A VOS STYLOS

PROBLÈME 6

Énoncé

Pour $\varepsilon > 0$, soit $\mathcal{M}^\varepsilon$ l'ensemble des matrices 3×3, à coefficients positifs ou nuls, telles que la somme de chaque colonne soit 1 et que l'une au moins des lignes ait tous ses coefficients plus grands que ε. Montrer que si $(M_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans $\mathcal{M}^\varepsilon$, le produit infini

$$M_1 \times M_2 \times \ldots M_n \times \ldots$$

converge. La limite est-elle toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} ?$$

Solution de Pierre RENFER (nous avons également reçu une solution de Jacques MULLER et une de Christian CUVIER).

Soit

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

une matrice de $\mathcal{M}^\varepsilon$.

Il lui correspond un endomorphisme f de l'espace vectoriel R^3.

Comme la somme des colonnes est 1, l'application f conserve le plan affine p de R^3, d'équation : $x + y + z = 1$.

Soient $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$, $A_3 = (0, 0, 1)$. L'application f transforme A_1 en A'_1, barycentre des points pondérés :

$$(A_1, a_{11}), (A_2, a_{21}), (A_3, a_{31}).$$

Soit T l'intérieur du triangle $A_1 A_2 A_3$ (arêtes comprises). L'image de T par f est l'intérieur T' du triangle $A'_1 A'_2 A'_3$. Si les coefficients de la ligne i sont tous supérieurs à ε, alors T' est inclus dans le transformé de T par l'homothétie de centre A_1, de rapport $(1 - \varepsilon)$.

Donc : aire $(T) \leq (1 - \varepsilon)^2$ aire (T').

Soit T_n le transformé de T par la composée de n applications associées à des matrices de $\mathcal{M}^\varepsilon$. Alors : aire $(T_n) \leq (1-\varepsilon)^{2n}$ aire (T). La limite de l'aire de T_n est donc nulle et la composée a pour limite une application constante de matrice :

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) est l'unique point commun à tous les triangles T_n.

PROBLÈME 7

Enoncé

Soit une fonction de deux variables $f(x, y)$ telle que, pour tout $x, P_x(y) = f(x, y)$ est un polynôme en y et, pour tout y, $Q_y(x) = f(x, y)$ est un polynôme en x. Est-ce que f est un polynôme à deux variables?

Indication

Oui dans $\mathbb{R}$, non dans $\mathbb{Q}$.

PROBLÈME 8

Enoncé

Appelons re$\mathbb{Q}$tangle, tout rectangle dont le rapport des côtés est rationnel. Démontrer que tout rectangle pavé par des re$\mathbb{Q}$tangles est lui-même un re$\mathbb{Q}$tangle.