique exigeant un raisonnement à deux étapes, contre 9% des américains (cf. Andler,1989). Ou aussi, celle de Hanna (1989) qui montre que les élèves japonais, en algèbre du moins, sont en tête des 20 nations comparées[1].

(1) Cette recherche inclut Hong Kong et la Thailande dont les élèves ne sont guère, ou pas, plus performants que ceux des E.-U.: il convient donc de restreindre le mot asiatique, que nous utilisons constamment dans ce texte, aux trois pays sur lesquels portent les observations au niveau du primaire: Japon, Taiwan et Corée.

1.3.2. Des conséquences négatives ?

Comme on peut s'en douter, et comme nous le verrons dans le paragraphe 2.2.1 suivant, les performances des élèves asiatiques en mathématiques sont certainement le résultat d'un travail quantitativement important. Si ce travail est alors effectué sous la pression conjuguée des maîtres et des parents, ne conduit-il pas à un rejet affectif de cette discipline ? Pour les étudiants plus âgés, l'étude de Husén avait répondu que non. Pour les jeunes élèves, qui nous intéressent ici, Hatano (1982) a rapporté deux études: l'une, qui remonte à 1958 il est vrai, montre qu'à tous les niveaux du primaire les mathématiques sont en 1ère ou 2ème position dans l'ordre des matières préférées; l'autre, plus récente (1975), montre qu'en 3ème année d'école les mathématiques sont la matière préférée, après l'athlétisme. Dans les présentes recherches de Stevenson et coll., les élèves de 1ère et 5ème année ont été amenés à juger, sur une échelle à 5 points, leur "amour pour les maths": la figure résultante présentée par Uttal, Lummis et Stevenson (1988 p.341) ne suggère pas un "amour" plus grand chez les élèves américains.

Une autre réserve bien connue concerne le prix à payer pour ces performances initiales: ne se font-elles pas aux dépens de la créativité et aux dépens de la formation d'un "bon" esprit scientifique ? Après tout, les E.-U. ont, et continueront certainement à avoir, plus de prix Nobel et de médailles Fields que le Japon, Taiwan et la Corée !

Song et Ginsburg ont, nous l'avons vu, insisté sur le fait que la supériorité asiatique, coréenne dans leur cas, ne venait pas uniquement de connaissances mécaniques. A propos des élèves japonais, chinois et américains, Stigler, Lee et Stevenson (1987 p.1285) commentent également:

« *Il est évident, pour l'observateur fortuit aussi bien qu'à travers ces données, que les classes élémentaires chinoises et japonaises ne sont pas des situations routinisées et mécanisées où les enfants sont tendus et craintifs. Plutôt, les enfants apparurent de bonne humeur et sensibles dans tous les trois pays* ».

Néanmoins, des items de créativité ou de pensée divergente ne semblent pas avoir été inclus dans les tests. Ni même des situations-problèmes où l'initiative de l'élève doit être plus importante: recherche de l'information, information superflue, etc... En conséquence, les études statistiques que nous rapportons ici n'offrent pas de réponse expérimentale à cette question. Mais, d'une part, l'étude de Husén en avait suggéré une: il existe aux E.-U. une élite scolaire dont les performances sont tout à fait comparables à celles des élites des autres pays; d'autre part, l'observation plus informelle d'Easley (1983) est tout à fait rassurante. A l'issue d'un séjour dans une école élémentaire du Japon, il émet en effet le souhait « *que la vaste majorité d'enfants américains de l'école primaire puissent, par l'application de telles méthodes* (= les méthodes qu'il a observées au Japon), *acquérir un enthousiasme pour - et une confiance dans - la discussion de leurs propres idées mathématiques lors de la résolution de problèmes et du développement de concepts* » (p.14). Certes, Easley n'ayant observé qu'une école, on peut redouter que son observation soit trop partielle, voire biaisée: on pourrait lui avoir montré une école exemplaire ! Néanmoins, les observations statistiques comparatives des interactions mères-enfants de Hess et al. (1986) suggèrent, de manière générale, que le recours à l'autorité est beaucoup plus un trait caractéristique de l'éducation américaine que de l'éducation japonaise.

2. LES CAUSES

Pour structurer cette partie, nous avons choisi une classification dichotomique: nous présentons d'abord les "causes", a priori possibles mais qui, c'est du moins le point de vue que nous soutiendrons, ne nous paraissent pas les plus importantes, voire sont fausses; ensuite, nous présenterons celles qui nous paraissent les plus importantes. De plus, dans chacun des deux paragraphes ainsi distingués, nous analyserons, un par un, les différents facteurs explicatifs que nous avons cru entrevoir.

2.1. Les facteurs peu importants

2.1.1. <u>L'intelligence générale</u>

Lynn (1982) a publié, dans une revue scientifique très diffusée, une étude montrant que la différence de Quotient Intellectuel (QI) entre Japonais et Américains s'est accrue depuis le début du siècle. De plus, comme il a trouvé que cet accroissement se retrouve déjà à 6 ans, il a suggéré que le facteur explicatif n'est pas éducatif. Selon lui, l'accroissement s'expliquerait plutôt par le progrès en santé et nutrition, au Japon, dans les décennies du milieu du siècle. Si ceci peut expliquer le fait que la différence s'est accrue, en revanche cela n'explique pas pourquoi le QI des Japonais est supérieur à celui des Américains. Mais ce qu'il faut surtout noter, à propos de la suggestion de Lynn, c'est qu'elle limiterait singulièrement les conséquences que l'on peut tirer de la démonstration de la supériorité des élèves asiatiques, japonais en tout cas. Si nous voulons donc faire des commentaires éducatifs, il faut montrer au préalable que les observations et interprétations de Lynn ne sont pas convaincantes.

Pour ce faire, nous pouvons formuler deux types de réserves méthodologiques. Le premier est particulier et concerne l'étude de Lynn elle-même: elle a en effet fait l'objet de critiques portant, notamment, sur l'échantillon japonais trop urbain. Lynn, répondant à - et tenant compte de - ces critiques, a recalculé le QI japonais: la nouvelle valeur avancée (≈104 contre ≈111 antérieurement) est en sérieuse baisse et fait disparaître la disparité **croissante** entre Japon et E.-U. Mais, souligne Lynn, elle reste néanmoins significativement supérieure à celle du QI américain (100). Le second est général et concerne le QI: on peut en effet d'une part contester sa validité, d'autre part son appropriation pour comparer des groupes non homogènes culturellement (voir Flieller, 1989, pour une discussion récente de ces problèmes).

Les résultats empiriques de Stevenson et al. (1985) confortent d'ailleurs ces critiques méthodologiques. En effet, des tests généraux, spécialement construits en vue de la comparaison des élèves japonais, taiwanais, et américains, ne mettent pas en évidence des capacités cognitives générales supérieures chez les enfants asiatiques. Seule une remarquable supériorité des jeunes chinois à un test de mémoire des nombres (*digit-span*) retient l'attention. Elle a d'ailleurs été trouvée par Chen et Stevenson (1988) chez les enfants de 4 ans déjà. Mais cette supériorité peut s'expliquer par une particularité linguistique des mots de nombres chinois. Pour comprendre cette explication, rappelons que le *digit-span* est censé mesurer l'empan de la mémoire à court terme. Mais des modèles récents comme celui de Schweickert et Buroff (1986) suggèrent que c'est la durée de la trace verbale, estimée à environ 1,5 ou 2 secondes, qui est constante, et non pas le nombre de chiffres que nous pouvons rappeler immédiatement. Dans le cadre d'un tel modèle, la plus courte durée de prononciation des chiffres en chinois explique alors parfaitement la robuste supériorité des jeunes chinois.

Outre ces remarques générales, nous pouvons en faire deux autres plus spécifiquement adaptées à la présente analyse:

a) Lynn a observé que ce sont particulièrement les capacités spatiales qui conduisent à la supériorité du QI japonais qu'il a observée et n'a d'ailleurs pas inclus le sub-test (verbal) arithmétique dans son calcul du QI. Or, nous avons remarqué, dans la partie précédente, que les tests utilisés dans la comparaison Asie-E.-U. étaient de manière prépondérante de nature arithmétique. En conséquence, le QI ne semble pas expliquer directement la supériorité asiatique, même si, conformément à son "esprit", on peut soupçonner le QI d'exercer son influence de manière générale ou indirecte.
b) Si le QI des Coréens est aussi supérieur à celui des Américains (s'il ne l'est pas il faut de toute manière trouver une autre explication !), comment expliquer la supériorité américaine trouvée par Song et Ginsburg (1987), pour les mathématiques informelles, chez les enfants de maternelle ? De manière plus générale on peut remarquer aussi que le QI explique mal que la supériorité asiatique se manifeste, principalement, dans les items de type scolaire et en mathématiques.

2.1.2. La précocité des apprentissages

Dans la société asiatique, où la hiérarchie et l'esprit de compétition restent importants (cf., par exemple, Strom, Park & Daniels, 1987 pour la Corée), il se pourrait d'une part que la famille prépare l'enfant à la compétition scolaire, d'autre part que la société prépare l'élève à la compétition économique. Cela pourrait alors se traduire respectivement par des apprentissages familiaux bien avant l'entrée à l'école, et par des programmes en avance sur les programmes américains.
L'idée que les enfants acquerraient beaucoup de connaissances, informellement, avant le début de l'école primaire, et auraient ainsi de meilleures bases en entrant à l'école, est donc une hypothèse plausible. Elle l'est d'autant plus que les mères japonaises disent profiter de toutes les opportunités appropriées pour enseigner, avant la 1ère année d'école, les habiletés numériques à leurs enfants (cf. Hatano, 1982, qui réfère cependant à une recherche plus ancienne); ou encore, que les écoles Montessori[1] se sont développées en Asie, à Taiwan en tout cas (Bauch & Hsu, 1988). Ginsburg, qui fut l'un des premiers à soutenir l'importance de ces connaissances informelles en arithmétique

(1) Nous rappelons que l'arithmétique est l'une des quatre branches du *quadrige triomphant* (Montessori, 1926 p.252 et ss) et que, dans le cadre de ce dernier, les enfants de cinq ans et, en tout cas, ceux de six, pouvaient mémoriser la formule du cube d'un quadrinôme !

(Ginsburg, 1977), et qui en est toujours un admirateur (cf. son avant-propos de Baroody, 1987), était certainement l'un des mieux placés pour la formuler. Sa conclusion négative, avec Song, que nous avons rapportée précédemment, n'en prend donc que plus de valeur.
Néanmoins, ses recherches portent sur des enfants coréens et la particularité du bilinguisme numérique coréen (voir suite) constitue certainement pour eux un désavantage dans le développement de l'arithmétique informelle. D'ailleurs les Japonais de maternelle ont été trouvés supérieurs aux Américains (Stevenson et al., 1986), et les Chinois de 4, 5 et 6 ans ont des performances supérieures en comptage (Miller et Stigler, 1987; voir aussi le paragraphe 2.2.3). Nous n'écartons donc pas le fait que, en général, les connaissances informelles acquises avant l'école primaire par les jeunes japonais et chinois puissent être supérieures, mais l'observation de Song et Ginsburg (1987) sur les jeunes coréens suggère qu'elles ne sont pas indispensables pour expliquer la supériorité asiatique.
Quant à la compétition entre pays, il se pourrait que les programmes asiatiques soient en avance, et donc que la supériorité asiatique soit le simple reflet de cette avance. Nous avons vu (paragraphe 1.1) que, de fait, les programmes japonais étaient plus ambitieux que ceux des E.-U. Mais comme, en même temps, il est apparu que ceux de Taiwan le sont plutôt moins, on voit que cette explication n'est pas essentielle puisque les élèves taiwanais ont aussi des performances supérieures aux américains. Même dans le cas d'une comparaison Japon-E.-U., Stevenson et al. (1986) argumentent que ce ne sont pas les programmmes plus avancés qui sont essentiellement à l'origine de la supériorité japonaise. En effet, il se trouve que les notions sous-jacentes aux items 35 à 38, auxquels tous les élèves de 5ème année de la recherche de Stigler et al. (1982) ont été soumis, sont introduites plus tôt aux E.-U. qu'au Japon. Et 36,1% des élèves japonais ont réussi l'ensemble de ces 4 items, contre seulement 7,3% des américains !
En conclusion, nous dirons donc que la précocité des apprentissages n'est pas le point le plus critique dans l'explication de la supériorité asiatique.

2.1.3. <u>Une pratique culturelle</u> : <u>l'abaque</u>

La manière dont les enfants apprennent à calculer doit certainement différer suivant les cultures. Mais ce phénomène général pourrait être particulièrement accentué dans le cas de la comparaison Asie-E.-U. (ou aussi d'une comparaison Asie-Europe) du fait de l'entraînement systématique des écoliers au calcul avec abaque. L'abaque le plus largement utilisé aujourd'hui est l'abaque japonais, ou *soroban* .

Le *soroban* est un cadre en bois qui sert de support à 23 colonnes de perles. Il permet la représentation des nombres dans un système de numération de base dix. Chaque colonne est affectée à une puissance de dix. La colonne des unités est choisie arbitrairement par l'utilisateur. La colonne immédiatement à gauche de celle des unités devient alors la colonne des dizaines; celle immédiatement à gauche des dizaines devient la colonne des centaines; et ainsi de suite. Chaque colonne est divisée en deux par une barre horizontale: la partie supérieure contient une perle, et la partie inférieure 4.

Une perle supérieure vaut 5 fois la valeur unitaire de sa colonne (par exemple, dans la colonne des unités elle vaut 5, dans celle des dizaines, 50, etc ...) si elle a été poussée (vers le bas) sur la barre horizontale, et 0 si elle en a été écartée (vers le haut). Chaque perle inférieure vaut la valeur unitaire de sa colonne (par exemple, un dans la colonne des unités, dix dans celle des dizaines, etc ...) si elle a été poussée (vers le haut) sur la barre horizontale, et 0 si elle en a été écartée (vers le bas). Ainsi, nous avons représenté 9 081 726 354 sur le *soroban* dont les colonnes intéressantes sont dessinées ci-après:

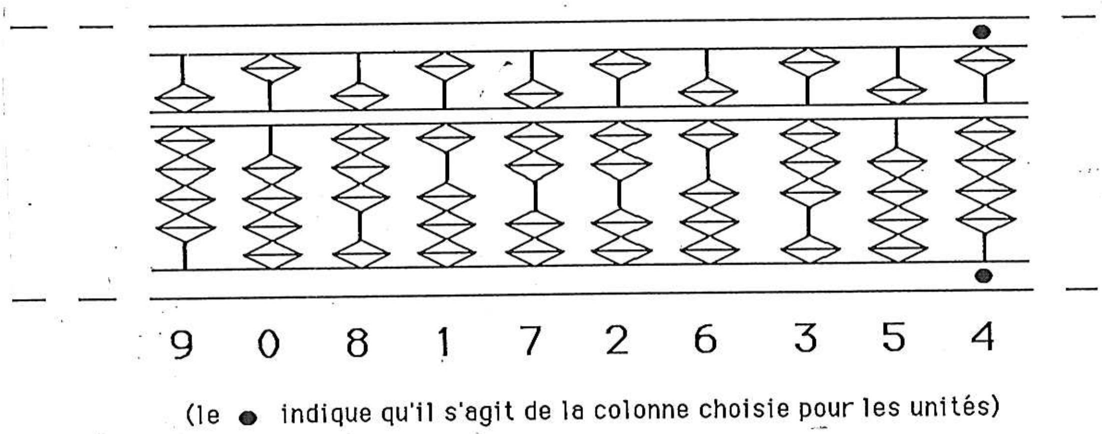


Figure 1 : Représentation de 9 081 726 354 sur un *soroban*

Pour additionner deux nombres, on représente le premier et on lui ajoute, colonne par colonne, les perles de la représentation du second. Même sans entrer dans les détails de la procédure, on entrevoit facilement le rôle que vont jouer les compléments à 5 (pour les retenues intra-colonnes) et à 10 (pour les retenues inter-colonnes).

Il va sans dire qu'une pratique importante du *soroban* peut avoir des effets non seulement quantitatifs, mais aussi qualitatifs sur les procédures de calcul mental. Par exemple, Stigler (1984) a montré que les élèves chinois (Taiwan) de 5ème année, experts en *soroban* , utilisaient un "abaque mental", i.e. une représentation imagée de l'abaque matériel. D'ailleurs, il existe même quelques preuves neuropsychologiques en faveur d'une spécialisation hémisphérique inhabituelle des experts en *soroban* : ils utiliseraient davantage l'hémisphère droit en calcul (Hatta & Ikeda, 1988).

Néanmoins, en dépit de l'importance de cette pratique culturelle, il convient de remarquer que le *soroban* :

a) n'est en général introduit à l'école qu'en 3ème et 4ème année, voire en 5ème et 6ème année en Corée, alors que la supériorité asiatique existe déjà en 1ère année d'école;

b) ne concerne directement que l'exécution des opérations arithmétiques et, indirectement, leur compréhension, ainsi que celle de la numération de base et de position, alors que la supériorité asiatique porte aussi sur le raisonnement ou la résolution de problèmes;

c) ne "bénéficie" que d'un total horaire (scolaire) réduit: 8 heures en 3ème année et 2 heures en 4ème année au Japon.

En conséquence, l'utilisation des abaques ne nous paraît pas un facteur directement responsable de la supériorité asiatique. Indirectement, bien sûr, il se pourrait que cette pratique culturelle ait des conséquences importantes. Nous pensons notamment à l'intérêt des élèves pour le calcul: au Japon, 5 millions d'entre eux apprennent le *soroban* en dehors de l'école ! Et aussi aux pratiques des maîtres. En effet, même si ces derniers n'enseignent pas le *soroban* aux niveaux élémentaires (maternelle, 1ère ou 2ème année), il se pourrait quand même que leur enseignement soit influencé par lui. Par exemple, le rôle particulier des groupes de 5 dans la pratique du *soroban* n'est peut-être pas sans lien avec le fait que deux chercheurs japonais ont trouvé que 5 est un nombre d'ancrage privilégié chez des enfants japonais en fin de maternelle (Yoshida & Kuriyama, 1986). Et l'importance des groupes de dix n'est probablement pas étrangère non plus au fait qu'au Japon on apprend le passage de la dizaine, contrairement à ce qui se passe en général aux E.-U., et, qu'en conséquence, il y a moins de comptages dans les additions et soustractions (Fuson, 1988).

2.2. Les facteurs plus importants

2.2.1. La quantité de travail

La quantité de travail scolaire est l'addition du travail à l'école et du travail (sur les sujets scolaires) à la maison. L'issue de la comparaison est sans ambiguïté, puisque ces deux types de travail occupent, chacun, un volume horaire plus important chez les élèves asiatiques. Essayons de donner quelques précisions quantitatives.

Le travail à l'école. Pour les élèves japonais[1], le volume horaire de mathématiques durant une année scolaire est considérablement plus important que pour les élèves américains. D'après nos estimations, il serait environ 2,4 fois celui des américains en 1ère année, et 2 fois en 5ème année !

Ceci provient de deux facteurs qui multiplient leurs effets:

a) Le temps total passé à l'école est plus important au Japon: d'une part, parce que la semaine comporte 5 jours 1/2 (contre seulement 5), d'autre part parce que l'année scolaire dure 240 jours (contre 178 seulement).

b) Dans la répartition entre matières, la proportion de mathématiques est plus importante au Japon.

Pour illustrer ce point, nous avons reproduit-adapté, dans la figure 2 ci-après, les histogrammes présentés par Stevenson et al. (1986).

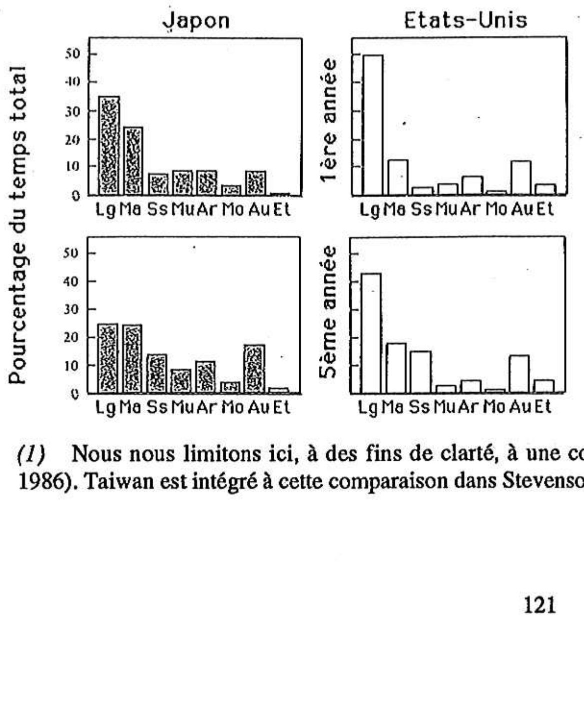


Figure 2 : Proportion de temps consacré aux différentes disciplines

(adapté à partir de Stevenson et al., 1986 p.209)

(1) Nous nous limitons ici, à des fins de clarté, à une comparaison Japon-E.-U. (Stevenson et al., 1986). Taiwan est intégré à cette comparaison dans Stevenson et al. (1987).

Les abréviations utilisées sont: Lg = Langage; Ma = Mathématiques; Ss = Sciences sociales; Mu = Musique; Ar = Art; Mo = Morale; Au = Autres et Et = Etude. Sur ces histogrammes nous pouvons donc remarquer non seulement que la proportion de temps consacrée aux mathématiques est, comme annoncé, plus importante au Japon qu'aux E.-U., mais aussi que pour le langage la relation s'inverse. En conséquence, l'impressionnante supériorité horaire des Japonais en mathématique disparaît pour le langage: une estimation, comparable à la précédente, donne même un petit avantage horaire aux E.-U. Comme Stevenson et coll. n'ont pas observé une supériorité japonaise claire en langage, nous y voyons un argument important en faveur du facteur **temps d'apprentissage.**
Le travail à la maison. Chen et Stevenson (1989) ont tenté d'estimer, de manière relativement précise, le temps consacré par les élèves asiatiques (chinois et japonais), comparativement aux élèves américains, au travail scolaire à la maison. Bien que leur étude ne différencie pas les disciplines scolaires, il est intéressant d'en rapporter quelques résultats pour montrer que le volume horaire des Asiatiques est, encore une fois, clairement supérieur à celui des Américains. Globalement, on peut résumer les résultats de Chen et Stevenson en disant que les élèves chinois consacrent plus de temps au travail à la maison que les américains, les japonais se situant à un niveau intermédiaire. Mais, pour ces derniers, l'école parallèle (*juku* notamment), non incluse dans le temps de travail à la maison, fausse un peu la comparaison et, en conséquence, nous nous limiterons à rapporter quelques chiffres plus précis sur la comparaison Taiwan - E.-U.
D'après les estimations des mères, en 1ère année, les élèves chinois de Taipei ou Beijing consacrent, toutes disciplines confondues, environ 8 ou 7 heures par semaine au travail à la maison, alors que les américains de Minneapolis ou Chicago n'en consacrent que 1 ou 3. En 5ème année, la différence absolue ne se rétrécit guère: 8 à 13 heures pour les Chinois, contre 4 à 7 heures pour les Américains.
Notons que les estimations des maîtres sont nettement en-dessous de celles des mères, mais que, et c'est ceci qui est important, elles font elles aussi apparaître que les élèves chinois travaillent davantage à la maison que les américains.

Remarque1. Un certain nombre d'observations complémentaires intéressantes ont été faites par Chen et Stevenson dans cette même étude. Nous les signalons très succinctement:

a) L'importante quantité de travail à domicile ne développe pas une attitude négative vis à vis de ce travail chez les élèves chinois: contrairement aux américains, ils aiment souvent faire ce travail !
b) Les parents chinois consacrent plus de temps pour aider leurs enfants dans ce travail à la maison.
c) Malgré cela, les parents américains pensent, en plus grande proportion que les chinois, pouvoir aider leurs enfants; et les mères américaines pensent, plus souvent que les mères chinoises, qu'elles les aident davantage que d'autres mères !

Remarque 2. Le rôle des parents, évidemment essentiel dans ce travail à la maison, est aussi important pour la **motivation** en général. L'étude de Holloway et al. (1986) a insisté sur ce problème. En particulier elle a montré expérimentalement que les parents japonais attribuent les mauvais résultats plutôt à un **manque d'effort**, alors que les américains l'attribuent plutôt à un **manque de capacité**. Ces différences d'attribution causale sont évidemment très importantes, notamment pour les élèves faibles qui, d'un côté, seront plutôt encouragés à faire un effort, alors que de l'autre, ils seront plutôt encouragés à s'investir dans autre chose.

2.2.2. La gestion de la classe

L'organisation du travail. Stigler, Lee et Stevenson (1987) distinguent, comme usuellement, trois types d'organisation: travail collectif avec l'ensemble de la **classe**, travail par **groupes**, et travail **individuel**[(1)].
Le tableau 2 ci-après compare les pourcentages qu'occupent ces différentes formes de travail dans l'enseignement des mathématiques dans les trois pays:

(1) On peut trouver des précisions sur les termes parfois intuitifs utilisés dans ce paragraphe dans les appendices de Stevenson et al. (1987).

Travail --> Pays	Classe	Groupe	Individuel
Taiwan	82	1	17
Japon	74	1	25
Etats-Unis	41	8	52

Tableau 2 : L'organisation du travail en mathématiques
(construit d'après des données de Stigler, Lee & Stevenson, 1987)

Il apparaît clairement que dans les classes asiatiques le travail collectif avec l'ensemble de la classe est la forme de travail la plus fréquente, alors que dans les classes américaines c'est plutôt le travail individuel.
Stigler et al. se sont aussi intéressés au **leader**: le leader peut être le maître, un autre adulte (directeur, ...), un élève, ou personne. Comme le pourcentage des deux types, ici intermédiaires, de leader - autre adulte ou élève - est insignifiant, il nous suffit de rapporter celui du maître-leader. A Taiwan, le maître est le leader 90% du temps, au Japon, 74%, et aux E.-U. seulement 46%.

L'enseignement. Cinq catégories de comportement d'enseignement ont été distinguées: **transmettre des informations** (enseignement direct des mathématiques), **donner des directives, questionner un groupe** (ou la classe entière), **questionner un élève, questionner sur un sujet autre** (que les mathématiques). Les observations de classe montrent que les enseignants asiatiques, surtout les taiwanais (63%), consacrent beaucoup plus de temps (en proportion, donc a fortiori dans l'absolu) à la **transmission d'informations** que les américains (25%).
Ce comportement des maîtres s'accorde évidemment avec celui des élèves: les asiatiques passent plus de temps à écouter ou observer activement le leader que les américains qui travaillent davantage indépendamment sur des problèmes mathématiques. Il s'accorde également avec le fait que les explications verbales sont plus abondantes dans les classes de Sendai que dans celles de Chicago (Stigler, 1988).
Enfin, un dernier point sur lequel Stigler a également attiré l'attention, est **l'allure peu**

soutenue du travail au Japon. En décomposant les séquences d'enseignement en segments de 5 minutes chacun, il a par exemple trouvé que le nombre de segments dans lesquels plus d'un problème (mathématique) est abordé est inférieur à 10% chez les Japonais, mais supérieur à 50% chez les Américains !

2.2.3. Un facteur linguistique

Rappelons que le test de Miura (1987) demande aux jeunes élèves de construire de deux manières essentiellement différentes une collection de, par exemple, 28 cubes, avec des cubes-unités et des barres de dix. Appliquant ce test à des Coréens, Japonais et Américains, Miura et al. (1988) et Miura et Okamoto (1989), ont trouvé des différences de stratégie et de réussite. Les Asiatiques préfèrent les constructions utilisant des barres. Les Américains, non seulement préfèrent, mais souvent n'arrivent pas ou ne pensent pas à construire des collections autres que celles comportant exclusivement des cubes-unités.
En outre, Miura et Okamoto (1989) ont proposé un test plus classique de compréhension de la numération consistant en plusieurs questions sur la signification des chiffres qui apparaissent dans l'écriture des nombres à deux chiffres. Ce test a également montré une nette supériorité des élèves japonais de 1ère année sur leurs camarades américains. Miura et coll. interprètent ces observations assez systématiquement et presque exclusivement comme la conséquence de la structure linguistique de la suite des mots de nombre.
La suite japonaise ou chinoise marque en effet beaucoup mieux le rôle particulier des groupes de dix, à la fois lors du passage de dix à onze, et dans le choix des noms des dizaines. Comme les suites chinoise et japonaise sont structurellement analogues (la seconde est d'ailleurs dérivée de la première), nous nous contenterons d'illustrer notre propos par l'exemple de la suite chinoise.
Dans une transcription phonétique, en voici une description:

a) de 1 à 10: yī (1), èr (2), sān (3), sì (4), wǔ (5), liù (6), qī (7), bā (8), jiǔ (9), shí (10);
b) de 11 à 19: shí yī (11), shí èr (12), ..., shí jiǔ (19);
c) de 20 à 99: èr shí (20), èr shí yī (21), ..., èr shí jiǔ (29), sān shí (30), ..., jiǔ shí (90), ..., jiǔ shí jiǔ (99);
d) de 100 à 999: bǎi (100), yī bǎi yī (101), ..., yī bǎi yī shí (110), yī bǎi yī shí yī (111), ..., èr bǎi (200), ..., jiǔ bǎi jiǔ shí jiǔ (999).

Par rapport à la suite anglaise ou américaine, cette suite, outre sa régularité qui ne peut

que faciliter son apprentissage, présente essentiellement deux avantages pédagogiques:
- le premier, que nous avons souligné ci-dessus, est d'attirer doublement l'attention sur le groupement dix: ainsi, 11 se dit "dix un" (shí yī), 12 se dit "dix deux" (shí èr), ...; également, 20 se dit "deux dix" (èr shí), 30 se dit "trois dix" (sān shí);
- le deuxième est de mieux rapprocher l'expression orale des nombres de leur expression écrite chiffrée: par exemple, 131 se dit "un cent trois dix un" (yī bǎi sān shí yī) en chinois, alors qu'il se dit "un cent trente un" (one hundred thirty one) en anglais; ou encore, 18 correspond à "dix huit" (shí bā) en chinois, alors qu'il correspond à "huit dix" (eighteen) en anglais.

Pour la Corée, la situation est un peu plus complexe. Deux suites de nombres coexistent en effet dans ce pays. La première, que nous qualifions, avec Song et Ginsburg (1988), de Régulière est tout à fait analogue à la suite chinoise; la seconde, qualifiée d'Irrégulière, présente essentiellement des irrégularités pour les noms des dizaines. Par exemple, dans la suite Régulière, où 2 se dit Ee et 10 Sip , 20 se dit Ee-sip , et dans la suite Irrégulière, où 2 se dit Dool et 10 Yul , 20 se dit Sumool.
Les deux suites sont enseignées en 1ère année d'école, mais se différencient à la fois avant, où c'est plutôt la suite Irrégulière qui est apprise informellement aux jeunes enfants, et après, où c'est quasi-exclusivement la suite Régulière qui est utilisée (sauf pour la présentation verbale des problèmes numériques).
Après ces descriptions, il devient clair que l'interprétation de Miura et coll. est tout à fait plausible. Méthodologiquement, la démonstration de Miura et coll. reste cependant insuffisante: il faudrait montrer que dans des items de numération, où intervient fortement cette structure de la suite, la supériorité des élèves asiatiques est significativement plus importante que dans des items où elle n'intervient pas ou peu. A notre connaissance cela n'a pas été fait dans le domaine de la numération. Par contre, Miller et Stigler (1987) l'ont vérifié dans le domaine du comptage. Le comptage permet en effet de séparer assez facilement les erreurs de récitation, qui dépendent directement de la suite numérique, des erreurs de pointage (compter un objet deux fois, oublier de compter un objet) qui n'en dépendent pas directement.
Miller et Stigler ont trouvé, pour la récitation purement verbale de la suite (i.e. sans comptage d'objets), que les performances des jeunes chinois sont supérieures à celles

des jeunes américains à tous les âges étudiés: 4, 5 et 6 ans. Cette supériorité est la plus marquée à 4 ans où, il est vrai, les performances des jeunes chinois sont impressionnantes dans l'absolu: **tous** les 16 enfants testés connaissaient la suite (avec une omission d'un seul nombre permise) au moins jusqu'à trente ! D'ailleurs, si les performances des jeunes chinois sont meilleures que celles des américains, elles sont sans comparaison possible avec celles des jeunes coréens. En effet, **aucun** (sur les 23 testés dans Song et Ginsburg, 1988) de ces derniers, qui souffrent initialement de leur bilinguisme numérique, n'est arrivé, à l'âge de 4 ans, jusqu'à trente !
Dans le comptage d'objets, les jeunes chinois, s'appuyant sur leur meilleure connaissance de la suite verbale, ont certes aussi été supérieurs aux jeunes américains. Mais si on se limite, comme nous l'avons suggéré, aux seules erreurs de pointage, la supériorité des jeunes chinois disparaît effectivement. En conséquence, cela confirme que c'est bien la suite verbale, et donc vraisemblablement (mais partiellement, car on ne peut pas exclure d'autres facteurs comme la pression parentale) sa structure linguistique régulière, qui est à l'origine de certaines supériorités asiatiques.

Remarque. Hatano (1982) classe aussi, dans les facteurs linguistiques favorisant le calcul chez les Japonais, l'apprentissage des faits multiplicatifs à l'aide des *kuku* . Les *kuku* sont de courtes phrases conventionnelles et rimées dont chacune exprime l'un des 81 produits élémentaires (de 1x1 à 9x9). Elles sollicitent essentiellement la voie auditive parlée comme le confirme, si besoin était, une récente recherche sur des sujets aphasiques (Kashiwagi, Kashiwagi & Hasegawa, 1987). Les *kuku* étant basés sur des caractéristiques du langage japonais, précisées par Hatano (p.219), leur classification dans les facteurs linguistiques est légitime. Mais le fait que les élèves japonais soient plus performants en calcul, ni non plus le fait que les *kuku* reposent sur une mémoire auditive, ne suffit pas à prouver que cette méthode d'apprentissage est plus efficace. Une "preuve" plus convaincante demanderait d'établir que la supériorité asiatique dans la connaissance des tables de multiplication est significativement plus importante que, par exemple, celle dans la connaissance des tables d'addition (pour lesquelles il n'y a pas de *kuku*). D'autre part, nous ne savons pas si des *kuku* existent aussi à Taiwan et en Corée.

3. LES ENSEIGNEMENTS

Alors même que ces comparaisons Asie-E.-U. révèlent d'importantes différences culturelles, peut-on néanmoins en tirer des enseignements ayant valeur générale ? Uttal et al. (1988) ont tenté d'apporter une réponse expérimentale à une telle question. Ils ont montré que des facteurs similaires dans les trois cultures (Japon, Taiwan et E.-U.) différencient les élèves qui réussissent en mathématiques de ceux qui ne réussissent pas. Comme le niveau général de réussite varie considérablement entre ces pays, ou au moins entre les E.-U. et les deux pays asiatiques, on peut alors penser que ces facteurs sont très généraux. Egalement, nous avons pu voir que, même si les performances en comptage des jeunes asiatiques bénéficient de la régularité des suites numériques asiatiques, les erreurs de pointage qu'ils peuvent faire sont tout à fait comparables à celles des jeunes américains. En conséquence, il nous semble possible de tirer quand même quelques enseignements ayant des chances d'être universellement valides.

Nous nous limiterons cependant à l'apprentissage et à la cognition numérique. Il serait en effet inconvenant de faire des propositions institutionnelles ou des suggestions pour l'enseignement français, alors que la comparaison rapportée ne porte pas sur la France. Par contre, de telles propositions ou suggestions ont pu être faites par les psychologues américains impliqués dans ces recherches inter-culturelles. Par exemple, Stigler et al. (1987) ont proposé d'accroître la proportion de mathématiques, de réduire les activités de transition ou non pertinentes, d'accroître les opportunités d'apprentissage "à partir du maître". Ils rajoutent cependant que l'efficacité de telles mesures dépend de l'accroissement de la motivation et de la compétence des maîtres à enseigner les mathématiques. Notons aussi que, en 1986, le *Chicago Board of Education* a décidé de rendre obligatoire un travail minimal à la maison: 30 minutes par jour pour les années 1 à 3 ; 45 minutes par jour pour les années 4 à 6 !

