GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE SANS COORDONNÉES ... OU PRESQUE

Exposé de Jean MARTINET (Mai 1988 - Conférence APMEP)

rédigé d'après les notes de Nathalie MATHERN

Introduction

Je voudrais présenter ici quelques démarches classiques de démonstration, en géométrie élémentaire, peu connues me semble-t-il des jeunes générations de professeurs. Ces méthodes sont pourtant aux sources de la géométrie algébrique moderne; elles ont fait l'objet de cours développés au XIX^e siècle, comme le magnifique '*Traité de Géométrie Analytique*' de George SALMON (Gauthiers-Villars, 1870).

Nous ne parlerons ici que de géométrie plane. Le plan est rapporté à un repère cartésien, arbitraire en géométrie affine, orthonormé en géométrie euclidienne; mais les raisonnements que nous ferons n'utiliserons pratiquement pas les coordonnées : ils seront essentiellement *intrinsèques*, c'est ce qui fait leur intérêt, et justifie le titre de l'exposé.

Voici les idées principales dont nous voulons illustrer, sur quelques exemples, l'efficacité *démonstrative*.

D'abord, on privilégie les **courbes** par rapport aux points, et on identifie toute courbe (**algébrique** exclusivement) à l'un quelconque des polynômes $P(x, y)$ qui donne une équation de cette courbe ($P = 0$).

Exemples : La droite $d = 2x + 3y - 1$. Le couple de droites $d.d' =(2x + 3y - 1).(x - y + 5)$. Le cercle $C = x^2 + y^2 - 2x + 1$ (repère orthonormé). La parabole $P = y - x^2$.

C'est donc plus exactement aux fonctions (polynômes uniquement) que nous faisons jouer le rôle principal, et nous utilisons les opérations naturelles (addition et multiplication), donc la structure d'**anneau**, pour traduire des propriétés géométriques. Donnons quelques exemples de telles traductions (ceux que nous utiliserons dans la suite).

I.1. Trois droites d_1, d_2, d_3 sont **concourantes** si on a :

$$\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = 0$$

pour des constants λ_i non toutes nulles (dépendance linéaire). Le cas particulier où $d_3 = 1$ représente le parallélisme de d_1 et d_2 : le polynôme constant 1 représente la droite de l'infini.

I.2. (Plan euclidien). Deux droites d_1 et d_2 sont **orthogonales** si et seulement si on peut trouver deux nombres λ_1, λ_2 (non nuls) tels que :

$$\lambda_1 d_1^2 + \lambda_2 d_2^2 \text{ soit un cercle (“cercle} - \text{point”).}$$

Nous entendons ici par cercle tout polynôme de degré 2 dont la partie homogène de degré 2 est de la forme $\alpha(x^2 + y^2)$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$).

I.3. Soit C une courbe algébrique de degré $n \geq 1$ (i.e. C est un polynôme de degré n). Une droite d est contenue dans C si et seulement si $C = d.C'$ ($d^\circ C' = n - 1$); ceci est assuré dès que la courbe C contient $n + 1$ points de d. (La démonstration de ces faits est immédiate en se ramenant au cas où d est la droite $y = 0$.) Noter que l'assertion plus générale suivante est **fausse** : si P et P' sont deux polynômes tels que $\{P = 0\} \subset \{P' = 0\}$ alors $P' = P.Q$ (exemple : $P = x^2 + y^2$ et $P' = xy$); elle serait vraie si l'on se plaçait dans le plan **complexe** $\mathbb{C}^2$ au lieu du plan réel, et si l'on supposait P **irréductible** ou **réduit** (c'est-à-dire produit de polynômes irréductibles premiers entre eux).

I.4. Soient d et δ deux droites sécantes en un point P. Cherchons à exprimer algébriquement qu'une courbe C de degré n $(n \geq 2)$ est **tangente** à d au point P. J'affirme que cette propriété se traduit par l'égalité

$$C = \lambda\delta^2 + d.Q$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et Q est un polynôme de degré $n - 1$.

Voici pourquoi : la tangence de C à d signifie naturellement que la restriction du polynôme C à la droite d (rapportée à un repère) a une racine **double** correspondant au point P.

