SUR UN PROBLÈME DE FERMAT

Jacques DAUTREVAUX (*)

Imaginons trois villes A, B, C que l'on veut réunir deux à deux par un réseau de communication; comment concevoir ce réseau pour que la longueur totale à construire (donc que le coût total) en soit minimum? Dans une première approximation nous faisons abstraction des contraintes de nature écologique ou économique (passage à une proximité suffisante de certains centres urbains importants).

Une première idée, simple sinon simpliste, serait de créer un réseau simplement triangulaire, mais ce n'est sûrement pas la solution optimale car en ne conservant que deux côtés (au lieu de trois) du triangle, le réseau envisagé conserve sa fonction et sa longueur a diminué. On peut aussi concevoir en réseau en "Y" : on voit aisément qu'en prenant pour centre du "Y" le centre de gravité du triangle, on obtient là aussi une longueur de réseau inférieure au périmètre du triangle.

On est donc amené à se poser le problème général suivant :

> Etant donnés trois points distincts du plan, en quelle position du plan doit-on placer un point M pour que la somme $MA + MB + MC$ soit minimale?

Ce problème a été posé par Pierre FERMAT et résolu par son contemporain Evangelisto TORICELLI (l'inventeur du baromètre!), mais pas dans sa généralité. Nous nous proposons de la traiter ici intégralement.

La présente étude a l'avantage de montrer que (dans le cas de 3 points) les résultats peuvent s'obtenir par des méthodes tout à fait élémentaires.

Après une étude rapide nécessitant des connaissances du niveau DEUG nous aborderons une approche plus purement géométrique ne nécessitant que des connaissances du niveau Terminale.

On se donne dans le plan euclidien trois points A, B, C (éventuellement alignés) déterminant un triangle ABC (éventuellement aplati), les dénominations des sommets étant faites de telle sorte que :
— le segment BC est celui qui a la plus grande longueur ($BC \geq AB$ et $BC \geq AC$) de sorte que, si ABC est un véritable triangle, son angle le plus grand est A, et par conséquent B et C sont aigus; si A, B, C sont alignés, A se trouve nécessairement entre B et C;
— si ABC est un véritable triangle, le sens de parcours du contour $ABCA$ est le

(*) Maître-Assistant honoraire - Université de Haute Alsace.

sens direct (l'intérieur du triangle à gauche).

Ces conventions étant faites, il est clair que la fonction f définie sur le plan euclidien, à valeurs dans $\mathbb{R}$, déterminée par :

$$M \longrightarrow f(M) = MA + MB + MC$$

est continue dans tout le plan, à valeurs strictement positives, prenant à l'extérieur d'un cercle de rayon assez grand contenant en son intérieur les trois points A, B, C des valeurs croissantes quand la distance de M au centre du cercle augmente.

Des propriétés des fonctions continues il résulte qu'une telle fonction admet une valeur minimale en un certain point T nécessairement intérieur au cercle dont il a été question ci-dessus; on m'excusera de ne pas entrer dans les détails sur ce point.

La fonction f est, en outre, différentiable en tout point du plan autre que A, B et C de sorte que le point T défini précédemment ne peut être que le point A (les points B et C étant à exclure puisque d'après les conventions faites on a $f(A) < f(B)$ et $f(A) < f(C)$ (*)) ou un point en lequel le gradient de la fonction f est le vecteur nul (ce gradient n'existe qu'en un point où la fonction est différentiable).

On se convainc aisément que :

$$\overrightarrow{\text{grad}f}(M) = \frac{\overrightarrow{AM}}{MA} + \frac{\overrightarrow{BM}}{MB} + \frac{\overrightarrow{CM}}{MC}$$

et que par suite, en un point T où le gradient est nul on a :

$$\frac{\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{TC}}{TC} = \overrightarrow{0}$$

ce qui entraîne que nécessairement T est intérieur (strictement) au triangle ABC, comme barycentre à coefficients strictement positifs des trois points A, B et C.