En fait, nous nous limiterons, comme annoncé en introduction, au développement d'un seul thème - l'importance des groupements "utiles" - qui semble à l'origine de la seule différence cognitive observée. Le traitement de ce thème, où les élèves - et donc vraisemblablement aussi la pédagogie - asiatiques sont très performants, voit son intérêt renforcé par le fait que les études "occidentales", même en dehors des E.-U., semblent converger pour conclure que l'enseignement de la numération est plutôt un échec (Bednarz et Janvier, 1984). Et l'introduction précoce de bases différentes de la base dix ne remédie guère au problème (Perret, 1985), voire conduit à des conséquences indirectes négatives, sur les calculs pratiques par exemple (Hennes, Schmidt & Weiser, 1979).

3.1. Pour la compréhension de la numération

Dans le cadre de cet article, c'est évidemment une observation faite aux E.-U., et même à Chicago, une des villes américaines partiellement impliquées dans les comparaisons Asie-E.-U., que nous avons choisie pour illustrer la difficulté de compréhension de la numération. Kamii (1985), qui en est l'auteur, est arrivée à la conclusion que l'apprentissage de la numération de position est un objectif inapproprié et indésirable en 1ère année d'école. Pour elle, il est impossible qu'un élève de 1ère année comprenne que le 2 dans 26 signifie vingt. Mais regardons de plus près les observations empiriques sur lesquelles elle s'appuie.

Kamii a interrogé les 29 élèves d'une classe de 1ère année de haut niveau. Les élèves devaient :

1) compter seize jetons et les dessiner
2) écrire seize avec des nombres sur la même feuille
3) dire, alors que Kamii entourait le 6 dans 16, ce que signifie cette part (de l'écriture du nombre 16), et la montrer sur le dessin
4) dire, alors que Kamii entourait le 1, ce que signifie cette (deuxième) part, et la montrer sur le dessin
5) dire, alors que Kamii entourait 16, ce que signifie l'ensemble, et résister à une contre-suggestion sur la relation entre 16, 1 et 6. Par exemple, quand sur le dessin l'élève avait entouré six jetons (dans la partie 3 du test), un jeton (dans la partie 4), et les seize (dans la partie 5), Kamii lui demandait pourquoi il y en avait neuf qui n'étaient pas entourés.

D'après Kamii le bilan de l'observation est clair: aucun élève n'avait compris la numération de position !

Une réplique du test dans une autre classe, dont la maîtresse pensait que les élèves ont compris la numération, redonna le même résultat: le nombre d'élèves qui ont dit que le 1 de 16 représentait dix jetons a été zéro !

Posant alors son test à des élèves de 4ème, 6ème et 8ème année, Kamii trouva des pourcentages de réussite respectivement de 51% (N=35), 60% (N=48) et 78% (N=41). Une éventuelle "responsabilité" du milieu social étant écartée, et des résultats similaires ayant été obtenus ailleurs (à Boston, par un autre chercheur mais avec un test similaire), Kamii part en guerre contre l'instruction prématurée qui est préjudiciable à l'enfant essayant de construire un sens dans une discipline. Dans la droite ligne de l'orthodoxie piagétienne[1], elle propose alors de reculer l'introduction de la numération de position « jusqu'à ce que les enfants aient solidement construit la série des nombres (par répétition de l'opération +1) et sachent partitionner des ensembles de différentes manières (relations partie-tout) ».

Avant de les commenter, notons d'abord que les observations de Kamii sont réellement étonnantes. Par exemple, si l'on prend, comme usuellement, 75% pour critère extérieur d'une acquisition, les élèves ne comprendraient la numération de position que vers 13 ans, dans leur 8ème année scolaire (la classe de quatrième en France) !

A la lumière des comparaisons Asie-E.-U., notamment des observations de Miura et coll. sur les enfants coréens de maternelle, nous pouvons maintenant réfuter, sur des bases expérimentales, les interprétations et suggestions de Kamii. D'abord nous pouvons dire que l'interprétation de la difficulté des élèves par le seul manque de maturité ne semble plus guère acceptable: les Coréens de 5 ans, qui comprennent la numération de position, ne sont pas plus mûrs que les Américains de 12 ans ! De plus, objecte Easley (1983), reculer l'apprentissage de la numération de position conduirait à apprendre à additionner et à soustraire sans comprendre le processus de génération des nombres. Or ceci ne peut qu'augmenter la difficulté ultérieure d'apprentissage de la numération de position car il faut que l'élève revienne en arrière et réinterprète ce qu'il est en train de faire. Egalement, s'interroge Easley, pourquoi les Américains mettraient-ils quelques années à comprendre ce que les Japonais comprennent en quelques mois ? Mais, surtout, c'est la proposition de Kamii de remplacer le travail de groupement par un travail d'ajout un par un qui semble particulièrement mal venue : un tel remplacement ne pourrait en effet que contribuer à renforcer le comptage un par un qui est déjà à l'origine de la représentation du nombre unique, inflexible et inadaptée aux "grands" nombres, des jeunes élèves américains.

Cet échec de la théorie piagétienne sur un sujet comme la compréhension du système de numération n'est pas étonnant. Ce système est en effet tellement subtil, peu naturel et irrégulier, qu'un enfant de 6 ans n'a que peu de chances de le réinventer ou de le recons-

(1) Son livre porte le titre: *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique* , et le sous-titre: *Implications de la théorie de Piaget* , le tout en anglais (voir Références) et préfacé par Bärbel Inhelder, la célèbre collaboratrice de Piaget.

truire par lui-même. Une médiation adulte (ou de quelqu'un qui sait) est donc indispensable. Et cette médiation a de bonnes chances de s'exercer par l'intermédiaire de l'outil majeur de notre culture: le langage. Tout ceci conduit naturellement à penser qu'une analyse plus brunérienne des difficultés de la numération pourrait, mieux et effectivement, les résoudre. Une telle analyse a précisément été faite par Brissiaud (1989 p.146 notamment). Elle explique parfaitement les observations de Miura et coll. ou de Miller et Stigler. En conséquence, elle donne quelque crédit aux conclusions pédagogiques qu'en tire cet auteur. A propos de ces dernières, rajoutons simplement que la suggestion de dire «vingt, c'est deux dix», «trente, c'est trois dix», ..., faite pour les pédagogues de langue française ou anglaise, s'adapte effectivement mal à la pédagogie de langue allemande: si l'on dit trois-dix *(drei-zehn)* pour trente, on tombe, au marqueur (éventuel) du pluriel près, sur le mot de nombre treize *(dreizehn)* !

3.2. Pour le passage de la dizaine

Rappelons les performances des jeunes chinois: à 4 ans, ils connaissent tous la suite numérique jusqu'à trente au moins. Jusqu'à dix, la mémorisation de cette dernière est vraisemblablement favorisée par la plus courte durée d'énonciation des mots de nombres. Après dix, elle est, sûrement, favorisée par sa régularité. Egalement, la structure "dix un" qui apparaît aussitôt après dix joue un rôle considérable dans la compréhension de la numération.

Lorsqu'une culture, son langage plus précisément, ne possède pas tous ces avantages, les pédagogues se doivent d'y remédier. Certains l'ont fait. Pour la mémorisation de la suite numérique ils ont trouvé les comptines. Pour le rôle de dix, ils ont vu l'intérêt des doigts ou d'un matériel artificiel. Par exemple, Maria Montessori (1926) avait construit un jeu de barrettes de perles: les perles étaient toutes noires pour les cinq premières barrettes, noires jusqu'à la cinquième, puis blanches, pour les barrettes six à neuf, et toutes dorées pour la barrette dix. La singularité et la couleur - **l'or** - de la barrette **dix** soulignent (brillamment !) l'importance de **dix**.

Dans son activité du serpent, elle exploitait ces barrettes pour travailler les compléments et les suppléments à dix, ainsi que ses décompositions. Beaucoup plus récemment, Brissiaud (1989) a suggéré l'exploitation des doigts (initialement) et un matériel de réglettes avec cache (ultérieurement). Egalement, certains jeux, comme le jeu de la cible (Douady, 1984), peuvent se prêter à un travail sur les compléments à dix si l'on fixe les variables didactiques en conséquence. Car ce problème des compléments à dix, qui sont un ingrédient essentiel du passage de la dizaine, s'est posé récemment à nous. A la fois pour des raisons empiriques et théoriques.

D'un point de vue empirique, nos recherches suivant la méthode Juste-Faux (Fischer, 1988a), ont en effet montré que:

- la réponse à 9+7 n'est pas facilement accessible à la fin de l'école élémentaire: pressés de juger 9+7=15 en moins de 5 secondes, seulement 59,5 % - à peine mieux que le hasard - de 210 élèves en fin de CM2 ont répondu qu'elle est fausse (Fischer, 1987) ;
- non seulement les élèves ayant au moins un an de retard dans leur scolarité produisent significativement moins de réponses correctes que les autres ($p<.001$), mais leur pourcentage de réussite - 39% - est même en dessous du hasard (non significativement toutefois: $.10 < p < .20$) !
- les compléments à dix jouent, dans les classes performantes, un rôle "pivotal" (Fischer, 1989);
- les élèves, en particulier ceux scolairement peu performants, développent par eux-mêmes des stratégies que Allardice et Ginsburg (1983) ont qualifiées d' « *inutilement encombrantes* » (*unnecessarily cumbersome*). Dans nos mises au point de la méthode Juste-Faux, nous avons ainsi observé :

◊ Fav (CE2) qui s'est trompé, en 2,19 secondes, dans le jugement de 9+6=15. Interrogé à la fin de la passation sur sa manière de trouver 9+6, il explique: « Je fais le double et j'enlève. »

◊ Lau (CM1) qui s'est trompée, en 2,88 secondes, dans le jugement de 9+7=16. Interrogée en fin de passation: *Comment tu calcules 9+7 ?* elle ne répond pas. - *Tu le sais par coeur ?* « Non. » - *Alors comment tu fais pour le trouver, 9+7 ?* « Je fais 9+9 et j'enlève 2. »

D'un point de vue théorique, l'existence de deux mémoires dissociables, qualifiées de procédurale et déclarative respectivement (Fischer, 1988b; Fischer & Pluvinage, 1988), et d'une opération - le *chunking* - qui peut assurer, nous le postulons, un "transfert" de la première à la seconde, explique l'importance de l'étude des compléments à dix.

En effet, le comptage ou surcomptage, une connaissance typiquement procédurale, peut (avec la maturation et l'exercice) conduire les élèves à calculer, par exemple, 7 + 3, de plus en plus rapidement, fiablement et facilement. Mais seule l'opération de *chunking* peut les amener à constituer le *chunk* , ou paquet d'informations, qui englobe les nombres 10, 7 et 3 dans une collection structurée que nous notons (+,7,3,10). La constitution d'un tel *chunk* pourrait alors favoriser le calcul des soustractions par addition: par exemple, chercher 7 + ... = 10 pour calculer 10 - 7.

Cette opération de *chunking,* que Wickelgren (1979) avait proposée comme la base de tout apprentissage cognitif, semble aujourd'hui s'imposer, et est, peut-être, la clé de tout apprentissage (déclaratif selon nous). Newell, qui travaille depuis plusieurs décennies sur l'apprentissage des machines, a incorporé le *chunking* dans son architecture la plus récente (Newell & Rosenbloom, 1981). Et aujourd'hui il en est un ardent défenseur et promoteur (Rosenbloom & Newell, 1987). Ces deux auteurs formulent ainsi l'hypothèse générale du *chunking:* « *Les êtres humains acquièrent et organisent la connaissance de l'environnement en formant et stockant des expressions, appelées chunks , qui sont des collections structurées de chunks existant déjà au moment de l'apprentissage* ».

Nous pouvons maintenant poser la question: Le *chunking* est-il privilégié, dans l'enseignement asiatique, notamment ou entre autres pour le passage de la dizaine ? Nous avons vu que la structure linguistique des suites asiatiques facilitait grandement la formation d'un *chunk* comme (+,10,1,11) puisque, verbalement, ce dernier peut se traduire par "dix et un" c'est "dix-un". Nous avons vu aussi que la pratique du *soroban* pouvait, indirectement au moins, encourager la complémentation non seulement à dix, mais aussi à cinq. Nous n'insisterons donc ici que sur le rôle des enseignants. En effet, ceux-ci semblent conjuguer leurs efforts avec les effets de la culture ou du langage.

Pour ce faire, les enseignants japonais s'appuient sur un matériel constitué simplement de petits carreaux découpés ou dessinés dans du carton, et appelé (en anglais !) TILE (Hatano, 1982; Easley, 1983). Les carreaux unitaires des TILEs peuvent être isolés ou continus (bandes non découpées, simplement divisées par des traits). De plus, pour cinq et dix, il existe des bandes non divisées. Ceci favorise la constitution visuelle de *chunks* compléments ou suppléments à cinq, par exemple, (+,3,2,5) et (+,5,4,9), ou à dix, par exemple, (+,7,3,10). Les passages par cinq et, surtout, dix, sont alors systématiquement encouragés en calcul mental.

Donnons quelques exemples: 7+6 --> (7+3)+3 --> 10+3 --> 13; 14-5 --> (10-5)+4 --> 5+4 --> 9; 6-4 --> (5-4)+1; 11+4 -->10+5; 12+4 --> 10+5+1.
Hatano (1982), référant à une recherche de Yoshimura, souligne la réussite de cet apprentissage: des élèves de 1ère année avaient tendance à utiliser une stratégie de complémentation à 10 (quelquefois à 5 aussi), alors qu'en maternelle, l'année d'avant, ils utilisaient une stratégie de comptage ascendant. Leurs temps de réponses n'étaient pas en accord avec le modèle du compteur de Groen et Parkman (1972) qui postule que, pour calculer x+y, nous initialisons un compteur au plus grand des deux nombres impliqués dans la somme, disons y, et incrémentons alors x fois ce compteur.
Cette réussite de l'apprentissage scolaire japonais de la complémentation à dix contraste avec l'échec suédois tel qu'il apparaît dans une étude de Svenson (1975). Cette dernière a étudié les additions élémentaires sur des élèves suédois de 3ème année: ceux-ci suivent, pour l'essentiel, le modèle du compteur. Pour l'illustrer, Svenson rapporte le cas d'une enseignante qui enseignait explicitement à ses élèves à calculer 2+9 par (2+8)+1. Or les reportages verbaux montrent qu'aucun élève de cette classe, interrogé par Svenson, n'a utilisé cette stratégie: ils commençaient tous par 9 ! L'échec de cette enseignante suédoise, sur un point précis, nous permet donc de nous livrer à une micro-analyse comparative de la réussite pédagogique japonaise.
D'un côté, nous avons:

- une méthode adaptée à la culture et au langage: par exemple, calculer 7+4 en faisant 7+3+1 est tout à fait naturel puisque l'on trouve dix et un, soit quasiment le résultat final (dix-un);
- une école qui commence à 6 ans et enseigne l'addition et la soustraction dès la première année;
- des effectifs de classes importants (39 élèves en moyenne), mais des maîtres jouissant d'un prestige certain et des élèves obéissants;
- et, car ceci est peut-être un élément de réponse à la question intrigante que nous avons soulevée en introduction, un psychologue (Hatano) qui souligne leur réusite.

De l'autre[1], nous avons:

- une méthode non spécialement adaptée au langage et, en plus, maladroite (dans la méthode de complé-

(1) Le glissement de notre comparaison Asie ou Japon - E.-U. vers une comparaison Japon-Suède n'est pas trop gênant: dans les comparaisons internationales (voir Husén, 1967 p.27; Hanna, 1989 p.228) la Suède se traîne tout autant que les Etats-Unis dans les profondeurs des classements; les irrégularités linguistiques de la suite numérique suédoise sont également comparables à celles de la suite américaine.

mentation japonaise c'est toujours le plus petit des deux nombres à addditonner qui est "cassé" !);
- une école qui ne commence qu'à 7 ans(2) et où une enseignante enseigne la complémentation à 10 à des élèves ayant 3 ou 4 ans de plus que les Japonais;
- le système éducatif le plus coûteux du monde à cause, notamment, des effectifs de classe faibles: 22,6 en moyenne (cf. Marklund, 1985);
- une psychologue (Svenson) qui souligne l'échec total d'un enseignement scolaire de la complémentation.

Il nous paraît inutile de commenter longuement cette comparaison. Insistons simplement sur le fait que tous les facteurs favorables ne sont quand même pas d'un même côté: il est difficile de considérer les faibles effectifs de classe suédois comme un facteur défavorable ! Egalement, nous avons vu dans le paragraphe précédent que certains continuent à plaider pour une pédagogie de l'attente !

Pour terminer, nous revenons au passage de la dizaine pour évoquer sa nature procédurale. Un problème peut alors immédiatement être soulevé: le passage de la dizaine n'étant qu'une procédure, y a-t-il vraiment lieu d'insister sur lui ?

Dans le cadre théorique que nous venons très brièvement de rappeler ci-avant, en particulier la distinction entre connaissances procédurales et déclaratives, nous traitons la compréhension comme une émergence des premières. On conçoit donc que, pour nous, la procédure de passage de la dizaine est une pièce importante de la compréhension de la numération. Les résultats de Miura et coll. le confirment empiriquement. Mais, surtout, nous voudrions souligner que la culture et les pratiques japonaises tout entières semblent s'accorder avec un tel traitement de la compréhension. En effet, les observations de Hess et al. (1986) montrent que les mères japonaises insistent, davantage que les américaines, sur l'application correcte des procédures comme une route vers la compréhension. Par exemple, dans une tâche de classification, les mères japonaises semblaient accepter le (bon) placement des blocs (à classer) comme une preuve suffisante que les procédures ont été, ou pourraient être, comprises.

Le concept **"de la forme vers l'esprit"** (*from form to mind*) semble induire leur comportement dans les tâches d'enseignement. Ainsi, les mères japonaises essaient en

(2) Une conséquence presque directe de ce début tardif de l'école obligatoire est la durée exceptionnelle (4 ans) de l'école maternelle. Ceci contraste singulièrement avec la Corée où l'école maternelle est quasiment inexistante. D'ailleurs, il est intéressant de noter que, même lorsqu'ils émigrent aux E.-U., les parents coréens n'envoient pas, en général, leurs enfants à l'école maternelle (américaine).

premier de faire adopter à l'enfant la procédure dans sa forme correcte. Ensuite elles s'attendent à ce que l'enfant infère le principe correct, ou le concept, impliqué dans la tâche, en répétant la forme comportementale correcte. Ce style d'enseignement rappelle les méthodes traditionnelles d'enseignement combinant les habiletés cognitives et de performances qui sont utilisées couramment dans les arts classiques comme, par exemple, les arrangements floraux (d'après Hess et al., 1986). D'ailleurs, la psychologie américaine de l'instruction semble, aujourd'hui, découvrir aussi (ou redécouvrir ?) le rôle des habiletés procédurales dans la compréhension. Par exemple, récemment, Resnick et Omanson (1987), après plus de 50 pages de considérations sur l'apprentissage de la compréhension en arithmétique, ont terminé leur article en soulignant qu' « *un certain niveau d'habileté procédurale est une étape importante dans l'apprentissage de la compréhension de l'arithmétique* ».

En guise de (brève) conclusion, à cette dernière partie et à cette contribution, nous dirons que les groupements et le passage de la dizaine ont certainement un effet direct sur la compréhension de la numération. Plus hypothétiquement et théoriquement, ils peuvent aussi favoriser l'émergence ou exercer une opération générale et fondamentale de la pensée: le *chunking*. Mais cette insistance sur les groupements, en particulier de dix, ne doit pas nous faire croire que nous les considérons comme un facteur privilégié et unique de la supériorité asiatique. Au contraire, nous croyons que souvent plusieurs facteurs interagissent. Nous croyons également que **le facteur temps est le facteur de base** nécessaire à la bonne action ou interaction de ces facteurs. Par exemple, il explique très bien pourquoi les maîtres, japonais ici, avec souvent 40 élèves dans leur classe, passent, sur un sujet très ponctuel, tout le temps qu'il faut pour que même les élèves les plus faibles comprennent, et contribuent ainsi à cet enseignement que Dupuis (1981) qualifie de «*vraiment démocratique* ».

L'auteur voudrait remercier Rémi Brissiaud, Gérard Cartron, Claire Dupuis, Raymond Duval et Claire Meljac, pour leur conseils de rédaction.

Références

Allardice B.S. & Ginsburg H.P., 1983. Children's psychological difficulties in mathematics. In H.P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press.

Andler M., 1989. Un redressement difficile. *Dossiers & Documents (Le Monde),* avril 1989, p.8.

Baroody A.J., 1987. *Children's mathematical thinking: A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers.* New York: Teachers College (Columbia University).

Bauch J.P. & Hsu H.J., 1988. Montessori: Right or wrong about number concepts? *Arithmetic Teacher,* **35**, 8-11.

Bednarz N. & Janvier B., 1984. La numération: Les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N,* **33**, 6-31.

Brissiaud R., 1989. *Comment les enfants apprennent à calculer: Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles.* Paris: Retz.

Chen C. & Stevenson H.W., 1988. Cross-linguistic differences in digit span of preschool children. *Journal of Experimental Child Psychology,* **46**, 150-158.

Chen C. & Stevenson H.W., 1989. Homework: A cross-cultural examination. *Child Development,* **60**, 551-561.

Douady R., 1984. Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Paris VII: Thèse de Doctorat d'Etat.

Dupuis M., 1981. Les Japonais, la science et la technologie. *La Recherche,* **12**, 504-511.

Easley J., 1983. A Japanese approach to arithmetic. *For the Learning of Mathematics,* **3** , 8-14.

Fischer J.P., 1987. L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie,* **80**, 17-24.

Fischer J.P., 1988a. *11 - 3 = 9: Juste ou Faux ? Une méthode moderne d'évaluation de - et des progrès dans - la connaissance des faits numériques élémentaires.* Montigny-lès-Metz: CDDP de la Moselle.

Fischer J.P., 1988b. Les erreurs de lecture: un éclairage des sciences cognitives. *Psychologie Scolaire,* **65**, 23-38.

Fischer J.P., 1989. Deux ans de calcul au CM: mesure et interprétation des progrès. In R. Duval (Ed), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives: Vol. 2.* Srasbourg: IREM.

Fischer J.P. & Pluvinage F., 1988. Complexités de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **9**, 133 - 154.

Flieller A., 1989. Les comparaisons de cohortes et de générations dans l'étude psychométrique de l'intelligence. *Psychologie Scolaire,* **68**, 47-64.

Fuson K.C., 1988. *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer.

Ginsburg H., 1977. *Children's arithmetic.* New York: Van Nostrand.

Groen G.J. & Parkman J.M., 1972. A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review,* **79**, 329-343.

Hanna G., 1989. Mathematics achievement of girls and boys in grade eight: Results from twenty countries. *Educational Studies in Mathematics,* **20**, 225-232.

Hatano G., 1982. Learning to add and subtract: A japanese perspective. In T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale: Erlbaum.

Hatta T. & Ikeda K., 1988. Hemispheric specialization of abacus experts in mental calculation: Evidence from the results of time-sharing tasks. *Neuropsychologia,* **26**, 877-893.

Hennes C., Schmidt S. & Weiser W., 1979. Effekte der Behandlung nichtdezimaler Stellenwertsysteme im Mathematikunterricht der Grundschule: eine empirische Untersuchung. *Didaktik der Mathematik,* **4**, 318-328.

Hess R.D., Azuma H., Kashiwagi K., Dickson W.P., Nagano S., Holloway S., Miyake K., Price G., Hatano G. & McDevitt T., 1986. Family influences on school readiness and achievement in Japan and the United States: An overview of a longitudinal study. In Stevenson, Azuma & Hakuta (1986).

Holloway S.D., Kashiwagi K., Hess R.D. & Azuma H., 1986. Causal attributions by japanese and american mothers and children about performance in mathematics. *International Journal of Psychology*, **21**, 269-286.

Husén T., 1967. *International study of achievement in mathematics: A comparison of twelve countries (vol. II).* Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Huteau M., 1987. *Style cognitif et personnalité: La dépendance-indépendance à l'égard du champ.* Lille: Presses Universitaires.

Kamii C.K., 1985. *Young children reinvent arithmetic: Implications of Piaget's theory.* New York: Teachers College, Columbia University.

Kashiwagi A., Kashiwagi T. & Hasegawa T., 1987. Improvement of deficits in mnemonic rhyme for multiplication in japanese aphasics. *Neuropsychologia*, **25**, 443-447.

Leclercq J.M., 1984. *Education et société au Japon.* Paris: Anthropos.

Lynn R., 1982. IQ in Japan and the United States shows a growing disparity. *Nature*, **297**, 222-223 (dans la même revue, en 1983, critiques de Flynn J.R., **301**, 655 et de Stevenson H.W. & Azuma H., **306**, 291-2, et réponse de Lynn R., **306**, 292).

Marklund S., 1985. Sweden: System of education. In T. Husen & T.N. Postlethwaite (Eds), *The international encyclopedia of education: vol. 8.* Oxford: Pergamon Press.

Miller K.F. & Stigler J.W., 1987. Counting in chinese: Cultural variation in a basic cognitive skill. *Cognitive Development*, **2**, 279-305.

Miura I.T., 1987. Mathematics achievement as a function of language. *Journal of Educational Psychology*, **79**, 79-82.

Miura I.T., Kim C.C., Chang C.M. & Okamoto Y., 1988. Effects of language characteristics on children's cognitive representation of number: Cross-national comparisons. *Child Development*, **59**, 1445-1450.

Miura I.T. & Okamoto Y., 1989. Comparisons of U.S. and japanese first graders' cognitive representation of number and understanding of place value. *Journal of Educational Psychology*, **81**, 109-113.

Montessori M., 1926. *Pédagogie scientifique: La découverte de l'enfant.* Paris: Desclée De Brouwer, 1952.

Newell A. & Rosenbloom P.S., 1981. Mechanisms of skill acquisition and the law of practice. In J.R. Anderson (Ed), *Cognitive skills and their acquisition.* Hillsdale: Erlbaum.

Norman C., 1988. Math education: A mixed picture. *Science,* **241**, 408-409 (dans la même revue, critiques de Humphreys L.G., **241**, 1414 et de Stanley J.C., **241**, 1414).

Perret J.F., 1985. *Comprendre l'écriture des nombres.* Berne: Peter Lang.

Resnick L.B. & Omanson S.F., 1987. Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed), *Advances in instructional psychology: volume 3.* Hillsdale: Erlbaum.

Rosenbloom P. & Newell A., 1987. Learning by chunking: A production system model of practice. In D. Klahr, P. Langley & R. Neches (Eds), *Production system models of learning and development.* Cambridge: MIT Press.

Rosenzweig M.R. & Sinha D., 1988. *La recherche en psychologie scientifique: état actuel dans les pays industrialisés et les pays en développement.* Toulouse: Erès.

Schweickert R. & Boruff B., 1986. Short-term memory capacity: Magic number or magic spell? *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition,* **12**, 419-425.

Siegler R.S., 1988. Individual differences in strategy choices: Good students, not-so-good students, and perfectionists. *Child Development,* **59**, 833-851.

Song M.J. & Ginsburg H.P., 1987. The development of informal and formal mathematical thinking in Korean and U.S. children. *Child Development,* **58**, 1286-1296.

Song M.J. & Ginsburg H.P., 1988. The effect of the korean number system on young children's counting: a natural experiment in numerical bilingualism. *International Journal of Psychology,* **23**, 319-332.

Stevenson H., Azuma H. & Hakuta K. (Eds), 1986. *Child development and education in Japan.* New York: Freeman, 1986 (critique dans *Science,* **236**, 205-206, 1987).

Stevenson H.W., Lee S.Y. & Stigler J.W., 1986. Mathematics achievement of Chinese, Japanese, and American children. *Science,* **231**, 693-699.

Stevenson H.W., Stigler J.W., Lee S.Y., Kitamura S., Kimura S. & Kato T., 1986. Achievement in mathematics. In Stevenson, Azuma & Hakuta, 1986.

Stevenson H.W., Stigler J.W., Lee S., Lucker G.W., Kitamura S. &

Hsu C., 1985. Cognitive performance and academic achievement in Japanese, Chinese, and American children. *Child Development,* **56,** 718-734.

Stevenson H.W., Stigler J.W., Lucker G.W., Lee S., Hsu C.C. & Kitamura S., 1987. Classroom behavior and achievement of japanese, chinese, and american children. In R. Glaser (Ed), *Advances in instructional psychology: volume 3.* Hillsdale: Erlbaum.

Stigler J.W., 1984. "Mental abacus": The effect of abacus training on chinese children's mental calculation. *Cognitive Psychology,* **16,** 145-176.

Stigler J.W., 1988. The use of verbal explanation in japanese and american classrooms. *Arithmetic Teacher,* **36,** 27-29.

Stigler J.W., Lee S.Y., Lucker G.W. & Stevenson H.W., 1982. Curriculum and achievement in mathematics: A study of elementary school children in Japan, Taiwan, and the United States. *Journal of Educational Psychology,* **74,** 315-322.

Stigler J.W., Lee S.Y. & Stevenson H.W., 1987. Mathematics classrooms in Japan, Taiwan, and the United States. *Child Development,* **58,** 1272-1285.

Strom R., Park S.H. & Daniels S., 1987. Childrearing dilemmas of koreans immigrants to the United States. *Scientia Paedagogica Experimentalis,* **24,** 91-102.

Svenson O., 1975. Analysis of time required by children for simple additions. *Acta Psychologica,* **39,** 289-302.

Tsang S.L., 1984. The mathematics education of Asian Americans. *Journal for Research in Mathematics Education,* **15,** 114-122.

Uttal D.H., Lummis M. & Stevenson H.W., 1988. Low and high mathematics achievement in japanese, chinese, and american elementary-school children. *Developmental Psychology,* **24,** 335-342.

Wickelgren W.A., 1979. Chunking and consolidation: A theoretical synthesis of semantics networks, configuring in conditioning, S-R versus cognitive learning, normal forgetting, the amnesic syndrome, and the hippocampal arousal system. *Psychological Review,* **86,** 44-60.

Yoshida H. & Kuriyama K., 1986. The numbers 1 to 5 in the development of children's number concepts. *Journal of Experimental Child Psychology,* **41,** 251-266.

UNE EXPERIENCE D'ENSEIGNEMENT DE LA RECURSIVITE EN LOGO

C. DUPUIS, M.-A. EGRET et D. GUIN

We present here an experiment in a class with thirteen-fifteen years old students . Our aim was to elaborate a teaching about recursion which points out and splits difficulties of this notion . This research required an analysis of students productions to underscore these difficulties . The definition of specific criteria seems to be an appropriate tool for such a research .

Introduction

Cette étude s'intègre dans un ensemble de recherches de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Strasbourg liées à l'introduction de l'informatique dans le système scolaire. Elle a pour cadre le Groupement de Recherches "Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques" (du Centre National de la Recherche Scientifique) qui coordonne le travail de plusieurs équipes françaises de recherche sur la Didactique des Mathématiques et de l'Informatique[1].

Cette étude est le prolongement naturel d'une expérience d'enseignement de la programmation structurée en langage LOGO. La méthodologie est analogue, nous en rappelons succintement les idées principales[2].

Il n'existe pas actuellement d'enseignement d'informatique obligatoire au niveau secondaire. S'il n'y a pas d'enseignement, il n'y a pas de **difficultés** spécifiques connues, repérées, pas de **conceptions spontanées** identifiées. Puisque notre

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
3 (1990) (p. 143-162) IREM de Strasbourg

1 *On peut citer notamment C. Laborde , N. Balacheff, B. Mejias (1985), P. Mendelsohn (1985), J.. Rogalski (1988), R. Samurçay (1985).*

2 *Pour plus de détails , il est possible de consulter (C. Dupuis , M.-A. Egret et D.Guin 1987 , 1988 1 et 2).*

objectif est la mise au point d'un enseignement prenant en compte ces éléments, il nécessite une expérience d'enseignement et une analyse de **l'activité de programmation** des élèves, de leurs difficultés .

L'activité de programmation contraint les élèves à expliciter, par un programme écrit, leurs procédures de résolution. Cette explicitation reflète les connaissances acquises et les représentations qu'ont les élèves du fonctionnement du dispositif informatique. L'analyse des procédures de résolution implique donc la définition de **critères** d'analyse fondés, non seulement sur la ressemblance du résultat obtenu et du résultat demandé, mais encore sur les connaissances et les représentations sous-jacentes. Les résultats tirés de l'analyse permettront ensuite de modifier l'enseignement pour tenter de remédier aux difficultés apparues.

I Préexpérimentation [1]

a) Essais

Nous avons proposé à 8 élèves volontaires des procédures récursives que nous leur avons fournies. Nous avons mis à leur disposition, sur une idée de P.Mendelsohn, le schéma suivant :

POUR ESSAI : N		
SI : N = 0 ALORS [STOP]	***Remarques :***	N est supposé multiple de 10.
SPA		SPA, SPB sont des sous-procédures ou de
ESSAI : N-10		simples instructions.
SPB		
FIN		

Les élèves ont manipulé cette procédure ESSAI pour différentes sous-procédures SPA et SPB avec des variations systématiques (il s'agit ici d'une récursivité **linéaire**, c'est-à-dire que la procédure ESSAI n'a qu'un seul appel récursif). Pour chaque procédure

---

[1] *Cette partie de la préexpérimentation a duré 6 heures d'enseignement. Pour plus de détails, il est possible de consulter (C.Dupuis , M.-A. Egret et D.Guin 1985) .*

ESSAI, ils devaient noter par écrit une **prévision** de l'exécution. Si la prévision était fausse, ils essayaient d'expliquer l'erreur.

La manipulation de procédures récursives fournies à l'élève lui permet de se créer une représentation du **traitement d'une procédure récursive par le dispositif informatique,** à condition qu'on lui **propose des modèles** de fonctionnement de la récursivité lorsqu'il en ressent le besoin. Nous avons donc proposé aux élèves plusieurs **modèles** (il s'agissait de voir s'ils leur apportaient une aide sensible) : tout d'abord un modèle qui assimile l'appel récursif à une insertion de lignes, puis un tableau qui retrace l'ordre d'exécution des instructions de la procédure récursive.

La procédure récursive s'appelle elle-même, c'est ce qu'on désigne par le terme d'**autoréférence.** Dans un premier temps il faut convaincre l'élève que l'ordinateur accepte ce type de programme, c'est-à-dire qu'il peut l'exécuter. Une fois cette étape franchie, la **conception spontanée** de l'auto-référence est une forme de **retour au début** du programme. Cette conception spontanée (faire une action et recommencer) permet des prévisions d'exécutions correctes lorsque l'appel est **terminal** (situé à la fin de la procédure). Les procédures récursives fournies sont choisies de manière à remettre en question cette conception erronée en faisant apparaître des différences flagrantes entre les prévisions issues de cette conception et l'exécution de la procédure. De plus, les modèles de fonctionnement fournis mettent en évidence la **suspension** de l'exécution de la procédure appelante pour attendre la fin de la procédure appelée.

Remarquons que dans l'ensemble, à l'issue de cette phase, les prévisions sont correctes.

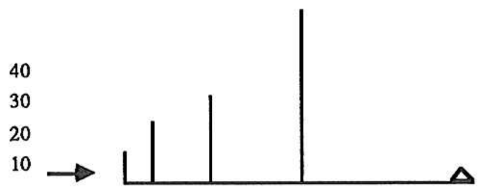
b) Projets

Nous avons ensuite demandé aux élèves d'écrire des procédures récursives en leur fournissant des exécutions de procédures dont voici deux exemples :

```
PROJET3  4 [UN DEUX TROIS QUATRE]

 4 Q
 3 T
 2 D
 1 U
 UUN
 DDEUX
 TTROIS
 QQUATRE
```

PROJET5 40



Les projets correspondaient aux réalisations de programmes récursifs à récursivité centrale, graphiques ou non graphiques, incluant parfois une procédure avant le STOP. Tous les élèves ont alors écrit au moins un programme correct, certains très rapidement.

Cette deuxième phase a permis de mettre en évidence **l'écart** existant entre la compréhension du **fonctionnement** d'une procédure récursive et son écriture. Celui-ci est lié au fait que l'écriture récursive nécessite la mise en place d'un **schéma fonctionnel statique** du type : pour construire l'objet de niveau n, on suppose construit l'objet de niveau n - 1. Les séances de travail que nous venons de décrire étaient centrées sur la compréhension du traitement d'une procédure récursive par le dispositif informatique, et non sur l'élaboration d'un tel schéma.

