LE CALCUL DES DÉRIVATIONS D'ARBOGAST

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Dans un précédent article ('*L'Ouvert*' n° 53) j'avais tenté de retracer la vie et l'œuvre de ce mathématicien alsacien oublié du 18e siècle : Louis François ARBOGAST. Je voudrais montrer ici que cet oubli est injuste au moins sur une contribution originale et extrêmement performante au calcul algébrique formel et qui peut à mon avis intéresser les professeurs de mathématiques encore aujourd'hui. Cette contribution est développée dans un solide volume de 400 pages environ, paru à Strasbourg en 1800 chez Berger-Levrault, et qui, à défaut d'être très connu en France, eut très vite un immense succès auprès de l'école mathématique anglaise du 19e siècle, en particulier DE MORGAN et CAYLEY. Il s'agit du '*Calcul de dérivations*'.

Comme l'indique le titre, ce livre donne d'abord des méthodes de **calcul** formel, ce mot ayant l'acception que les anglais donnent au mot '*calculus*' pour désigner le calcul différentiel et intégral. Il est important aussi de ne pas se leurrer quant au sens du mot '*dérivation*' qui chez ARBOGAST doit être pris dans sa signification originelle et étymologique : "*avoir son origine dans ..., se déduire de ..., découler de ...*". C'est pourquoi nous utiliserons le mot "*différentiation*" pour le passage de $f(x)$ à $\frac{df}{dx} = f'(x)$, réservant le terme "*dérivation*" à l'usage qu'en fait ARBOGAST et que je vais expliquer maintenant.

1.— Développement d'une puissance de polynôme.

Déjà en 1697, Abraham de MOIVRE avait tenté de généraliser la formule du binôme de NEWTON en proposant "*une méthode pour élever à n'importe quelle puissance un polynôme infini*" c'est-à-dire le développement de $(az + bz^2 + cz^3 + \cdots)^m$; et il donne explicitement les coefficients de z^m, z^{m+1}, z^{m+2} jusqu'à z^{m+6}. Aujourd'hui l'analyse combinatoire nous permet d'écrire

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p)^r = \Sigma_{n=0}^{n=pr} A_n x^n$$

où le coefficient A_n est donné par

$$A_n = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots\varpi!}.a_0^\alpha.a_1^\beta.a_2^\gamma\ldots a_p^\varpi$$

cette dernière somme étant effectuée sur tous les ensembles d'entiers naturels $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ vérifiant simultanément :

$$(1)\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \varpi = r \\ \beta + 2\gamma + \cdots p\varpi = n \end{cases}$$

Par exemple :

$$(a+bx+cx^2)^3 = a^3+3a^2bx+(3a^2c+3ab^2)x^2+(6abc+b^3)x^3$$
$$= +(3ac^2+3b^2c)x^4+3bc^2x^5+c^3x^6.$$

Mais la difficulté devient vite énorme pour trouver les coefficients A_n lorsque p et r augmentent. Le '*Calcul des dérivations*' d'ARBOGAST donne une réponse à la fois simple et efficace à ce problème, et cela de deux façons :

— l'une **récurrente**, permettant de déduire **directement, sans aucun calcul combinatoire**, le coefficient A_{n+1} du coefficient A_n,

— l'autre **ponctuelle**, permettant de calculer A_n **isolément** pour un indice n fixé, sans avoir besoin de calculer les coefficients d'indice inférieur.

Voici le principe sur lequel est basé cette méthode. Soit u une fonction développée en série entière selon la formule de TAYLOR (il s'agit en fait d'un développement formel, ARBOGAST ne s'occupant pas ici de problèmes de convergence). On a donc :

$$u(t+x) = u(t)+u'(t)x+\frac{1}{2!}u''(t)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}u^{(n)}(t)x^n+\cdots$$
$$= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

avec $a_0 = u(t)$; $a_1 = u'(t)$; $a_2 = \frac{1}{2!}u''(t)$; $\ldots$; $a_n = \frac{1}{n!}u^{(n)}(t)$. Ces coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des fonctions qui "*dérivent*" les unes des autres et que nous noterons avec ARBOGAST

$$a_1 = Da_0 \ ; \ a_2 = Da_1 = D^2a_0 \ ; \ldots, a_n = D^na_0$$

et pour tous entiers naturels n et p : $n \geq 0$; $p \geq 1$; $D^pa_n = a_{n+p}$.