D'autre part, T est tel que trois vecteurs de longueur unité, d'origine commune T et dirigés vers A, B et C ont une somme nulle, ce qui entraîne, ainsi qu'on le voit facilement, que de T on "*voit*" chacun des segments BC, CA et AB sous le même angle $\frac{2\pi}{3}$, autrement dit que :

$$(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) = (\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) = (\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TA}) = \frac{2\pi}{3} \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

compte tenu des conventions faites au début.

On remarquera que ces conditions nécessaires excluent évidemment l'existence d'un tel point T lorsque A, B, C sont alignés.

(*) J'omets débilérément le cas où on aurait par exemple $BC = AC(\geq AB)$ car dans un tel cas, l'angle A est nécessairement aigu et l'existence du point T, avec $f(T) < f(A)$, est assurée.

Selon un résultat tout à fait classique de géométrie élémentaire, si on construit à l'extérieur du triangle ABC trois triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC', les cercles circonscrits à ces trois triangles ont en commun un point L par lequel passent également les trois droites AA', BB' et CC'; de plus, les trois segments AA', BB' et CC' ont même longueur.

Il en résulte une caractérisation aisée du point L comme deuxième point commun à la droite AA' et au cercle circonscrit au triangle équilatéral BCA' disposé de telle façon que A et A' soient situés de part et d'autre de la droite BC.

Dans tous les cas, des considérations très élémentaires sur lesquelles on me permettra de ne pas insister établissent que : $LB + LC = LA'$.

α) Lorsque $A < \frac{2\pi}{3}$, il est clair que L est situé entre A et A', donc à l'intérieur du triangle, et que :

$$\begin{aligned} f(L) &= LA + LB + LC \\ &= LA + LA' = AA' \end{aligned}$$

et qu'il est donc une des positions possibles du point T (l'autre étant A).

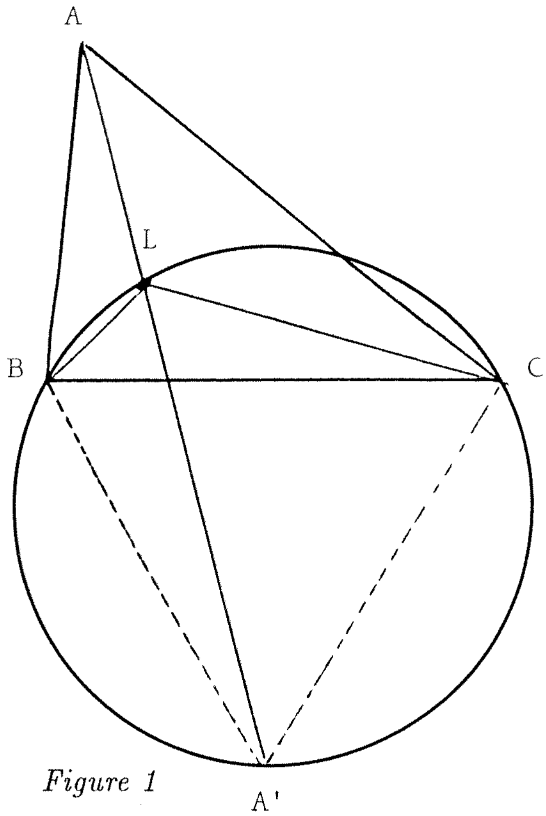

Figure 1

Posant $BC = a, AC = b$ et $AB = c$, un calcul classique montre que :

$$AA'^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + \frac{\pi}{3}),$$

et comme $AA' = BB'$ on peut écrire : $[f(L)]^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + \frac{\pi}{3}) < b^2 + c^2 + 2bc = (b+c)^2 = [f(A)]^2$ d'où il résulte que $f(L) < f(A)$, et que par suite T est en L. On notera que l'égalité ne pourrait avoir lieu que si $A = \frac{2\pi}{3}$, ce qui est exclu par l'hypothèse initiale.