II Expérimentation *(15 h)*

Nous avons voulu élaborer des séquences d'enseignement sur la récursivité séparant les **différents types de difficultés** mises en évidence par la préexpérimentation. Nous avons donc dissocié :

- la recherche de l'**invariance** d'emboîtement de procédures (cf ci-dessous),
- l'exécution de procédures récursives fournies
- et l'écriture de procédures récursives.

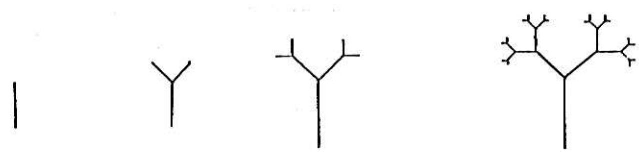
Nous avons travaillé avec une classe de 19 élèves (13-15 ans) de $4^{ème}$ puis de $3^{ème}$. Les élèves suivaient une heure hebdomadaire d'informatique en plus de leur horaire de mathématique normal. Cette heure supplémentaire, mais obligatoire, était assurée par leur professeur de mathématique. L'activité décrite ici se place au début de la deuxième phase, après 23 heures de pratique active de la programmation en Logo. A l'issue de la première phase, un test individuel nous a convaincues que les élèves avaient acquis les éléments de base de la programmation structurée graphique (C. Dupuis, M. - A. Egret, D. Guin, 1987).

1) Les courbes (recherche de l'invariance d'emboîtement) :

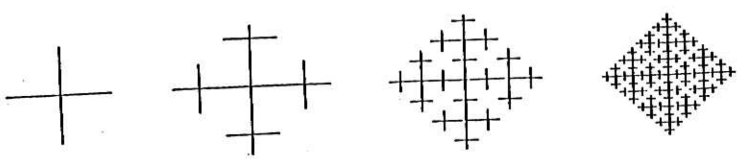
a) présentation de la situation :

Voici trois familles de courbes. Sur une même ligne sont dessinées quatre courbes de la même famille. Choisissez une famille, puis écrivez les programmes correspondant à chaque courbe, **en utilisant à chaque fois le programme précédent.**

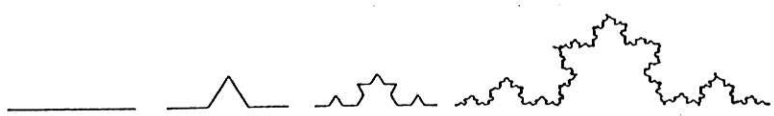
Les arbres



Les croix

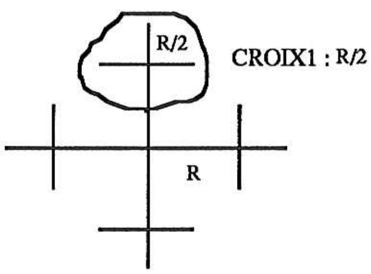


La courbe de Von Koch



Les élèves disposent des outils qui leur permettent d'écrire les programmes correspondant aux différentes courbes. Bien entendu, l'écriture ne sera pas récursive, étant donné qu'ils n'ont eu, à ce moment, aucun enseignement sur la récursivité. Il faut reconnaître qu'il s'agit pour eux d'une activité assez complexe comportant des difficultés de **structuration** et de **coordination** (cf. C. Dupuis, M-A. Egret et D.Guin 1987, 1988 1 et 2).

Tous les ingrédients nécessaires à la récursivité sont présents dans ces situations, sauf **l'auto-référence**. Chaque procédure peut faire appel au programme de la courbe précédente, toujours **de la même façon** : c'est ce que nous appelerons **invariance d'emboîtement**. Ce phénomène d'invariance est commun aux trois familles choisies. L'emboîtement de procédures différentes est le prolongement "naturel" des connaissances acquises en programmation structurée. Ce travail est donc consacré à la recherche de l'**invariance d'emboîtement**. Cette situation évite la difficulté liée à la **suspension de l'exécution** tout en préparant à la **représentation statique** du programme, nécessaire à l'écriture de procédures récursives : c'est un premier pas vers l'élaboration d'un schéma fonctionnel statique (J. Rogalski, G. Vergnaud, 1987). Prenons l'exemple des croix : le programme d'une croix quelconque s'écrit, en appelant **toujours de la même façon** le programme de la croix précédente :




```
POUR CROIX2 :R
REPETE 4 [AV :R CROIX1 :R/2 RE :R TD 90]
FIN
```

Pour les arbres et la courbe de Von Koch, les quatre étapes explicitées ne correspondent pas aux quatre premiers niveaux au sens récursif du terme. Les courbes représentées correspondent aux niveaux 1, 2, 3 et 5. Le niveau 4 a été volontairement omis ; la **courbe fantôme** qui lui correspond aurait sa place entre la troisième et la quatrième étape explicitée. L'écriture d'une procédure pour la courbe fantôme est indispensable pour que soit réalisée **l'invariance d'emboîtement** d'une courbe à la suivante dans la même famille.

La famille des arbres présente une particularité qui s'est révélée être une différence significative : **la présence de deux, trois puis cinq longueurs différentes** dans le même arbre. Aucune relation entre les longueurs n'était explicitée dans la consigne et nous n'avons donné aucune indication orale. Il faut reconnaître que nous n'avions pas prévu l'ampleur des **difficultés** rencontrées dans la **gestion des variables et des relations entre les variables.**

b) analyse de la situation :

Huit groupes d'élèves (sur neuf) ont choisi de programmer la famille des arbres. C'est donc les productions concernant la famille des arbres que nous avons analysées. Tous ces groupes ont écrit au moins une procédure par étape et, suivant la consigne, ils ont **tous emboîté** la procédure écrite à l'étape précédente dans la procédure de l'étape suivante. Comme nous l'avons vu précédemment, notre analyse repose sur la définition de critères. Chaque critère reflète un des aspects de l'activité. Nous ne définirons ici que le critère CODAGE révélant une des difficultés propres à l'emboîtement [1].

---

1 *Pour plus de détails , notamment sur les modalités de gestion des relations entre longueurs , il est possible de se reporter à (C. Dupuis, D. Guin, 1989-2) .*

critère CODAGE :

Trois modalités de codage des longueurs sont apparues : le codage descriptif, le codage analytique et l'absence de codage.

- *descriptif* :

Il y a dans chaque procédure **autant de variables** d'entrée que de longueurs différentes dans l'arbre correspondant, ce qui permet d'éviter l'explicitation d'une relation entre ces longueurs. Mais, en plus, les noms des variables changent d'une procédure à l'autre ce qui permet d'éviter tout **conflit de désignation.** Le nombre de variables utilisées pourrait faire croire que ces élèves possèdent à fond la notion de variable en Logo. En fait, c'est une illusion car ils ne font ici que **désigner des objets différents par des noms différents.**

Le choix de la procédure de résolution par codage descriptif est un bon choix pour nos élèves dans cette situation, car il permet de **traiter successivement** deux problèmes :

- d'abord l'**écriture** et la **coordination** de procédures, où tous les objets qui ne sont pas reconnus comme égaux sont désignés par des variables différentes,

- puis, au moment de l'exécution, l'**affectation** de valeurs aux variables désignant les longueurs.

- *analytique* :

Une même variable est utilisée dans toutes les étapes ; des **relations entre les longueurs sont alors explicitées en termes de variables** (C et C/2, C et 2*C ou C et C-10). La procédure de résolution par codage analytique est plus complexe puisqu'il faut alors **traiter simultanément** les deux problèmes suivants :

- l'écriture et la coordination des procédures,

- l'expression, en termes de variables, d'une **relation fonctionnelle** entre les longueurs et la gestion de la composition (due à l'emboîtement) de cette relation avec elle-même.

Cette procédure de résolution présuppose **l'explicitation** d'une relation entre les longueurs.

- *sans* :

aucune variable d'entrée n'est utilisée. Les longueurs données a priori sont modifiées par approximations successives en fonction de l'aspect à l'écran.

La réussite complète est obtenue par les deux groupes ayant travaillé en **codage descriptif** et un groupe qui, après avoir écrit les procédures des trois premiers arbres en codage analytique, a écrit la dernière procédure en codage descriptif. Il semble bien que le codage descriptif soit la procédure de résolution la plus efficace, dans cette situation, pour nos élèves. La procédure de résolution par **codage analytique** est objectivement **plus difficile** que la procédure de résolution par **codage descriptif.** Les difficultés supplémentaires qu'implique la procédure de résolution par codage analytique peuvent expliquer le changement de procédure d'un groupe au dernier niveau.

Le **choix** d'un type de codage, descriptif ou analytique, dans la résolution de problèmes de programmation peut dépendre de la situation. Mais la possibilité de choisir dépend surtout de la **représentation** que l'élève s'est construite du fonctionnement du dispositif informatique. Ce choix est donc un **indice observable** de cette représentation.

c) lien avec les mathématiques

M. Kourkoulos (à paraître), dans une étude menée avec les mêmes élèves sur la mise en équation de problèmes, a observé une similitude des procédures de résolution en mathématique :

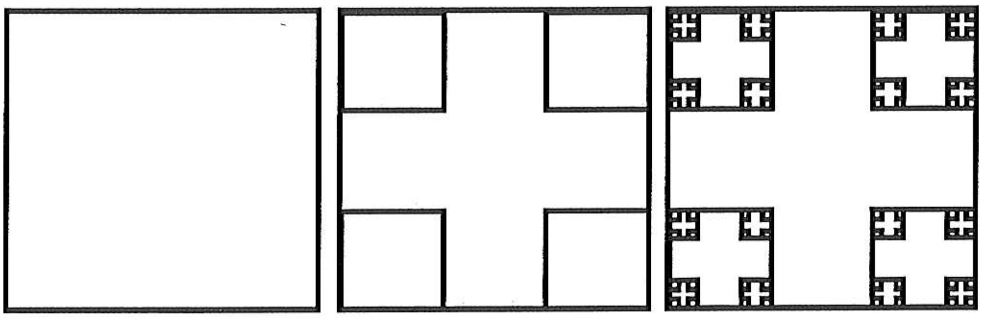
En ce qui concerne les problèmes qui peuvent être résolus par une équation du premier degré à une inconnue, la **réussite des élèves augmente** à partir du moment où ils "disposent" de **plusieurs variables**, c'est-à-dire après un enseignement des systèmes d'équations. L'augmentation de la réussite est d'autant plus évidente que le problème est difficile. M. Kourkoulos explique cette augmentation du taux de réussite par la **possibilité** d'utiliser plusieurs variables.

Il y a à la fois **convergence** entre les raisons qui amènent à utiliser plusieurs variables en mathématique et en Logo et **coïncidence** entre les élèves qui le font en mathématique et en Logo. L'explicitation d'une relation entre variables est une tâche qui s'apparente à la mise en équations d'un problème de mathématique.

d) une nouvelle situation : les carrés

Nous avons voulu savoir si le codage **descriptif** était effectivement utilisé pour **contourner des difficultés** lors de la résolution d'un problème de programmation, et ce même lorsqu'une relation **fonctionnelle** est **connue.**

Nous avons donc décidé de proposer une nouvelle famille de courbes :



(étape 1) (étape 2) (étape 3)

en explicitant oralement une relation **fonctionnelle** (chaque carré a pour côté le tiers du côté du carré qui l'entoure). La détermination de la relation n'était donc plus à la charge de l'élève. Par contre, l'expression de cette relation en termes de variables devait être trouvée.

Nous avons constaté que tous les groupes ont utilisé une seule variable pour écrire les programmes de cette famille de courbes. L'analyse des différentes situations confirme bien que, lorsqu'une relation fonctionnelle entre les variables est **connue** des élèves, ils cherchent à l'exprimer par un **codage analytique** et à l'utiliser tant que cette procédure de résolution est **compatible** avec leur représentation du fonctionnement du dispositif.

2) *Essais*

Cette partie s'est déroulée de manière analogue à celle de la préexpérimentation (cf I.a).

3) *Ecriture de procédures récursives*

a) Ecriture récursive des courbes.

L'objectif de cette séance est alors d'écrire récursivement les programmes correspondant aux différentes familles de courbes. A titre d'exemple, le programme récursif de la croix de niveau N dont la branche a pour mesure L peut s'écrire :

```
POUR CROIX  : L : N
SI : N = 0 ALORS [STOP]
REPETE 4 [AV : L  CROIX  : L / 2 : N -1 RE  : L  TD 90]
FIN
```

Le passage d'une écriture respectant l'invariance d'emboîtement à une écriture récursive se fait sans difficultés, bien qu'il s'agisse ici d'une récursivité non linéaire. L'invariance d'emboîtement mise en évidence auparavant a favorisé une représentation statique de la procédure, nécessaire à l'écriture récursive. Il est clair que cet objectif n'aurait pu être atteint sans le travail préalable sur la recherche de l'invariance d'emboîtement. Signalons que cette activité, quoique très dirigée, a beaucoup plu aux élèves.

b) Projets

Cette partie s'est déroulée de manière analogue à celle de la préexpérimentation (cf I.b).

III Test.

1) Construction du test.

Le but de ce test est de repérer les conceptions que les élèves se sont construites du **fonctionnement d'une procédure récursive**, plus particulièrement lorsque la récursivité est **centrale.** Pour cela, nous avons choisi de faire passer un test individuel papier-crayon (donc sans accès à l'ordinateur) en demandant, pour chaque exercice, une prévision d'exécution de la procédure fournie. Contrairement à ce qui peut se produire lorsque l'on demande l'écriture de procédures récursives, il n'est pas possible de contourner les difficultés liées au fonctionnement du dispositif informatique.

Nous avons choisi de ne pas nous limiter à des situations où la réussite est possible avec une règle d'action globale (lorsqu'il s'agit de procédures récursives avec appel central) de la forme : "avant l'appel, ça décroit et après l'appel, ça croit". Dans de telles situations, les conceptions des élèves sont difficilement identifiables. Cette règle d'action globale était cependant suffisante pour écrire bon nombre des procédures récursives que nous avions demandées dans les "projets" (cf. I b).

Ce test s'est déroulé en deux séances, espacées d'une semaine, sans corrigé entre les deux séances. Les élèves étaient invités à consulter leur cahier d'informatique contenant les fiches de cours et les programmes qu'ils avaient réalisés. Ils ont été un peu déroutés lors de la première séance par la forme des questions posées. Nous avons constaté que la première séance a eu un effet d'entraînement à ce type d'activité et que certains types de prévisions fausses ont disparu complètement lors de la deuxième séance.

Les énoncés sont construits suivant deux variations du schéma ESSAI (cf. I.a) :

Type de récursivité :

- récursivité terminale, c'est-à-dire absence de SPB et absence d'opérations sur l'appel
- récursivité avec appel au début, c'est-à-dire absence de SPA
- récursivité centrale, c'est-à-dire présence de SPA et SPB.

Type de sous-procédures SPA et SPB :

- écriture de valeurs de variables
- graphique (dessin dont les dimensions varient en fonction du niveau)
- liste (écriture de lettres d'un mot)

Pour permettre une meilleure observation, les énoncés choisis ne combinent pas les difficultés. SPA et SPB sont toujours du même type dans ces tests, sans être identiques. Voici trois exercices extraits du test :

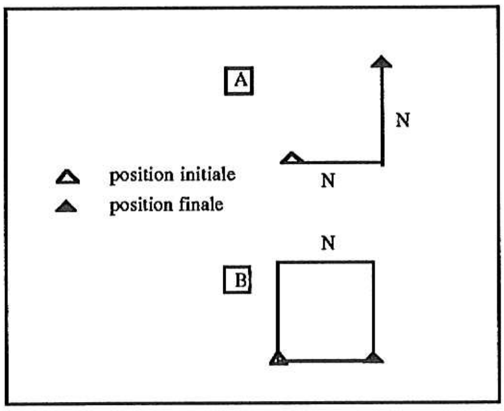
exercice a :

```
POUR TOTI   :MOT
SI VIDE? :MOT ALORS [STOP]
ECRIS DER    :MOT
TOTI SD      :MOT
ECRIS PREM  :MOT
FIN
```

La prévision d'exécution était demandée pour TOTI "SAC

exercice b :

La procédure ESSAI étant rappelée, la prévision d'exécution était demandée pour ESSAI 30, avec les sous-procédures SPA (dessin de A) et SPB (dessin de B) suivantes :



exercice c :

```
POUR    TOTO :N
SI      : N = 1   ALORS  [STOP]
ECRIS   :N - 1
TOTO    :N - 2
ECRIS   :N
FIN
```

La prévision d'exécution était demandée pour TOTO 9.

2) *Analyse des productions des élèves* .

a) Un critère d'analyse : prévision d'exécution en récursivité centrale[1].

S - exécution séquentielle

Les procédures sont exécutées dans l'ordre où elles sont écrites, une seule fois. C'est le type de prévision le plus "loin" de la récursivité. On n'y voit aucune trace de l'enseignement de la récursivité.

R - l'appel récursif central ne déclenche pas la suspension de l'exécution de la procédure appelante.

La conception spontanée de l'auto-référence est le retour au début du programme. On voit cette conception en œuvre dans les différentes modalités "R". Cette conception est d'autant plus difficile à mettre en échec qu'elle permet, par ailleurs, des prévisions d'exécution correctes pour les programmes en récursivité terminale.

R 0 et R 0 AT Les procédures situées après l'appel ne sont jamais exécutées,
R 0 AT : et la prévision d'exécution de SPA est correcte
R 0 : et la prévision d'exécution de SPA n'est pas correcte

R 1 et 2 Les procédures situées après l'appel sont prises en compte lorsque le test d'arrêt est vrai et sont alors exécutées :
R 1 : soit pour la seule valeur initiale de la variable
R 2 : soit pour la dernière valeur de la variable avant le STOP.

RFin 1, 2 et 3 Toutes les procédures sont exécutées dans l'ordre où elles sont écrites et pour toutes les valeurs de la variable. Mais la variable change de valeur :
RFin 1 soit après chaque exécution de SPB
RFin 2 soit avant chaque exécution de SPB
RFin 3 soit avant et après chaque exécution de SPB.

---

1 *Nous ne présenterons ici qu'un seul des critères d'analyse. Pour plus de détails, on peut consulter (C. Dupuis, D. Guin, 1989-1).*

Les modalités classées sous “S” et “R” traduisent la **méconnaissance de l'aspect suspensif** dans l'exécution d'une procédure récursive.

D A T - La procédure fonctionne comme une succession de Deux programmes récursifs avec Appel Terminal.

On voit ici aussi en œuvre la conception spontanée d'un retour à un début des procédures, plus sans doute aussi le "souvenir" qu'en récursivité centrale il y a autant d'exécutions de la procédure SPA que de la procédure SPB. Un pas est fait dans la bonne direction. Une partie de **l'aspect suspensif** de la récursivité a été perçue.

C - prévision correcte.

Même dans le cas d'une prévision correcte isolée, il n'est pas certain que le modèle de fonctionnement que l'élève s'est construit soit correct. Un modèle global "miroir", tel qu'il est décrit ci-après, permet des prévisions correctes dans de nombreuses situations.

Prévisions pour ESSAI 30

S	R0	R1	R2	Rfin1	RFin2	RFin3	DAT	Correct
SPA 30	SPA 30	SPA 30	SPA 30	SPA 30	SPA 30	SPA 30	SPA 30	SPA 30
SPB 30	SPA 20	SPA 20	SPA 20	SPB 30	SPB 20	SPB 20	SPA 20	SPA 20
	SPA 10	SPA 10	SPA 10	SPA 20	SPA 20	SPA 10	SPA 10	SPA 10
		SPB 30	SPB 10	SPB 20	SPB 10		SPB 30	SPB 10
				SPA 10	SPA 10		SPB 20	SPB 20
				SPB 10			SPB 10	SPB 30

b) Modèle global "miroir"

Nous avons mis en évidence pour des procédures spécifiques SPA et SPB un modèle erroné qui conduit parfois à des prévisions correctes : nous l'avons appelé modèle global **"miroir"**. Prenons l'exemple de la procédure TOTI : MOT (exercice a, cf.III.1) La prévision d'exécution était demandée pour le mot SAC. La prévision correcte était :

C A S S S S

Suivant un modèle global **" miroir "**, l'élève fournit la réponse :

C A S S A C

qui provient d'une prévision correcte de l'exécution de la procédure **avant** l'appel (C A S). La prévision est complétée par symétrie, comme dans un miroir, bien que les instructions avant et après l'appel ne soient pas identiques. On peut aussi obtenir d'autres réponses "miroir" résultant de prévisions fausses de la procédure avant l'appel.

3) Résultats et commentaires

Les phénomènes les plus marquants sont la **grande variété des erreurs et l'instabilité des comportements de réponses.** Ainsi, par exemple, les prévisions de la majorité des élèves sont correctes pour l'exercice b (cf. III.1) : 16 réussites sur 18 élèves présents. En revanche, ils ne sont que 6 à faire une prévision correcte pour l'exercice a et 2 pour l'exercice c.

La différence de réussite entre les trois exercices a, b et c s'explique par la conjonction de caractéristiques qui rendent l'exercice b plus facile que les deux autres (analogie avec des exemples programmés, le test d'arrêt est à 0 et un éventuel dessin de taille 0 est invisible). De plus, un modèle global "miroir" donne des prévisions correctes. En effet, l'exercice b est le seul des trois à être "symétrique" et la gestion des valeurs de la variable y est beaucoup plus simple (on constate 3 prévisions correspondant à un modèle global "miroir" pour a et 6 pour c ; elles sont toutes associées à une prévision correcte pour l'exercice b).

On observe aussi **un phénomène de retour à des conceptions antérieures ou plus primitives** lorsque la difficulté s'accroît. Ce phénomène de retour à une conception antérieure "dans la difficulté" a déjà été observé précédemment avec les mêmes élèves. Ainsi, à la fin de la phase d'enseignement de la programmation structurée, nous avions écrit : <<on peut affirmer (...) que les éléments de base d'une programmation graphique structurée sont en place chez ces élèves. La structuration des programmes est devenue une méthode efficace de résolution de problème.>> (Dupuis, Egret, Guin, 1987). Cependant, nous avons constaté lors de l'écriture des programmes pour les arbres (cf II.1 a) que deux groupes d'élèves avaient écrit des procédures graphiques sans structurer leurs programmes (Dupuis, Guin, 1989-2).

Conclusion

En ce qui concerne la phase de recherche de l'invariance d'emboîtement, les observations faites sur les choix de codage, la gestion des variables et des relations fonctionnelles confirment l'existence d'un **lien** étroit entre, d'une part, le **codage** des variables et leur gestion et, d'autre part, la **représentation** du traitement d'une procédure par le dispositif informatique :

- représentation exclusivement en termes d'**exécution,** dont un indice observable est le codage descriptif,

- représentation **statique** en termes d'états et de relations entre ces états, dont un indice observable est le codage analytique.

Durant la phase d'écriture de programmes récursifs, l'écriture récursive des familles de courbes a été bien réussie. De plus, tous les élèves ont été capables d'écrire au moins une procédure récursive correcte pour un "projet", en interaction avec l'ordinateur.

Cependant, l'étude de leurs prévisions d'exécution montre une grande diversité d'erreurs (si l'on considère l'ensemble des exercices que nous leur avions proposés), des procédures incorrectes et des erreurs instables pour la plupart d'entre eux, l'accroissement des difficultés induisant souvent un **retour** à des **conceptions antérieures.**

Nous avons constaté que les élèves se dégagent **progressivement** d'une représentation d'une procédure exclusivement en termes d'exécution, et accèdent à une **représentation statique** nécessaire à l'écriture récursive au fur et à mesure qu'ils intègrent les caractéristiques du traitement par le dispositif informatique. Toutefois, une représentation même erronée, tel le modèle global "miroir", est suffisante pour écrire correctement bon nombre de procédures récursives (possédant une certaine symétrie).

Ainsi, si l'objectif de l'enseignement est une bonne compréhension du traitement d'une procédure récursive par le dispositif informatique, l'enseignement devra être modifié de manière à casser cette conception fausse. Par contre, si l'objectif est plutôt l'écriture récursive, on peut émettre l'hypothèse qu'une conception partielle, même erronée, est suffisante dans un premier temps.

Références :

DUPUIS C. , EGRET M. - A. , GUIN D. (1985) : *Récursivité et Logo - 1 : Préexpérimentation,* I.R.E.M de Strasbourg .

DUPUIS C., EGRET M.- A., GUIN D. (1987) : *Logo 3 . Programmation structurée: Présentation et Analyse de situations* , I.R.E.M. de Strasbourg, F-67084 Strasbourg.

DUPUIS C., EGRET M. - A. , GUIN D. (1988-1) : Pour une analyse multi-critères de l'activité de programmation en Logo, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* , vol .1, pp 111-130 , IREM de Strasbourg .

DUPUIS C, EGRET M - A , GUIN D. (1988-2) : Présentation et analyse d'activités de programmation en LOGO , *Petit X* , n° 18, pp. 47-69, I.R.E.M de Grenoble .

DUPUIS C. , EGRET M.- A. , GUIN D. : (à paraître), *Récursivité et Logo 2 : Présentation et Analyse de situations* , I.R.E.M. de Strasbourg, F-67084 Strasbourg.

DUPUIS C., GUIN D. (1989-1) : Représentations du fonctionnement d'une procédure récursive en Logo, *Psychology of Mathematics Education,* Actes de la 13e conférence internationale, vol. 1, pp. 220-227, Paris, Juillet 1989.

DUPUIS C., GUIN D. (1989-2) : Gestion des relations entre variables dans un environnement de programmation LOGO, *Educational Studies in Mathematics,* vol 20 n° 3, Information Technology and Mathematics Education, pp. 293-316.

KOURKOULOS M. (à paraître) :*Thèse de doctorat* , I.R.E.M. de Strasbourg, Université Louis Pasteur, F-67084 Strasbourg.

LABORDE C., BALACHEFF N., MEJIAS B.(1985) : "Genèse du concept d'itération une approche expérimentale" , *Enfance* , Vol. 2 / 3 , pp. 223 - 239 .

MENDELSOHN P.(1985) : "L'analyse psychologique des activités de programmation chez l'enfant de CM 1 et CM 2" *Enfance* , Vol. 2 / 3 , pp. 213 - 221.

ROGALSKI J. (1988) : "Acquisition de structures conditionnelles : effet des prérequis logiques et des représentations du dispositif informatique", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* , N°1, pp 131 - 152.

ROGALSKI J., VERGNAUD G.(1987) : Didactique de l'Informatique et acquisitions cognitives en programmation , *Psychologie française* , vol 32-4, pp. 267-273.

SAMURCAY R.(1985) : "Signification et fonctionnement du concept de variable informatique chez des élèves débutants", *Educational Studies in Mathematics,* N° 16, pp.143-161.

POUR LE DEVELOPPEMENT DES STRUCTURES ITERATIVES ET RECURSIVES.

KRISTINA HAUSSMANN UND MATTHIAS REISS

Apprendre à programmer signifie pour une part essentielle acquérir une bonne familiarité avec les structures de contrôle. Pour cela, la répétition joue un rôle particulier ; elle se fait selon deux modalités structurellement différentes : l'itération et la récursivité. Travailler de façon itérative, c'est dérouler un processus de la même manière et de nombreuses fois, successivement. Au contraire, avec une solution récursive, un problème est ramené à un problème de structure analogue et plus simple. La résolution de ce problème plus simple conduit à celle du problème posé. Une hiérarchie de problèmes partiels se trouve ainsi construite. Avec l'itération, les pas particuliers se succèdent uniformément l'un à la suite de l'autre ; avec la récursivité, ils sont ordonnés sur des plans différents.

L'itération et la récursivité présentent une analogie du point de vue mathématique, mais elles sont liées à deux modes de pensée distincts. Pour les décrire, nous prendrons des exemples d'une part parmi les programmes Logo produits par des élèves entre 12 et 15 ans, et d'autre part parmi les solutions qu'ils proposent au problème de la TOUR DE HANOI. Les élèves ont pris part, durant à peine neuf mois, à un groupe libre de travail dans lequel ils ont appris les bases de la programmation en Logo. Nous avons observé la façon dont les élèves faisaient usage du langage de programmation et quelles structures de contrôle ils mettaient en œuvre dans leurs solutions. Pour cela nous avons fait, à deux reprises, durant l'apprentissage du Logo, des entretiens individuels avec tous les élèves du groupe, la première fois après une dizaine de séances environ, et la seconde fois à la fin du cours. Des problèmes significatifs pour l'activité de programmation y ont été proposés. Le problème de la TOUR DE HANOI fut l'un d'entre eux ; c'est un problème de nature récursive, dont la résolution est indépendante des connaissances de programmation. En plus des entretiens individuels, nous disposons des protocoles de travail des élèves au cours des différentes séances Logo. Nous avons analysé les programmes produits par les élèves au cours des séances.

Quand on considère les programmes des élèves pour les problèmes qui exigent une répétition, on peut distinguer différentes méthodes. Il y a ainsi des élèves qui s'efforcent d'appliquer des solutions itératives au sens strict. Pour eux, l'utilisation de la commande Logo REPEAT est décisive. En particulier, l'homogénéité des pas successifs est prise en considération. L'essentiel consiste dans l'identification et la définition des variables appropriées. Aussi, le changement qui est caractéristique d'un processus récursif n'est pas vu comme une simplification. Chaque processus partiel est homogénéisé et rangé par rapport aux autres. Une approche plus globale de tels problèmes peut être décrite comme passage d'une solution itérative à une solution notée de façon récursive. Les élèves qui suivent ce chemin voient d'abord, dans un problème donné, la structure itérative. Mais ils reconnaissent alors que la commande REPEAT n'admet la description d'une solution que de façon détaillée. Il leur vient ainsi à l'idée que les similitudes structurelles de morceaux de solutions peuvent être exprimées par une notation récursive. Il y a aussi des élèves qui font directement usage de procédures récursives. On repère dans leurs programmes tous les éléments d'un processus récursif. En particulier, on y trouve des appels récursifs emboîtés.

Des différences similaires peuvent être remarquées dans les solutions pour le problème de la TOUR DE HANOI. Pour cela nous avons analysé les solutions trouvées pour ce problème dans une double perspective. Nous avons pris comme critères de réussite d'une part le nombre de déplacements et d'autre part le type de déplacement. Nous avons pu ainsi repérer différents groupes d'élèves. Deux d'entre eux présentent un interêt particulier. Celui des élèves qui reconnaissent ici la structure récursive du problème et qui parviennent ainsi à une solution optimale. Et celui des élèves dont le point de vue avait été auparavant caractérisé comme itératif. Ils adoptent une stratégie locale, commandée pour chaque phase de la solution par le but partiel, et qui conduit à chaque fois à mettre les plus grands disques au-dessus de la pile à construire. Mais il ne leur vient pas l'idée de les placer sur les disques qui restent encore à déplacer.

ZUR ENTWICKLUNG ITERATIVER UND REKURSIVER STRUKTUREN

KRISTINA HAUSSMANN UND MATTHIAS REISS

Einleitung

Programmieren lernen bedeutet zu einem wesentlichen Teil, die Fähigkeit für einem sachgerechten Umgang mit Kontrollstrukturen erwerben. Jedes mit dem Computer bearbeitbare Problem kann nämlich als Programm geschrieben werden mit Hilfe von *Sequenzen* einzelner Schritte, durch die Definition *bedingter Handlungen*, die nur unter gewissen Voraussetzungen ausgeführt werden, und über die Zusammenfassung dieser Grundelemente in Form von *Wiederholungen*. Diese drei Typen von Kontrollstrukturen, also die Sequenz, die Bedingung und die Wiederholung, sind notwendig und reichen auch gleichzeitig aus, um jede Problemlösung als Computerprogramm darzustellen. Die Implementationen von Sequenzen und Bedingungen in den verschiedenen Programmiersprachen unterscheiden sich mehr oder weniger nur im Grad des Komforts, der für den Programmierer bereigestellt wird. Bei der Wiederholung hingegen gibt es zwei strukturell verschiedene Arten der Realisierung. Diese beiden Formen sind die Iteration und die Rekursion.[1]

Benutzt man die Iteration als Kontrollstruktur für eine Wiederholung, so bedeutet das, daß ein Prozeß in gleicher Art und Weise mehrmals hintereinander ausgeführt wird. Es kann dabei explizit vorgegeben sein, wie oft eine Handlung zu wiederholen ist. Man spricht dann von einer gezählten Wiederholung. Es kann aber auch angegeben sein, daß eine Handlung so oft wiederholt wird, bis eine bestimmte Situation erreicht ist. In beiden

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
3 (1990) (p. 165-193) IREM de Strasbourg

[1]Die sprachliche Regelung ist hier nicht einheitlich. Wir wählen Wiederholung als Oberbegriff über die beiden Begriffe Iteration und Rekursion. Häufig werden auch Iteration und Wiederholung gleichgesetzt und von der Rekursion als Verschachtelung abgesetzt.

Fällen können sich Variablen im Laufe des Prozesses ändern, denn das ist bei einer Iteration selbstverständlich möglich.
Entscheidend für die Kennzeichnung eines Prozesses als iterativ ist vielmehr zum einen die Wiederholung selbst und zum anderen die Tatsache, daß ein einzelner Schritt mit dem Durchlaufen der Wiederholung abgeschlossen ist und ein endgültiges Ergebnis hat. Es gibt eventuell Zwischenergebnisse, die sofort weiterverarbeitet werden, es gibt aber keine Zwischenergebnisse, die in irgendeiner Form gespeichert werden müssen, weil zu einem späteren Zeitpunkt auf sie zurückgegriffen wird.
Die Rekursion als Mittel der Realisierung von Wiederholungen in einem Programm unterscheidet sich von der Iteration insbesondere in diesem letztgenannten Punkt. Bei einer rekursiven Betrachtungsweise wird ein Problem nicht direkt gelöst, sondern auf ein einfacheres strukturgleiches Problem zurückgeführt. Die Lösung dieses einfacheren Problems geht in die Lösung des eigentlichen Problems ein. Falls auch das einfachere Problem nicht direkt lösbar ist, setzt man den Gedankengang in gleicher Weise fort. Wiederum wird ein strukturgleiches, noch einfacheres Problem gesucht, auf das die momentan zu lösende Aufgabe reduziert werden kann. Es ergibt sich so eine Folge von Teilproblemen, von denen jedes etwas einfacher ist als sein Vorgänger. Es gibt in dieser Kette ein einfachstes Problem, das eine offensichtliche, direkte Lösung hat. Insbesondere wird auf diese Weise eine Hierarchie von Teilproblemen aufgebaut. Die einzelnen Schritte stehen nicht gleichberechtigt nebeneinander, sondern sind in verschiedenen Ebenen angeordnet. Durch Backtracking vom trivialen Fall auf der untersten Ebene bis zurück zur höchsten Ebene bekommt man eine Lösung des eigentlichen Problems. Dabei ist ein einzelner Schritt in der Problemlösung nicht zu dem Zeitpunkt erledigt, in dem er ausgeführt ist. Vielmehr bedeutet die Verwendung der Rekursion das Arbeiten in einer Hierarchie von Einzelproblemen und die Übergabe von Werten zwischen den Ebenen (REISS, 1984).
In den verschiedenen Programmiersprachen sind Wiederholungen sehr unterschiedlich realisiert. Es gibt Sprachen wie FORTRAN oder ältere Versionen von BASIC, die nur iterative Kontrollstrukturen kennen. Viele neuere Sprachen verfügen sowohl über iterative als auch über rekursive Kontrollstrukturen. Beispiele sind etwa PASCAL und LISP, zwei Sprachen, die sich ansonsten sehr stark voneinander unterscheiden. Es gibt aber auch Sprachen wie PROLOG, in denen Wiederholungen immer über einen rekursiven Aufruf realisiert werden müssen. Daraus ergeben sich für das Erstellen eines Programmes keine

prinzipiellen Schwierigkeiten. Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet sind Iteration und Rekursion äquivalent. Eine Problemlöung, die iterativ formuliert ist, kann genauso rekursiv formuliert werden und umgekehrt. Betrachtet man allerdings Iteration und Rekursion als Problemlösemethoden, dann kann die eine oder andere Art der Formulierung für ein Problem, zumindest subjektiv vom Problemlösenden aus gesehen, angemessener sein. Beide Problemlösemethoden sind entsprechend mit verschiedenen Denkmodi verbunden, die wir als iteratives und rekursives Denken bezeichnen (HAUSSMANN & REISS, 1989).
Wir wollen im folgenden Beispiele aus zwei verschiedenen Problemlösebereichen für diese beiden unterschiedlichen Denkmodi geben. Dabei verwenden wir zum einen von Schülern erstellte LOGO-Programme und zum anderen ihre Lösungen für das Problem des TURM VON HANOI.