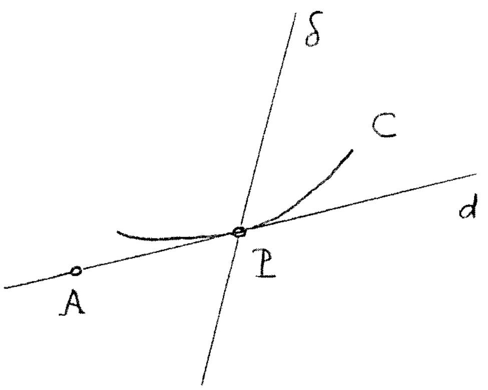


Figure 1

Choisissons alors un point $A \neq P$ sur d. La condition $C(A) - \lambda\delta^2(A) = 0$ définit un nombre λ (car $\delta(A) \neq 0$). Le polynôme $C' = C - \lambda\delta^2$ admet alors trois “racines” sur d (A d'une part; P d'autre part comme racine **double** : il l'est en effet pour C par hypothèse, et pour δ^2 par définition). D'après le critère donné en **I.3.**, $C' = d.Q$, et finalement $C = \lambda\delta^2 + d.Q$.

En particulier, si C est une **conique** (courbe de degré 2), l'égalité précédente s'écrit $C = \lambda\delta^2 + dd'$ où d' est une **droite**, qui est évidemment la tangente à C au second point P' où δ coupe C.

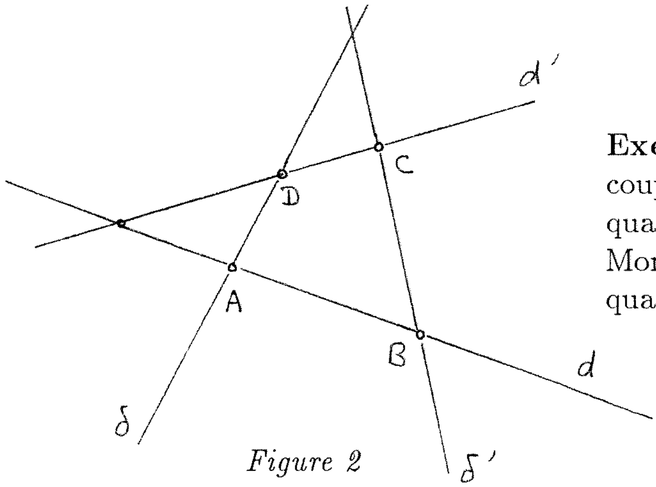


Figure 2

Exercice 1. Soient (d, d') et (δ, δ') deux couples de droites sécantes, définissant les quatre points A, B, C, D.
Montrer que les coniques passant par ces quatre points sont les polynômes :

$$C = \lambda dd' + \mu\delta\delta' \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Passons maintenant à l'étude de quelques problèmes mettant en jeu les remarques précédentes

1.— Droites, cercles et coniques

1.1. Commençons par revoir un principe général de construction de coniques.

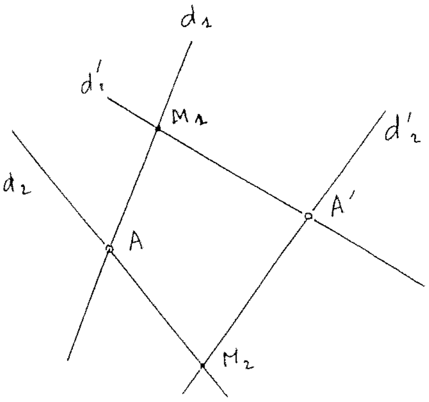


Figure 3

On donne deux droites d_1, d_2 se coupant en un point A, et deux droites d'_1, d'_2 se coupant en un point A' distinct de A.
A chaque droite $d = \lambda d_1 + \mu d_2$ passant par A on associe la droite $d' = \lambda d'_1 + \mu d'_2$ passant par A'.
Quelle courbe Γ décrit le point M intersection de d et d' ?

Réponse : c'est la conique $\Gamma = d_1 d'_2 - d_2 d'_1$. En effet, un point M appartient à Γ si et seulement si le système d'équations homogènes en (λ, μ) :

$$\begin{cases} \lambda d_1(M) + \mu d_2(M) & = 0 \\ \lambda d'_1(M) + \mu d'_2(M) & = 0 \end{cases}$$

admet une solution **non nulle**. Ceci équivaut au fait que son déterminant $d_1 d'_2 - d_2 d'_1$ est nul.