β) Lorsque $A \geq \frac{2\pi}{3}$, le point L n'est plus situé entre A et A' et par suite n'est plus à l'intérieur du triangle. De la sorte, la seule position possible pour le minimum est le point A.

Une manière plus géométrique et plus élémentaire d'aborder le problème est basée sur les inégalités de PTOLÉMÉE, dont une démonstration élémentaire sera donnée en annexe. Le théorème de PTOLÉMÉE s'énonce ainsi :

"Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan. Alors chacun des produits $AB \times CD, AC \times BD, AB \times CD$ est au plus égal à la somme des deux autres. De plus, si l'un des produits est égal à la somme des deux autres, les deux autres inégalités sont strictes, et par exemple $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$ si et seulement si les quatre points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés, placés dans cet ordre sur le cercle ou sur la droite."

Soit alors M un point du plan distinct de B, C et A' (M peut donc éventuellement se trouver en A); l'inégalité suivante, appliquée aux quatre points M, A', B, C : $MA' \times BC \leq MB \times A'C + MC \times A'B$ devient, puisque le triangle $A'BC$ est équilatéral : $MA' \leq MB + MC$, d'où :

$$f(L) = AA' \leq MA + MA' \leq MA + MB + MC = f(M),$$

soit, $f(M) \geq f(L)$, l'égalité ne pouvant se produire que si :

$$MA' = MB + MC$$

c'est-à-dire $MBA'C$ cocycliques (ou alignés) dans cet ordre,

$$\text{et } MA + MA' = AA',$$

c'est-à-dire AMA' alignés dans cet ordre; par suite M coïncide avec le point L défini plus haut, à la condition que ce point soit intérieur au triangle ABC, ou éventuellement en A, lorsque $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$; (ce point L ne peut évidemment exister que si $A \leq \frac{2\pi}{3}$). Dans ce cas, comme $f(B)$ et $f(C)$ sont tous deux supérieurs à $f(A)$ en raison des hypothèses faites, donc supérieurs à $f(L)$ et que $f(A') = AA' + 2a > f(L)$, on voit clairement qu'alors le point L est l'unique position de minimum de la fonction f, et que le point T est en L (éventuellement confondu avec A lorsque $A = \frac{2\pi}{3}$).

On obtient ainsi un premier résultat : si $A \leq \frac{2\pi}{3}$ il existe dans le plan un unique point T (intérieur – strictement – au triangle ABC lorsque $A < \frac{2\pi}{3}$, placé en A lorsque $A = \frac{2\pi}{3}$) en lequel la fonction f admet une valeur minimale, et pour tout point M du plan autre que ce point T, on a : $f(M) > f(T)$.

Le cas $A > \frac{2\pi}{3}$ est plus fastidieux car le théorème de PTOLÉMÉE ne permet pas de conclure, et il faut opérer par approches successives dans un régionnement convenable du plan, comme indiqué sur la figure 4.

a) M sur un des côtés du triangle

a_1) Demi-droite BA d'origine B :
— M entre A et B :
$f(M) = AB + MC > AB + AC = f(A)$ car $MC > AC$ comme côté opposé au plus grand angle (A, qui est obtus) du triangle AMC.

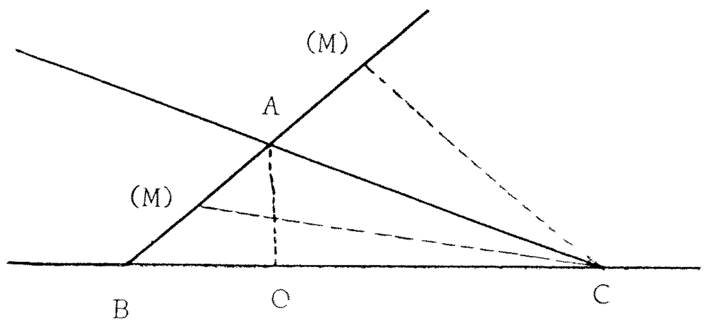

Figure 2

— M au-delà de A :
$f(M) = 2MA + AB + MC > AB + AC$ car $MA + MC > AC$ dans le triangle AMC.
— M en B :
on sait déjà que $f(B) > f(A)$. Donc, pour tout point M autre que A situé sur la demi-droite BA d'origine B, on a : $f(M) > f(A)$.