Rekursion und rekursives Denken

Der Begriff der Rekursion und die kognitive Repräsentation rekursiver Prozesse sind durch die Bedeutung von Programmiersprachen in letzter Zeit zum Gegenstand von Untersuchungen geworden (SPOHRER, SOLOWAY & POPE, 1985; MÖBUS, SCHRÖDER & COLONIUS, 1986; VORBERG, GRÜNER, HAHN, HEIM, SCHULZE & WAGNER, 1986; SCHMALHOFER & KÜHN, 1986; WALOSZEK, WEBER & WENDER, 1986). Die Rekursion ist ein ursprünglich mathematisches Konzept, das Eingang in die Informatik gefunden hat. In beiden Disziplinen spielt sie eine wichtige Rolle. Die Verwendung rekursiver Kontrollstrukturen oder auch nur ein elementares Verständnis dieser Strukturen bereitet allerdings sowohl jugendlichen als auch erwachsenen Programmieranfängern erhebiche Schwierigkeiten (KURLAND & PEA, 1983; HAUSSMANN, 1985; HAUSSMANN, 1986), die nicht durch die schematische Vorgabe einzelner Schritte zu lösen sind. Es ist daher wichtig, die kognitiven Prozesse zu untersuchen, die stattfinden, bevor die rekursive Problemlösung erreicht ist.
Es gibt trotz der Bedeutung der Rekursion keine Definition des Begriffs, die allgemein akzeptiert wäre (HAUSSMANN & REISS, 1986). Was unter Rekursion zu verstehen ist, wird in sehr unterschiedlicher Art und Weise gesehen, wobei sich einzelne Definitionen vor allem darin unterscheiden, in welchem Kontext sie stehen und wie eng oder weit sie gefaßt sind (BARFURTH, 1987). In der Mathematik sind etwa rekursive Definitionen von

besonderem Interesse, in der Informatik steht die Betrachtung und Formulierung rekursiver Algorithmen im Vordergrund.
Eine sehr allgemeine Auffassung der Rekursion findet man bei HOFSTADTER (1985). Er bezeichnet damit Verschachtelungen und Varianten der Verschachtelung. Rekursiv in diesem Sinne sind etwa Geschichten innerhalb von Geschichten, rekursiv sind Filme innerhalb von Filmen, rekursiv ist auch die russische Puppe Matrioschka, in der sich kleinere Kopien ihrer selbst finden. Insbesondere ist Rekursion ein Alltagsphänomen, mit dem man intuitiv Erfahrungen sammelt. Das Wesen der Rekursion liegt darin, daß man ein Objekt nicht explizit, sondern durch einfachere Versionen seiner selbst beschreibt (HOFSTADTER, 1985, S.165). Als wesentliches Charakteristikum des rekursiven Prozesses stellt HOFSTADTER das Arbeiten auf verschiedenen Ebenen heraus. Ein Hauptbegriff ist dabei der Begriff des Stapels. Man hat auf einen Stapel nur Zugriff von einer Richtung, man kann also oben etwas wegnehmen oder aber etwas hinzufügen. Soll ein bestimmtes Element aus dem Stapel genommen werden, so müssen eventuelle Hindernisse vorher eines nach dem anderen abgeräumt werden. In ähnlicher Weise werden bei einem rekursiven Prozeß Stapel von Teilaufgaben aufgebaut, deren Bearbeitung jeweils zugunsten einer anderen Teilaufgabe verschoben wurde. Es wird auf verschiedenen Ebenen gearbeitet, zwischen denen nicht beliebig gewechselt werden kann. Von einer bestimmten Ebene kommt man auf direktem Wege nur in die folgende oder die vorhergehende Ebene. Dieses Verständnis der Rekursion wird übrigens auch von PAPERT (1980) geteilt.
Viele Definitionen der Rekursion lassen deutlich erkennen, daß sie aus der Informatik kommen. Das trifft auch für die Definition von ROBERTS (1986) zu, der rekursive Algorithmen betrachtet und den Begriff damit in den Kontext des Problemlösens stellt. Für ihn ist Rekursion "the process of solving a large problem by reducing it to one or more subproblems which are (1) identical in structure to the original problem and (2) somewhat simpler to solve" (ROBERTS, 1986, S. 1). Bei HOFSTADTER sind auch der unendliche Prozeß und vor allem das auch von PAPERT (1980) so betonte Spielen mit der Unendlichkeit prinzipiell möglich. Bei ROBERTS hingegen ist das Ziel eine Lösung des Problems und nicht nur seine sukzessive Vereinfachung.
In vielen Fällen wird aber von Rekursion erst dann gesprochen, wenn die folgenden drei hauptsächlichen Merkmale in einem Prozeß erfüllt sind :

1. Ein Problem wird auf ein strukturgleiches, einfacheres Problem reduziert.
2. Es entsteht eine Folge solcher einfacheren Probleme, von denen eines identfiziert werden kann, das unmit telbar eine Lösung hat.
3. Durch stufenweises Zurückgehen werden die Lösungen einer Ebene erzeugt und in der jeweils höheren Ebene verwendet.

Da die rekursive Lösung eines Problems immer nur eine von mehreren möglichen ist, kann rekursives Denken nicht über eine Aufgabe, sondern nur über den Lösungsweg beschrieben werden. Man kann davon ausgehen, daß eine Person rekursiv denken, wenn in einer Problemlösung die oben angegebenen drei Schritte zu identifizieren sind, wenn also ein Problem reduziert wird auf strukturgleiche Unterprobleme, ein einfachster Fall identifiziert und direkt gelöst wird und die Lösung der jeweils einfacheren Fälle in die Lösung der Fälle auf einer höheren Ebene eingeht. Doch spielen diese Schritte nicht nur in ihrer Gesamtheit, sondern auch einzeln eine Rolle. Sie sind jeweils für sich genommen Indikatoren für ein Arbeiten in Richtung auf eine rekursive Lösung. Rekursives Denken hat hingegen nichts damit zu tun, ob eine Person ganz bewußt Lösungsschritte in einer maschinenähnlichen Art und Weise überlegt. Es geht hier insbesondere auch nicht darum, einzelne Stufen des rekursiven Prozesses explizit zu antizipieren oder zu verfolgen. Rekursives Denken umfaßt vielmehr das Erkennen der grundlegenden Struktur eines Problems und die adäquate Arbeit mit seinen strukturellen Gegebenheiten.

Programmieren und rekursives Denken

Die Identifizierung und Beschreibung der Stufen und Vorstufen beim Verständnis der Rekursion war das Ziel einer Untersuchung mit 25 Schülern der Klassen 7 und 8 verschiedener Schularten im Alter zwischen 12 und 15 Jahren. Die Schüler nahmen knapp neun Monate an einer freiwilligen Arbeitsgemeinschaft teil, in der sie Grundzüge des Programmierens in der rekursiven Programmiersprache LOGO lernten. LOGO ist eine Sprache, die zu dem Zweck entwickelt wurde, Kindern den Zugang zum Computer zu ermöglichen. Wir haben uns für die Arbeit mit LOGO entschieden, da diese Programmiersprache durch die Implementation einer Graphik-Komponente, der sogenannten

Schildkröten-Graphik, erlaubt, recht subtile Programmideen auf einfache und auch für Schüler verständliche Art und Weise zu realisieren. Insbesondere gibt es in LOGO die Möglichkeit, sowohl iterative als auch rekursive Algorithmen zu implementieren. Wir vermuten, daß durch die Arbeit mit dieser Programmiersprache ein Bindeglied geschaffen werden kann zwischen dem eher intuitiven Rekursionsbegriff, wie er im Alltag verwendet wird, und rekursiven Strukturen, wie sie in der Mathematik vorkommen. Insbesondere gilt aber auch, daß das Lernen einer Programmiersprache eine komplexe kognitive Tätigkeit ist. Eine Beobachtung dieses Prozesses scheint Verallgemeinerungen zuzulassen (ANDERSON, FARRELL & SAUERS, 1984).
Bei der Einführung in LOGO wurden Probleme aus der Igel-Graphik genauso wie Anwendungsaufgaben zu den Rechenmöglichkeiten und Beispiele für den Umgang mit Listen und Wörtern berücksichtigt. Die Schüler bekamen von uns kleinere und größere Programmieraufgaben vorgegeben, sie wurden aber auch immer wieder ermutigt, sich stattdessen oder zusätzlich eigene Probleme zu stellen. Das Hauptgewicht unseres Interesses lag nicht bei bestimmten Aufgaben, sondern vielmehr darauf, wie die Schüler sie lösten und welche Kontrollstrukturen Verwendung fanden. Während des LOGO-Kurses machten wir zweimal Einzelinterviews mit allen Schülern der Gruppe. Das erste dieser Interviews wurde nach etwa zehn Unterrichtsstunden durchgeführt. Zu diesem Zeitpunkt hatten die Schüler Grundkenntnisse der Syntax von LOGO erworben. Sie waren mit den wichtigsten Kommandos zur Schildkröten-Graphik vertraut und hatten auch bereits kleinere Programme geschrieben. Dabei waren vor allem ein sequentieller Programmablauf und die wiederholte Ausführung bestimmter Programmschritte mit Hilfe des REPEAT-Kommandos oder über einen rekursiven Aufruf verwendet worden. Wir meinen, daß nach einer solchen kurzen Einführung der Schüler in eine Programmiersprache bei einem Interview eher ein intuitives Wissen aufgedeckt werden kann, als ein systematisches Wissen, das im Verlauf des Kurses erworben wurde. Ein zweites Mal wurden die Schüler im Anschluß an den Kurs interviewt. Zu diesem Zeitpunkt war selbstverständlich der Wortschatz in der Programmiersprache größer geworden. Die Schüler waren aber auch intensiver mit Techniken vertraut gemacht worden, wie Programme geschrieben werden können. Insbesondere hatten sie mit rekursiven Programmen verschiedenen Schwierigkeitsgrades intensiv gearbeitet.
In den Interviews wurden fünf Teilaufgaben gestellt. Davon bezogen sich vier auf die Grundprobleme des Programmierens, nämlich die Planung eines Programms, die Inter-

pretation eines vorliegenden Programms, das Erstellen eines Programms bei vorgegebenem Problem und die Fehlersuche in einem Programm (vgl. PEA & KURLAND, 1983). Eine weitere Teilaufgabe war die Lösung des Problems TURM VON HANOI, also einer prinzipiell rekursiven Problemstellung unabhängig vom Programmierwissen. Über diese Einzelinterviews hinaus protokollierten wir auch die Arbeit der Schüler in den verschiedenen LOGO-Sitzungen. Teilweise geschah das mit Hilfe von Dribble-Files, bei denen jede mit Return bestätigte Eingabezeile in einem externen Speicher festgehalten wird, teilweise analysierten wir aber auch nur die von den Schülern während der Sitzungen erstellten Programme.

Programmbeispiele aus einer LOGO-Arbeitsgemeinschaft

Im Zusammenhang mit dem Programmieren wird häufig eine einfache Definition des Rekursionsbegriffs benutzt. Man spricht von einem rekursiven Algorithmus, wenn sich der Algorithmus während seines Ablaufs selbst aufruft (BAUER & GOOS, 1982[3]; DÖRFLER, 1984). Es gibt verschiedene Formen, die sich in der Komplexität unterschieden, wobei die Grundstufe die von BAUER & GOOS *repetitive Rekursion* genannte Form ist. Dabei gibt es einen rekursiven Aufruf in der letzten Programmzeile, doch werden keine Werte übergeben, so daß mit dem Erreichen einer neuen Stufe die vorhergehende Stufe im Grunde abgeschlossen. Es handelt sich um eine Rekursion, die einer Iteration sehr ähnlich ist, sich aber in der Notation davon unterscheidet. Durch den rekursiven Aufruf in der letzten Programmzeile wird mit jedem neuen Schritt jedesmal die Aktionsebene gewechselt. Doch gehen keine Werte in einem Rücklauf in die Gesamtlösung ein. Man kann sich vorstellen, daß das Programm beim Erreichen der untersten Ebene abbricht. Tatsächlich ist diese Art der Rekursion in vielen Sprachen, unter anderem auch in einigen LOGO-Dialekten, maschinenintern als Iteration realisiert.
Nach dem Prinzip der repetetiven Rekursion wird etwa die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus ausgeführt (vgl. HAUSSMANN, 1987, S. 143). Es ist $ggT(a,b) = ggT(b,a \bmod b)$ für $b > 0$ und $ggT(a,b) = a$ für $b = 0$. Der größte gemeinsame Teiler wird bei dieser Bestimmungsmethode sukzessive vereinfacht bis zu einem trivialen Fall. Dann allerdings ist die Lösung direkt ablesbar. Komplexer sind hingegen Formen, bei denen im Rücklauf von der untersten Ebene auf die ursprüngliche Ebene Werte übergeben werden. Ein Beispiel ist

die Berechnung von n! für eine natürliche Zahl n (vgl. HAUSSMANN, 1987, S. 146). Es gilt $n! = n*(n-1)!$ für $n > 1$ und $1! = 1$. Eine direkte Berrechnung ist hier nicht möglich, sondern nach dem Erreichen des trivialen Falls $n = 1$ muß man zum Ausgangspunkt zurückgehen. Während bei der Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers das Problem auf ein strukturgleiches reduziert wird und ein einfachster Fall angegeben werden kann, geht bei der Berechnung von n! das Ergebnis jeder Stufe in die Gesamtlösung ein. Zu beiden Aufgaben kann man LOGO-Programme schreiben, die einen rekursiven Aufruf in der letzten Zeile haben. Doch verbergen sich dahinter unterschiedliche Schwierigkeiten bei der Programmerstellung (vgl. auch DUPUIS, EGRET & GUIN, 1985).

Die folgenden Aufgaben, die im LOGO-Kurs den Schülern zur Bearbeitung vorgegeben wurden, haben in rekursiver Notation ganz entsprechende Lösungen. Die erste Aufgabe entspricht der Berechnung des größten gemeinsamen Teilers. Eine mögliche LOGO-Prozedur könnte einen Selbstaufruf in der letzten Zeile enthalten und auf der untersten Ausführungsebene abbrechen. Bei der zweiten und dritten Aufgabe hingegen sind Lösungen denkbar, die strukturell der Bestimmung von n! gleichen und somit alle Merkmale eines rekursiven Prozesses aufweisen. Doch sind bei der Lösung aller Aufgaben auch Prozeduren möglich, die den in LOGO implementierten REPEAT-Befehl verwenden.

Aufgabe 1

Es soll eine Prozedur TRICHTER1 geschrieben werden, die ein Wort als Eingabe hat. Der Aufruf von TRICHTER1 "ANTON soll den folgenden Ausdruck auf dem Bildschirm erzeugen:

```
ANTON
ANTO
ANT
AN
A
```

Aufgabe 2

Gesucht ist eine Prozedur TRICHTER2, die den Trichter aus Aufgabe 1 von unten nach oben auf den Bildschirm bringt.

```
TRICHTER2 "OSKAR
```

R
AR
KAR
SKAR
OSKAR

Aufgabe 3

Schreibe eine Prozedur, die ein Eingabewort umkehrt, die also aus dem REGAL ein LAGER macht und aus dem ESEL eine LESE.

Bei der Umsetzung dieser Probleme in Programme sind Entscheidungen über die Programmstruktur und über den Umgang mit Variablen zu treffen. Dabei sind hinsichtlich der Struktur sowohl rein sequentielle Programme als auch Programme mit iterativen oder rekursiven Kontrollstrukturen denkbar. Sicher wird schon von einem Programmiernovizen erkannt, daß die einzelnen Ausgabezeilen über prinzipiell ähnliche Programmzeilen realisiert werden können. Doch während sich dieser Sachverhalt bei einem rein sequentiellen Programm nur implizit in der Ähnlichkeit aufeinanderfolgender Zeilen ausdrückt, werden bei der Verwendung von Iteration oder Rekursion die Möglichkeiten einer Sprache explizit benutzt. Teile einer Problemlösung müssen dazu als strukturgleich identifiziert werden. Eine zweite Entscheidung vor dem Erstellen des Programms beinhaltet den Umgang mit Variablen. Es ist entscheidend, welche Variablen eingeführt werden und wie diese Variablen im Verlauf des Programms geändert werden. Welche Lösungen Schüler für die Probleme finden, illustrieren die folgenden Beipiele. Man sieht insbesondere, daß sehr verschiedene Methoden beim Umgang mit Problemen, die rekursiv gelöst werden könnten, Verwendung finden. Die Fallbeispiele lassen erkennen, daß es Teilaspekte und Vorstufen rekursiven Denkens gibt, die im Hinblick auf ein Verständnis rekursiver Strukturen produktiv genutzt werden können.

Klaudia (13)

KLAUDIA ist eine Schülerin der Klasse 8 eines Gymnasiums. Sie geht bei der Lösung der ersten Aufgabe von der Überlegung aus, daß sich bei der Anwendung einer Prozedur TRICHTER1 zwei aufeinanderfolgende Wörter im letzten Buchstaben unterschei-

den. Dieser Buchstabe wird im jeweils folgenden Wort nicht mehr ausgedruckt. Der Druckbefehl in LOGO ist PRINT, mit BUTLAST hat man Zugriff auf ein Wort ohne seinen letzten Buchstaben.
So findet sie sehr schnell die folgende Lösung:

```
TO TRICHTER1 :WORT
        PRINT :WORT
        PRINT BUTLAST :WORT
        PRINT BUTLAST BUTLAST :WORT
        PRINT BUTLAST BUTLAST BUTLAST :WORT
END
```

Diese Lösung ist sequentiell, doch enthält sie auch ohne die explizite Verwendung einer REPEAT-Anweisung ganz offensichtlich ein iteratives Element. Die Schülerin hat erkannt, wie sich die einzelnen Komponenten voneinander unterscheiden und hat dies in recht ähnlichen Zeilen berücksichtigt. Natürlich ist diese Prozedur wenig flexibel. Sie liefert nur dann eine richtige Lösung, wenn das Eingabewort aus genau vier Buchstaben besteht. Die Eingabe des Beispielwortes ANTON führt also nicht zu der gewünschten Ausgabe. Doch diese ausführliche Schreibweise enthält alle wesentlichen Elemente der Lösung und leitet hin zur Idee einer rekursiven Notation. KLAUDIA kommt nach einigen Überlegungen zu folgender Prozedur:

```
TO TRICHTER1 :WORT
        IF :WORT = " [STOP]
        PRINT :WORT
        TRICHTER1 BUTLAST :WORT
END
```

Bei dieser Lösung wird das Problem auf ein strukturgleiches mit vereinfachter Eingabe zurückgeführt. Außerdem ist ein trivialer Fall angegeben, der offensichtlich lösbar ist. Bei Eingabe eines Wortes ohne Buchstaben wird der STOP-Befehl ausgeführt. STOP bedeutet in LOGO nicht den Abbruch einer Prozedur, sondern die Rückgabe der Kontrolle an die aufrufende Prozedur. Der Befehl zum Abbruch wäre THROW "TOPLEVEL, das ist die sofortige Rückgabe der Kontrolle an die oberste Ebene. Da in diesem speziellen Fall allerdings in der aufrufenden Prozedur keine Befehle mehr zu bearbeiten sind, ist das Ergebnis auf dem Bildschirm in beiden Fällen gleich. Rückfragen bei KLAUDIA ergeben, daß ihre Interpretation von STOP die des Prozedurabbruchs ist.

Stefan (14)

Auch STEFAN besucht die 8. Klasse eines Gymnasiums. Er gehört zu den Schülern, die vor dem LOGO-Kurs bereits Programmiererfahrungen in BASIC hatten. Dementsprechend geht er recht souverän an die Aufgaben heran. Die erste Aufgabe ist ihm offensichtlich zu einfach. Er bearbeitetet sie nicht und kommt für die zweite Aufgabe sofort zu einer allgemein anwendbaren Lösung.

```
TO TRICHTER2 :WORT
        MAKE "R COUNT :WORT MAKE "A "
        REPEAT :R [MAKE "A WORD LAST :WORT :A
                MAKE "WORT BUTLAST :WORT PRINT :A]
END
```

Im Gegensatz zum ersten Versuch von KLAUDIA ist diese Prozedur allgemeingültig, sie ist also für Wörter beliebiger Länge zu verwenden. Der Aufbau scheint auf den ersten Blick überraschend und etwas unübersichtlich. Zunächst wird Hilfe des LOGO-Grundwortes COUNT gezählt, wie viele Buchstaben die Eingabe enthält. Im Anschluß daran wird mit MAKE eine Hilfsvariable A definiert. Sie nimmt jeweils die Buchstabenfolge auf, die in einer bestimmten Zeile gedruckt werden soll, und wird durch die LOGO-Befehle WORD, LAST und BUTLAST manipuliert. WORD faßt dabei zwei Eingaben zu einem Wort zusammen, LAST erlaubt den Zugriff auf das letzte Zeichen eines Wortes. Entscheidend ist hier die Anweisung REPEAT. Die notwendigen Änderungen der Variablen werden so oft ausgeführt wie durch die Länge des Eingabewortes bestimmt ist. Auch diese Lösung läßt erkennen, daß die prinzipielle Gleichartigkeit der aufeinanderfolgenden Schritte berücksichtigt wird. Doch sind andere Charakteristika eines rekursiven Prozesses nicht zu erkennen. Das Hauptgewicht liegt auf der Änderung der Eingabevariablen. Diese Änderung wird aber ganz offensichtlich nicht als Vereinfachung angesehen. STEFAN verwendet rekursive Aufrufe auch bei anderen Aufgaben selten. Wenn es möglich ist, mit einer gezählten Wiederholung zu arbeiten, zieht er diese Methode vor. Dies zeigt sich auch bei seiner Lösung der Aufgabe, eine Buchstabenfolge umzukehren.

Sie unterscheidet sich strukturell nicht von der Lösung der TRICHTER-Aufgabe und kann auch als iterativ angesehen werden.

```
    TO UMKEHR :WORT
        MAKE "R COUNT :WORT MAKE "A "
        REPEAT :R [MAKE "A WORD :A LAST :WORT
            MAKE "WORT BUTLAST :WORT]
        PRINT :A
    END
```

Sebastian (14)

Es gibt Schüler, die mit rekursiven Prozeduren sehr souverän umgehen. Die folgenden Programme von SEBASTIAN sind ein Beleg. Er ist fast 14 Jahre alt und ebenfalls in der 8. Klasse. SEBASTIAN ändert das gegebene Problem leicht ab, so daß beachtet werden muß, daß sich seine Prozedur TRICHTER zwar in der Wirkung, doch nicht in der prinzipiellen Struktur von der in Aufgabe 1 verlangten Prozedur TRICHTER1 unterscheidet.

```
TO TRICHTER :WORT
        PRINT :WORT
        IF :WORT = " [THROW "TOPLEVEL]
        TRICHTER BUTFIRST :WORT
    END

    TO TRICHTER2 :WORT
        IF :WORT = " [STOP]
        TRICHTER2 BUTLAST :WORT
        PRINT :WORT
    END
```

Die Verwendung von THROW "TOPLEVEL in der ersten Prozedur und STOP in der zweiten Prozedur verdeutlicht, daß diesen Lösungen ein elaboriertes Verständnis rekursiver Prozesse und der Programmiersprache LOGO zugrunde liegt. Darüber hinaus ist das zweite Problem mit Hilfe eines eingebetteten rekursiven Aufrufs gelöst, so daß alle Komponenten eines rekursiven Prozesses zu identifizieren sind. Die Prozedur wird durch den Selbstaufruf auf eine strukturell gleiche Prozedur zurückgeführt, mit jedem neuen Aufruf, also jeder neuen Ebene, wird die Eingabe weniger komplex und es ist ein einfachster Fall identifiziert, da für das leere Wort die Anweisung STOP gegeben ist. In einem Rücklauf durch alle Ebenen druckt das System den jeweils aktuellen Parameter aus. Interessant ist auch SEBASTIANs Behandlung der dritten Aufgabe, da hier die Manipulation der Variablen und der rekursive Aufruf getrennt werden.

```
TO UMKEHR :WORT
      IF :WORT = " [PRINT [] THROW "TOPLEVEL]
      MAKE "A LAST :WORT
      TYPE :A
      UMKEHR BUTLAST :WORT
END
```

Im Prozeduraufruf selbst wird die Eingabevariable geändert, der Ausdruck wird hingegen über eine mit Hilfe von MAKE definierte Hilfsvariable gesteuert.

Diese Beispiele der Problemlösungen von Schülern spiegeln die unterschiedlichen Arten des Umgangs mit den gegebenen Problemen wider. Im Beispiel von KLAUDIA, die zu einer rekursiven Notation kommt, kann man eine Entwicklung von einer iterativen zu einer rekursiven Betrachtungsweise feststellen. Für sie ist von Anfang an nicht ein bestimmter Teil des Prozesses herausgehoben, sondern sie versucht die strukturelle Ähnlichkeit der Teile für die Lösung zu nutzen. Dieses Verhalten war bei vielen Schülern zu beobachten. Es führte allerdings nicht immer ohne weitere Anleitungen zur Formulierung rekursiver Prozeduren. Die Methode von STEFAN deutet auf eine eindeutig iterative Sichtweise des Problems hin. Das Augenmerk des Problemlösers wird hier auf die Identifizierung und Belegung geeigneter Variablen gerichtet. Jeder Teilprozeß ist gleichberechtigt und gleichrangig mit den anderen. Sebastian hingegen kann genauso eindeutig einer rekursiven Betrachtungsweise zugeordnet werden. Seine Vorgehensweise läßt erkennen, daß die strukturelle Ähnlichkeit der Teilprozesse vorrangig in die Lösung eingeht und das Problem mit Hilfe des rekursiven Aufrufs sukzessive vereinfacht wird.

Der TURM VON HANOI als rekursives Problem

Betrachtet man die Lösungen von Programmieraufgaben, so entsteht leicht der Eindruck, daß nicht immer durch ein Programm auch der Denkstil des Programmieres wiedergegeben wird. Oftmals ist es so, daß ein Programmieranfänger zwar elaborierte Ideen entwickelt, sie aber nicht in einer Programmiersprache formulieren kann. Wird also zu einem Problem kein Programm oder nur ein unzureichendes Programm erstellt, so heißt das noch nicht, daß der Problemlösende keine Struktur einer Lösung erkennt. Insbesondere werden rekursive Strategien von uns als ein Netz ineinander verschachtelter mentaler Operationen begriffen, die sich in der Regel nicht direkt in beobachtbaren Handlungen niederschlagen. Wir haben deshalb als eine weitere Aufgabe für die Schüler den TURM VON HANOI hinzugenommen. Der TURM VON HANOI ist deswegen eine besonders interessante Problemstellung, weil die optimale Lösung eine rekursive Struktur hat und dabei einzelne Schritte des Denkprozesses handlungsorientiert beobachtet werden können. Die Aufgabe ist in der kognitiven Psychologie oft beschrieben worden (ANZAI & SIMON, 1979; ANDERSON, 1983). Sie kann als rekursives Transformationsproblem gekennzeichnet werden, was allerdings nicht heißt, daß jeder einzelne Zug in diesem Problem einem Schritt im rekursiven Denkprozeß entsprechen muß. Es handelt sich um eine Aufgabe, die ohne große technische Hilfsmittel realisiert werden kann. Man braucht eine Anzahl von Scheiben unterschiedlicher Größe und drei Felder, die mindestens den Durchmesser der größten Scheibe haben. Häufig sind auf den Feldern Stäbe angebracht, und in den Scheiben befindet sich jeweils ein Loch, damit jeder Schritt eindeutig vollzogen ist, wenn die Scheibe auf einen Stab gesteckt wurde.

Die Aufgabe der Versuchsperson ist es, alle Scheiben von A nach C zu bewegen und dort denselben Turm aufzubauen. Maßgeblich sind dabei die folgenden Regeln: es darf jeweils lediglich eine Scheibe pro Zug bewegt werden; befinden sich mehrere Scheiben auf einem Feld, so darf nur die oberste bewegt werden; eine Scheibe darf nie auf eine kleinere gelegt werden; Feld B kann als Hilfsfeld dienen.

Alle Zugmöglichkeiten können in einem Diagramm als Suchraum dargestellt werden (vgl. Abb. 1 nach KLIX, 1971). Dabei wird ein freier Zug und der darauf folgende obligatorische Zug zu einem einzigen Knoten im Suchraum zusammengefaßt. Man kommt so zu einem verschachtelten Dreieck, das die rekursive Struktur des Problems zeigt. Der Knoten an der Spitze des Dreiecks steht für die Ausgangsstellung (alle drei Scheiben liegen noch auf dem linken Feld), der Knoten in der rechten unteren Ecke für die Zielstellung (alle drei Scheiben befinden sich nun auf dem rechten Feld). Der Knoten in der linken unteren Ecke steht für eine Lösung, bei der alle Scheiben auf das mittlere Feld gelegt wurden. Dazwischen befinden sich alle möglichen Scheibenpositionen, die unter korrekter Anwendung der Regeln herauskommen können. Bei n Scheiben sind 3^n Positionen möglich, im Fall n=3 sind das 27 verschiedene Spielstellungen. Die folgende Abbildung (Abb. 1) beschreibt den Suchraum für das Drei-Scheiben-Problem. Dabei bedeutet "3 2 1", daß die größte Scheibe 3 auf Feld A liegt, die mittlere Scheibe 2 auf Feld B und die kleine Scheibe 1 auf Feld C. Ein Strich weist darauf hin, daß sich keine Scheibe auf dem betreffenden Feld befindet.

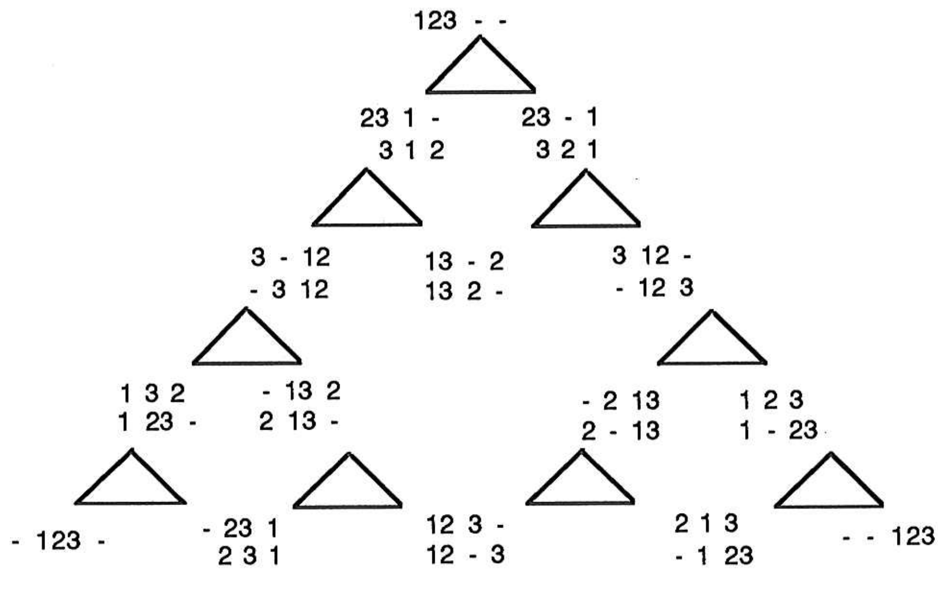


Abbildung 1: Suchraum für den TURM VON HANOI mit drei Scheiben

In diesem Diagramm läßt sich jeder Zug und jede Zugfolge lokalisieren und somit kann man jede Lösung des Problems als einen bestimmten Weg in diesem Diagramm beschreiben. Betrachtet man den optimalen Lösungsweg, also die rechte Kante des großen Dreiecks, so sieht man, daß der wichtigste Zug der ist, bei dem die größte Scheibe von der Ausgangsposition auf die Zielposition gelegt und damit das Drei-Scheiben-Problem auf zwei Zwei-Scheiben-Probleme reduziert wird. Man befindet sich an diesem Punkt genau auf der Hälfte der rechten Kante des Dreiecks. Dieser Punkt stellt gleichzeitig die rechte untere Ecke eines kleineren Dreiecks und die obere Ecke eines weiteren ebenso großen Dreiecks dar. Bedient man sich der Metapher des Turmbauens, so kann man sagen, daß zweimal ein Zweier-Turm bewegt werden muß, damit man einen Dreier-Turm bauen kann, und daß zusätzlich die größte Scheibe zu bewegen ist. Horizontale oder diagonale Verbindungen zwischen den Positionen sind gleichrangig, wichtig ist nur, ob ein Zug den Abstand zur Zielposition verkleinert (vgl. die Definition der Problemlösegüte bei FUNKE, 1988).

Unser Interesse gilt jedoch nicht nur der optimalen Lösung. Jeder Knoten im Suchraum ist eine gültige Position, und jeder Weg von der oberen Ecke zur rechten unteren Ecke stellt eine Lösung des Problems dar. Berücksichtigt man allerdings bei der Lösung die rekursive Struktur der Aufgabe, so wird man sicher nicht jede Position gleich bewerten, also nicht im gesamten Bereich des Diagramms suchen. Zunächst wird man dann nur Züge wählen, die die Position der unten liegenden größten Scheibe unverändert lassen. Dies wird man so lange fortsetzen, bis sie sich als einzige verbleibende Scheibe auf diesem Feld befindet und das Zielfeld frei ist. Das Teilziel, sie auf das Zielstab zu bewegen, ist somit nur erreichbar, wenn der um eine Scheibe verkleinerte Turm auf dem Hilfsfeld aufgebaut wurde. Bis zu diesem Punkt wird man sich also nur für Züge interessieren, die sich im oberen Teil des Dreiecks bewegen. Umgekehrt ist es nicht sinnvoll, Züge in diesem Teildreieck auszuführen, wenn die größte Scheibe bereits auf ihrer Zielposition liegt. Diese Überlegung läßt sich für das weitere Vorgehen verallgemeinern. Betrachtet man den neuen Zielturm, so kann man auf das Hilfsfeld nur dann gelangen, wenn seine größte Scheibe, das ist die mittlere im Gesamtproblem, vorübergehend auf das andere Feld gelegt und dann die untenliegende Scheibe bewegt wird. Diese weitere Einschränkung des Suchraums bedeutet, daß nur solche Züge sinnvoll sind, die im kleineren oberen Teildreieck des Dreiecks zu lokalisieren sind. Man kommt auf diese Weise zum optimalen Pfad entlang einer der beiden äußeren Kanten des Diagramms. Diese Wege repräsentieren eine Strategie, bei der der Suchraum erfolgreich immer weiter reduziert wird. Eine solche Lösung soll im folgenden als rekursive Lösung des Problems bezeichnet werden.

Ein entsprechender Suchraum läßt sich für jede Anzahl n von Scheiben aufstellen. Dabei kann man die einzelnen Diagramme für den Suchraum bei n und bei n-1 Scheiben ineinander überführen. So läßt sich der Suchraum für das Vier-Scheiben-Problem aus drei Diagrammen für das Drei-Scheiben-Problem zusammensetzen. Im oberen Dreieck findet man alle Züge, die möglich sind, bis die unterste Scheibe auf ein anderes Feld bewegt wird. Die beiden unteren Dreiecke stehen jeweils für die Bewegung des kleineren Drei-Scheiben-Turms vom Hilfsfeld zum Zielfeld B oder C.

Über die Lokalisierung der Züge im Suchraum konnten die Lösungen aller Schüler zu dieser Aufgabe vollständig beschrieben werden. Wir wollen hier exemplarisch die Lösungen zweier Schüler analysieren. Ihre Züge deuten auf typische Strategien hin, die Programmieranfänger bei der Aufgabe des TURM VON HANOI verwendeten. Dabei stand es den Schülern frei, Feld B oder Feld C als Zielposition zu betrachten. Wichtig war lediglich, daß der Turm auf einem anderen als dem Ausgangsfeld aufgebaut wurde.

Tom (13)

TOM besucht die 8. Klasse einer Hauptschule. Sein Engagement für den Computer und das Programmieren ist deutlich ausgeprägt. TOM hat selbst einen Rechner zu Hause und konnte bereits vor Beginn des LOGO-Kurses einfache Probleme in BASIC programmieren. Er kannte einige Kontrollstrukturen so zum Beispiel die gezählte Wiederholung. Am eigenen Computer hatte er die Möglichkeit, sich mit den im Unterricht gestellten Aufgaben zu beschäftigen. Seine Kenntnisse der LOGO-Grundwörter und ihrer Verwendung waren deutlich besser als die der anderen Schüler.