Cas particulier bien connu au lycée. Si deux droites d et d' pivotent autour de deux points A et A' respectivement, en faisant un angle θ constant, leur point d'intersection décrit un cercle.

Choisissons le repère orthonormé tel que A soit l'origine, et A' le point de coordonnées $(a, 0)$. Soit $d_1 = y$, $d_2 = x$, $d'_1 = -(x-a)\sin\theta + y.\cos\theta$, $d'_2 = (x-a)\cos\theta + y.\sin\theta$; il est alors clair qu'à $d = \lambda d_1 + \mu d_2$ correspond $d' = \lambda d'_1 + \mu d'_2$. La courbe cherchée est donc définie par le polynôme :

$$\begin{aligned}\Gamma = d_1 d'_2 - d_2 d'_1 &= y^2 \sin\theta + y(x-a).\cos\theta + x(x-a).\sin\theta \\ &= (x^2+y^2).\sin\theta - ax\sin\theta - ay\cos\theta\end{aligned}$$

L'énoncé général que nous venons d'établir peut être reformulé ainsi : si l'on définit une **bijection linéaire** entre le faisceau $\mathcal{F}_A$ (on dit aussi pinceau aujourd'hui) des droites passant par A et celui $\mathcal{F}_{A'}$ des droites passant par A', le point d'intersection de deux droites correspondantes décrit une conique Γ passant par A et A'.

Exercice 2 :
1) La conique Γ est dégénérée (réunion de deux droites) si et seulement si à $AA' \in \mathcal{F}_A$ correspond $A'A \in \mathcal{F}_{A'}$.
2) Quand Γ n'est pas dégénérée, sa tangente en A est la droite $d \in \mathcal{F}_A$ ayant pour image $A'A \in \mathcal{F}_{A'}$ (appliquer **I.4.**).

1.2. Un problème classique de cocyclicité :

On donne un cercle Γ et deux couples $(t_1, t_2), (t'_1, t'_2)$ de tangentes à Γ ; les points de contact sont T_1, T_2, T'_1, T'_2. Soient A, B, C, D les points $t_1 \cap t'_1, t'_1 \cap t_2, t_2 \cap t'_2, t'_2 \cap t_1$. Montrer que A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si les droites $d = T_1T_2$ et $d' = T'_1T'_2$ sont perpendiculaires.

D'après **I.4.**, les hypothèses se traduisent en les égalités de polynômes :

$$(1) \qquad \begin{aligned} \Gamma &= \lambda d^2 + t_1 t_2 \\ \Gamma &= \lambda' d'^2 + t'_1 t'_2 \end{aligned} \qquad (\lambda, \lambda' \in \mathbb{R})$$

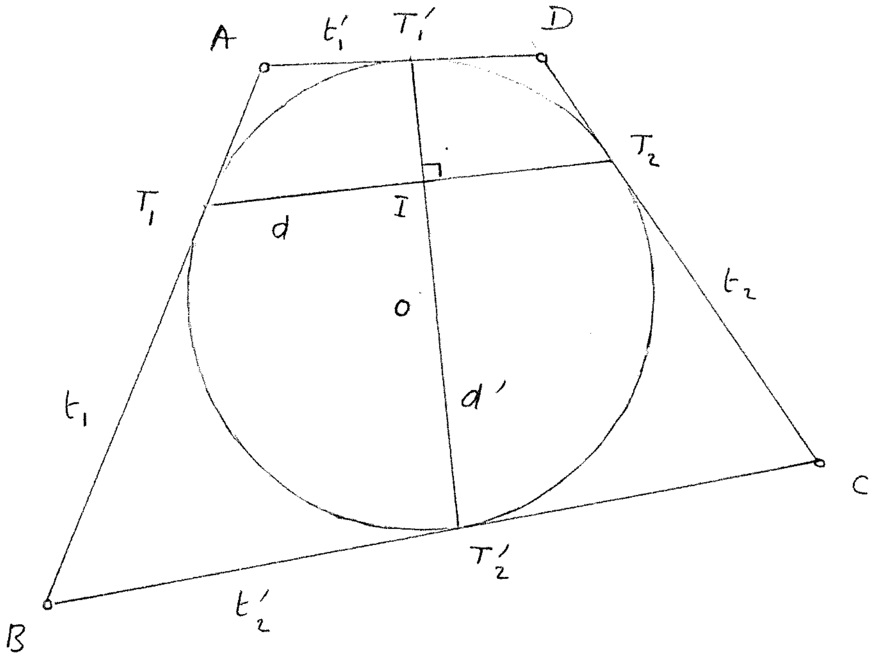


Figure 4

D'autre part, les coniques passant par A, B, C, D sont de la forme (Exercice 1) :

