A VOS STYLOS

PROBLÈME 5

Énoncé

Vrai ou faux?

> "Si F est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, et si $E_1, \ldots E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de F tels que $E_1 \cup \ldots \cup E_n = F$, alors l'un au moins des E_i est égal à F."

Solution (Edmond SPACK - LETI Haguenau)

Nous allons démontrer un énoncé plus général :

> Si F est un espace vectoriel sur un corps commutatif **infini** K; si $E_1, \ldots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de F tels que $E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_p = F$, alors l'un au moins des E_i est égal à F.

La propriété encadrée est équivalente à chacune des propriétés suivantes :

- Toute réunion finie de sous-espaces vectoriels propres de F n'est pas égale à F.
- Toute réunion finie d'hyperplans de F n'est pas égale à F (tout sous-espace vectoriel propre de E étant inclus dans un hyperplan d'après le lemme de ZORN).
- $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall f_1 \ldots f_p \in F^* - \{0\}, \exists x \in F, \forall i \in \{1, \ldots, p\}, f_i(x) \neq 0$

  où F^* est le dual de F;
  $F^* - \{0\}$ est F^* privé de la forme linéaire nulle.

Il nous reste à démontrer cette dernière propriété. Nous allons le faire par récurrence sur p.

- La propriété est vraie pour $p = 1$.
- Soit $p \geq 1$ et soient $f_1, \ldots f_p, f_{p+1}$ dans $F^* - \{0\}$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\exists x \in F, \forall i \in \{1, \ldots, p\}, f_i(x) \neq 0.$$

Si $f_{p+1}(x) \neq 0$ c'est terminé.
Sinon, soit (e_j) pour $j \in I$ une base de F (d'après le lemme de ZORN, tout espace vectoriel admet une base. Nous l'avons indexé ici au moyen de l'ensemble I).
Comme f_{p+1} n'est pas la forme linéaire nulle

$$\exists j_1 \in I,\ f_{p+1}(e_{j1}) \neq 0.$$

Décomposons x sur la base (e_j) pour $j \in I$

$$x = x_{j1}.e_{j1} + \cdots + x_{jn}.e_{jn}.$$

Soit

$$\begin{aligned}\sigma_i : K &\longrightarrow K\\ \alpha &\longmapsto f_i(\alpha.e_{j1} + x_{j2}.e_{j2} + \cdots + x_{jn}.e_{jn})\\ &\quad = \alpha f_i(e_{j1}) + f_i(x_{j2}.e_{j2} + \cdots + x_{jn}.e_{jn}).\end{aligned}$$

σ_{p+1} est bijective puisque application de K dans K de la forme $\alpha \longmapsto \alpha.a + b$ avec $a \neq 0$.

Considérons l'ensemble $J = \{i \in \{1, \ldots, p\} / f_i(e_j) \neq 0\}$. De la même façon, chaque σ_i pour i dans J est bijective donc :

$$\forall i \in J, \quad \exists! \alpha_i \in K \quad \sigma_i(\alpha_i) = 0.$$

Posons : $L = K - (\{\alpha_i / i \in J\} \cup \{x_{j1}\})$. L est infini puisque différence ensembliste d'un ensemble infini et d'un ensemble fini. Soit alors $\alpha \in L$ et posons :

$$y = \alpha.e_{j1} + x_{j2}.e_{j2} + \cdots + x_{jn}.e_{jn}.$$

On a (en raison de l'injectivité de σ_{p+1} et de σ_i pour i dans J) :
- $f_{p+1}(y) = \sigma_{p+1}(\alpha) \neq \sigma_{p+1}(x_{j1}) = f_{p+1}(x) = 0$ donc $f_{p+1}(y) \neq 0$.
- $\forall i \in J$, $f_i(y) = \sigma_i(\alpha) \neq \quad \sigma_i(\alpha_i) = 0$ donc $\forall i \in J$, $f_i(y) \neq 0$.

Enfin, comme $f_i(e_{j1}) = 0$ pour i extérieur à J :

$$\begin{aligned}\forall i \in \{1, \ldots, p\} - J, f_i(y) &= \alpha f_i(e_{j1}) + f_i(x_{j2}.e_{j2} + \cdots + x_{jn}.e_{jn})\\ &= x_{j1} f_i(e_{j1}) + f_i(x_{j2}.e_{j2} + \cdots + x_{jn}.e_{jn})\\ &= f_i(x) \neq O.\end{aligned}$$

En conclusion, nous avons construit un y tel que $f_i(y) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq p+1$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUES

1) L'hypothèse K corps commutatif **infini** est essentielle car l'énoncé devient faux lorsque K est fini, aussi bien en dimension finie qu'en dimension infinie.

2) On montre aussi que si E est un espace vectoriel de dimension **finie** sur un corps **infini non-dénombrable**, alors toute réunion finie ou dénombrable d'hyperplans de E n'est pas E. (L'énoncé devient faux si la dimension de E est infinie.)

3) Enfin, on montre que si E est un espace vectoriel sur un corps commutatif K, alors toute réunion de deux hyperplans de E, n'est jamais égale à E. Mais il peut arriver que la réunion de trois hyperplans de E soit égale à E, aussi bien en dimension finie qu'en dimension infinie. Par exemple $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ peut s'écrire comme la réunion de trois hyperplans, de même que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

PROBLÈME 6

Enoncé

Pour $\varepsilon > 0$, soit $\mathcal{M}^\varepsilon$ l'ensemble des matrices 3×3, à coefficients positifs ou nuls, telles que la somme de chaque colonne soit 1 et que l'une au moins des lignes ait tous ses coefficients plus grands que ε. Montrer que si $(M_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans $\mathcal{M}^\varepsilon$, le produit infini

$$M_1 \times M_2 \times \dots M_n \times \dots$$

converge. La limite est-elle toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} ?$$

Indication

Coordonnées barycentriques.

PROBLÈME 7

Enoncé

Soit une fonction de deux variables $f(x,y)$ telle que, pour tout $x, P_x(y) = f(x,y)$ est un polynôme en y et, pour tout y, $Q_y(x) = f(x,y)$ est un polynôme en x. Est-ce que f est un polynôme à deux variables?

POÈMES A METAMORPHOSES POUR RUBAN DE MŒBIUS

(...) On prend une bande de papier très allongée.
Sur l'une de ses faces, on écrit la première moitié du poème.
On retourne la bande autour de son plus grand côté, et sur la deuxième face on écrit la deuxième moitié du poème.
Après avoir opéré une torsion d'un demi-tour, on colle l'une sur l'autre les deux extrémités de la bande.
On obtient ainsi un ruban de Mœbius qu'on lit d'un bout à l'autre sans avoir à le retourner puisqu'il n'a qu'une seule face. (...)

Exemple :
Soit la bande de départ suivante :

1ère face	Trimer, trimer sans cesse, pour moi, c'est la sagesse je ne puis flemmarder car j'aime mon métier...	*2ème face*	C'est vraiment éreintant de gaspiller son temps et grande est ma souffrance quand je suis en vacances.

Luc ETIENNE
in "*Oulipo*", chez Gallimard.