TOM kooperierte zwar mit anderen Schülern, war jedoch immer bestrebt zu dominieren, indem er den Platz an der Tastatur einnahm.

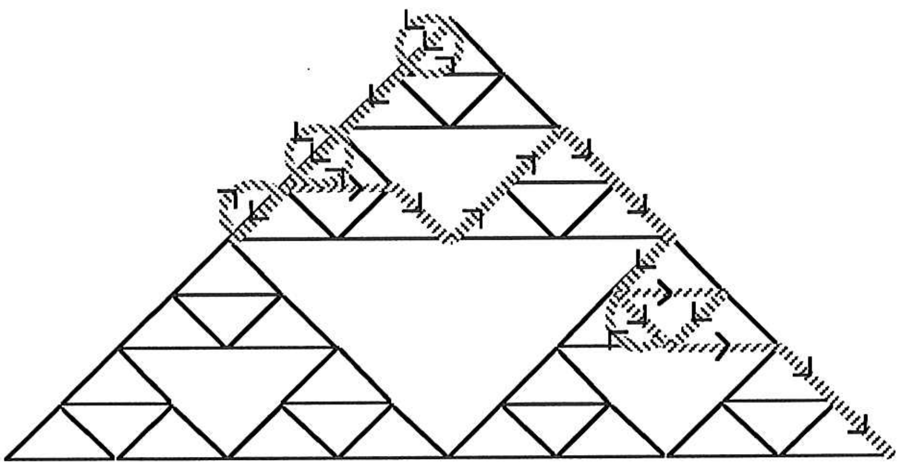


Abbildung 2: Iterative Lösung des Vier-Scheiben-Problems

Abb. 2 zeigt TOMs Lösungsweg für den TURM VON HANOI mit vier Scheiben. Der Suchraum wird im oberen Teil dieses Diagramms nahezu vollständig abgedeckt. TOM bewegt zunächst recht willkürlich die Scheiben hin und her, bis er die größte Scheibe auf das mittlere Feld legen kann. Analysiert man die weiteren Bewegungen, so wird deutlich, daß TOM sich nun mit seinen Zügen in einem kleineren Teildreieck bewegt. Dieses Teildreieck ist eine Untermenge der Züge, bei der lediglich die kleinste und die zweitkleinste Scheibe bewegt werden. Die zweitgrößte bleibt unverändert in ihrer Position auf dem Hilfsfeld.

Nachdem diese auf das Ausgangsfeld der Problemstellung gelegt worden ist, findet TOM sofort den optimalen Weg zur Zielposition.

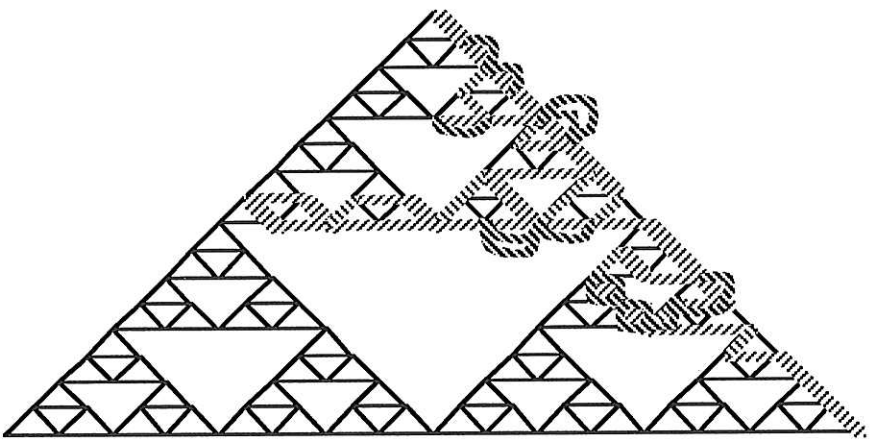


Abbildung 3: Iterative Lösung des Fünf-Scheiben-Problems

Die Analyse des Suchraums zeigt, daß TOM über eine lokale Strategie verfügt. Er verfolgt in jeder Phase der Problemlösung das Teilziel, die größte Scheibe auf den zu errichtenden Stapel zu bringen. Er überträgt diesen Gedanken jedoch nicht auf die dann verbleibenden Scheiben. So ist bei den Zügen, in denen mit diesen Scheiben operiert wird, keine einheitliche Strategie zu erkennen. Die Züge lassen sich innerhalb gewisser Grenzen durch die Methode von Versuch und Irrtum beschreiben. Offensichtlich zu erkennen ist dies im oberen Dreieck, in dem TOM die Scheiben relativ ziellos von einem Feld auf das andere legt. Er konzentriert sich nicht mehr auf sein globales Ziel, den ganzen Turm von einem Feld auf ein anderes zu bewegen. Nachdem er dann die größte Scheibe verschoben hat, setzt er sich ein neues Teilziel. Dieses Teilziel verfolgend macht er nur Züge, die sich im kleineren Dreieck unterhalb des großen oberen Dreiecks bewegen, also Züge, die seine neue größte Scheibe unverändert lassen. Es wäre jedoch falsch, TOMs Züge lediglich als vom Zufall geleitet zu beschreiben. Vermutlich hat er einzelne Positionen als Schlüsselreize im Langzeitgedächtnis gespeichert, die Initialpositionen für eine ganze Folge von Zügen darstellen (vgl. REISS & HAUSSMANN, 1988). Diese Chunks sind automatisierte mentale Operationen, die den Prozeß der Problemlösung wesentlich schneller ablaufen lassen, aber auch unflexibler gestalten. Die Automatisierung des Denkprozesses läßt sich mit der begrenzten Kapazität des Kurzzeitgedächtnisses erklären. Durch Chunking wird eine ganze Reihe von Einheiten zu einer Einheit zusammengefaßt und so eine überschaubare Anzahl von übergeordneten Einheiten gebildet.

Auch beim zweiten Interview läßt sich diese Strategie bei TOM beobachten. Zwar löst er dieses Mal die Vier-Scheiben-Aufgabe eleganter, verwendet aber bei der wesentlich schwierigeren Fünf-Scheiben-Aufgabe eine vergleichbare Strategie (vgl. Abb. 3). Man kann erkennen, wie TOM in jedem Teildreieck fast den gesamten Suchraum abdeckt. Er verlegt seine gesamten Anstrengungen auf das Teilziel, die unterste Scheibe freizulegen. Die strukturellen Gegebenheiten des Problems im Hinblick auf eine rekursive Lösung bleiben dabei außerhalb seines Blickfeldes.

Jan (14)

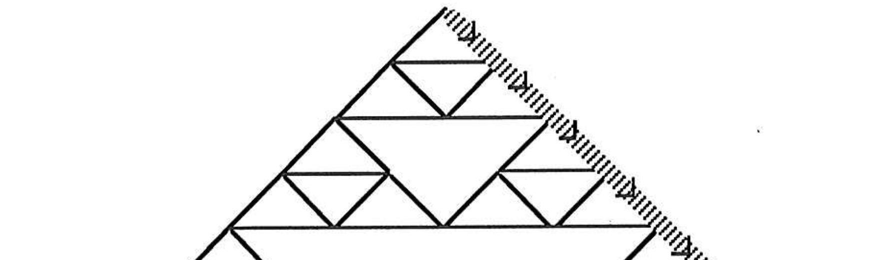


Abbildung 4: Rekursive Lösung des Vier-Scheiben-Problems

JAN besucht zum Zeitpunkt der Untersuchung die 7. Klasse einer Hauptschule. Er hat ein ausgeprägtes Interesse für Computer, aber außerhalb des Unterrichts keine Möglichkeit, einen Rechner zu benutzen. Dennoch zeigt JAN ein außerordentliches Geschick beim Programmieren. Er überblickt recht schnell, wie sich ein Problem in ein entsprechendes LOGO-Programm umsetzen läßt. Auch er beschäftigt sich, genauso wie STEFAN, nicht nur mit den gestellten Aufgaben, sondern ändert und erweitert nach der Lösung einer Aufgabe die Problemstellung, fragt auch gegebenenfalls nach weiteren LOGO-Grundwörtern, die für das Erreichen seiner Ziele erforderlich sind. Auf diese Weise schreibt er im allgemeinen anspruchsvolle Programme, die weit über dem durchschnittlichen Niveau der übrigen Schüler lagen. JAN zieht oft die individuelle Arbeit am Computer der Kooperation mit anderen vor, er hilft ihnen aber bei der Lösung ihrer Aufgaben oder erklärt einzelne Schritte, die zur Problemlösung erforderlich sind.

Abb. 4 zeigt JANs Lösung der Vier-Scheiben-Aufgabe im ersten Interview. Sie verläuft genau auf dem optimalen Pfad. Er findet diese Lösung auch recht schnell. Die einzelnen Scheiben werden rasch bewegt, und er arbeitet zumindest mit einer intuitiven Strategie. Eine kleine Pause ist lediglich zu beobachten, nachdem er die größte Scheibe auf die Zielposition gebracht hat. Es ist anzunehmen, daß er in dieser Situation das Problem neu strukturiert, das heißt, er paßt die Strategie den aktuellen Erfordernissen an und überprüft sie auf ihre Angemessenheit (vgl. COHORS-FRESENBORG, 1985).

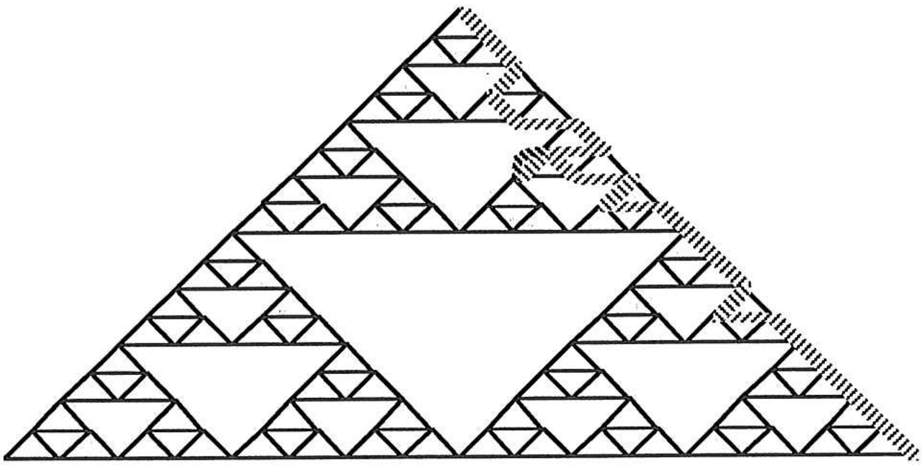


Abbildung 5 : Rekursive Lösung des Fünf-Scheiben-Problems

Wie TOM löst auch JAN im zweiten Interview sowohl das Vier-Scheiben-Problem als auch das Fünf-Scheiben-Problem. Zwar findet er beim Vier-Scheiben-Problem erneut die optimale Lösung, kommt aber beim Turm aus fünf Scheiben zu einer Lösung mit kleinen Umwegen (Abb. 5). Dennoch ist die Abweichung von der optimalen Lösung nicht bedeutsam. Die Hypothese, daß JAN intuitiv rekursiv vorgeht, läßt sich beibehalten.

Diskussion der Ergebnisse

Ist ein rekursives Problem auch als solches kognitiv repräsentiert, so folgt daraus noch nicht, daß auch die Handlungsschritte zur Lösung des Problems bekannt sind. Die Planung dieser Schritte setzt voraus, daß Hierarchien von Teilzielen entwickelt werden, die wie Module bearbeitbar sind. Man kann dies vielleicht am besten als eine Interaktion von Kurz- und Langzeitgedächtnis sehen. Die Hierarchie der Teilziele wird im Langzeitgedächtnis gespeichert. Aus dem Kurzzeitgedächtnis werden einzelne Teilziele abgerufen und dort in Handlungsschritte überführt (HAUSSMANN & REISS, 1988).
Die Untersuchungen zum TURM VON HANOI wurden an einem überschaubaren, leicht formalisierbaren Problem durchgeführt. Sie geben jedoch Aufschluß über rekursive Denkprozesse, wie sie auch beim Programmieren vorkommen. SIMON (1975) unterschied im Rahmen seiner Arbeit am General Problem Solver vier Strategien beim TURM VON HANOI:

- die vom Ziel her rekursive Strategie
- die differenzierte wahrnehmungsgeleitete Strategie
- die einfache wahrnehmungsgeleitete Strategie
- die Strategie der gelernten Zugmuster

Eine rekursive Strategie im strengen Sinne ist nur die erste, da sie ohne Umwege zu einer Lösung führt. Wenn man etwa eine Pyramide (k) mit k Scheiben hat, läßt sich die Strategie folgendermaßen als einfaches Produktionssystem darstellen:

Um Pyramide (k) von A nach C zu bewegen
bewege Pyramide (k-1) von A nach B,
bewege Scheibe (k) von A nach C,
bewege Pyramide (k-1) von B nach C.

Sowohl bei der einfachen als auch bei der differenzierten von der Wahrnehmung geleiteten Strategie ist das oberste Ziel das Umlegen der jeweils größten Scheibe, die noch auf dem Ursprungsfeld liegt. Damit sie bewegt werden kann, ist es zum einen erforderlich, alle Scheiben zu entfernen, die sich über ihr befinden. Zum andern muß aber auch das Zielfeld von Scheiben befreit werden, die kleiner sind als diese Scheibe. Sollten nur diese beiden Regeln in der genannten Reihenfolge zur Anwendung kommen, so sind unendliche Schleifen möglich. Die optimale Problemlösung wird in diesem Fall unwahrscheinlich, die Rückkehr zu bereits durchlaufenen Positionen ist möglich. SIMON bezeichnet diese Strategie als eine einfache von der Wahrnehmung geleitete.
Die differenzierte wahrnehmungsgeleitete Strategie ist im wesentlichen gleichzusetzen mit der eben geschilderten. Der einzige bedeutende Unterschied besteht darin, daß der Problemlöser sein Augenmerk darauf richtet, ob zum einen über der zu bewegenden Scheibe ein Hindernis liegt und zum anderen ob auf dem Zielfeld ein Hindernis liegt. Die eben dargestellte Strategie wird im folgenden erneut auf dieses Hindernis angewendet. Der Problemlöser greift sich nicht mechanisch eine jeweils mögliche Regel heraus, sondern arbeitet einen Stapel von Zielen ab, die im Kurzzeitgedächtnis gespeichert sind. Auch hier handelt es sich um eine Strategie, die rekursive Anteile hat, sie unterscheidet sich aber trotzdem von der ersten Strategie. Die erste Strategie geht von der Zielhierarchie aus, die jeweils erforderlichen Schritte werden nur an der wahrgenommenen Situation überprüft. Die letzte Strategie orientiert sich zwar an der Zielhierarchie, geht aber von der wahrgenommenen Situation aus.
Faßt man diese beiden Strategien zusammen, so läßt sich als Gemeinsamkeit herausstellen: Ziele werden in Teilziele aufgespalten und Zielhierarchien abgearbeitet; insofern sind diese Strategien schlußfolgernd. Es ist natürlich aber auch möglich, daß Züge geübt und Zugsequenzen ohne Einsicht in den rekursiven Prozeß auswendig behalten werden oder daß Tricks statt Problemlösestrategien zur Anwendung kommen. Die folgende Sequenz von Regeln stammt wieder von SIMON (1975) und kann als Beispiel für ein solches Vorgehen gelten:

- Zähle die Anzahl der bisher ausgeführten Züge.
- Ist die Anzahl der bisher ausgeführten Züge ungerade, dann bewege die kleinste Scheibe, sonst bewege die nächstgrößere Scheibe, die auf einem der Stäbe oben liegt.
- Wird die kleinste Scheibe bewegt und ist die Anzahl der Scheiben im Spiel gerade, dann bewege sie zyklisch vom Ursprungsfeld über das Zwischenfeld auf das Zielfeld und zurück zum Ursprungsfeld.
- Wird die kleinste Scheibe bewegt und ist die Anzahl der Scheiben im Spiel ungerade, dann bewege sie zyklisch vom Ursprungsfeld über das Zielfeld auf das Zwischenfeld und zurück zum Ursprungsfeld.

Diese Strategie kann man sich rasch aneignen, sie läßt sich im Langzeitgedächtnis speichern und ist weder eine Belastung für das Kurzzeitgedächtnis noch stellt sie größere Anforderungen an die Mustererkennung. Hier wird zwar in effektiver Weise jeweils neu ein Regelsystem auf die Situation angewendet, aber keine Zielhierarchie abgearbeitet.
Wie unterscheiden sich nun diese Strategien in der Problemlösegüte? Die rekursive Strategie führt auf dem kürzesten Wege zur Zielposition. Bei der einfachen wahrnehmungsgeleiteten Strategie kann es leicht zu zirkulären Bewegungen im Problemraum kommen, die differenziertere wahrnehmungsgeleitete Strategie kann vom optimalen Lösungsweg abweichen, jedoch ist die Wahrscheinlichkeit recht hoch, daß sie irgendwann zur Lösung führt. SIMONs Ansatz, Problemlösen mit Hilfe von Produktionssystemen zu erklären, läßt sich gut mit den Überlegungen von KLIX (1971) verbinden. Die Klassifikation der Strategien, wie sie KLIX (1971) vornimmt, hat als Kriterium den Suchraum, in dem sich die Züge bewegen. SIMON (1975) geht dagegen von Regeln eines Produktionssystems aus, das er dem Problemlöseverhalten seiner Versuchspersonen zugrunde legt. Bei Anwendung der Regeln ergeben sich die Züge automatisch. Es ist bisher auch in neueren Arbeiten (KARAT, 1982; HUSSY, 1987) noch nicht versucht worden, beide Ansätze zusammenzubringen: Der Suchraum ist in der Tat ein gutes Kriterium zur Unterscheidung verschiedener Strategien, es gilt aber, die Regeln herauszufinden, die beim Verfolgen dieser Strategien angewandt wurden, und darzustellen, zu welchen Bewegungen im Suchraum diese Regeln führen. In einem weiteren Schritt haben wir diese Regeln für den iterativen Fall in einem Produktionssystem modelliert

(HAUSSMANN & REISS, in Druck). Diese Form der Simulation trägt dazu bei festzustellen, in welchem Ausmaße sich einzelne Regeln auf die Anzahl der Züge bis zur Problemlösung auswirken. Außerdem kann man mit Hilfe einer Simulation herausfinden, ob eine Strategie auch bei Problemen größerer Komplexität zu einer Lösung führt.
Folgt man KLIXs struktureller Darstellung, so gibt es den idealen Problemlöser, der seine Züge im Lösungsdiagramm entlang der rechten Kante des großen Dreiecks sucht, aber auch den von uns iterativ genannten Problemlöser, der sukzessiv den Suchraum einschränkt (vgl. Abb. 6).

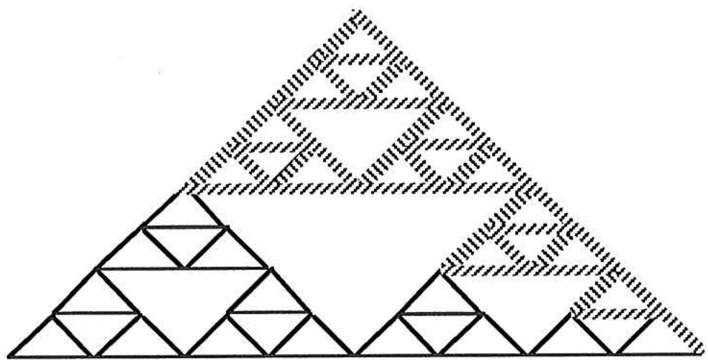


Abbildung 6 : Iterative Lösung des Vier-Scheiben-Problems

In unserer Untersuchung steht JAN für die rekursive Strategie. Seine Lösung ist als Pfad an der rechten Kante des großen Dreiecks zu beschreiben. Ob es sich dabei um eine rekursive Strategie im engeren Sinne oder doch nur um eine differenzierte wahrnehmungsgeleitete Strategie nach SIMON handelt, kann allein aus der Lokalisierung der Zügen im Suchraum nicht geschlossen werden. Die verbalen Protokolle enthalten Anzeichen dafür, daß JAN den Turm von Hanoi als rekursives Problem versteht. TOM dagegen macht Züge, die mit dem von ihm gesetzten Unterziel konsistent sind, die größte noch verbleibende Scheibe auf das Zielfeld zu bewegen. Das Problems wird nicht als rekursive Aufgabenstellung gesehen, es gibt keine abgestufte Zielhierarchie. SIMON würde dies vielleicht als eine perzeptive Strategie bezeichnen.

Das Ziel dieser Untersuchung war es zum einen, Ansätze zur Lösung eines Problems zu beschreiben, das in optimaler Weise rekursiv lösbar ist. Es konnten dabei verschiedene

Strategien identifiziert werden, die die Schüler bei der Lösung des Problems anwendeten. In Anlehnung an KLIX wurden unterschiedliche Strategien beschrieben, die sich in ihrer Nähe zu einer rekursiven Problemlösung unterscheiden.
Zum andern zeigen die anfangs aufgeführten Beispiele zum Programmieren, daß auch dort zwei Gruppen von Problemlösern unterschieden werden können. Es gibt Personen, die ganz eindeutig iterative Strageien bei der Lösung rekursiver Probleme verfolgen. Es gibt auf der anderen Seite aber auch Personen, die ein mehr oder weniger elaboriertes Verständnis einer rekursiven Problemlösemethode zeigen. STEFAN kann sicherlich der ersten Gruppe zugeordnet werden. Dabei fällt auf, daß er genauso wie TOM Vorerfahrungen in BASIC besitzt. Wir möchten allerdings keine Hypothese darüber aufstellen, was hier die Ursache und was die Wirkung ist. Es ist möglich, daß ein Programmieren in BASIC einen iterativen Denkstil fördert, es ist aber genauso möglich, daß eher iterativ orientierte Sprachen von Personen vorgezogen werden, die einem iterativen Denkstil zuzuordnen sind.

SEBASTIAN läßt sich als rekursiver Problemlöser charakterisieren. Er erkennt, daß die gestellten Probleme besonders gut mit Hilfe eines rekursiven Aufrufs im Programmtext zu realisieren sind. Man sieht aber auch, daß SEBASTIAN ein guter Programmierer ist, der über einige Routine beim Erstellen von Programmen verfügt. Bei KLAUDIA kann man erkennen, daß sie den rekursiven Aufruf aus einer iterativen Darstellung ableitet. Sie lernt während des Problemlöseprozesses, daß eine rekursive Notation für die Lösung des gegebenen Problems eine angemessene Darstellung ist. Das Beispiel ihres Programmes macht besonders deutlich, daß es bei der Entwicklung rekursiver Strukturen Zwischenschritte gibt und welcher Art diese Zwischenschritte sein können. Obwohl natürlich eine rekursive Strategie als optimal betrachtet werden muß, können iterative Ansätze als Möglichkeit der Hinführung zur Rekursion genutzt werden.

Im Rahmen unseres Projekts zum rekursiven Denken werden die Ergebnisse zum Problemlösen beim TURM VON HANOI in Beziehung gesetzt zur Kompetenz beim Programmieren, genauer zu den Leistungen bei der Planung rekursiver Programme (vgl. HAUSSMANN & REISS, 1987), bei ihrem Verständnis (HAUSSMANN & REISS, 1989), beim Schreiben und bei der Fehlersuche ("debugging") in solchen Programmen. Der TURM VON HANOI hat sich dabei als ein interessanter Indikator rekursiven Denkens erwiesen, weil diese Problemlöseleistung unabhängig ist von spezifischem Wissen über die Syntax und Semantik einer Programmiersprache bzw. vom mathematischen Notationswissen. Er ist durch die KLIXsche Darstellung in seiner Struktur formalisierbar und durch Produktionssysteme als Problemlösungsprozeß beschreibbar. Über Spezifika der kognitiven Prozesse geben die Interviews Aufschluß.

Literatur

ANDERSON, J. R. (1983). *The architecture of cognition.* Cambridge: Harvard University Press.

ANDERSON, J.R., FARRELL R. & SAUERS R. (1984). Learning to program in LISP. *Cognitive Science 8*, 87-129.

ANZAI, Y. & SIMON, H. (1979). The theory of learning by doing. *Psychological Review, 86*, 124-140.

BARFURTH, M. (1987). *Recursion? What is it?* Fribourg: Institut de Psychologie, Université de Fribourg.

BAUER, F.L. & GOOS, G. (1982[3]). *Informatik. Eine einführende Übersicht. Erster Teil.* Berlin: Springer.

COHORS-FRESENBORG, E. (1985). Verschiedene Repräsentationen algorithmischer Begriffe. *Journal für Mathematikdidaktik 6*, 187-209.

DÖRFLER, W. (1984). Fundamentale Ideen der Informatik und Mathematikunterricht. In Österreichische Mathematische Gesellschaft (Hrsg.), Vorträge Symposium über Schulmathematik am 29.9.1983 in Salzburg (S. 19-40). *ÖMG Didaktik-Reihe, 10/2.* Wien.

DUPUIS, C., EGRET, M.A. & GUIN, D. (1985). *Récursivité et LOGO. 1. Préexpérimentation.* Strasbourg: Université Louis Pasteur. IREM.

FUNKE, J. (1988). Using simulation to study complex problem solving. *Simulation and Games, 19*, 277-303.

HAUSSMANN, K. (1985). Iterative and recursive modes of thinking in mathematical problem solving processes. In L. STREEFLAND (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 18-23). Utrecht: State University.

HAUSSMANN, K. (1986). Iteratives vs. rekursives Denken beim Problemlösen im Mathematikunterricht. *Mathematica didactica 9(2)*, 61-74.

HAUSSMANN, K. (1987). *LOGO? LOGO! Ein Programmierbuch.* Braunschweig: Vieweg.

HAUSSMANN, K. & REISS, M. (1986). Rekursive Strukturen und ihre Rolle im Mathematikunterricht. *Karlsruher Pädagogische Beiträge 13*, 70-90.

HAUSSMANN, K. & REISS, M. (1987). LOGO beginners problems with goal merging. J. Hillel (Ed.) *Proceedings of the Third International Conference for LOGO and Mathematics Education* (pp. 156-163). Montréal.

HAUSSMANN, K. & REISS, M. (1988). KASIMIR: An investigation of iterative solution strategies for the TOWER OF HANOI problem. *Proceedings of the Bilateral German-Italian Symposium on Didactics of Mathematics*. Pavia.

HAUSSMANN, K. & REISS, M. (1989). Strategien bei Problem mit rekursiver Lösung - eine prozeßorientierte Analyse rekursiven Denkens. *Journal für Mathematikdidaktik, 10*, 39-61.

HAUSSMANN, K. & REISS, M. (in Druck). KASIMIR - die Modellierung einer iterativen Strategie beim Lösen eines rekursiven Problems. In K. HAUSSMANN & M. REISS (Hrg.), *Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse*. Göttingen: Hogrefe.

HOFSTADTER, D.R. (1985). *Gödel, Escher, Bach. Ein Endloses Geflochtenes Band.* Stuttgart: Klett-Cotta.

HUSSY, W. (1987). Zur Steuerfunktion der Sprache beim Problemlösen. *Sprache und Kognition 1*, 14-22.

KARAT, J. (1982). A model of problem solving with incomplete constraint knowledge. *Cognitive Psychology, 14*, 538-559.

KLIX F. (1971). *Information und Verhalten.* Bern: Huber.

KURLAND, D.M. & PEA, R.D. (1983). *Children's mental models of recursive LOGO programs.* Technical Report No. 10. New York: Center for Children and Technology. Bank Street College of Education.

MÖBUS, C., SCHRÖDER, O. & COLONIUS, H. (1986). Programmieren mit mentalen Modellen?! In M. AMELANG (Hrsg.), *Bericht über den 35. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie, Band 1* (S. 199). Göttingen: Hogrefe.

PAPERT, S. (1980). *Mindstorms. Children, Computers, and Powerful Ideas.* New York: Basic Books.

PEA,R.D. & KURLAND, D.M. (1983). *On the cognitive prerequisites of learning computer programming.* Technical Report No. 18. New York: Center for Children and Technology. Bank Street College of Education.

REISS, M. & HAUSSMANN, K. (1988). KASIMIR: eine Analyse iterativer Strategien zur Lösung eines rekursiven Problems mit Hilfe eines Produktionssystems. In K. EYFFERTH (Hrsg.), *Bericht über den 36. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie.* Göttingen: Hogrefe.

REISS, M. (1984). Vom Programmieren zum mathematischen Verallgemeinern. In W. ARLT & K. HAEFNER (Hrsg.), *Informatik als Herausforderung an Schule und Ausbildung* (S. 229-233). Heidelberg: Springer.

ROBERTS, E.S. (1986). *Thinking recursively.* New York: Wiley.

SCHMALHOFER, F. & KÜHN, O. (1986). Die erste Stunde beim Erwerb von Programmierkenntnissen - eine Computermodellierung im Ansatz. In M. AMELANG (Hrsg.), *Bericht über den 35. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie, Band 1* (S. 199). Göttingen: Hogrefe.

SIMON, H.A. (1975). The functional equivalence of problem solving skills. *Cognitive Psychology 7,* 268-288.

SPOHRER, J. C., SOLOWAY, E. & POPE, E. (1985). A goal/plan analysis of buggy Pascal programs. *Human Computer Interactions, 1(2),* 163-207.

VORBERG, D., GRUNER, E., HAHN, K., HEIM D., SCHULZE, H.H. & WAGNER, K.U. (1986). Entwicklung von Programmierwissen und seine Anwendung beim Problemlösen. M. AMELANG (Hrsg.), *Bericht über den 35. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie. Band 1,* (S.198). Göttingen: Hogrefe.

WALOSZEK, G., WEBER, G. & WENDER, K.F. (1986). Diagnose von Wissen - Entwicklung der Diagnosekomponente eines intelligenten LISP-Tutors. In M. AMELANG (Hrsg.), *Bericht über den 35. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie, Band 1* (S. 196). Göttingen: Hogrefe.

POUR UNE APPROCHE COGNITIVE DE L'ARGUMENTATION

R. Duval

Argumentation is considered as the most natural form of reasoning. Is its practise the best way to let the students access to deductive reasoning and to proofs ? In this paper, we propose to distinguish four basic units of reasoning, to analyse the processing of argumentative and deductive reasonings. Then we apply these distinctions to argumentative texts, and we compare the different possible representations of their organisation (propositional graphs, terms networks). Argumentation appears more complex and more difficult than deductive reasoning.

Ce qu'on appelle "argumentation" n'est pas facile à définir. Car il s'agit d'une démarche dans laquelle des aspects très différents se trouvent étroitement associés. Surgissant dans toute situation d'interaction sociale où il faut persuader un interlocuteur ou réfuter une thèse, elle est un raisonnement ordonné à des fins de communication. Aussi se trouve-t-elle toujours opposée aux démarches de démonstration et au raisonnement déductif : "la logique de l'argumentation ne peut être que *non formelle* "(J. M. Borel, 1983, p.20). Mais cette opposition ne va pas sans ambiguïté sur le caractère de raisonnement propre à l'argumentation. D'une part, puisqu'elle subordonne les questions de validité aux stratégies d'action sur les représentations d'un interlocuteur, l'argumentation n'apparaît pas comme un raisonnement véritable : sa portée s'y trouve limitée au probable ou au vraisemblable. D'autre part, puisqu'elle est directement liée à la pratique du discours, elle représenterait la forme spontanée et naturelle de raisonnement. Tant que l'on reste dans le cadre de cette opposition, l'ambiguïté sur le caractère de raisonnement propre à l'argumentation ne peut pas être levée. Cela ne constitue pas un inconvénient si on s'en tient au seul point de vue d'une analyse de l'argumentation : on insiste alors sur les modifications que l'implication du sujet dans la démarche et la prise en compte des représentations de l'interlocuteur entraînent par rapport à ce que serait l'organisation d'un raisonnement formel.Mais dans une perspective didactique cette opposition ne permet pas de répondre à une question importante : la pratique de l'argumentation peut-elle faciliter l'accès au raisonnement déductif ?

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
3 (1990) (p. 195-221) IREM de Strasbourg

Une approche de l'argumentation, dans laquelle le fonctionnement du raisonnement ne serait plus analysé négativement par opposition au raisonnement formel, s'impose donc. Elle devrait permettre en particulier une description comparée de l'argumentation avec d'autres modes de raisonnement. Elle devrait en outre permettre de déterminer la distance, ou le degré d'hétérogénéité, qui sépare l'argumentation et la déduction. C'est une analyse de ce type que nous allons tenter d'esquisser dans cet article. Pour cela il nous faudra revenir sur la notion même de raisonnement, avant même de prendre en compte toute distinction entre argumentation et déduction. La recherche des éléments constitutifs d'un raisonnement nous conduira à privilégier la notion de "pas de raisonnement" plutôt que celle d'"opération logique". On pourra alors distinguer des pas de natures différentes. C'est par le type de pas mis en oeuvre que le raisonnement argumentatif se distingue des autres modes de raisonnement. Pour corroborer les résultats de cette première analyse, nous essayerons de comparer des représentations possibles pour l'organisation argumentative d'un raisonnement. Et, plus particulièrement, nous chercherons si une argumentation peut être représentée de la même manière qu'un raisonnement déductif, c'est-à-dire par un graphe propositionnel de démonstration. Cela nous permettra de mesurer l'écart qui sépare l'argumentation et la démarche déductive.

I. Quels sont les éléments constitutifs d'un raisonnement ?

Dès que l'on veut décrire ce qu'est un raisonnement on fait nécessairement appel à deux types d'unités : d'une part des unités de sens et d'autre part des relations entre ces unités qui permettent, l'une étant donnée, d'en "inférer" une autre. Les premières sont communément appelées par les logiciens des "propositions", et les secondes sont définies comme des "fonctions de vérité". Naturellement, pour la validité du raisonnement seules ces dernières sont importantes : la correction d'un raisonnement dépend exclusivement de sa conformité à des schémas d'inférence valides et non pas des propositions qu'il relie. Cela a donné lieu à l'opposition, généralement utilisée, entre "forme" et "contenu". Cette opposition concerne non pas le deuxième type d'unités, c'est-à-dire les fonctions de vérités, mais le premier type, c'est-à-dire les propositions[1]. En effet, on ne reconnaît aux propositions que deux aspects: leur contenu, ou leur sens, et leur valeur de vérité.

---

[1] *Initialement synonyme de "jugement" (Logique de Port-Royal, 1662, seconde partie, chap3, p.156), le terme "proposition" s'est imposé, avec Russell , contre la notion de jugement trop liée à des critères psychologiques d'opération (affirmation et négation) et à des critères grammaticaux (sujet, copule, attribut). La proposition serait le sens de la phrase, ou un contenu de pensée susceptible de croyance, de doute, d'assertion. Cette notion de proposition a suscité une large controverse chez les logiciens et chez les linguistes sur l'existence même des propositions ainsi conçues et sur la possibilité de fournir des critères suffisants pour les identifier (Gochet, 1972). Mais les difficultés théoriques que soulève la notion de proposition ne doivent pas faire oublier la nécessité méthodologique de recourir à cette notion quand on veut travailler sur un corpus bien délimité et relativement homogène de productions discursives : celles qualifiées de "raisonnement" et qui recouvrent aussi des démonstrations en langue naturelle que des argumentations ou même plus simplement des inférences. Parmi les nombreuses tentatives qui ont été proposées pour définir ce qu'est une proposition, nous en retiendrons cinq (Gochet, 1972, p.18).*

—La proposition est tout ce qui peut être prémisse ou conclusion d'une inférence,

— la proposition est ce qui peut être le terme d'une incompatibilité ou d'une contradiction,

— la proposition est le sujet des "prédicats "vrai" et "faux",

— La proposition est ce qu'on veut dire ou ce qu'on pense. A ce titre la proposition serait le contenu d'actes tels que croire, douter, penser, appelés pour cette raison "attitudes propositionnelles" (Russell 1940, p.184-186).

—La proposition est la classe des énoncés synonymes à un énoncé donné dans une langue bien faite. La proposition serait donc l'invariant de sens rdes phrases eçues dans un corpus donné, comme synonymes.

La première et la troisième définitions s'en tiennent à ce qui constitue la forme d'une proposition et les trois autres sont relatives à son contenu. En fait la quatrième, plus ou moins abandonnée par Russell comme insuffisante, relève d'un autre aspect des propositions qui ne se laisse pas interpréter à l'aide de l'opposition entre forme et contenu. Nous l'appelerons la valeur épistémique. La première et la seconde définition ne peuvent pas être assimilées l'une à l'autre. La première concerne le statut opératoire d'une proposition; la seconde concerne la valeur logique d'une proposition. Ce sont des dimensions différentes.