$$\Gamma' = \alpha t_1 t_2 + \alpha' t' t'_2 \qquad (\alpha, \alpha' \in \mathbb{R})$$

soit

$$\Gamma' = (\alpha + \alpha')\Gamma - (\mu d^2 + \mu' d'^2) \qquad (\mu = \lambda\alpha, \mu' = \lambda'\alpha').$$

Ainsi, l'une des Γ' est un cercle si et seulement si il existe $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$ tels que $\mu d^2 + \mu' d'^2$ soit un cercle; mais (**I.2.**) ceci veut dire que d et d' sont perpendiculaires.

Ceci prouve de plus qu'alors les cercles Γ, Γ' et le cercle point I ($I = d \cap d'$) sont linéairement dépendants, c'est-à-dire appartiennent au même faisceau (dont I est un point limite).

Exercice 3. Montrer que si d et d' pivotent autour de I (fixé) en restant perpendiculaires, le cercle Γ' reste le même.

Il est intéressant de comparer cette argumentation à une autre démarche, utilisant par exemple les angles orientés.

2.— Cubiques. Les théorèmes de Pappus et de Pascal.

On appelle **cubique** toute courbe de degré 3. Le premier résultat fondamental sur les cubiques est le

Théorème. Soit Γ une cubique; soit d (resp. d') une droite coupant Γ en A, B, C (resp. A', B', C'); soient A'', B'', C'' les points où les droites AA', BB', CC' recoupent Γ. Alors A'', B'', C'' sont alignés.

En effet, désignons par a, b, c les droites AA', BB', CC', et considérons le polynôme $P = \Gamma - \lambda abc$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que P s'annule au point d'intersection I de d et d'. D'après **I.3.**, $P = d.Q$ car la courbe P, de degré au plus 3, contient quatre points de $d(A, B, C, I)$; de plus $Q = d'.R$ car la courbe Q, de degré au plus 2, contient trois points de $d'(A', B', C')$. Finalement, $d^\circ R \leq 1$, et P s'annule aussi en A'', B'', C'' : il en résulte que ces trois points appartiennent à la droite R, ce qu'on voulait montrer.

