UN MIROIR AUX ALOUETTES

Jacques LUBCZANSKI

Le gros travail d'un mathématicien, c'est de poser correctement le problème qu'il doit résoudre : voilà une idée partagée par beaucoup au niveau de la recherche.

Le gros du travail d'un élève en cours de maths, c'est de résoudre correctement le problème qui est posé : voilà une idée partagée par beaucoup au niveau de l'enseignement.

Et les auteurs de manuels scolaires, les professeurs mettent tout leur soin à faciliter la résolution des problèmes posés aux élèves : énoncés soignés, détaillés, ne faisant appel qu'à des notions déjà vues, utilisant directement les théorèmes du dernier cours. Cela a l'avantage de ne pas dérouter les élèves et leur permet d'obtenir de bonnes notes. Et à la longue, cela démontre de façon inductive le "*théorème-élève*" suivant

"*En maths, tout problème a une solution et une seule*"
et ses corollaires :
"*Si on me pose la question, c'est que je dois pouvoir y répondre*"
"*Le professeur connaît les solutions de tous les problèmes de maths*"
et finalement la conséquence logique :
"*Le gros du travail d'un chercheur en maths, c'est de poser corectement ... etc ...*"

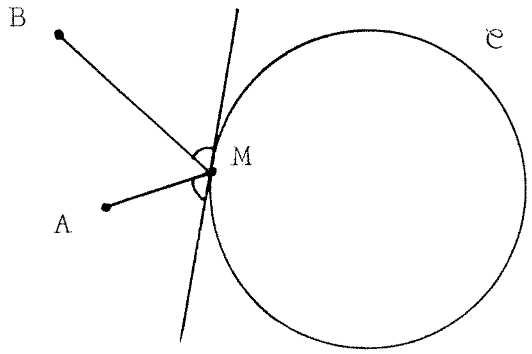
Et la chose la plus difficile qui soit est de faire comprendre ce que veut dire, dans la bouche d'un mathématicien, une phrase comme :
"*Il est* **prouvé** *qu'il est* **impossible** *de couper un angle en trois parties égales avec une règle et un compas*";
et en particulier, que ce n'est pas dû à l'incompétence des mathématiciens ou à leur manque de perséverance! ([1])

Or, voici que moi-même, malgré mon expérience et ma vigilance, me suis laissé piéger par les "*théorèmes-élèves*" ... qui deviennent des "*théorèmes-profs*"! Souvenez-vous : c'était dans le dernier numéro de votre revue préférée, au début de l'article "*La démonstration : calcul et/ou raisonnement ?*".

([1]) Pour une analyse fine et drôle de la psychologie des trisecteurs de cercles, je renvoie le lecteur au savoureux livre de U. DUDLEY "*A budget of trisections*", éd. Springer.

C'était même le premier exercice : d'après un "*théorème-élève*" bien connu, ce devait donc être le plus facile ...

Le cercle $\mathcal{C}$, les points A et B étant donnés, construire le point M où se réfléchit un rayon lumineux qui va de A à B.



Cet énoncé faisait suite à deux exemples analogues, où la réflexion se faisait sur une puis deux droites : une progression logique.

Le lendemain de la publication de l'article, un jeune collègue me demanda entre deux portes la solution : je la lui promis pour la récréation ... Le surlendemain j'eu quelques coups de téléphone ... et ensuite un abondant courrier.

C'est ainsi que je m'aperçus que je ne savais pas faire ce "*petit*" exercice! Toute honte bue, j'allais écumer les librairies et les bibliothèques : d'après un théorème de Tonton Lulu, quelqu'un avait certainement déjà eu la même idée : ce qui change c'est l'emballage.

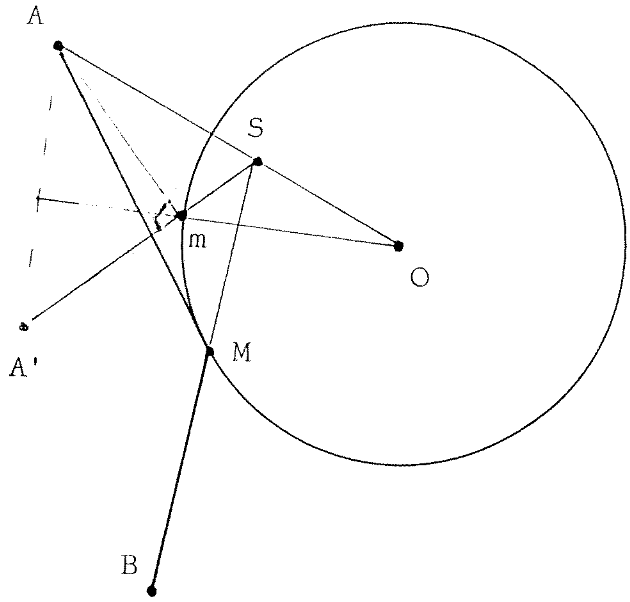
En effet ce problème est celui de la réflexion sur un miroir sphérique convexe : sus aux traités d'Optique!