En définissant les relations logiques entre les propositions comme des fonctions de vérité de ces propositions, on élimine leur contenu. Dans cette perspective les propositions ne se distinguent réellement que par leur valeur de vérité. La forme d'une proposition est sa valeur de vérité. Dire qu'un raisonnement ne dépend que de sa forme, revient donc en fait à dire que les propositions elles-mêmes ne sont pas prises en compte : on les nomme seulement comme support pour des valeurs de vérité.

Cette approche logique est insuffisante pour une analyse des processus cognitifs du raisonnement. Elle conduit d'ailleurs à des équivoques concernant la nature même des deux types d'unités.

a) La première concerne la distinction entre forme et contenu des propositions, c'est-à-dire entre valeur logique de vérité et sens. Cette dichotomie occulte un troisième aspect aussi essentiel pour comprendre le raisonnement : **la valeur épistémique.** La valeur épistémique est la valeur d'opinion, de croyance, de certitude, de principe, d'hypothèse, etc.., qu'une proposition a dans une situation donnée. Cette valeur épistémique, souvent implicite, s'explicite souvent par les verbes d'attitudes propositionnelles et par toutes les constructions avec des complétives : " on pense que...", "je crois que...", "je suis sûr que...", "il est nécessaire que...", "il est admis que...", etc...L'importance de la valeur épistémique, spontanément mise en rapport avec une valeur de vérité et souvent confondue avec cette valeur, tient aux deux phénomènes suivants :

— *Toutes les propositions vraies n'ont pas la même valeur épistémique* : ainsi un théorème et une proposition confirmée par une perception sont toutes les deux vraies, mais elles n'ont pas la même valeur épistémique. Selon les disciplines, et aussi selon les situations, la gamme des valeurs épistémiques qui correspondent à la valeur "vrai" change : elle est par exemple très réduite en mathématiques, elle l'est moins dans les disciplines expérimentales, et elle peut être très étendue dans une conversation ou

---

Toutes les discussions sur la notion de proposition souffrent de la méconnaissance de son caractère multidimensionnel.

dans une discussion (dans ce dernier cas la valeur épistémique de croyance peut co-respondre à la valeur "vrai" pour celui qui affirme " je crois que...").

— Raisonner sur ce qui est vrai apparaît comme une démarche inutile, voire dénuée de sens. Ainsi, en mathématique, beaucoup d'élèves ne comprennent pas pourquoi il faut démontrer ce qui se voit, ou ce qui peut se vérifier, sur une figure. Cette réaction psychologique révèle la différence entre une démarche de raisonnement et les autres démarches discursives comme un récit, une description ou une explication : *le raisonnement joue sur des différences de valeur épistémique de certaines propositions (hypothèses, suppositions, définitions, règles, principes, etc..) pour établir la vérité d'autres propositions, et par suite pour en modifier la valeur épistémique initiale.* Car, dans une situation donnée, le changement de valeur épistémique d'une proposition passe soit par un changement de sa valeur de vérité soit par la neutralisation de cette valeur de vérité.

La valeur épistémique d'une proposition dépasse le cadre classique de l'opposition entre forme et contenu, car elle est irréductible aussi bien à l'une qu'à l'autre. Elle peut être à la fois immédiatement liée au contenu ou dissociée du contenu; elle peut aussi être confondue avec la forme et en être également dissociée. De toutes façons la valeur épistémique détermine le rôle d'une proposition dans l'organisation du raisonnement. On comprend donc l'impasse de nombreuses études psychologiques sur "le raisonnement formel" qui, suivant l'exemple de certains manuels de logique, n'ont pas hésité à recourir à des enchaînements absurdes ou surréalistes de propositions pour présenter un raisonnement valide, notamment en ce qui concerne l'implication matérielle : elles s'en tenaient à la seule opposition, entre forme et contenu et ne pouvaient que constater la résistance des sujets à dissocier ces deux aspects des propositions.

b) La seconde équivoque concerne le second type d'unités. Les fonctions de vérité, quelquefois appelées "opérations logiques", sont souvent considérées comme les opérations fondamentales pour tout raisonnement. Or ces fonctions ne caractérisent pas nécessairement un pas de raisonnement. Si on prend par exemple une implication matérielle, on ne saurait considérer les trois tâches suivantes comme relevant de la même opération cognitive:

— Etablir si deux propositions données peuvent être reliées par la fonction de vérité "p implique q".
— Utiliser une application matérielle donnée et une prémisse pour appliquer le *modus ponens.*
— Transformer une implication matérielle donnée en sa contraposée.

La première tâche présuppose une activité de nature combinatoire. La seconde renvoie à une opération de substitution, caractéristique de toute démarche déductive. La troisième est une réexpression de la relation reposant sur le seul recours à la négation. Il est facile d'imaginer que, chez les sujets, ces différentes tâches puissent être réussies indépendamment les unes des autres. Le décalage entre les performances aux épreuves piagetiennes, essentiellement combinatoires, qui sont censées montrer l'accès au stade formel, et celles aux tests de reconnaissance des inférences valides à partir d'une implication matérielle, est maintenant bien connu. Mais l'échec à ces tests ne saurait davantage signifier l'incapacité à produire ou à comprendre les démarches liées au raisonnement déductif. En fait, les "opérations logiques" ne peuvent pas être prises comme référence, ou comme point de départ, pour analyser les processus cognitifs liés à leur acquisition, à leur application, et, plus généralement, aux différentes formes de raisonnement pratiqués.
Ce n'est donc pas en termes de fonction de vérité que le deuxième type d'unité peut être défini dans une approche cognitive, mais plutôt en termes de pas de raisonnement : *il y a un pas de raisonnement chaque fois qu'il y a passage d'une (ou de plusieurs) proposition(s) donnée(s) à une proposition nouvelle qui prend valeur de conclusion, intermédiaire ou finale.* Naturellement cette définition pourrait aussi être celle du raisonnement lorsque celui-ci se réduit à un seul pas[2] . Mais, comme nous allons le voir, elle n'est

[2] *Blanché, par exemple, propose une définition qui semble indépendante de la distinction entre un pas de raisonnement et un raisonnement de plusieurs pas : "Un raisonnement, c'est d'abord une certaine activité de l'esprit, une opération discursive par laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières". Mais plus loin il se voit contraint d'introduire la distinction entre entre raisonnement immédiat et raisonnement médiat, par le biais de la dualité terminologique inférence et raisonnement. En outre cette définition mélange l'aspect*

plus suffisante pour les raisonnements comportant plus d'un pas, car elle ne prend pas en compte la variation possible de liaison entre deux pas successifs. Et si l'on assimile les notions de raisonnement et de pas de raisonnement, on ne peut ni distinguer ni comparer les différentes démarches possibles de raisonnement, comme l'argumentation, le raisonnement déductif, le raisonnement par l'absurde.

II. Principes d'une classification des démarches de raisonnement.

Tous les pas de raisonnement ne sont pas de même nature. La définition d'un pas de raisonnement conduit à envisager deux variations possibles. En outre, pour un raisonnement qui comporte plusieurs pas, il y a une variation possible concernant la façon dont les pas se succèdent. Tout cela conduit non pas à une définition générale de ce qu'est un raisonnement, mais à une classification des différentes démarches de raisonnement dans laquelle le raisonnement déductif, le raisonnement par l'absurde et l'argumentation trouvent naturellement leur place. L'intérêt d'une telle classification est qu'elle permet une comparaison précise des ressemblances et des différences entre les différentes démarches de raisonnement que l'on peut observer.

Les deux variations possibles concernant un pas de raisonnement sont les suivantes :

1° Le passage des prémisses à la conclusion est effectué *directement ou en en référence à une règle.*

Le passage est *direct* lorsqu'il se fait par "résonance" (Grize 1983) du réseau sémantique sollicité par le contenu des prémisses, comme dans la compréhension du langage naturel : une proposition se trouve alors immédiatement mise en parallèle avec une autre, en raison des relations d'opposition ou de synonymie de leurs contenus respectifs. Tous les raisonnement qui jouent sur les différentes formes de contraste et d'opposition, inhé-

---

psychologique ("l'opération discursive est une activité de l'esprit") et l'aspect logique ("en vertu du lien logique", c'est à dire en vertu de schémas d'inférence valides).

rentes aux langues naturelles (Lyons), comportent ainsi des passages directs d'une prémisse à la conclusion. Au contraire, le passage est effectué *en référence à une règle* lorsqu'il se fait par application d'une définition, d'un théorème, d'un axiome, ou d'une loi logique. Les prémisses fournissent alors les conditions d'application d'une proposition ayant la valeur épistémique de définition, de théorème, ou de loi logique, et l'application donne la conclusion. Dans ce cas, le pas de raisonnement a une structure ternaire et les propositions ne sont plus prises en fonction de leur contenu, comme dans le passage direct, mais en fonction de leur statut opératoire.

2° Le passage est effectué à partir d'*une seule prémisse* ou à partir de *plusieurs.*
Cette variation peut apparaître moins importante que la précédente. Et elle est souvent méconnue au profit d'une autre, le nombre de pas dans un raisonnement. Pourtant le nombre de prémisses requises pour un pas de raisonnement joue davantage sur la complexité cognitive d'un raisonnement que le nombre de pas. Car cela exige une appréhension synoptique des différentes prémisses qui, tout en pouvant paraître sémantiquement distantes les unes des autres, doivent être momentanément saisies comme un tout.

Ces deux variations nous permettent de définir quatre types de pas de raisonnement selon la manière dont le passage des prémisses à la conclusion est effectué :
1) *directement* à partir d'*une seule* prémisse : c'est l'inférence immédiate, celle qui me permet d'entendre, par exemple, dans "il ne fume plus", "il a fumé".
2) *en référence à une règle*, à partir d'une *seule* prémisse : c'est la conversion logique des propositions, comme par exemple celle par contraposition.
3) *directement* à partir d'*au moins deux* prémisses : c'est, par exemple, le syllogisme classique.
4) *en référence à une règle*, à partir d'*au moins deux prémisses* : c'est ce qu'on appelle généralement un pas de déduction.

D'un point de vue strictement logique, il n'y a pas de différence entre les pas de type 2 et ceux de type 4. Mais, comme nous l'avons indiqué, la variation relative au nombre des prémisses (une seule ou au moins deux) ne peut pas être cognitivement négligée. En outre, la façon dont le syllogisme se trouve analysé peut surprendre. Classiquement, le syllogisme aristotélicien est présenté comme un raisonnement médiat, et comme une forme de raisonnement déductif. En fait le syllogisme ne comporte qu'un seul pas de raisonnement et il ne diffère de l'inférence immédiate que par le nombre de prémisses. Mais pourquoi le considérer comme un pas de type 3 et non pas de type 4 ? N'y-a-t-il pas des règles qui permettent de distinguer entre des formes de syllogismes valides et d'autres qui ne le sont pas ? Le simple examen du fonctionnement d'un syllogisme montre la différence qui le sépare d'un pas de déduction dans une démonstration mathématique. Dans un syllogisme, les règles portent sur le contenu des prémisses, et plus précisément sur les rapports d'inclusion, d'intersection ou d'exclusion entre le grand terme et le moyen terme. La validité d'un syllogisme dépend donc de l'acceptabilité formelle de certains constituants des deux prémisses; mais le passage des prémisses à la conclusion repose uniquement sur la prise en compte du contenu des prémisses[3]. Dans un pas de déduction, il en va tout autrement. La référence à une règle (c'est-à-dire à une définition, à un théorème ou à un axiome) porte uniquement sur le passage des prémisses à la conclusion : il n'y a aucune condition formelle sur l'acceptabilité des prémisses ou même sur leur nombre. De ce point de vue, dans un pas de déduction le contenu des propositions n'intervient pas, à strictement parler, hormis la vérification de la conformité entre les prémisses et les conditions d'application de la règle.

Beaucoup de démarches de raisonnement, comme la démonstration ou comme l'argumentation, qui visent à modifier la valeur épistémique d'une proposition (celle qui acquiert la valeur de théorème au terme de la démonstration, ou celle qui a la valeur de thèse à justifier, ou à réfuter, pour l'argumentation), ne se limitent pas un seul pas de raisonnement. La succession des pas peut alors se faire de deux façons différentes :

— Les pas successifs sont *explicitement "enchaînés"*. Une succession de pas est "enchaînée" lorsque chaque nouveau pas a, parmi ses prémisses, la conclusion du pas précédent. Dans ce cas il y a substitution successive de conclusions jusqu'à la conclusion-cible.

---

[3] *Le syllogisme aristotélicien relève d'une logique des termes et non pas d'une logique des propositions (Bochenski 1970).*

— Les pas successifs sont *extrinséquement connectés*. Une succession de pas est, extrinséquement connectée, lorsqu'il n'y a pas ce recyclage de la conclusion obtenue en point de départ du pas suivant. La liaison logique doit alors être marquée par un connecteur : "donc", "mais", etc..

III Comparaison de l'argumentation avec d'autres formes de raisonnement.

L'analyse d'un raisonnement comprenant plusieurs pas requiert donc que l'on prenne en considération à la fois la nature des pas et le type de succession des pas. Ainsi le raisonnement déductif et l'argumentation se distinguent à la fois par le type de pas et par le type de succession admis entre les pas.

Nous ne ferons pas ici en détail l'analyse du raisonnement **déductif** (Duval 1989). Rappelons que celui-ci consiste en une opération de substitution, portant sur des propositions, dans laquelle celles-ci interviennent d'abord selon leur statut opératoire et non directement selon leur contenu. Cela se traduit par le fait qu'un raisonnement déductif est formé exclusivement par des pas de type 4 ou de type 2, c'est-à-dire par des pas effectués par l'application d'une règle. Il faut, de plus, que ces pas soient explicitement enchaînés et non simplement extrinséquement reliés par des connecteurs. Dans la rédaction des démonstrations, les connecteurs marquent le statut opératoire des propositions qu'ils introduisent. Cette organisation déductive du raisonnement se représente naturellement pas un "flow diagramm", dans lequel toutes les flèches sont de même nature.

L'argumentation privilégie, au contraire, les pas de type 1 ou de type 3, c'est-à-dire ceux qui sont effectués sans référence à une règle et qui prennent en compte le contenu des propositions. Et, le plus souvent, les pas successifs d'une argumentation sont extrinséquement connectés. Cependant ils peuvent être parfois " enchaînés" pour produire un effet rhétorique de "rigueur". En fait, toute argumentation est neutre quant au type de succession entre ses différents pas. Car la structure d'une argumentation est donnée en priorité par les relations entre le contenu de ses propositions : le rôle des connecteurs qui relient les propositions consiste à souligner, à sélectionner ou à construire les oppositions ou les correspondances de contenu sur lesquelles l'argumentation se développe. Cette démarche de raisonnement ne peut pas être représenté par un "flow diagramm" car les propositions n'y sont pas substituées les unes aux autres, mais le plus souvent opposées les unes aux autres. Une argumentation ne se parcourt pas et ne peut pas être contrôlée pas à pas, *elle exige au contraire une appréhension simultanée des multiples relations existant entre les propositions.* C'est pourquoi elle se représente plus naturellement comme un réseau sémantique de propositions. Dans un tel réseau, toutes les flèches ne sont pas de même nature. Et , par rapport à un réseau sémantique, le réseau argumentatif présente la particularité de fonctionner, plus ou moins, en circuit fermé.

Le ***raisonnement par l'absurde*** combine des types de pas qui sont spécifiques soit à l'argumentation soit au raisonnement déductif. Ainsi son pas initial consiste à supposer vraie la proposition contraire à la proposition à démontrer; son pas terminal part de la contradiction entre une conséquence de cette supposition et une prémisse, pour rejeter la supposition et retrouver la proposition à démontrer comme celle qui correspond à l'unique cas possible. Ces deux pas sont de type 1 et 3, comme dans une argumentation, car ils reposent sur des relations d'opposition et ne sont pas strictement séparables d'un contenu sémantique : opposition antonymique entre des propriétés, par exemple "pair-impair" pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$, ou "illimitation-existence d'un plus grand que .." pour démontrer l'illimitation de la suite des nombres premiers. Entre le pas initial et le pas terminal, il peut y avoir soit une simple inférence soit un raisonnement déductif, et donc uniquement des pas de type 2 ou 4 explicitement enchaînés. Ce raisonnement déductif est développé jusqu'au moment où il produit une conclusion incompatible avec l'une des prémisses. La difficulté du raisonnement par l'absurde tient donc à ce qu'il fait intervenir des pas de natures très différentes : les uns fondés sur des relations d'opposition, les autres sur l'application d'une règle de substitution. La représentation d'un raisonnement par l'absurde combinera donc la représentation d'une raisonnement déductif avec le bouclage caractéristique de l'argumentation.

Ce caractère, cognitivement mixte, du raisonnement par l'absurde explique son originalité: il peut apparaître aussi bien dans le cadre du discours naturel que dans celui d'une démonstration. Le texte célèbre de Montesquieu que nous analysons plus loin est un exemple d'argumentation sous forme de raisonnement par l'absurde. Il diffère toutefois des démonstrations par l'absurde en ce que le raisonnement intermédiaire n'y est pas un raisonnement déductif : il fonctionne à la fois par substitution et par oppositions de termes et non par la seule substitution de propositions.

Le tableau suivant rassemble les principales caractéristiques que nous avons dégagées pour ces trois types de raisonnement. Notre propos visant en priorité une comparaison entre l'argumentation et les formes de raisonnement qui lui sont proches, ou qui lui sont directement opposées, nous n'avons pas pris en compte, par exemple le raisonnement par récurrence. Celui-ci présente des points communs avec le raisonnement par l'absurde, puisqu'il s'initialise par une supposition fondée sur la conclusion. Cependant le raisonnement par récurrence est un raisonnement très particulier puisqu'il s'applique seulement et uniquement à ce qui se laisse modéliser par les propriétés ordinales des nombres entiers. Sa compréhension et son fonctionnement suppose des connaissances spécifiques et particulières concernant la compréhension des nombres.

raisonnement et argumentation

	raisonnement déductif	argumentation	raisonnement par l'absurde
type de pas	référence à une règle (type 2 ou 4)	passage direct (type 1 au 3)	1, 2, 3, 4
type de succession entre les pas	explicitement enchaîné	neutre	explicitement enchaîné etconnection externe
valeur épistémique des propositions	hétérogène et entièrement explicitée	hétérogène et partiellement explicitée	hétérogène, et entièrement ou partiellement explicitée
statut opératoire des propositions	oui, déterminé par la valeur épistémique	non	oui, dans le cadre d'une démonstration
type de représentation du raisonnement	flow diagramm	réseau en circuit fermé	surperposition des deux types précédents

IV Comparaison de différentes représentations possibles de l'argumentation.

A) Une argumentation sous forme de raisonnement par l'absurde.

" Si j'avais à soutenir le droit que nous avons de rendre les nègres esclaves, voici ce que je dirais : .....
il est impossible que nous supposions que ces gens-là soient des hommes, parce que, si nous les supposions des hommes, on commencerait à croire que nous ne sommes pas nous-mêmes chrétiens."
MONTESQUIEU, *De l'esprit des lois,* Livre XV, cap.5.

Cette argumentation présente immédiatement trois caractéristiques.

a)— Il y a un écart entre la thèse (1) que le raisonnement est censé défendre, et la conclusion (3) proprement dite du raisonnement.

(1) " nous avons eu le droit de rendre les nègres esclaves"

(3) "Il est impossible que les nègres soient des hommes" c'est-à-dire"les nègres ne sont pas des hommes". Le raisonnement proposé ne peut donc défendre la thèse qu'en présupposant : "(3) justifie (1)".

b)— Ce raisonnement a la forme d'un raisonnement par l'absurde. On suppose le contraire de (3) :

" si nous les supposions des hommes", c'est-à-dire si "les nègres sont des hommes" (3').

Et cette supposition conduit à rejeter une conviction qui semble hors de doute :

" nous sommes chrétiens" (4') ("nous commencerions à croire que....." (4)).

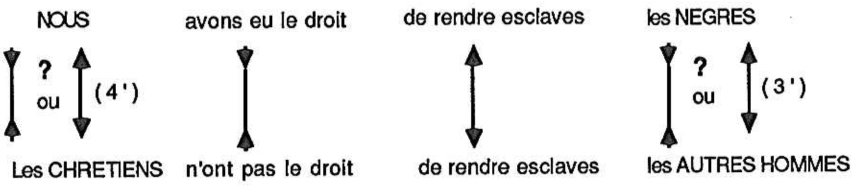
Mais pour que cette supposition permette de rejeter effectivement la conviction (4'), il faut une prémisse qui n'est pas mentionnée dans le raisonnement : "les chrétiens n'ont pas le droit de rendre les autres hommes esclaves" (2). Cette prémisse est énoncée dans l'un des chapitres précédents.

c)— Seules les valeurs épistémiques des propositions attribuées aux défenseurs de l'esclavage sont clairement explicitées: "*il est impossible que* (3') " et "*nous commencerions à croire que* nous ne sommes pas nous-mêmes chrétiens", c'est-à-dire "*nous sommes sûrs* que nous chrétiens" (4').

Nous pouvons donner trois représentations très différentes de ce raisonnement.

La première représentation met en parallèle les deux prémisses contraires (1) et (2). Elle montre que tout le raisonnement s'appuie sur **l'incompatibilité d'une co-référence simultanée** entre les sujets des phrases (1) et (2) d'une part, et les compléments de ces phrases d'autre part. D'où l'alternative :
OU BIEN (4') "nous sommes chrétiens", OU BIEN (3') " les nègres sont des hommes"! L'ironie du raisonnement apparaît dans le critère de décision : plutôt rejeter (3') que de commencer à douter de (4').

REPRESENTATION I



(4') Nous sommes chrétiens
(3') Les Négres sont des hommes

(4') et (3') ne peuvent pas être vrais ensemble

argumentation proposée : il est impossible que (3') parce que si (3') était vrai, il faudrait douter de (4')

Cette représentation met en évidence l'incompatibilité des deux prémisses (1) et (2), sous-jacente à toute l'argumentation, mais elle ne montre qu'une alternative et elle élimine complètement la forme de raisonnement par l'absurde. En effet la démarche du texte n'explicite pas du tout cette incompatibilité, elle en construit au contraire, une autre, celle entre (1) et (4') "nous sommes sûrs que nous sommes chrétiens". Et cette incompatibilité construite va à l'encontre de la compatibilité admise par les tenants de la thèse esclavagiste. *En d'autres termes toute la démarche de l'argumentation vise à modifier la valeur épistémique de la proposition "nous sommes chrétiens".* Ce qui est bien marqué par la litote finale " nous commencerions à croire que nous ne sommes pas nous-mêmes...". Il nous faut donc une autre représentation, plus complète, qui montre mieux la démarche argumentative.

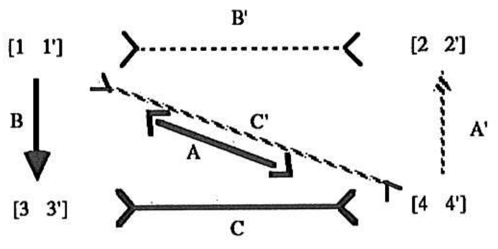
REPRESENTATION II

(1) Nous avons le droit de faire que
(1') les nègres soient des esclaves

(2) Les Chrétiens n'ont pas le droit de faire que
(2') les autres hommes soient des esclaves

(3) Il est impossible que
(3') les nègres soient des hommes

(4) Nous croyons que
(4') nous sommes chrétiens



Sur cette deuxième représentation on voit tout de suite que c'est la relation entre (1 1') et (4 4') qui constitue l''enjeu de l'argumentation. D'une part, elle prend en compte toutes *les relations explicites* de l'argumentation : la compatibilité entre (1) et (4), la dépendance de (3) par rapport à (1), et l'incompatibilité entre (3') et (4'). D'autre part elle prend en compte *les relations implicites* avec la prémisse sous-entendue : l'incompatibilité entre (1) et (2), celle résultante entre (1) et (4), et la dépendance de (2) par rapport à (4) — si on a la conviction d'être chrétien, on ne peut en récuser les exigences—. *La relation entre (1) et (4) constitue donc la partie commune au réseau des relations explicites et à celui des relations implicites.* Il en résulte une contradiction latente entre les relations A et C', ce qui conduit à changer la valeur épistémique de la proposition (4') "nous sommes sûrs que nous sommes chrétiens". (4') devient une proposition douteuse et la façon dont l'alternative entre (3') et (4') est tranchée par le raisonnement se trouve ainsi implicitement récusée. D'où l'ironie de ce raisonnement par l'absurde puisqu'il retourne implicitement le raisonnement contre la thèse qu'il est censé défendre.

Cependant si cette deuxième représentation respecte la démarche argumentative, la forme même du raisonnement, celle qui caractérise le raisonnement par l'absurde, n'est pas encore prise en compte. Peut-on représenter cette argumentation comme s'il s'agissait d'une simple démonstration ? Cette question s'impose dès que l'on veut comparer les fonctionnements respectifs de l'argumentation et du raisonnement déductif.

La construction d'un graphe propositionnel de démonstration requiert que:

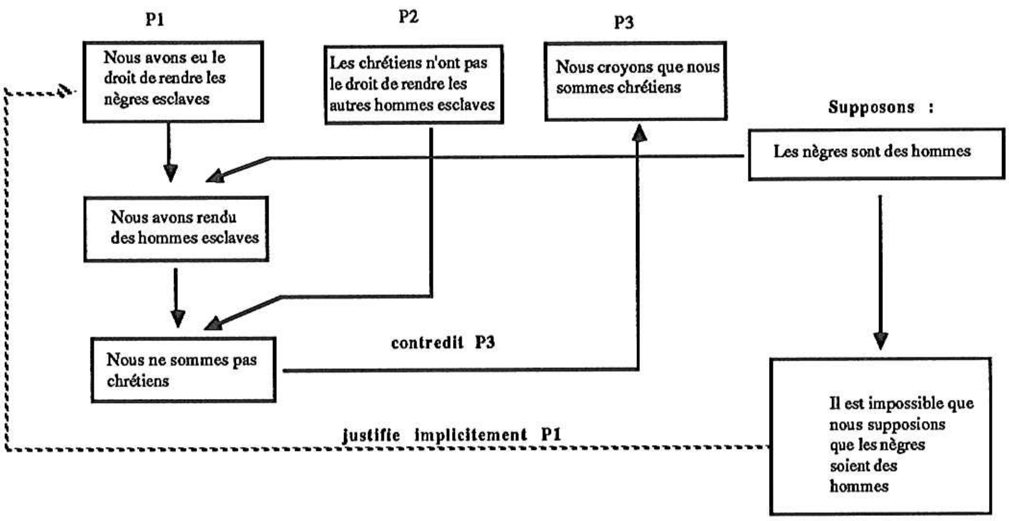
— les hypothèses de départ soient clairement dégagées,
— les pas de déduction soient explicitement marqués,
— le graphe soit orienté vers une conclusion finale unique,
— les règles de substitution soient préalablement reconnues.

Plus profondément, représenter une argumentation par un graphe propositionnel, exige que l'on donne un statut opératoire à des propositions qui n'en ont pas. Car dans le cadre de la pensée naturelle, il n'y a ni classification des valeurs épistémiques, ni règle de conversion des valeurs épistémiques en statut opératoire. La construction d'un graphe propositionnel exige donc que l'on réponde préalablement à ces deux questions :
1 — quelles sont les propositions qui peuvent avoir le statut opératoire de proposition de départ pour les pas de déduction, c'est-à-dire quelles sont les prémisses?
2 — quelles sont les propositions qui peuvent avoir le statut de règle de substitution?

La première question est à la fois très délicate et importante. Car, comme nous venons de le voir, une argumentation n'explicite pas toutes ses prémisses, et ne les énumère pas au départ. Les représentations précédentes nous ont permis de dégager (2) et (4') comme prémisses de l'argumentation. Pour réussir à construire un graphe de démonstration nous avons été également contraints de retenir, en plus, (1) comme hypothèse. Or (1) est la thèse que le raisonnement est censé justifier! C'est là évidemment un cas exemplaire de cercle vicieux. Mais il ne faut pas oublier le décalage que nous avons signalé plus haut : le raisonnement par l'absurde ne conclut pas explicitement (1) mais (3). Si on retient cet écart, il n'y a plus, apparemment, de cercle vicieux. Mais, par ailleurs, si on prend en compte la remarque introductive ("Si j'avais à soutenir le droit que...voici ce que je dirais.."), il faut admettre que (3) justifie (1). L'équivoque, ou le piège, de cette argumentation tient à ce qu'elle laisse entendre que (3) justifie (1).

La deuxième question renvoie à l'existence d'un corpus théorique de définitions, de théorèmes ou d'axiomes, bien établi. Force est de reconnaître qu'un tel corpus n'existe pas. Il y a seulement un appel circonstanciel à des principes ou à des évidences dépendant des représentations attachées à la thèse discutée. Pour représenter une argumentation par un graphe propositionnel de démonstration, *on ne peut donc s'en tenir qu'à une substitution de termes, ou d'expressions, telle qu'elle fonctionne dans le syllogisme classique.* Cette solution n'est peut-être pas entièrement satisfaisante. Mais elle reflète la différence entre l'argumentation et le raisonnement déductif: dans l'argumentation les propositions ne se relient pas les une aux autres en fonction de leur statut opératoire, mais uniquement en fonction de leur contenu. On voit déjà poindre ici une première différence entre les graphes de démonstration d'une argumentation et ceux d'un raisonnement déductif : *du fait de l'absence de règles de substitution, les pas de raisonnement des premiers correspondent à un schéma binaire, et ceux des seconds à un schéma ternaire.* En construisant un tel graphe pour une argumentation on ne peut vraiment donner que l'apparence d'un raisonnement déductif. Dans le cadre d'une comparaison des fonctionnements cognitifs de ces deux types de raisonnement, une telle construction n'est cependant pas sans intérêt raisonnement et argumentation

REPRESENTATION III



Comme on le voit, *la construction d'un graphe de démonstration entraîne une réorganisation complète de toute la démarche argumentative,* telle qu'elle est apparue à travers les deux premières représentations. L'appréhension simultanée de plusieurs relation d'opposition se trouve linéairement réorganisée en un raisonnement de quatre pas explicites et d'un cinquième implicite! Cette représentation est-elle plus adéquate que les précédentes ?

Si on s'en tient uniquement aux pas explicites, on a vraiment la représentation typique du raisonnement par l'absurde : le graphe boucle par suite d'une contradiction. La supposition initiale contredisant la conclusion-cible est alors rejetée. Mais en fait, toute la démarche argumentative se trouve trahie par cette représentation. En effet, un raisonnement déductif n'a pas pour but de confirmer ou d'infirmer une hypothèse avancée comme thèse, il établit seulement une proposition qui est différente des hypothèses données au départ. Or dans la représentation ci-dessus, P1 a exactement le même statut que P2 ou que P3. Pour lui redonner son rôle spécifique d'hypothèse à confirmer ou à infirmer ("Si j'avais à soutenir le droit que nous avons eu de rendre ..."), il faut une flèche qui retourne de la conclusion cible vers cette prémisse qui n'est pas comme les autres. Mais alors nous avons un graphe de démonstration qui boucle sur-lui-même! L'irréductibilité de cette argumentation, qui respecte pourtant la forme d'un raisonnement par l'absurde, par rapport à une démonstration, est ainsi bien mise en évidence.

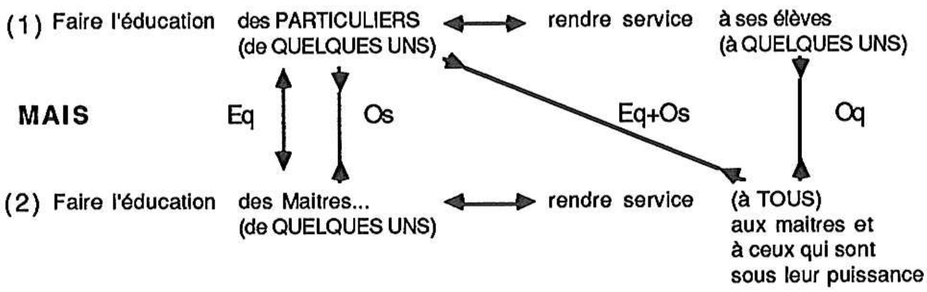
B) Une argumentation sous forme d'une simple justification.

"Les Maîtres qui font l'éducation des particuliers ne rendent service qu'à leurs élèves; mais quiconque inclinerait vers la vertu les maîtres de la masse, rendrait service à la fois aux uns et aux autres, à ceux qui détiennent la puissance et à ceux qui sont sous leur autorité".
ISOCRATE, cité par Perelman in *Traité de l'argumentation*, p. 312.

Cette argumentation oppose deux équivalences (première et dernière ligne sur la représentation ci-dessous), comme le marque le connecteur externe "mais". Le raisonnement qui justifie cette opposition externe joue sur d'autres oppositions, celles surgissant entre les contenus de ces équivalences. Le prédicat "faire l'éducation de..;" (colonne de gauche dans la représentation ci-dessous) absorbe l'opposition entre "quelques uns" et "tous" : que l'on éduque des particuliers ou que l'on éduque les maîtres de la masse, on fait seulement l'éducation de quelques uns. *L'opposition concernant le statut des élèves (particuliers ou maîtres de la masse) est donc neutralisée par le prédicat 'faire l'éducation de..".* Au contraire le prédicat "rendre service..." (colonne de droite) admet l'opposition entre "quelques uns" et "tous". *Par suite, il suffit de remplacer le prédicat "faire l'éducation de .." par le prédicat " rendre service.." pour libérer l'opposition de statut concernant les élèves, et pour faire apparaître l'opposition hiérarchique entre "tous " et "quelques uns".* L'argumentation ne progresse donc pas de la ligne 1 à la ligne 2, mais plutôt de la colonne de gauche à la colonne de droite : l'opposition maximale, qui constitue le fil directeur de l'argumentation est représentée par la diagonale.

raisonnement et argumentation

REPRESENTATION II



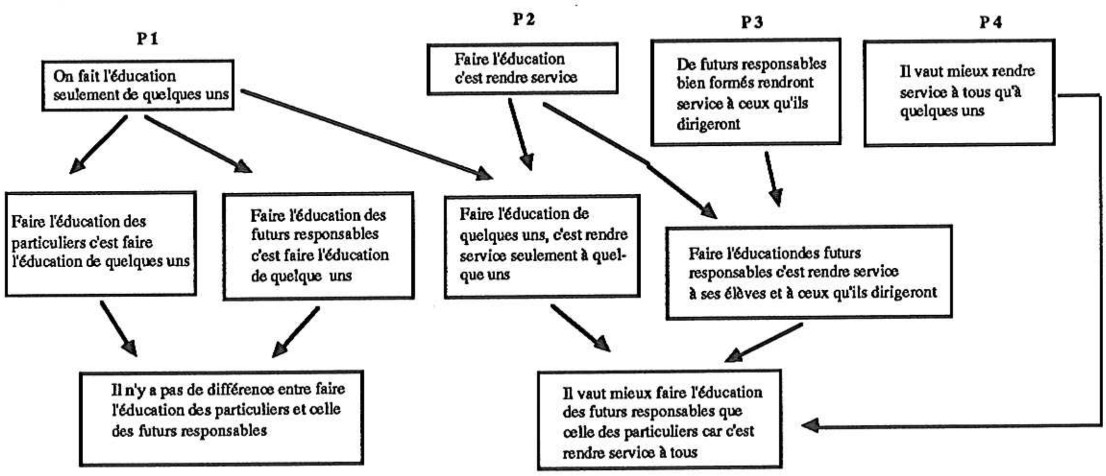
Eq : similitude de quantification entre les arguments du prédicat
Oq : opposition de quantification
Os : opposition sur le statut des individus

Cette représentation montre bien que l'argumentation repose ici sur une double comparaison : la première sous le strict point de vue des bénéficiaires de l'action éducative et la seconde sous le point de vue de la diffusion des effets de cette action. Tout le raisonnement revient à subordonner le premier point de vue au second. Seule une appréhension simultanée des différentes relations entre les quatre propositions qu'il met en jeu permet d'en comprendre le fonctionnement. Cette argumentation peut-elle vraiment être représentée sous une forme déductive, par un graphe de démonstration ?