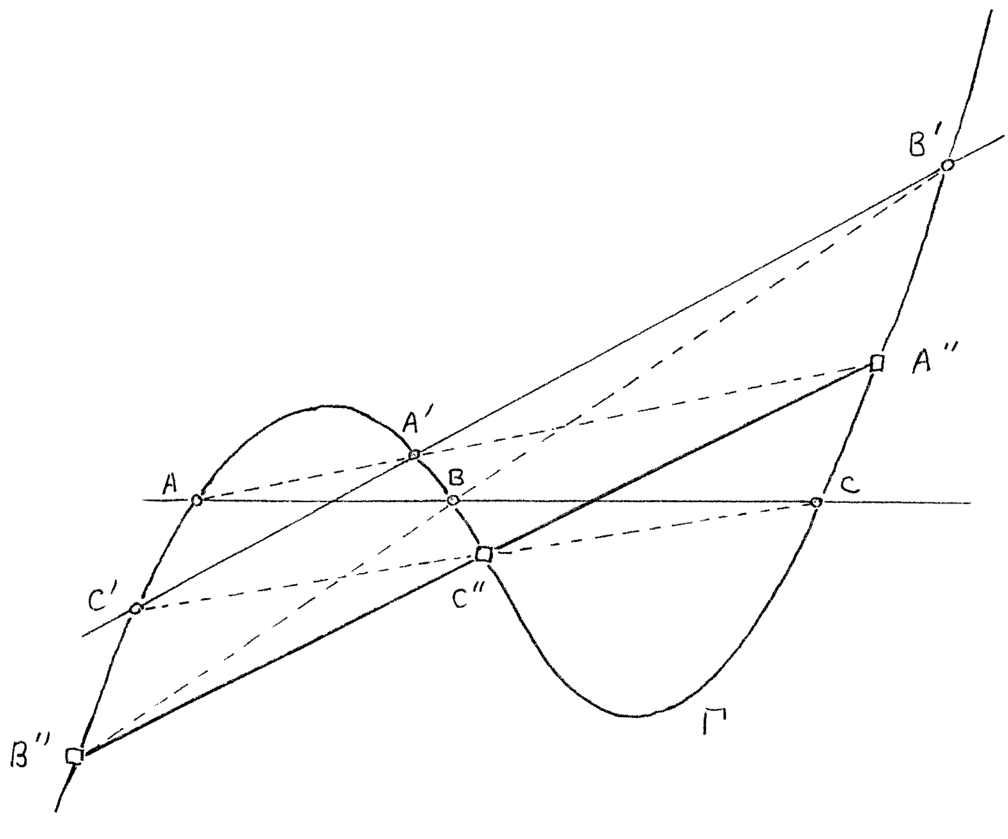


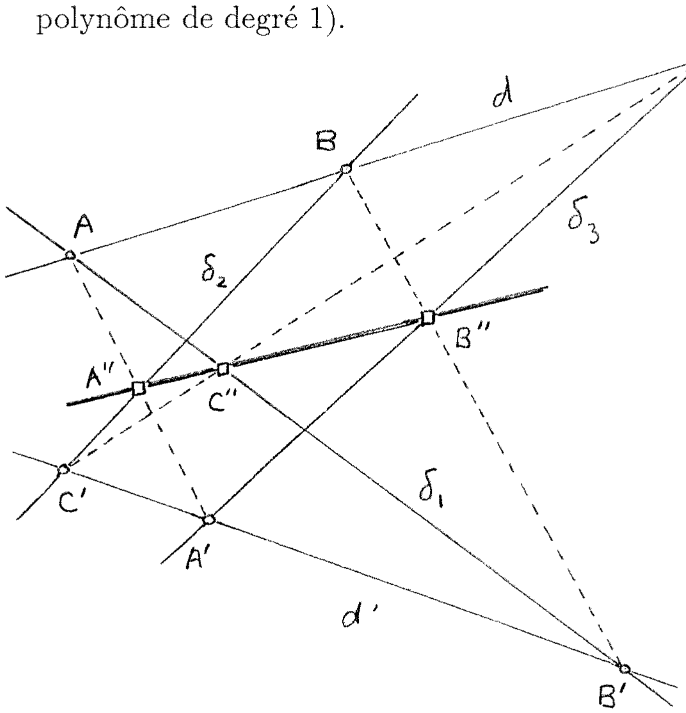
Figure 5

On remarquera qu'à partir des données Γ, d et d', ce théorème fournit, en général, **six** alignements : autant que de bijections entre $\Gamma \cap d$ (3 points) et $\Gamma \cap d'$ (3 points).

Donnons maintenant les principales applications de ce théorème.

2.1. Le théorème de Pappus.

Nous allons voir qu'il correspond au cas où la cubique Γ est dégénérée en le **produit** (géométriquement : la réunion) de trois droites, c'est-à-dire $\Gamma = \delta_1.\delta_2,\delta_3$ (δ_i = polynôme de degré 1).



Soient A, B, C les points d'intersection de d avec $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ respectivement, et B', C', A' les points d'intersection de d' avec ces mêmes droites. Le résultat général dit que :

$$\begin{aligned} A'' &= AA' \cap \delta_2 &= AA' \cap BC' \\ B'' &= BB' \cap \delta_3 &= BB' \cap CA' \\ C'' &= CC' \cap \delta_1 &= CC' \cap AB' \end{aligned}$$

sont alignés; c'est le théorème de PAPPUS.

Figure 6

(Remarquer le choix des notations; la donnée de Γ, d et d' ne produit plus, dans ce cas de dégénérescence, que deux alignements : celui figuré ci-dessus, et celui qu'on en déduirait en remplaçant B', C', A' par C', A', B' respectivement.)

2.2. Le théorème de Pascal.

Rappelons qu'il s'agit de l'énoncé suivant : soit Γ une conique (non dégénérée) et six points de cette conique. Si l'on se donne une permutation **circulaire** σ de ces six points ($\sigma : M \to M'$) et on note $\tau M \to \overline{M}$ l'**involution** $\tau = \sigma^3$, alors les points d'intersection des droites MM' et $\overline{MM'}$ (au nombre de **trois**) sont alignés (fig. 7).