Au commencement était l'"*Optique*" d'EUCLIDE : la proposition XVIII étudie la réflexion dans un miroir sphérique concave.

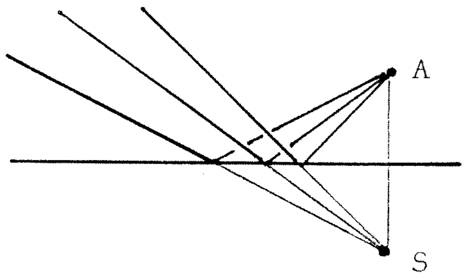
Ensuite il y eut ALHAZEN au XII[e] siècle, puis VITTELION au XV[e], qui reprirent la construction d'EUCLIDE.

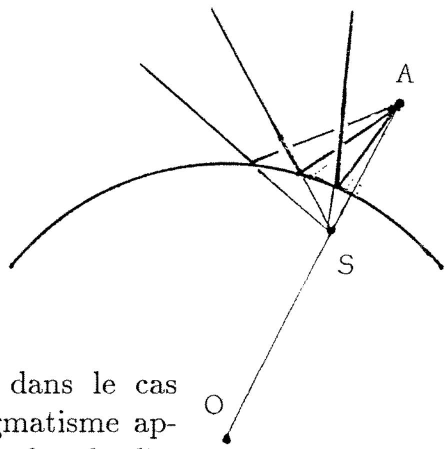
Voici ce que cela donne, en extrapolant aux miroirs convexes :

On choisit m sur le cercle; on construit le symétrique A' de A par rapport à Om.
Alors $A'm$ coupe OA en S.
Enfin BS coupe le cercle en M qui est le point cherché.



Le point S s'appelle le "*stigmate*" : c'est sur son existence que s'appuie cette construction (aujourd'hui S pourrait s'appeler l'image virtuelle de A dans le miroir), par analogie avec le miroir plan :

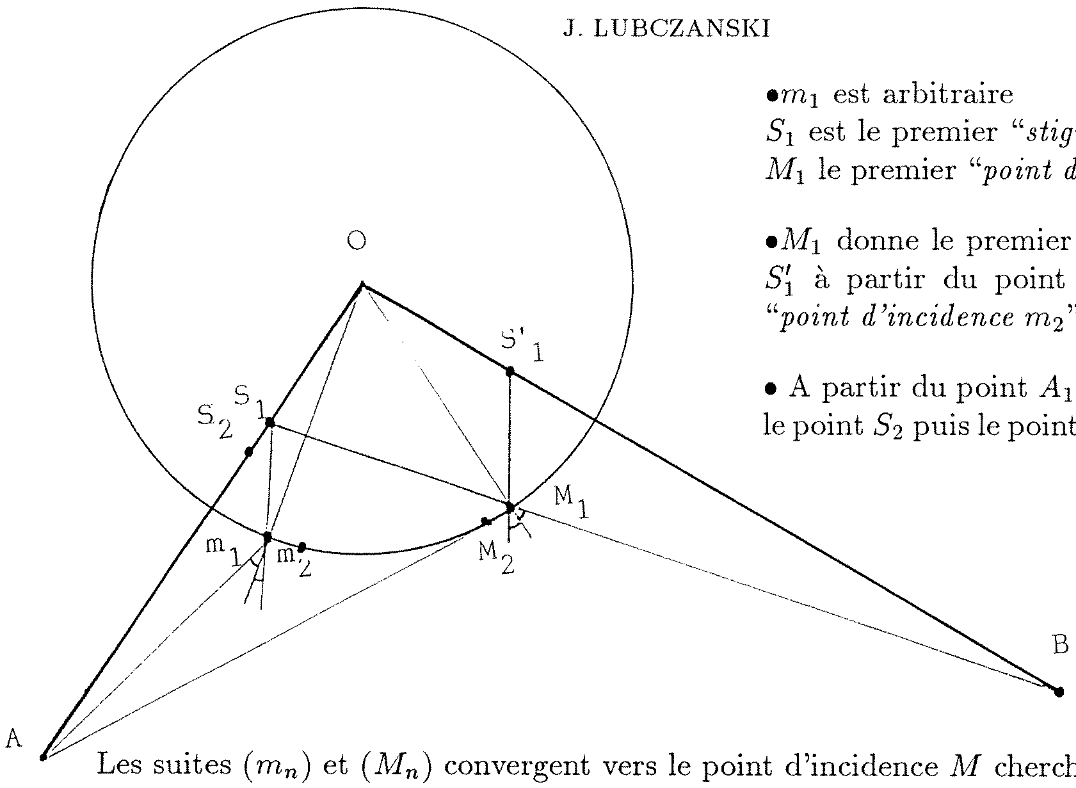




Malheureusement, il n'y a pas de stigmate dans le cas sphérique : les physiciens disent qu'il y a stigmatisme approché quand le rayon du miroir est assez grand et la distance de A au miroir assez petite (2).