Nous avons besoin de quatre prémisses, dont une seule, P2, est explicitement formulée sous forme de constatation évidente : "faire l'éducation c'est rendre service". P1 s'infère de la restriction " qui font l'éducation de... ne rendent service qu'à...". P3 est sous-entendue par l'explicitation finale " à ceux qui détiennent la puissance et à ceux qui sont sous leur autorité". P4 est indispensable pour trancher entre les deux points de vue possibles. Sous réserve d'une absence de règle de substitution, nous obtenons alors le graphe suivant :

raisonnement et argumentation

REPRESENTATION III



Comme nous le voyons, nous obtenons un graphe avec deux conclusions terminales! Et il n'est pas possible de supprimer P1. D'une part on perdrait les deux conclusions terminales. D'autre part ce serait perdre de vue que le raisonnement tranche entre deux réponses possibles à la question : vaut-il mieux faire l'éducation.....?

C) Une argumentation d'apparence déductive.

Le troisième exemple est, en quelque sorte, à mi-chemin entre les deux exemples précédents. Comme le premier il énonce explicitement une thèse et propose ensuite un raisonnement qui la justifie; comme le second, il ne réfute pas.

"Plus je suis prêt à reconnaître ce qu'il y a de réel en moi et chez l'autre, moins j'ai le désir d'essayer d'arranger à tout prix les choses. Plus j'essaie d'écouter et d'être attentif à mon expérience interne et plus j'essaie d'étendre cette attitude à un autre, plus j'éprouve de respect pour les complexités du processus vital. C'est pourquoi je me sens de moins en moins pressé d'arranger les choses"
ROGERS, *Le développement de la personne*, p.19-20.

REPRESENTATION I

Je reconnais ce qu'il y a de réél en moi et chez l'autre PLUS → MOINS je suis préssé d'arranger les choses.

A

(Thèse concernant l'attitude non-directive)

B

(Justification)

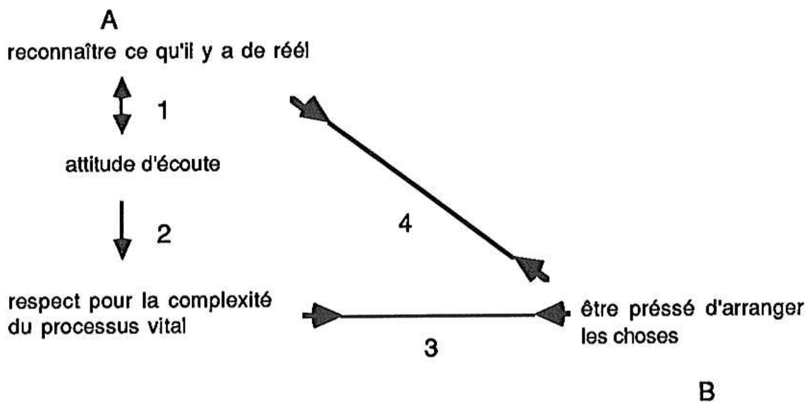
Plus d'attitude d'écoute à mon expérience

↓

Plus de respect pour la complexité du processus vital → C"EST POURQUOI → MOINS Je suis préssé d'arranger les choses

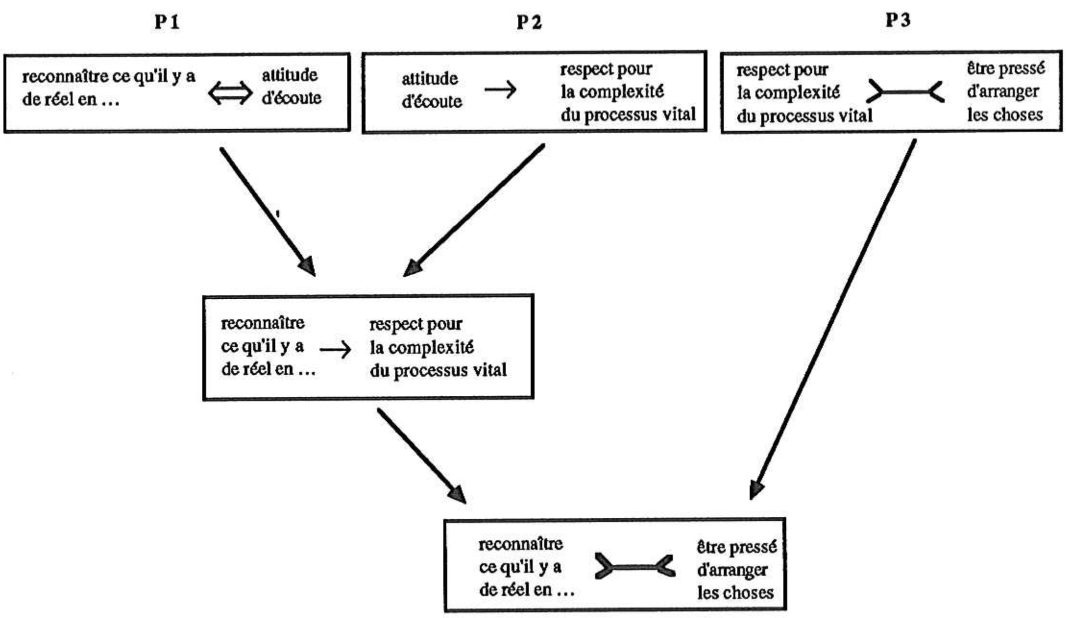
Cette première représentation donne simplement l'ordre de succession de propositions principales du texte. On voit, en particulier, que le raisonnement a bien pour but de "déduire" la proposition **B** de la proposition **A.** Mais, comme cela apparaît sur la deuxième représentation ci-dessous, la linéarité du raisonnement n'est qu'apparente, et, sous le jeu des substitutions successives, se cachent des relations d'oppositions. *La proposition **B** n'est pas véritablement une conclusion obtenue au terme d'une suite de pas déductifs, mais le pôle d'un réseau de relations.* L'argumentation consiste à construire ce réseau de relations de façon à imposer la relation d'opposition directionnelle 4 (représentation III, ci-dessous) entre **A** et **B** contre la relation de similitude directionnelle que l'attitude directive tend à établir comme évidente ("plus **A** entraînerait plus **B**"). Pour s'en convaincre il suffit de compléter le réseau ci-dessous en ajoutant le prédicat " n'être pas pressé d'arranger les choses" qui forme une opposition complémentaire avec **B** et par suite avec **A.** Cette double opposition entraîne la similitude directionnelle entre **A** et **B**

REPRESENTATION II



Tentons maintenant de représenter cette argumentation par un graphe de démonstration. Il semble que nous obtenions cette fois un graphe qui ne présente aucune anomalie : il n'y a en effet aucune circularité et nous ne sommes pas conduits à deux conclusions différentes. Cela semble s'accorder avec ce que nous remarquions plus haut : le raisonnement a pour but de déduire **B** de **A**. Mais en fait nous obtenons un graphe de démonstration parce que les prémisses ne sont pas indépendantes. Elles sont "enchaînées" comme des pas successifs de raisonnement : les prémisses 1 et 2 ont deux à deux un prédicat commun, et de même les prémisses 2 et 3. Les trois prémisses sont donc déjà organisées en raisonnement, chacune constituant un pas de type 1.

REPRESENTATION III



CONCLUSION

Les résultats des analyses précédentes peuvent être rassemblées dans les conclusions suivantes :

— Ce qui caractérise le raisonnement par rapport à toute autre forme de discours, comme un récit, une explication ou une description, est la prise en compte des valeurs épistémiques des propositions. Cette valeur épistémique, distincte de la valeur de vérité, n'appartient ni à la forme ni au contenu des propositions : elle peut toujours s'expliciter par un verbe d'attitude propositionnelle ou par une expression modale. Un raisonnement est donc une démarche discursive qui s'organise en fonction des différences de valeur épistémique entre les propositions, et qui entraîne la modification de la valeur épistémique de l'une des propositions.

— La différence entre argumentation et déduction tient à la différence de nature entre les pas de raisonnement, ainsi qu'au type de liaison entre deux pas successifs. Dans l'argumentation, la prise en compte de relations d'opposition entre les propositions joue un rôle essentiel, mais les propositions n'ont pas de statut opératoire. En revanche dans le raisonnement déductif c'est l'inverse qui se passe. L'intérêt d'une analyse à partir d'une classification des différents pas possibles de raisonnement est d'expliquer pourquoi le raisonnement par l'absurde peut apparaître aussi bien comme un raisonnement spontané dans le cadre d'une discussion ou comme un raisonnement formel dans le cadre d'une élaboration théorique.

— La comparaison des représentations de l'organisation argumentative du discours et de sa réorganisation déductive permet de mesurer la distance qui sépare ces deux modes de raisonnement. Le passage de l'argumentation à la déduction exige une recherche des prémisses et une assimilation de la substitution de termes à une substitution de propositions. Réorganisée de façon déductive, une argumentation présente généralement davantage de pas que sous sa forme initiale; et des insuffisances apparaissent qui invalident le raisonnement. Mais l'argumentation est un mode de raisonnement qui remplit d'autres fonctions que la simple démonstration.

Il apparaît donc que, si l'argumentation est plus spontanée et plus naturelle que le raisonnement déductif, elle est aussi plus complexe et plus difficile à maîtriser et qu'elle ne peut pas orienter vers le raisonnement déductif. S'agit-il là d'un résultat négatif du point de vue didactique ? Nous ne le pensons pas, bien au contraire. Et cela pour trois raisons :

— Nous avons montré par ailleurs que les élèves de 13-14 ans peuvent, d'une façon peu coûteuse et profonde, être initiés au fonctionnement du raisonnement déductif et découvrir ce qu'est une démonstration (Egret-Duval, 1988).

— Des tâches peuvent être proposées, qui aident les élèves à prendre conscience de la différence entre argumentation et déduction. Et c'est peut-être là l'un des domaines les plus riches pour une interaction entre l'enseignement du français et celui des mathématiques.

— Le rôle important du recours à des représentations non-discursives pour comprendre l'organisation d'un texte, ou celle d'un raisonnement, se trouve ici à nouveau corroboré. Certes, ce recours soulève des questions qui ne sont pas toutes encore résolues. A commencer par celle de la segmentation du discours pour établir ces représentations. Mais la fécondité méthodologique et l'efficacité didactique d'un tel recours sont maintenant bien établies.

REFERENCES.

Arnauld A & Nicole P., 1662, *La logique ou l'Art de penser.* (La logique de Port-Royal), Paris, Flammarion, 1970.

Blanché R., Raisonnement, in *Encyclopedia Universalis*

Bochenski I.M., 1970, *A history of formal logic,* New York - Chelsea Publishing.

Duval R., 1987, Representation of texts: problems for research and propects for education. Communication and Applied Psychology Ghent.

Duval R., 1989, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, Préprint.

Egret M. A. & Duval R., 1988, Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* volume 2, p. 45-64.

Gochet 1972, *Esquisse d'une théorie nominaliste de la proposition.* Paris, Armand Colin

Grize J.B.,1983, "Schématisation et logique naturelle", in *Essai de logique naturelle,* Borel, Grize & Miéville Eds, Berne, Peter Lang, p. 97-147.

Lyons J., 1978, *Eléments de sémantique,* Paris , Larousse.

Perelman C, & Olbrechts-Tyteca L., 1958, *Traité de l'Argumentation.* Paris, P.U.F.

Russell B,1940, *An inquiry into meaning and truth* (trad."Signification et Vérité" Paris, Flammarion, 1969).

LES FIGURES AIDENT - ELLES A VOIR EN GEOMETRIE ? .

V. PADILLA

1

The figures are generaly admitted as illustration of a geometrical situation : they guide the intuition during research. But perception of geometrical figures requires recognition of different possible reconfigurations, which are not all immediately obvious. This recognition and the selection of the relevant reconfiguration for a given situation takes a long time for most of students. Very often they don't succed.

Le rôle intuitif des figures en géométrie est une opinion communément admise. Les figures permettent un accès plus direct, plus riche et moins coûteux qu'un texte à une situation mathématique " En fait et notamment en géométrie du plan , la figure est l'objet d'étude premier "et" la figure permet à l'élève une prise de contact concrète quasi-physique avec la situation étudiée ".(BESSOT, 1983, page 35) .

Les figures dispensent même d'explications ou de justifications .

Régine DOUADY commente ainsi un problème proposé : "dans le problème ci - dessus, on a compté les demi-carreaux : 2 demi-carreaux valent un carreau, ça se voit sur le dessin " (DOUADY, 1984, page 91) .

Tout cela reflète la conviction généralement partagé qu'il suffirait de "faire une figure" pour que les élèves voient ! .

En fait on confond la perception de formes élémentaires isolées comme celle d'un trait, celle d'un carré, ou d'un rond, et la perception de figures illustrant des situations géométriques et qui sont des combinaisons de ces formes élémentaires. La perception de formes élémentaires donne lieu à une reconnaissance immédiate : on les voit tout de suite. Mais la perception des secondes ouvre sur plusieurs reconfigurations possibles, lesquelles ne se voient pas toutes et tout de suite La reconnaissance des différentes reconfigurations possibles et la sélection de la reconfiguration pertinente pour un problème peut prendre du temps. Et même beaucoup d'élèves peuvent ne pas y parvenir

---

1 © Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
3 (1990) (p. 223-252) IREM de Strasbourg

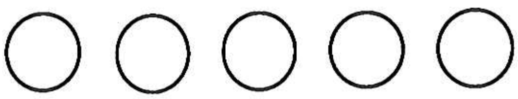
Cela est vrai pour des figures complexes illustrant un problème difficile, mais aussi pour des figures très simples illustrant des exercices élémentaires de géométrie. "Voir" sur une figure relève d'un apprentissage dont l'importance reste trop souvent ignorée.
L'intuition que donne une figure géométrique ne relève pas seulement des lois gestaltistes de la perception. Elle dépend aussi d'autres types d'appréhensions comme l'appréhension opératoire ou l'appréhension discursive (DUVAL, 1988). Dans l'initiation au raisonnement en géométrie, les situations relevant de l'appréhension opératoire, et plus particulièrement celles qui correspondent à des modifications méréologiques, jouent un rôle privilégié . Ce sont celles dans lesquelles une figure est partagée en sous-figures, lesquelles peuvent être recombinées en une autre reconfiguration. Ces modifications méréologiques jouent un rôle important pour illustrer nombre de traitements mathématiques relatifs à la comparaison et au calcul des surfaces. Le rôle intuitif d'une figure pour cette classe de problèmes repose sur l'opération de reconfiguration intermédiaire. Le partage d'un carré ou d'un rectangle en petits carreaux en est un exemple trivial. Il donne lieu à des reconfigurations intermédiaires qui sont loin d'être évidentes pour tous les élèves .
Dans le cas de cette appréhension opératoire, le rôle intuitif d'une figure géométrique dépend de plusieurs facteurs :
- le fait que le regroupement pertinent des parties élémentaires forme une reconfiguration qui est convexe ou non convexe
- le fait que le fractionnement de la figure en parties élémentaires soit donné au départ ou qu'il doive être trouvé
- le fait qu'une même partie élémentaire doive entrer simultanément dans deux regroupements intermédiaires à comparer " (DUVAL, 1988, page 66, 67) .
Ces facteurs permettent d'évaluer le rôle intuitif d'une figure et d'analyser le type de difficultés qu'elle peut présenter .
C'est dans cette perspective que nous avons choisi 6 exercices élémentaires de géométrie, dont les figures exigent l'opération de reconfiguration intermédiaire. Nous les avons présentées à 7 binômes de 6ème et à 7 binômes de 5ème (11-13 ans), pris dans des classes différentes . Nous avons enregistré les temps de résolution (ceux-ci pouvant aller de 1 à 20 minutes pour le même exercice) ainsi que les échanges entre les élèves .
Toutes les données recueillies mettent en évidence que voir sur une figure est une démarche complexe et que, dans le cas des modifications méréologiques, cette vision dépend bien des facteurs que nous venons d'indiquer.

PRESENTATION DE PROBLEMES .

Les problèmes ont été présentés dans l'ordre suivant:

PROBLEME N° 1:

On a cinq gâteaux égaux. Comment les partager entre 4 enfants, de façon à ce qu'ils reçoivent des parts égales ?.

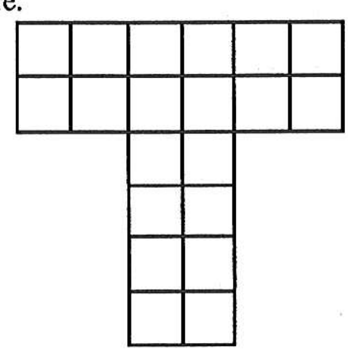


Le traitement de ce problème ne requiert aucune opération de reconfiguration. Il exige au contraire que l'on coordonne deux opérations : l'une de correspondance, l'autre de partage.

L'élève peut mettre en correspondance 4 gâteaux et 4 enfants et puis partager le gâteau restant et mettre en correspondance les morceaux et les enfants.
Ou encore, partager les 5 gâteaux et mettre en correspondance les morceaux et les enfants.

PROBLEME N° 2

Cette figure est formée de cinq carrés. Peut-on la découper en quatre morceaux superposables ?.Marquer les traits du découpage sur la figure.

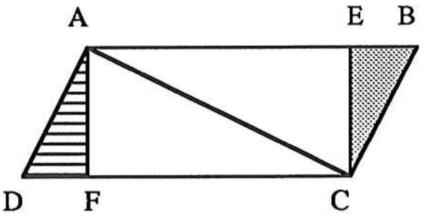


Ce problème demande explicitement une reconfiguration par assemblage de carrés à partir d'un fractionnement en carrés déjà donné Cette reconfiguration est le but du problème. Le regroupement pertinent de parties élémentaires forme des sous-figures qui sont non convexes et cela peut être aussi un facteur qui joue un rôle.important pour trouver la reconfiguration pertinente parmi celles qui sont possibles.

Ce problème a été utilisé dans le questionnaire pour l'Evaluation du Programme de Mathématiques Fin de Sixième, 1987, réalisé par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public).
Selon les auteurs de cette évaluation, la solution de ce problème n'est pas évidente, car il n'existe pas de procédure apprise directement utilisable.

PROBLEME N°3:

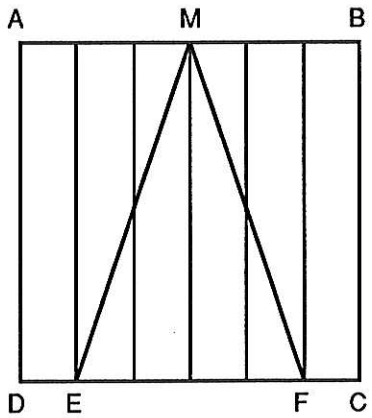
ABCD est un parallélogramme et (CE) // (AF). Pourquoi peut-on dire que l'aire hachurée et l'aire en pointillé sont égales ?.



Ce problème présente une reconfiguration mais avec une difficulté supplémentaire: le dédoublement de certaines sous-figures. En effet, les aires AEC et AFC appartiennent simultanément aux parallélogrammes ABCD et AECF.

PROBLEME N° 4:

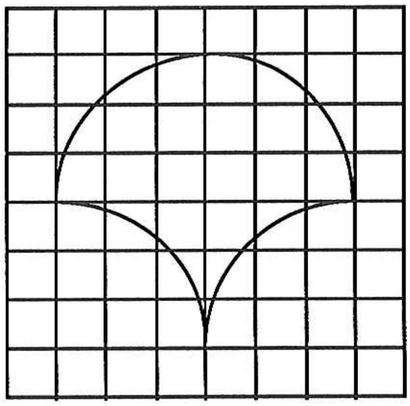
ABCD est un carré partagé en bandes égales. Prouve que les aires AMED, MEF et MBCF sont égales.



Ce problème présente une reconfiguration intermédiaire mais non explicitement demandée. L'élève peut faire le regroupement approprié de parties élémentaires, mais elles sont déjà données. Le fractionnement en 6 parties est indiqué.

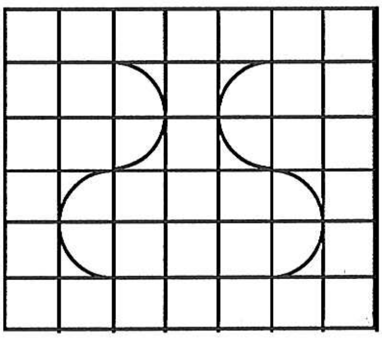
PROBLEME N° 5:

Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?.



PROBLEME N° 6 :

Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?.

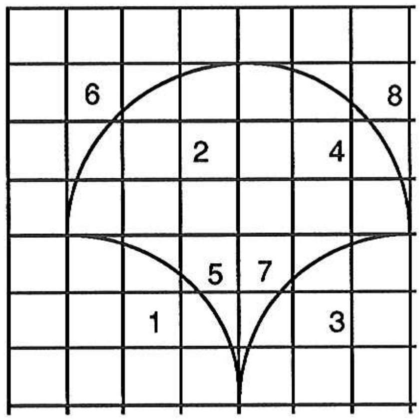


Ces problèmes présentent une reconfiguration par complémentarité de formes mais sur fond de quadrillage. Le fait d'avoir un fond quadrillé peut jouer un rôle très important sur les différents types de reconfigurations intermédiaires .

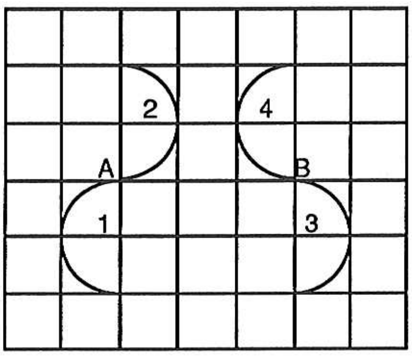
Le quadrillage peut induire une procédure de comptage des petits carreaux. Dans ce cas il y aura une reconfiguration pour les petits carreaux qui ne sont pas entiers. C'est une reconfiguration où le support quadrillage est privilégié Le quadrillage peut induire, aussi, une reconfiguration de la forme globale (vase) en une autre forme globale (rectangle). C'est une procédure plus gestaltiste, où la forme est privilégiée .

Par exemple pour le problème N° 5 :

l'élève peut mettre le quart de cercle 2 à la place de 1 et le quart de cercle 4 à la place de 3; ou la parcelle 5 à la place de 6 et la parcelle 7 à la place de 8, privilégiant de cette façon la figure et non le fond ; mais dans chaque cas, les parcelles sont différemment orientées et cela peut aussi constituer un obstacle pour la reconfiguration intermédiaire, qui donnera dans chaque cas un rectangle de 3 sur 6



Dans le problème N°6:



l'élève peut aussi faire une reconfiguration intermédiaire en mettant le demi-cercle 1 à la place de 2 et le demi-cercle 3 à la place de 4, pour former une figure plus simple : un rectangle de 4 sur 3.

Mais de même que dans le problème N° 5, l'élève peut rencontrer des obstacles pour réaliser l'opération de reconfiguration intermédiaire. En effet, les demi-cercles 1 et 3 sont intérieurs, alors que 2 et 4 sont extérieurs à la figure ; les paires de demi-cercles 1 et 2, 3 et 4 sont en sens contraires. Il y a des centres de symétrie en A et en B qui pourraient rendre plus facile cette opération dans le problème N° 6 que dans le problème N° 5.

C'est, du moins, une idée à-priori que nous avons eus.
Nous présentons ci-dessous un tableau qui résume les caractéristiques de chaque problème.

TABLEAU N° 1

Problème	*Opérations constituant la productivitéheuristique*	*Modes de sollicitation de la reconfiguration*
N°1	- Correspondance et partage du gâteau restant entre les enfants - ou partage des gâteaux et correspondance	- Pas de reconfiguration
N° 2	- Reconfiguration par assemblage	- Reconfiguration demandée explicitement - Fractionnement donné - Caractère non convexe des sous-figures résultant du regroupement pertinent.
N°3	- Reconfiguration	- Obstacle du dédoublement des sous-figures
N°4	- Reconfiguration intermédiaire.	- Reconfiguration non demandée explicitement - Fractionnement donné
N° 5 et N° 6	- Reconfiguration par complémentarité de formes.	- Fond quadrillé - Reconfiguration non demandée explicitement - Reconfiguration locale ou globale

METHODE DE L'EXPERIMENTATION.

L'expérience a été menée durant les cours de mathématique, aux mois de mai-juin 1988. Après avoir formé les binômes, nous sommes allés dans une salle très calme. Les élèves ont été informés du but de ce travail. Chacun a trouvé un magnétophone et un micro et l'expérimentateur a donné les consignes (nous avons fait une adaptation des consignes utilisées par Antoine BODIN dans la recherche pour son Diplôme de D.E.A.).

- Je vais vous proposer 6 problèmes que vous allez faire ensemble, en parlant normalement.
- Un magnétophone enregistre votre conversation pour me permettre de mieux com-

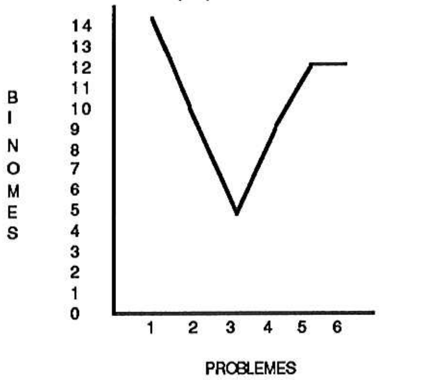
prendre ce que vous aurez fait. Je pourrai ainsi vous écouter plusieurs fois, mais personne d'autre que moi ne pourra vous écouter.
- Si vous ne réussissez pas un exercice, cela n'est pas grave, essayez seulement de faire pour le mieux possible .
- Vous pouvez me poser des questions, mais il n' est pas certain que je réponde à toutes vos questions .
- Vous travaillez directement sur la feuille que je vais vous donner ; la présentation est sans importance, vous pouvez faire des ratures .
- Vous allez commencer par le problème N°1 et une fois que vous l'aurez fini je vous donnerai le suivant .
- Vous ne devez pas avoir de souci de temps. Vous avez tout le temps nécessaire pour réfléchir.

Nous avons fait une fiche d'observation pour chaque binôme indiquant autant que possible les comportements observés, l'ordre de déroulement, les procédures utilisées et les temps de traitement (T T). La transcription des cassettes enregistrées a été réalisée très rapidement après les séances.

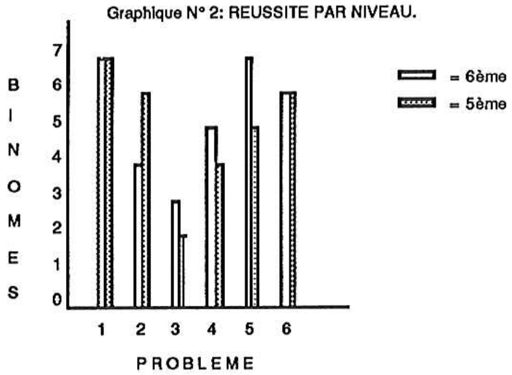
PRESENTATION GLOBALE DES PERFOMANCES.

Pour l'analyse des résultats nous nous sommes intéressés au comportement des élèves face aux 6 problèmes. Nous avons essayé d'analyser les différentes opérations qui ont constitué leur production heuristique, ainsi que les facteurs qui jouent sur la visibilité et les temps de traitement que chaque binôme a pris pour résoudre chaque problème.
Pour cette analyse nous avons déterminé six intervalles de temps :
A = 0"--- 30"
B = 1'--- 2'
C = 3'--- 7' (autour de 5')
D = 8'--- 12' (autour de 10')
E = 13' --- 20' (autour de 15')
F = plus de 20'
Ci-dessous nous avons des graphiques qui montrent :
- la réussite totale pour chaque problème (graphique N°1)
- la réussite totale de chaque niveau (6ème et 5ème) à chaque problème (graphique N°2) et
- l'allongement des T T (tableau N°2).

Graphique N° 1 : REUSSITE TOTALE



Graphique N° 2: REUSSITE PAR NIVEAU.



Dans le tableau suivant les chiffres représentent le nombre de binômes ayant réussi le problème, dans chaque classe de T T. Nous avons voulu, ainsi, représenter l'allongement des T T .

TABLEAU N°2: allongement des T T

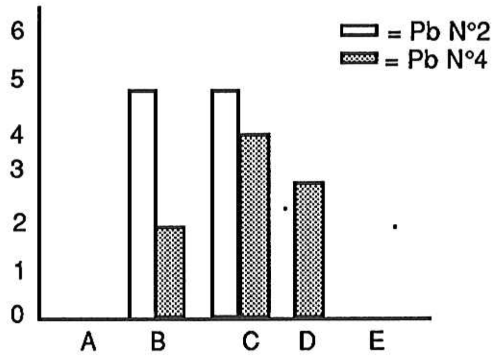
Problème	A 0"-30"	B 1'-2'	C 3'-7'	D 8'-12'	E 13'-20'
N°1	7	6	1		
N° 5	1	4	4		3
N° 6	4	2	4	2	
N° 2		5	5		
N° 4		2	4	3	
N° 3			2		3

Comme nous pouvons le constater, le problème N°1 a été le seul à obtenir 14/14 de réussite et en plus il a pris le plus petites T T (temps de traitement), des T T qui soulignent le caractère facile de la tâche demandée.

Nous voudrions rappeler que ce problème N°1 est différent de tous les autres, parce qu'il ne demande pas l'opération de reconfiguration. Constatons que l' opération constituant la productivité heuristique, est la correspondance et le partage; cela signifie que l'opération de correspondance et partage est beaucoup plus facile que l'opération de reconfiguration, pour les élèves de cette tranche d'âge .

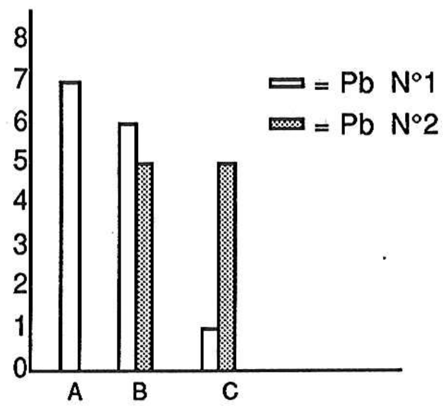
Les problèmes N°2 et N°4 ont un taux de réussite voisin (10/14 et 9/14 respectivement).Pour ces deux problèmes le fractionnement en sous-figures est déjà donné, mais dans le problème N°2 la reconfiguration est explicitement demandée tandis que dans le problème N°4 elle ne l'est pas.

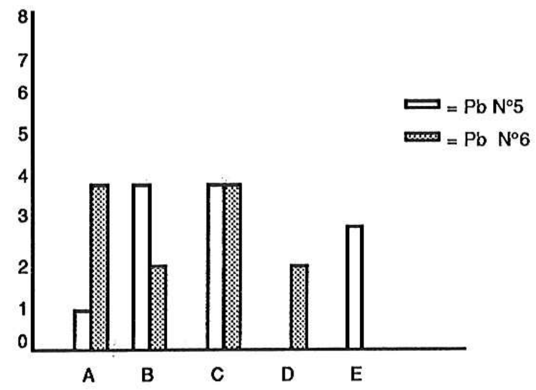
Cette différence se traduit par un allongement des T T pour le problème N°4.



Dans le graphique suivant , les chiffres réprésentent le nombre de binômes ayant résolu le problème dans chaque classe de T T .

Si nous faisons aussi une comparaison entre les problèmes N°1 et N°2, (le traitement du problème N°1 ne requiert aucune opération de reconfiguration, mais mise en correspondance et partage.Le problème N°2 demande explicitement une reconfiguration), nous pouvons observer une chute considérable de réussite (14/14 et 10/14 respectivement) ainsi qu'un allongement des T T ; nous pourrons en conclure que l'opération de reconfiguration n'est pas une opération évidente et que le caractère non-convexe des sous-figures résultant du regroupement pertinent, est un facteur-obstacle pour la visibilité de l'opération de reconfiguration.





Les problèmes N°5 et N°6 ont le même taux de réussite (12/14), et les mêmes caractéristiques (voir tableau N°1), mais le problème N°5 a pris le plus grand T T, différence qui pourrait provenir de l'ordre de présentation : d'abord le N°5 et après le N°6. Le problème N° 5 a été beaucoup plus réussi en 6ème qu'en 5ème (7/7 et 5/5 respectivement) et le problème N° 6 a eu le même taux de réussite pour chaque niveau (6/7), (voir graphique N°2).

Le problème N°3 a eu la plus faible réussite (5/14, graphique N°1) et a pris le plus grand T T (tableau N°2), nous pensons que l'obstacle du dédoublement d'objets a joué un rôle négatif très important pour la visibilité de l'opération de reconfiguration dans ce problème, parce qu'aucun des binômes n'a eu l'idée de une reconfiguration intermédiaire pour essayer de trouver la solution ; les cinq binômes qui ont donné une réponse acceptable ont recouru à l'action de mesurer.

En plus, nous pouvons dire qu' à l'exception du problème N°2, tous les autres ont eu un taux de réussite égal ou plus grand en 6ème qu'en 5ème (graphique N°2) et en général les élèves de 6ème ont pris les plus petits T T. Comme nous le verrons plus loin, cette différence s'explique par les procédures employées : les élèves de 5ème que nous avons eu ont moins fait appel que les élèves de 6ème à des procédures fondées sur la reconfiguration.

Cette différence des T T entre les niveaux (6ème et 5ème) est liée à l'opération qui a constitué la productivité heuristique de chaque binôme pour chaque problème.
Nous avons relevé, pour les problèmes N°5, N°6 et N°4, deux procédures utilisées :
- Reconfiguration
- Autre opération, que nous présenterons dans l'analyse particulière de chaque problème.

Nous obtenons les résultats suivants :

Problème	Réussite totale	Reconfiguration 6ème	5ème	Autre opération 6ème	5ème
N°4	9	4	2	1	2
N°5	12	5	1	2	4
N°6	12	5	3	1	3
		14	6	4	9

Il y a eu en total 33 cas de réussi parmi lesquels 20 l' ont été par utilisation de l'opération de reconfiguration : 14 cas de 6ème et 6 cas de 5ème .

PRESENTATION DE PROCEDURES POUR CHAQUE PROBLEME ET COMPARAISON DE LEUR "EFFICACITE".

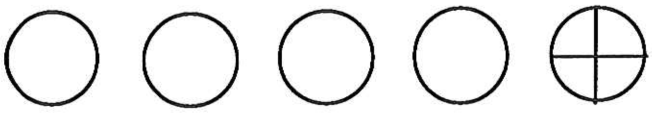
PROBLEME N°1:

Il a été réussite par 14/14 binômes . Nous avons observé deux types de procédures:
a - la procédure correspondance-partage-correspondance
b - la procédure correspondance-partage.

a- Correspondance-partage-correspondance

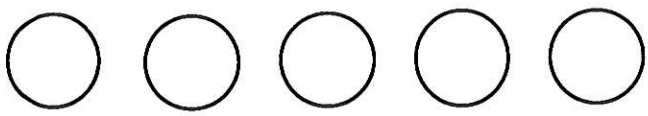
Dans ce cas les élèves ont fait d'abord la mise en correspondance de 4 gâteaux et des 4 enfants puis le partage du gâteau restant et la mise en correspondance des morceaux et des enfants, comme nous pouvons le voir dans quelques exemples du travail des élèves, ci-dessous:

BINOME K - H 6ème
On a cinq gâteaux égaux. Comment les partager entre 4 enfants de façon à ce qu'ils reçoivent des parts égales ?.



On donne un gâteau à chacun, et le dernier, on le partage en quatre parts égales

BINOME S - M 6ème

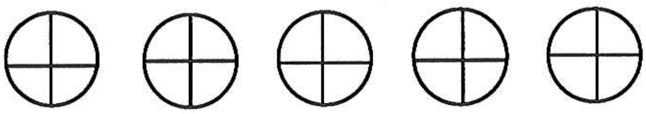


On partage 1 gâteau en 4 parts égales = 1/4
On donnera 1 gâteau à chaque enfant plus 1/4 du 5ème gâteau .

b - <u>Partage - correspondance :</u>

Les élèves ont fait d' abord le partage des 5 gâteaux en 4 morceaux égaux et puis ont mis en correspondance les morceaux et les enfants.

BINOME V - A 6ème.



Chaque enfant recevra 1 gâteau un quart.