a₂) Demi-droite CA d'origine C :
en échangeant les rôles de B et C, on obtient un résultat identique : pour tout point M autre que A situé sur la demi-droite CA d'origine C, on a : $f(M) > f(A)$.

a₃) Droite BC :
Si O est la projection orthogonale de A sur BC, il est bien clair que $f(M) \geq BC + OA$ car $MA \geq OA$ et $MB + MC \geq BC$, quelle que soit la position de M sur la droite BC.

On est, pour un triangle ABC, amené à comparer $h + a$ et $b + c$: ceci tient plus des relations métriques du triangle que des inégalités géométriques.

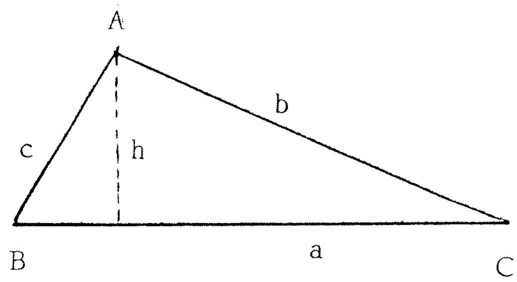

Figure 3

$h + a - (b + c)$ est proportionnel à $\sin B \times \sin C + \sin A - \sin B - \sin C$; A étant fixé, posons $u = \frac{B+C}{2}$ $(A = \pi - 2u)$ et $v = \frac{B-C}{2}$ (alors $B = u + v$ et $C = u - v$) de sorte que la quantité à étudier est :

$$\sin(u + v) \times \sin(u - v) + \sin 2u - \sin(u + v) - \sin(u - v)$$

que l'on peut remplacer par :

$$\varphi(v) = \cos 2v - \cos 2u + 2\sin 2u - 4\sin u \times \cos v,$$

fonction de v dans laquelle $|v| \leq u$ et dans laquelle, pour raison de parité, on peut faire varier v de 0 à u.

On remarque que, si A, B, C sont alignés, $OA = 0$ et $f(M) \geq BC = f(A)$, l'égalité n'étant obtenue que si M est en A (point confondu avec O).

Sinon, on voit que $\varphi(u) = 0$.

D'autre part, $\varphi'(v) = -2\sin 2v + 4\sin u \sin v = 4\sin v(\sin u - \cos v)$; dès lors, dans l'hypothèse $A > \frac{2\pi}{3}$ où nous nous trouvons, on a $u < \frac{\pi}{6}$ et donc aussi $v < \frac{\pi}{6}$, puisque $0 \leq v < u$: il s'ensuit que $\cos v > \sin u$ et donc $\varphi'(v) < 0$ (avec $\varphi'(0) = 0$) de sorte que, lorsque v croît de 0 à u, $\varphi(v)$ décroît de $\varphi(0)$ à 0, et par suite $\varphi(v) > 0$ sur cet intervalle; ceci montre que $h + a > b + c$, donc que, sur la droite BC $f(M) \geq f(O) > f(A)$ lorsque A, B, C forment un vrai triangle; si A, B, C sont alignés, nécessairement dans l'odre B, A, C, A est confondu avec O et le minimum de f sur la droite BC est obtenu en O. Pour un point M non situé sur BC on a:

$$f(M) = MA + MB + MC > MB + MC > BC = AB + AC = f(A)$$

de sorte que dans ce cas $f(M) > f(A)$ pour tout point M du plan autre que A (avec évidemment égalité lorsque M est en A, point en lequel f est minimal).

Dans toute la suite nous supposerons donc que A, B, C forment un vrai triangle.

b) Régionnement du plan

La droite BC et les deux demi-droites définies précédemment régionnent le plan en cinq zones (ne contenant pas leurs frontières) selon le plan de zonage ci-contre.