Cette configuration apparaît précisément si l'on part des données suivantes : une cubique $\widetilde{\Gamma} = \Gamma.\delta$ **dégénérée** en le produit de la conique Γ et d'une droite δ; deux droites d et d' coupant $\widetilde{\Gamma}$ en trois points (fig. 8). On a désigné en traits pleins les données, et en pointillés les droites construites selon l'énoncé du théorème général.

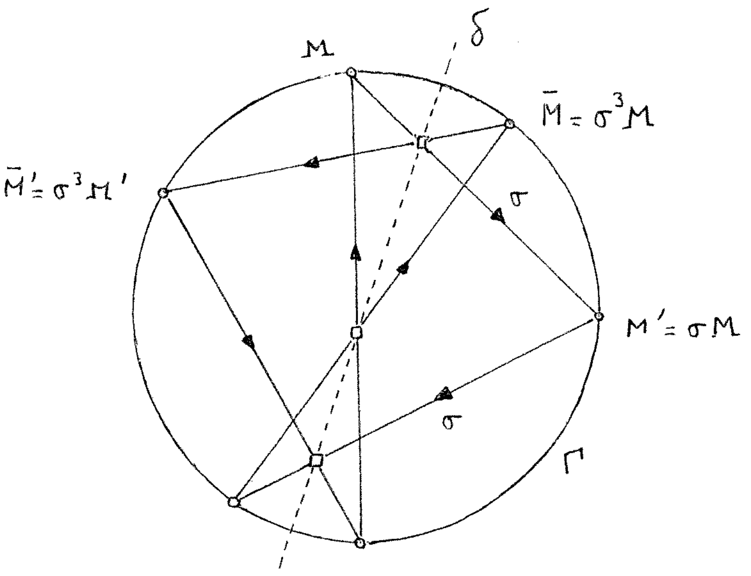


Figure 7

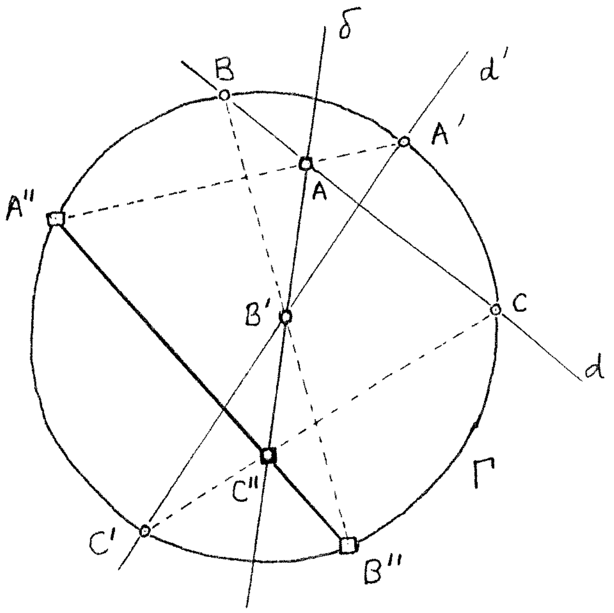


Figure 8

2.3. La loi de groupe commutatif sur les cubiques non singulières.

Considérons une cubique non singulière, comme, par exemple

$$\Gamma = y^2 - x(x+1)(x-1).$$

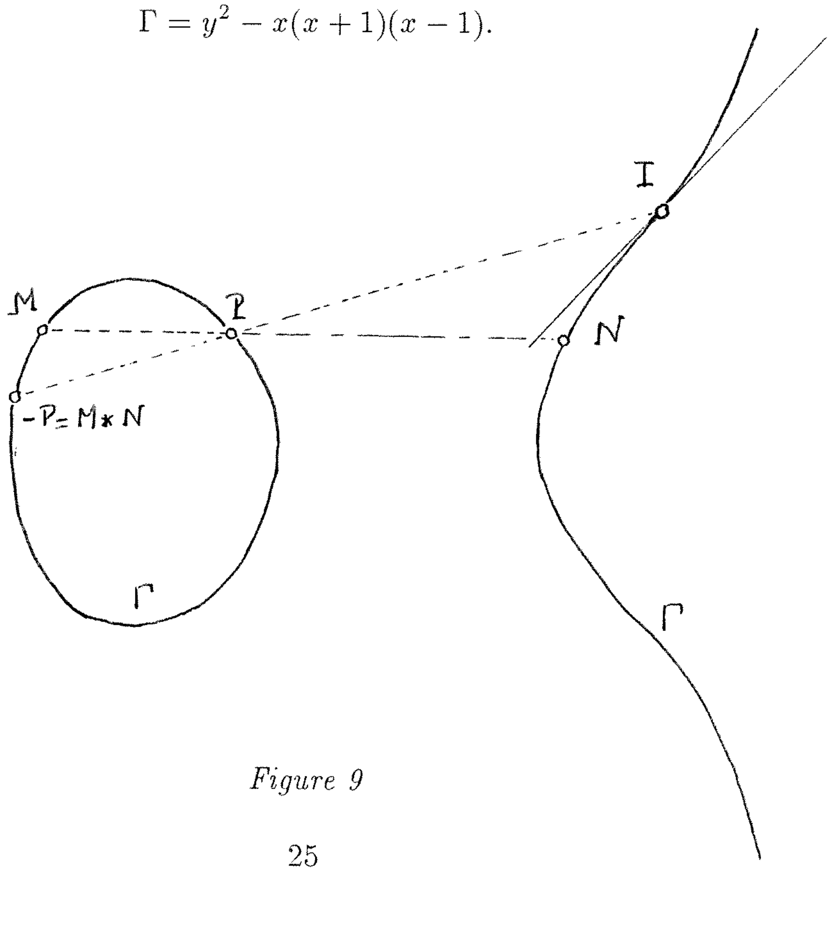


Figure 9

Cette courbe est constituée de deux branches, dont l'une a une direction asymptotique verticale (point à l'infini J), et l'autre est bornée.

Nous allons utiliser les **points d'inflexion** de Γ. On les obtient en exprimant qu'une tangente d'inflexion est une droite qui coupe Γ en trois points confondus (l'équation aux points d'intersection a une racine triple). On obtient ainsi les points I et I' de même abscisse $\sqrt{1+(2/\sqrt{3})}$ et d'ordonnées opposées; le point à l'infini J de Γ est aussi un point d'inflexion $[\Gamma + x^3 = 1.(y+x^2)]$ avec pour tangente la droite de l'infini. Noter que les trois points I, I', J sont **alignés** (Exercice : montrer, en appliquant le théorème général, que si I et I' sont deux points d'inflexion d'une cubique Γ, le point I'' où II' recoupe Γ est aussi un point d'inflexion.).