BINOME F - M 5ème:

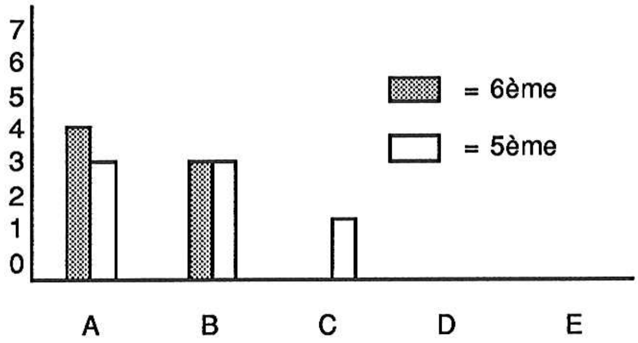
On partage chaque gâteau en 4 parts égales et on donne une part de chaque gâteau à chaque enfant.

Dans les deux types de procédures, le partage des gâteaux a été fait soit en l'indiquant sur la figure, soit mentalement .

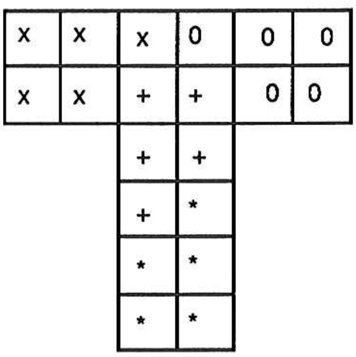
A la suite, nous avons établi un graphique qui montre les T T pour ce problème N°1 et un tableau avec le nombre de binômes de chaque niveau qui ont utilisé chaque procédure et les T T nécessaires pour chaque cas .

T T / Procédure	6ème			5ème			
	A	B	C	A	B	C	
a	2	1		2	2		7
b	2	2		1	1	1	7
	4	3		3	3	1	14

Problème N° 1

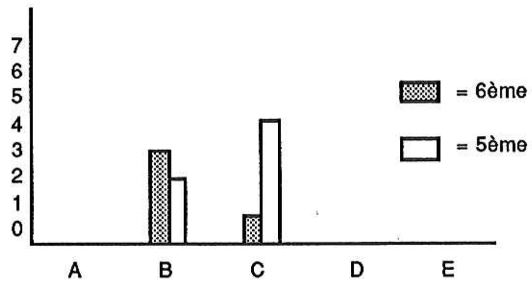


PROBLEME N°2 :



Il a obtenu une réussite de 10/14 binômes (4 de 6ème et 6 de 5ème). Le but de ce problème est une reconfiguration par assemblage, explicitement demandé, à partir d'un fractionnement donné ; c'est pourquoi la façon de procéder est unique. Ci-dessous, nous avons le travail du binôme F-I de 5ème .

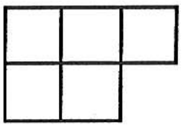
A la suite nous avons les T T utilisés dans ce problème :



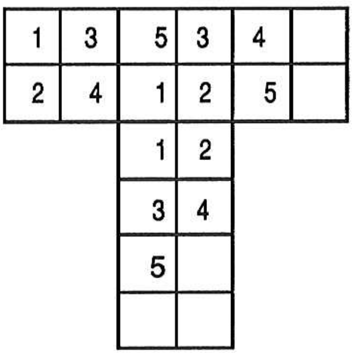
TT / NIVEAU	A	B	C	
6ème		3	1	4
5ème		2	4	6
		5	5	10

Quand ce problème a été utilisé dans l'Evaluation du Programme de Mathématiques fin

de 6ème, par l'APMEP, il a eu une réussite de 22 %. Nous avons eu 4/7 binômes de 6ème qui ont réussi. Probablement la recherche du problème par binômes est un peu plus facile. Dans cette étude de l' APMEP, ce problème était considéré comme "une tâche pas facile".
Ce résultat peut être dû au fait que le regroupement pertinent des parties élémentaires forme une sous-figure non convexe

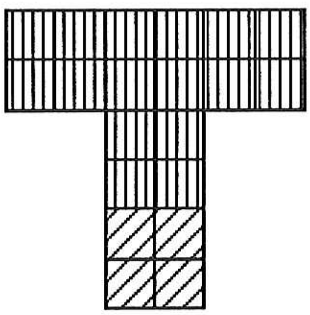


qui a été un obstacle, que nous avons constaté chez nos élèves, comme nous pouvons le voir ci -après dans le travail du binôme G-B de 5ème.



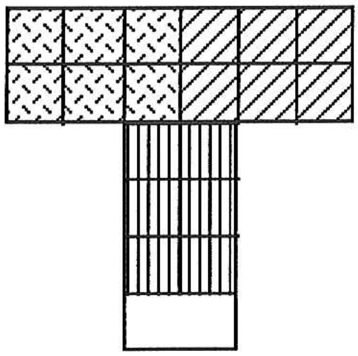
Ces élèves ont numéroté chacun des 5 petits carreaux qui forment chaque morceau superposable, mais ils n'ont pas réussi à cause d'un mauvais regroupement "Une sous-figure non convexe est plus difficile à détacher de la figure qu'une sous-figure convexe, car la loi perceptive de l'unité de contour n'est plus respectée". (MESQUITA A, 1989).

Pour les élèves de 6ème, faire la reconfiguration pour trouver les quatre morceaux superposables n'est pas facile ; nous avons le binôme F - H qui au lieu de trouver la "bonne reconfiguration" s'est limité à trouver l'axe de symétrie de la figure donnée ; et les élèves K - H ont fait deux piles de petites carrés, comme nous le pouvons constater ci-dessous



On fait deux piles : une pile de 4 grands carrés et une deuxième pile de 4 petits carrés.

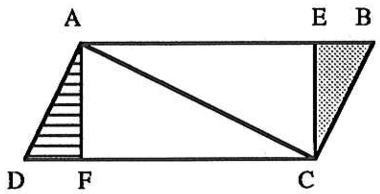
Et V- A a trouvé, de façon plus simple, seulement 3 morceaux superposables, sans "se préoccuper" des deux petits carrés qui restent.



On ne peut pas superposer les morceaux car il en manque un.

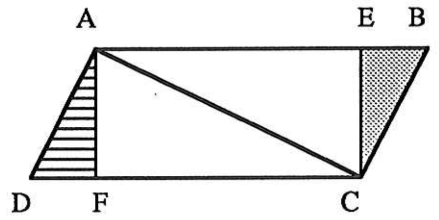
PROBLEME N° 3

Il a eu une réussite de 5/14 binômes (3 de 6ème et 2 de 5ème)
Tous les binômes qui ont eu une réponse acceptable ont recouru à une procédure reposant sur l'action de mesurer.
L'obstacle de dédoublement a joué un rôle très important pour la visibilité de l'opération de reconfiguration intermédiaire parce que parmi les 14 binômes que nous avons eus, aucun n'a pu le surmonter.
Aucun des binômes n'a fait la démarche qui consiste à considérer les aires AEC et AFC comme appartenant en même temps aux parallélogrammes ABCD et AECF, pour trouver les aires EBC et FDA comme le résultat de la différence entre ABC et AEC d'un côté et ACD et AFD de l'autre .



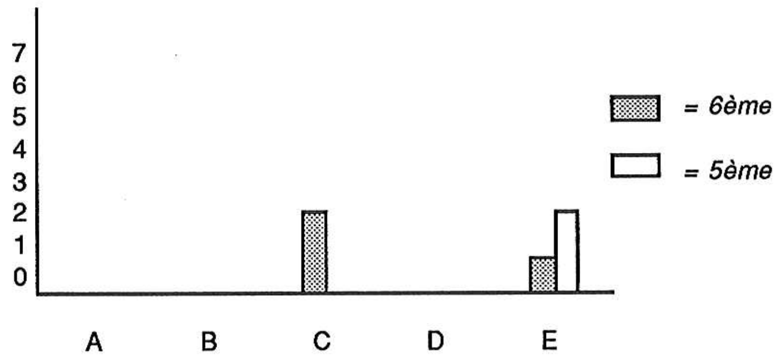
Tous les 5 binômes ont mesuré avec la règle et le rapporteur et ont trouvé (AF) perpendiculaire à (DC) et (CE) perpendiculaire à (AB). Ils ont dit que les triangles ADF et CBE sont rectangles, et après ils ont fait appel aux propriétés des côtés opposés d'un parallélogramme

Ci-dessous nous présentons, comme exemple, le travail du binôme F - F de 5ème.



Donc (EC) a même longueur que (AF)
Comme ABCD est un parallélogramme (AB) a même longueur que (DC) car se sont 2 côtés opposés
(AB) =(DC) et (AE) =(FC) donc (EB) =(DF)
AFD = EBC car leurs bases sont égales.

Le graphique suivant indique les T T de ce problème:



Nous pouvons conclure que ce problème a été une tâche très difficile pour les élèves que nous avons eus.

PROBLEME N° 4:
Il a eu une réussite de 9/14 binômes (5 de 6ème et 4 de 5ème).
L' appréhension opératoire des figures a joué un rôle essentiel pour la recherche de la solution, elle a conduit des modifications perceptives qui ont donné les types de procédures utilisés par les élèves .

Nous avons observé deux types de procédures :

a - La procédure de reconfiguration intermédiaire
b - La procédure de calcul par recours à des formules

a - Reconfiguration intermédiaire :

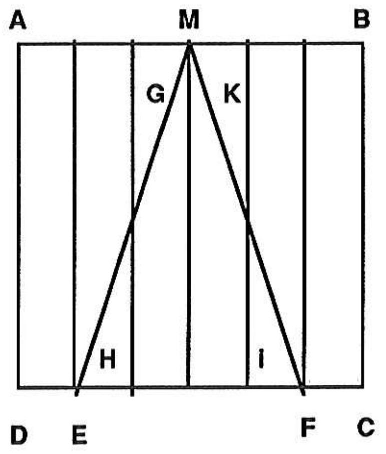
Cette procédure n'a pas besoin d'une formule, elle est centrée sur la perception de l'élève, il "voit" ou "ne voit pas". Dans ce problème, nous avons trouvé deux types de reconfigurations intermédiaires :

a1 - Complément de bandes égales :

L'élève perçoit chacune des aires MBCF, MFE et AMED comme formée par deux bandes égales; cette procédure a été possible quand l'élève a perçu que les deux morceaux des bandes étaient équivalents et, de plus, qu'en mettant un des morceaux à la place de l'autre, on obtient une bande complète .

Cette procédure a été utilisée par 5 binômes sur 9 qui ont réussi (3 de 6ème et 2 de 5ème).

Nous présentons un exemple de l'application de cette procédure, réalisée par le binôme F - H de 6ème et quelques expressions données par les élèves au moment où ils ont visualisé l'opération de reconfiguration.



ABCD est un carré partagé en bandes égales.
Prouve que les aires AMED, MEF et MBEF et MBCF sont égales

Le morceau H peut être mis dans la place G . Le morceau i peut être placé dans la place K. On obtiendra alors trois rangés de 2 bandes égales.

Binôme G - B (5ème) :

G : "Heureusement nous sommes d' accord que chaque figure a deux bandes , mais comment l'expliquer ?

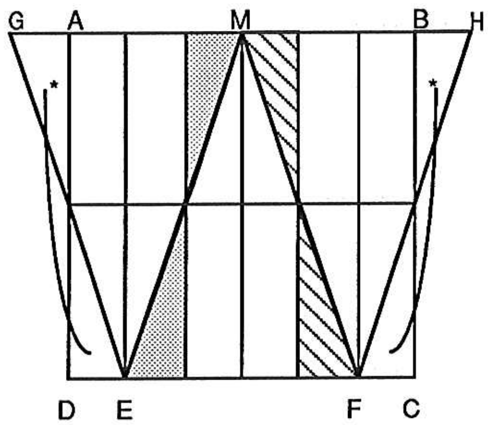
J'arrive à le sentir, à le prouver en pensant, mais disons, en écrivant j'ai plus de mal"

Binôme C - G (6ème) :
C : " Oui, les aires sont égales .
G : Pourquoi ?
C : Parce que ce morceau est égal à cet autre .
G : Mais , ça n' est pas mathématique.
C : Mais oui, parce que c'est une question de raisonnement . Regarde, chaque aire a deux bandes .
G : Mais il faut prouver, ça je ne sais pas comment ça se fait .
C : ça on le voit, c'est tout et c'est aussi un truc avec les fractions ."

Binôme A - E (6ème)
E : " C'est très facile ! Regarde. Chaque morceau a deux bandes, seulement elles sont découpées de différentes manières."

a 2 - Transformation de trapèzes en triangles :
Dans ce cas la reconfiguration intermédiaire a été la transformation des trapèzes AMED et MBCF en triangles congruents au triangle MFE.Elle a été appliquée seulement par un binôme (S - M de 6ème). Voici son travail .

PROBLEME n° 4
ABCD est un carré partagé en bandes égales.
Prouve que les aires AMED, MEF et MBCF sont égales.



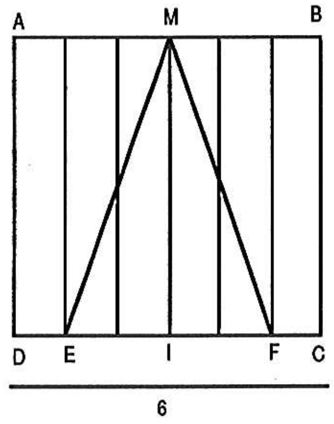
Les deux parties pointillées sont égales. En rajoutant la parcelle triangulaire dont l'angle droit a pour nom D sur le point A donne le triangle EGM égal au triangle MEF .
Les deux parties hachurées sont égales. En rajoutant la parcelle triangulaire dont l'angle droit a pour nom C sur le point B donne le triangle FMH égal au triangle MEF .

b - Calcul par recours à des formules :

Cette procédure a demandé à l'élève de se rappeler des formules pour faire les calculs des aires AMED, MFH et MBF. Elle a été utilisée par 3 sur les 9 binômes qui ont réussi.

Ci dessous nous avons un exemple de l'application de cette procédure, réalisée par le binôme V-C de 5ème. Elle a été utilisée par 3 sur les 9 binômes qui ont réussi. Ci-dessous nous avons un exemple de l'application de cette procédure, réalisée par le binôme V-C de 5ème .

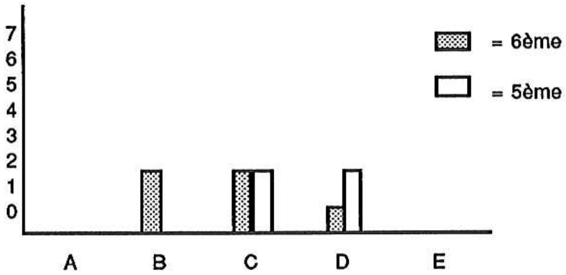
PROBLEME N° 4 :
ABCD est un carré partagé en bandes égales.
Prouve que les aires AMED, MEF et MBCF sont égales



MFE = 6 x 4 : 2 = 12
MBCI = 3 x 6 = 18
MIF = 2 x 6 : 2 = 6 donc
MBCF = 18 - 6 = 12
et comme on sait que AMED = MBCF (par superposition)
donc AMED = MBCF = MEF

Le tableau ci-dessous présente les procédures et les T T nécessaires de chaque niveau :

T T / Procédure	6ème				5ème				
	A	B	C	D	A	B	C	D	
a1		2	1				1	1	5
a2			1						1
b				1			1	1	3
		2	2	1			2	2	9



Nous voudrions faire remarquer que 2 sur 4 binômes qui ont échoué, ont appliqué la procédure de type b (calcul par recours à des formules). Ils ont fait soit une mauvaise application des formules d'aire, soit une erreur de calcul .

Le binôme V - A de 6ème a argumenté : "les aires AMED et MBCF sont égales, parce qu'elles ont le même forme, mais pas EMF parce qu'elle a une forme différente "
De l'analyse antérieure, nous pouvons conclure que les deux types de procédures employées se traduisent par :
- Une différence du réussite : tous les binômes qui ont recouru à une procédure reposant sur l'opération de reconfiguration ont réussi .
- Une différence des T T : tous les binômes qui ont appliqué l'opération de reconfiguration ont pris, généralement les plus petits T T .

PROBLEME N° 5 :
Il a eu une réussite de 12/14 binômes (7 de 6ème et 5 de 5ème)
Nous avons observé deux types de procédures :
a - La procédure de reconfiguration intermédiaire
b - La procédure de calcul par recours à des formules

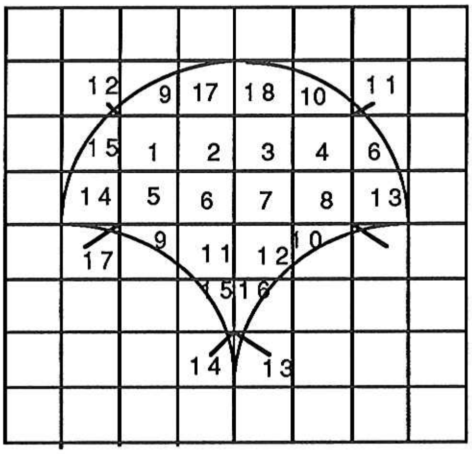
a - Reconfiguration intermédiaire :

L' appréhension perceptive de l'élève a joué ici un rôle essentiel ; le fond de quadrillage, support de la figure, a été aussi un facteur important. Nous avons trouvé deux façons différentes pour réaliser l'opération de reconfiguration intermédiaire :

a1 - Reconfiguration des petites carreaux :

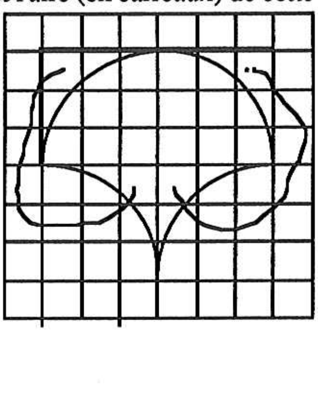
La perception a favorisé le fond quadrillé ; l'élève perçoit quelle est la parcelle qui complète chaque petit carreau incomplet. Cette procédure a été appliquée seulement par les élèves de 6ème. Ils ont compté d'abord les carreaux entiers et après ont trouvé la parcelle qui complètait les 10 petits carreaux qui ne l'étaient pas, pour en avoir au total 18. Ci - dessous nous avons un exemple de l'application de cette procédure, réalisé par le binôme C-G de 6ème et une expression donnée par ce binôme pendant son travail.

Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?



Il y a en tout 18 carreaux.
C : "Attends, il faut seulement compléter et compter, regarde....
G : Ah, oui, mais il faut justifier
C : Mais non, c'est pas nécessaire, tu est bête, tu te compliques la vie, on doit pas le démontrer, ça se voit."

a 2 - Reconfiguration du rectangle global :
Dans cette reconfiguration la perception de l'élève a favorisé surtout la forme et pas le fond quadrillé, il a fait une certaine abstraction de la figure, en prenant le demi-cercle de la partie inférieure, ce qui donne un rectangle global, de 3 sur 6. En partageant le demi-cercle supérieur de la figure et en ajoutant ces deux quarts de cercle à la partie inférieure de la figure, on forme un rectangle global de 3 sur 6 (ou deux carrés de 3 sur 3).
Ci-dessous nous avons deux exemples de l'application de cette reconfiguration du rectangle global, réalisés par les binômes A - E de 6ème et F - H de 6ème, respectivement et un dialogue entre les élèves A - E
Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?.



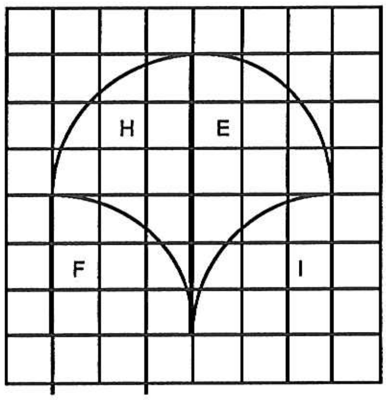
A-E :

On prend le demi - cercle et on y ajoute le reste au - dessus ce qui nous donne un rectangle de 3 sur 6

6 x 3 = 18

F-H :

La partie H est à mettre dans la partie F et la partie E dans la partie I.On obtient alors 2 carrés de 3 carreaux de côté.
1er carré : 3 x 3 = 9
2ème carré : 3 x 3 = 9
Aire de la surface : 9 + 9 = 18

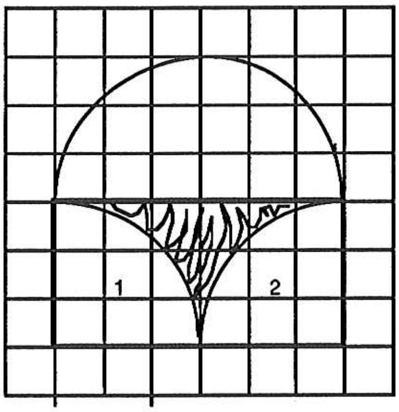


Binôme A - E
E - "Attends, ...Regarde .....ça, ça vient là tout simplement .
A - Ah voilà ....., c est bien ce que je t'ai dit .
E - ça donne un rectangle, ça 3 et ça 6, ça donne 3 x 6 = 18 carreaux
A - Vas - y. Comment on peut justifier ?
E - On demande pas de justifier. Il demande juste qu'elle ai l'aire en carreaux. Tu marques ce qui est demandé
A - Mais c'est très important de savoir comment on a trouvé
E - Ah ....., attends, je vais te montrer le truc, on prend le reste au-dessous et on le met au - dessus, comme ça vous le verrez."

b - Calcul par recours à des formules :
Cette procédure a été fondée sur l'application de formules d'aires et quelques calculs numériques qui parfois ont conduit les élèves à faire des erreurs
En général, les démarches suivies ici par les élèves ont été : la décomposition de la figure donnée en un demi-cercle supérieur, deux quarts de cercle inférieurs et en dehors de la figure, et un rectangle global, inférieur, de 3 sur 6. Après, ils ont fait le calcul respectif de chaque aire .

Ci-dessous nous pouvons voir un cas de l'application de cette procédure, fait par le binôme F - F de 5ème :

Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?.



Je calcule l'aire du demi-cercle

3 x 3 x 3,14 ÷ 2 = 28,26 ÷ 2 = 14,13

Nous calculons l'aire du rectangle

3 x 6 = 18

Nous calculons l'aire de 1 + 2

3 x 3 x 3,14 ÷ 2 = 14, 13

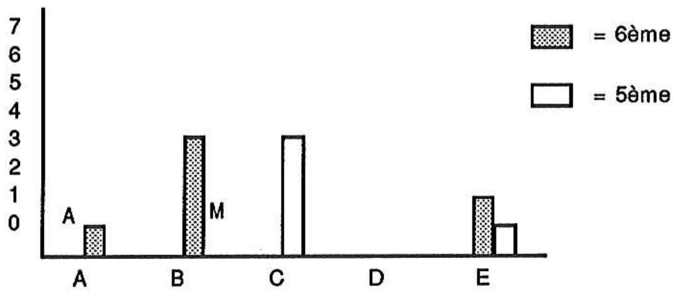
Nous calculons l'aire hachurée = aire du rectangle - (aire de 1 + aire de 2)

= 18 - 14,13 = 3,87 carreaux

Aire de la surface = 3,87 + 14,13 = 18 carreaux

Le tableau suivant montre le nombre de binômes de chaque niveau qui ont appliqué chaque procédure et les temps de traitement (T T).

TT / Procédure	6ème					5ème					
	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	
a1	1	3									4
a2		1						1			2
b					2			3		1	6
	1	4			2			4		1	12



Comme conclusion, nous pouvons dire que ces deux types de procédures se traduisent par :

1 - Une différence de réussite :

Tous les binômes qui ont recouru à une procédure reposant sur l'opération de reconfiguration ont réussi .

2 - Une différence des T T :

Tous les binômes qui ont recouru à une procédure reposant sur l'opération de reconfiguration ont pris moins de temps .

PROBLEME N° 6 :

Il a eu une réussite de 12 sur 14 binômes (6 de chaque niveau).Nous avons trouvé les deux mêmes types de procédures que pour le problème N° 5, à savoir :

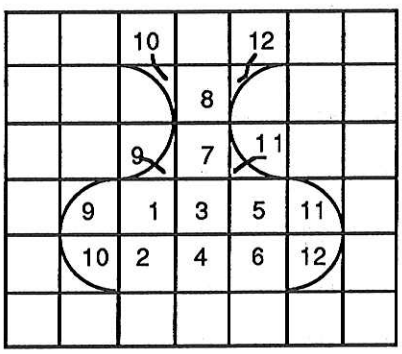
a - La procédure de reconfiguration intermédiaire

b - La procédure de calcul par recours à des formules

a - Reconfiguration intermédiaire :

a1 - Reconfiguration des petites carreaux:

Elle a été appliquée par 4 binômes de 6ème et 1 binôme de 5ème. Ci-dessous, nous avons un exemple de l'application de cette procédure, réalisé par le binôme C - G de 6ème et le dialogue entre les élèves du binôme K - H de 6ème pendant qu'ils appliquaient l'opération de reconfiguration des petits carreaux .



Il y a en tout douze carreaux.
On remarque que les carreaux 9 - 9, 10 - 10, 11 - 11, 12 - 12 , assemblés par deux forment un carreau .
Binôme K - H
K - "La surface de tout ça ?
H - Oui .
K - Il faut d'abord compter les carreaux entiers. On a .... 1, 2, ...7, 8 ......, 8 carreaux entiers. Maintenant ont doit compter les autres carreaux....

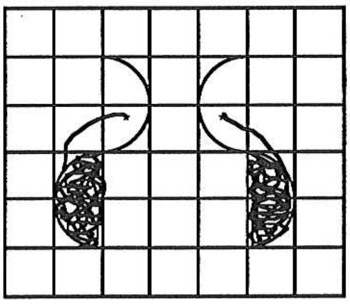
H - 9, parce que là il y a les deux parties. Quand on fait ça, là ....., c'est parce que ce morceau là y manque un bout qui est là .

K - Ah, oui

K - H ça là avec ça ..., ça donne .....et ça avec ça ...., ça avec ça ....., et la partie là .....

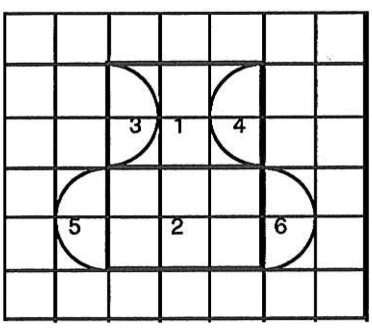
H - Voilà ... , en fin de compte on a .....1 , 2 , 3, ...8 , 9 , 10 , 11, ,12 on a 12 carreaux . On va les colorier . . . . . . c'est là rouge avec ce bout aussi rouge
Vas - y tu prends le vert ...
K - Ben on a fini
H - Ecris-toi la réponse, l'aire de cette surface est 12 carreaux .
Les indications sont schématiques ."

a2 - Reconfiguration du rectangle global:
Cette procédure a été appliquée par un binôme de 6ème et 2 binômes de 5ème. Nous présentons un exemple de cette procédure réalisée par le binôme F - M de 5ème .
Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ? .



Si on prend la partie hachurée et on la met comme l'indiquent les flèches, l'aire de la figure revient à un rectangle de 3 sur 4 carreaux, donc, la surface mesure 12 carreaux

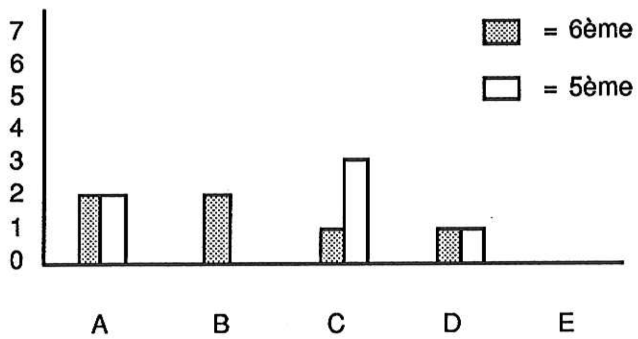
b - Calcul par recours à des formules :
Elle a été appliquée par 1 binôme de 6ème et 3 binômes de 5ème . Ci-dessous nous avons, comme exemple, le travail du binôme V - A de 6ème.



aire des deux demi-cercles 3 et 4 : 1 x 1 x 3, 14 = 3, 14
aire des deux demi-cercles 5 et 6 : 1 x 1 x 3, 14 = 3, 14
aire du rectangle 1 : 3 x 2 = 6
aire du rectangle 2 : 3 x 2 = 6
aire du rectangle 1 - aire des deux demi-cercles 3 et 4 : 6 - 3, 14 = 2, 86
aire de la figure : 2, 86 + 6 + 3, 14 = 12

Le tableau suivant montre le nombre de binômes de chaque niveau qui ont appliqué chaque procédure et les T T . Le graphique montre les T T par niveau .

T T / Procédure	6ème				5ème				
	A	B	C	D	A	B	C	D	
a1	2	1	1				1		5
a2		1			2				3
b				1			2	1	4
	2	2	1	1	2		3	1	12



Comme conclusion nous pouvons dire que ces deux types de procédures se traduisent par :

1 - Une différence de réussite :

Tous les binômes qui ont recouru à une procédure reposant sur l'opération de reconfiguration ont réussi .

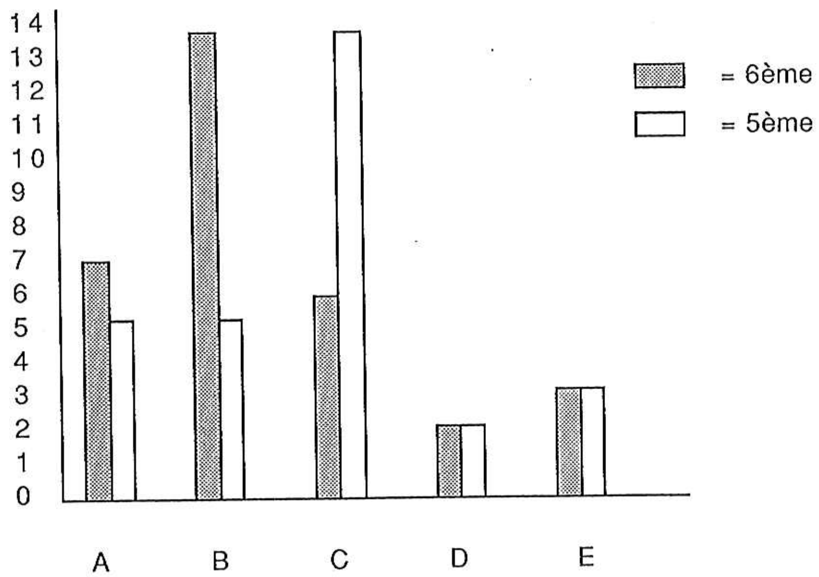
2 - Une différence des T T :

Tous les binômes qui ont recouru à une procédure de reconfiguration ont pris les plus petits T T .

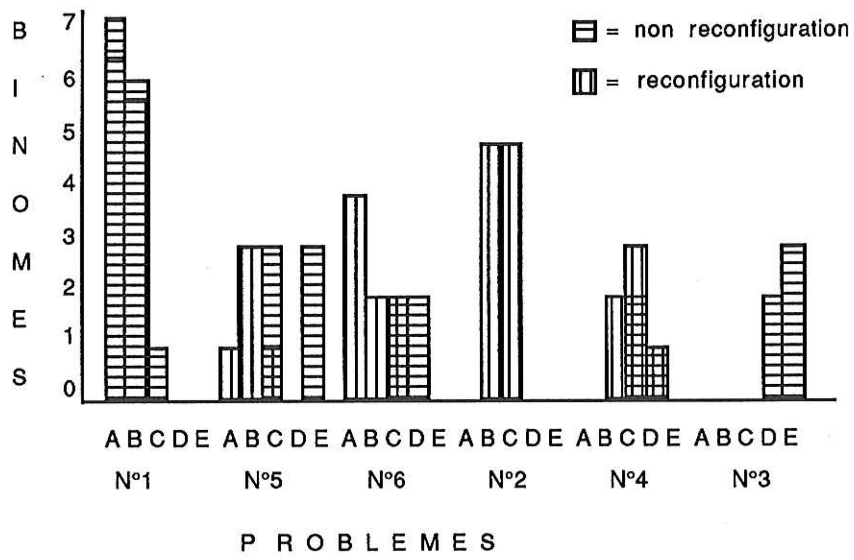
Nous voudrions faire remarquer que les élèves qui ont échoué à le problème N°6 ont fait l'application d'une procédure type b .

COMPARAISONS

Nous avons constaté quelques différences remarquables :
1 - En général les élèves de 6ème ont travaillé beaucoup plus librement que ceux de 5ème, en se laissant conduire par leur perception.Cette attitude peut s'expliquer par l'acquisition récente de plusieurs formules, règles et concepts que les élèves, surtout de 5ème, essayent de se rappeler au moment de résoudre un problème, au lieu de manifester de la spontanéité, en faisant par exemple, une reconfiguration, opération d'avantage appliquée par les élèves de 6ème. Remarquons que : "La perception et la capacité de prise en compte des caractéristiques d'un énoncé ou d'une figure sont probablement plus importantes que la connaissance des concepts géométriques et des structures" (PLUVINAGE et RAUCHER, 1986, cité par MESQUITA et RAUCHER, Annales de Didactique 1988, page 105) .
2 - Les élèves de 6ème ont pris des T T plus faibles que ceux de 5ème, pour réussir les différents types de procédures appliquées, comme nous le pouvons constater dans le graphique ci-dessous :



3 - Le recours à une procédure reposant sur l'opération de reconfiguration a pris moins de temps que le recours à des calculs reposant sur les formules; comme nous pouvons le voir dans le graphique de la page suivante :



NOTE : il n' a pas eu des chevauchements ; c'est-à-dire, il n'a pas eu des binômes ayant appliqué au même temps les deux opérations, reconfiguration et non reconfiguration .

Dans le graphique ci-dessus, on doive lire, par exemple pour le problème N°5, dans en temps C, 1 binôme a appliqué l'opération de reconfiguration et 3 binômes ont appliqué non reconfiguration .

4 - Les procédures fondées sur l'opération de reconfiguration ont toujours conduit à la réussite alors que celles fondées sur des calculs par recours à des formules ont conduit quelques binômes à l'échec .

C O N C L U S I O N

Notre expérience auprès de cette population scolaire nous a menée à une interrogation sur l'attitude des élèves confrontés à des problèmes de géométrie où l'appréhension perceptive peut jouer un rôle fondamental dans le processus de résolution. Nous avons observé, spécialement , une perte de spontanéité dans l'apprentissage des premières règles et formules géométriques. Il est remarquable que pour ces types de problèmes, les élèves de 6ème utilisent spontanément leur perception, alors que chez les élèves de 5ème cette spontanéité tend à diminuer, remplacée par une tendance à appliquer des formules apprises et à se rappeler des méthodes du professeur. De plus, l'observation des élèves de 5ème révèle de leur part, un souci exagéré de répondre à l'attente du professeur, réel objet d'inhibition .

Il est aussi remarquable, que même les figures les plus simples, comme celle du vase (problème N°6), ne sont pas si évidentes pour les élèves de cette tranche d'âge, et prennent des T T qui peuvent aller de 1' jusqu'à 20' pour trouver la solution. Cette différence entre les temps de traitement est liée à l' opération qui a constitué la productivité heuristique de chaque problème . Toutes les procédures reposant sur l' opération de reconfiguration ont pris les plus petits T T . En conclusion , nous voudrions dire , que "voir" sur une figure est une démarche complexe et qui relève d' un apprentissage qui ne doit pas rester ignoré .

REFERENCES

1 - APMEP,1987. Evaluation du programme de mathématiques fin de 6ème .

2 - BESSOT D , 1983 . Problèmes de représentation de l'espace. Enseignement de la géométrie. *Bulletin Inter - IREM*, n° 23 .

3 - BODIN Antoine . 1980, Mise au point d'un questionnaire : observations, entretiens de binômes et individuels .

4 - DUVAL R., 1988.Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 1, IREM de Strasbourg .

5 - DOUADY Régine, 1984. *Jeux de cadres et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse, Paris VII .

6 - FISCHER Jean Paul, 1986. *Eléments de Psychologie pour l'apprentissage des Mathématiques*, IREM de Strasbourg .

7 - GLAESER Georges , 1985 . *La didactique expérimentale des Mathématiques*, IREM de Strasbourg .

8 - MESQUITA Ana , 1989 . Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie . *Educational Studies in Mathematics*, 20 . 1 , 55 - 77 .

9 - PIAGET J. et INHELDER B., 1971. *La Psychologie de l'enfant,* PressesUniversitaires de France .

10 - VERGNAUD G ., 1981. *L'enfant la Mathématique et la Réalité*, PETER LANG.