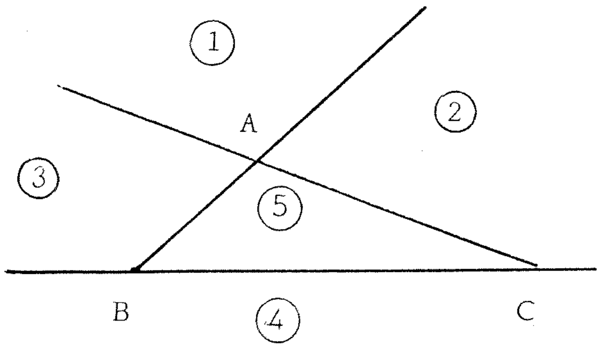

Figure 4

$\mathbf{b_1}$) M en zone 1 :
Dans les deux triangles MAB et MAC la somme des angles en A est $2\pi - A$: elle est donc comprise entre π et $\frac{4\pi}{3}$ et par suite l'un au moins d'entre eux est obtus, celui du triangle MAC par exemple. Dans ce triangle on a $MC > AC$, côté opposé à l'angle le plus grand (parce qu'obtus) dudit triangle; dans le triangle MAB on a bien évidemment $MB + MA > AB$ de sorte que $f(M) = MA + MB + MC > AB + AC = f(A)$.

$\mathbf{b_2}$) M en zone 2 :
M et B étant de part et d'autre de la droite AC, les droites MB et AC se coupent en I, point situé tant entre M et B qu'entre A et C. Alors, $f(M) = MA + MB + MC > AC + IB > f(I) > f(A)$.

$\mathbf{b_3}$) M en zone 3 :
Le même résultat est valable, il suffit d'échanger les rôles de B et C.

$\mathbf{b_4}$) M en zone 4 :
A et M étant de part et d'autre de la droite BC, les droites AM et BC se coupent en un point I situé entre A et M. Alors $MB + MC > BC$ et $MA > IA \geq OA$, O étant la projection orthogonale de A sur BC. Il en résulte $f(M) = MA + MB + MC > BC + OA = f(O) > f(A)$.

$\mathbf{b_5}$) M en zone 5 (intérieur du triangle) :
Comme $A > \frac{2\pi}{3}$ il existe sur la droite BC, entre B et C, un point D tel que l'angle en A du triangle ABD soit égal à $\frac{2\pi}{3}$: on peut supposer que M et C sont situés de part et d'autre de la droite AD (s'il n'en était pas ainsi en échangerait dans le raisonnement les rôles des points B et C). Alors les droites AD et MC se coupent en un point I situé aussi bien entre A et D qu'entre M et C.

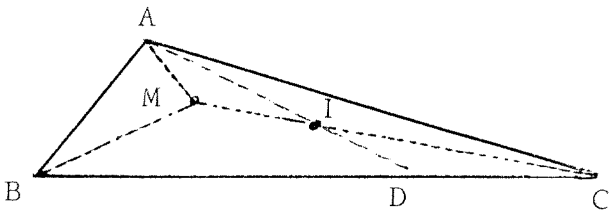

Figure 5

On a alors $MA + MB + MI > AB + AI$ par application d'un résultat antérieur concernant le cas où l'angle en A du triangle vaut $\frac{2\pi}{3}$. D'où :

$$\begin{aligned} f(M) &= MA + MB + MC \\ &= MA + MB + MI + IC > AB + AI + IC > AB + AC = f(A), \end{aligned}$$

puisque dans le triangle AIC on a bien : $AI + IC > AC$.

On a donc établi un deuxième résultat qui complète le premier : dans le cas où $A > \frac{2\pi}{3}$, la fonction f admet sa valeur minimale au point A.

En résumé :

Soient A, B, C trois points du plan, disposés de telle sorte que A soit le sommet de l'angle le plus grand du triangle ABC (éventuellement aplati : dans ce cas, A, B, C sont alignés, dans l'ordre B, A, C).