La construction d'EUCLIDE est donc en tout état de cause une construction approchée. Ceci dit, comme beaucoup de constructions, de calculs approchés, elle peut servir de point de départ à une itération convergente vers la solution du problème :

(2) Cela signifie que les rayons réflechissants de A ne convergent pas en un point : ils enveloppent une "*petite*" région à l'intérieur du cercle.



•m_1 est arbitraire
S_1 est le premier "*stigmate*"
M_1 le premier "*point d'incidence*"

•M_1 donne le premier "*stigmate*" S_1' à partir du point B, puis le "*point d'incidence m_2*"

• A partir du point A_1, m_2 donne le point S_2 puis le point M_2 etc ...

Les suites (m_n) et (M_n) convergent vers le point d'incidence M cherché.

Et il a fallu attendre le développement de la géométrie analytique pour s'apercevoir que ce problème se ramène à l'intersection d'une hyperbole et d'un cercle, qui est un problème non réductible du quatrième degré : l'espoir de le résoudre à la règle et au compas s'envole à tout jamais ...

Mais au bout du compte j'ai bien dû faire un peu de mathématiques. Pas vous?

Bibliographie

. "*Le miroir*".– J. BALTRUSAITIS.– Elmayan-Le Seuil 1978

. "*Célèbres problèmes de mathématiques élémentaires*".– E. CALLANDREAU.– Albin Michel 1949 (*cf.* ci-dessous)

. "*100 great problems of elementary mathematics*".– H. DORRIE.– Dover. 1969

. Et tout traité d'optique géométrique.

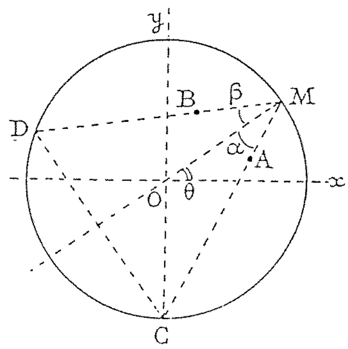
Compléments :

Le problème du miroir d'ALHAZEN
extrait de "*Célèbres problèmes mathématiques*"
Callendreau.– Paris 1949

I.– Hassan-ben-Haithem, mathématicien et astronome arabe, mort au Caire en 1038, est, sous le nom d'ALHAZEN, auteur d'un célèbre traité d'optique publié à Bâle en 1572 par RISNER. Ce traité, traduit en 1270 par VITELLIO, servit beaucoup à KÉPLER (1571 – 1630) pour son traité d'optique. On y trouve résolue la question connue sous le nom de problème d'ALHAZEN, à savoir *en quel point d'un miroir concave circulaire doit tomber la lumière venant d'un point donné pour qu'elle se* *réfléchisse en un autre point également donné.* On dénomme encore ce problème, problème du billard circulaire, en l'énonçant : "*Quelle est la route que doit suivre une bille sur ce billard pour aller frapper une deuxième bille après réflexion sur la bande ?*"

HUYGENS (1629–1695), BARROW (1630–1677) (qui fut le professeur de NEWTON), de l'HOSPITAL (1661–1704), RICCATI (1676–1754), QUÉTELET (1796–1874) se sont ultérieurement occupés de cette question.

II.– Voici comment l'on peut présenter une solution actuelle du problème. Soit C étant le cercle donné, de centre O et de rayon R, A et B les points donnés de coordonnées a_0, a_1, b_0, b_1, par rapport à un système d'axes rectangulaires de coordonnées d'origine O. Soit M le point sur le cercle, tel que la droite AM, émanant du point de départ A, soit également inclinée sur OM que la droite MB passant par le point B d'arrivée; soient δ, θ, γ les angles que font avec l'axe des x les directions MB, MO, MA; on a :



$$\alpha = \gamma - \theta, \text{ et } \beta = \theta - \delta,$$

d'où

$$\text{tg}\alpha = \frac{tg\gamma - tg\theta}{1 + \text{tg}\gamma \times tg\theta}, \quad \text{tg}\beta = \frac{\text{tg}\theta - \text{tg}\delta}{1 + \text{tg}\delta \times \text{tg}\theta}.$$

Mais si x, y sont les coordonnées de M :

$$\text{tg}\gamma = \frac{y - a_1}{x - a_0}, \quad \text{tg}\theta = \frac{y}{x}, \quad \text{tg}\delta = \frac{y - b_1}{x - b_0};$$

d'où, avec l'égalité de α et β, et en posant :

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = A, \quad a_0 b_0 - a_1 b_1 = B, \quad a_0 + b_0 = C, \quad a_1 + b_1 = D,$$

on obtient :

$$A(x^2 - y^2) - 2Bxy + (x^2 + y^2)(Cy - Dx) = 0.$$

Mais comme le point M se trouve aussi sur le cercle, on a :

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

d'où :

$$A(x^2 - y^2) - 2Bxy + R^2(Cy - Dx) = 0.$$

Cette équation est celle d'une hyperbole, et par conséquent le point M cherché est à l'intersection de cette courbe avec le cercle; il y a donc en général quatre solutions.