Nous voulons en venir à la remarquable propriété suivante : soit Γ une cubique non singulière (cela veut dire : sans point double, réel ou complexe), et $I \in \Gamma$ un point d'inflexion. Soit $M, N \mapsto M * N$ la loi de composition, sur Γ, définie par la construction que voici : on construit le point P où MN recoupe Γ, puis le point Q où IP recoupe Γ, et on pose $Q = M * N$; si $M = N$, MN désigne la tangente en M à Γ. Alors $*$ est une loi de **groupe commutatif** sur l'ensemble Γ, dont l'élément neutre est le point I ; pour $M \in \Gamma$, l'opposé de M pour $*$ est le point $-M$ où IM recoupe Γ.

Démontrons ceci. Il est clair que $M * N = N * M$, que $I * M = M$ pour tout M, et que $M * (-M) = I$. La seule propriété non évidente est l'**associativité** de $*$; soient M, N, I trois points de Γ; par définition on a les alignements :

$$\begin{array}{llll} A = M, & B = N, & C = -(M * N) & \text{alignés} \\ A' = N * P, & B' = -(N * P), & C' = I & \text{alignés} \end{array}$$

D'après notre théorème général, il en résulte l'alignement de A'', B'', C''; or

$$A'' = -[M * (N * P)]; B'' = P; C'' = M * N;$$

ainsi :

$$C'' * B'' = -A''$$

soit

$$(M * N) * P = M * (N * P).$$

La signification profonde de cette loi de groupe est hors du cadre de cet exposé : elle passe par l'étude géométrique des cubiques dans le plan **complexe** et la mise en évidence de leur paramétisation naturelle par les fonctions $\mathcal{P}$ de WEIERSTRASS.