Il existe un point T unique en lequel la fonction f définie dans le plan par : $f(M) = MA + MB + MC$ atteint sa valeur minimale.
— Si $A < \frac{2\pi}{3}$, ce point T est le *point de Toricelli* L du triangle ABC, obtenu comme deuxième point commun à la droite AA' et au cercle $A'BC$, A' étant déterminé de telle sorte que le triangle BCA' soit équilatéral et que A et A' soient de part et d'autre de la droite BC;
— Si $A \geq \frac{2\pi}{3}$, ce point T est le point A.

ANNEXE

Une démonstration élémentaire du théorème de PTOLÉMÉE.

Soient A, B, C, D quatre points du plan, distincts.

1) Si A, B, C, D sont alignés, placés dans l'ordre $ABCD$, on posera $AB = b, AC = c, AD = d$ et on calculera les trois produits : $AB \times CD = b(d-c), AC \times BD = c(d-b)$ et $AD \times BC = d(c-b)$, ce qui a un sens puisque $0 < b < c < d$.

Une simple vérification montre que : $AB \times CD + AC \times BD > AD \times BC, AC \times BD + AD \times BC > AB \times CD$, et que $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$, avec égalité dans un cas et inégalité stricte dans les deux autres.

2) Supposons que A, B, C, D ne soient pas quatre points d'une même droite (il est possible que trois d'entre eux soient alignés).

N.B. : le lecteur fera les figures nécessaires.

La similitude plane directe de centre A transformant B en C transforme D en un point E, et on a : $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD}$, d'où $AC \times BD = AB \times CE$.

De cette similitude résulte l'existence d'une similitude plane directe de centre A transformant B et D et C en E. Alors, on obtient :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}, \quad \text{soit } AD \times BC = AB \times DE.$$

Il s'ensuit que $AC \times BD + AD \times BC = AB \times (CE + DE)$. Comme $CE + DE \geq CD$, on obtient l'inégalité de base :

$$AB \times CD \leq AC \times BD + AD \times BC$$

avec égalité si et seulement si $CE + DE = CD$, c'est-à-dire si C, D, E sont alignés dans l'ordre C, E, D, soit $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DE}) = \pi \pmod{\pi}$.
Or :

$$(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE}) \pmod{2\pi}.$$

Comme $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}$ dans la première similitude, et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \pmod{2\pi}$ dans la seconde, on obtient : $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \pmod{2\pi}$ de sorte que l'égalité $AB \times CD = AC \times BD + AD \times BC$ est obtenue si et seulement si $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) + \pi \pmod{2\pi}$, ce qui est équivalent, en clair, au fait que $ABCD$ sont cocycliques (ou alignés en vertu du **1**), et placés dans l'ordre A, C, B, D sur le cercle (ou sur la droite).

On obtient d'autres inégalités du même genre en permutant arbitrairement les quatre lettres A, B, C, D. On obtient en fait **trois** inégalités seulement, car l'expression $AC \times BD + AD \times BC - AC \times CD$ est invariante par le sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ (groupe symétrique de degré 4) engendré par les deux permutations $(ACBD)$ et $(AB)(C)(D)$ (qui sont un 4-cycle et une transposition), lesquelles engendrent un groupe d'ordre 8 de type *diédral*.

Les trois inégalités de PTOLÉMÉE ainsi obtenues sont donc :

$$\begin{cases} AB \times CD & \leq AC \times BD & + AD \times BC \\ AC \times BD & \leq AB \times CD & + AD \times BC \\ AD \times BC & \leq AB \times CD & + AC \times BD \end{cases}$$

et on vérifie aisément que si l'une de ces trois inégalités est une égalité, les deux autres sont des inégalités strictes.
(Démonstration d'après GUICHARD, *Cours de Géométrie* – Vuibert, 1924.)

On ne m'en voudra pas de ne pas répéter l'énoncé complet du théorème, qui a été donné antérieurement.