Réciproquement, ARBOGAST pose que tout développement formel, fini ou non, de la forme

$$a+bx+cx^2+\ldots \text{ etc } \ldots$$

où $a, b, c, \ldots$ sont des coefficients **indéterminés**, peut être considéré comme le développement d'une fonction u telle que $u(t+x) = a+bx+cx^2+\cdots$ avec

$$a = u(t) \ ; \ b = u'(t) = Da \ ; \ c = \frac{1}{2!}u''(t) = D^2a = Db \text{ etc} \ldots$$

Soit alors φ une autre fonction, telle que,

$$\varphi[u(t+x)] = \varphi(a+bx+cx^2+\cdots) = A_0+A_1x+A_2x^2+A_nx^n+\cdots$$

On a $A_0 = \varphi(a)$ appelé **origine des dérivations** et $A_n = D^nA^0 = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(\varphi_0u)(t)$ dérivé d'ordre n pour lequel ARBOGAST établit la formule fondamentale suivante :

$$D^nA_0 = (\Delta^nA_0)b^n+(\Delta^{n-1}A_0)Db^{n-1}+\cdots$$
$$+(\Delta^{n-k}A_0)D^kb^{n-k}+\cdots+(\Delta A_0)D^{n-1}b \quad (2)$$

où $\Delta^p A_0 = \frac{1}{p!}\frac{d^p}{da^k}\varphi(a)$ (différentiation classique) et $D^s b^m$ est le dérivé de b^m d'ordre s au sens d'ARBOGAST c'est-à-dire le coefficient de x^s dans le développement de $(b + cx + dx^2 + \cdots)^m = b^m + (mb^{m-1}c)x + \cdots$

Limitons nous pour l'instant au cas d'une fonction φ puissance, c'est-à-dire à $\varphi(u) = u^r = (a + bx + cx^2 + \cdots)^r$. ARBOGAST démontre la double règle suivante pour "*dériver*" le coefficient A_{n+1} du coefficient A_n.

Après avoir disposé les lettres suivant leur ordre de succession :

$\boxed{R_1}$

"*On ne fera varier, dans chaque terme, que la dernière lettre ou sa puissance, en suivant les règles de différentiations, et en mettant simplement b pour Da, c pour Db, d pour Dc etc... sans autre coefficient que l'unité : c'est-à-dire* $Da^s = sa^{s-1}b$; $Db^m = mb^{m-1}c$ *etc...*"

$\boxed{R_2}$

"*On fera de plus varier* "suivant les règles de differenciations" *l'avant dernière lettre ou sa puissance, si elle se trouve être la lettre qui, dans l'ordre alphabétique précède immédiatement la dernière du terme ; et comme la puissance de la dernière lettre augmente alors d'une unité, on divisera par l'exposant ainsi augmenté.*"

Illustrons cela en supposant que A_n contienne un terme en $a^2b^3c^5$. Alors A_{n+1} contiendra par "dérivation"

selon $\boxed{R_1}$ $5a^2b^3c^4d$; selon $\boxed{R_2}$ $3a^2b^2\frac{c^6}{6}$.

Ainsi nous pouvons développer très simplement et de proche en proche n'importe quelle expression $(a+bx+cx^2+\cdots)^r$. Considérons par exemple $(a+bx+cx^2+dx^3)^5$. L'origine des dérivations est ici $a^5 = A_0$ qui donne

par $\boxed{R_1}$ $A_1 = 5a^4b$ lequel donne à son tour

par $\boxed{R_1}$ et $\boxed{R_2}$ $A_2 = 5a^4c + 20a^3\frac{b^2}{2} = 5a^4c + 10a^3b^2$

puis $A_3 = 5a^4d + 20a^3bc + 10a^2b^3$.

Dans A_4, comme le dérivé de d est nul : $Dd = 0$ (il n'y a pas de terme ex^4 dans l'expression initiale), le terme $5a^4d$ ne donne rien ni par $\boxed{R_1}$, ni par $\boxed{R_2}$ (puisque a ne précède pas immédiatement d). Par contre les deux autres termes donneront chacun deux termes par $\boxed{R_1}$ et $\boxed{R_2}$

$$A_4 = \underset{\text{par } \boxed{R_1}}{20a^3bd} + \underset{\text{par } \boxed{R_2}}{10a^3c^2} + \underset{\text{par } \boxed{R_1}}{30a^2b^2c} + \underset{\text{par } \boxed{R_2}}{5ab^4}$$

D'où le développement :

$$\begin{aligned}(a+bx+cx^2+dx^3)^5 = a^5 + 5a^4bx + (5a^2c + 10a^3b^2)x^2 \\ +(5a^4d + 20a^3bc + 10a^2b^3)x^3 \\ +(20a^3bd + 10a^3c^2 + 30a^2b^2c + 5ab^4)x^4 \\ +(20a^3cd + 30a^2b^2d + 30a^2bc^2 + 20ab^3c + b^5)x^5 \\ +(10a^3d^2 + 60a^2bcd + 10a^2b^3 + 20ab^3d + 30ab^2c^2 + 5b^4c)x^6 \\ + \text{etc}\ldots \qquad (3)\end{aligned}$$

Ceci pour l'aspect récurrent de la formule d'ARBOGAST . Si nous nous intéressons à un coefficient isolément, par exemple A_8, celui-ci peut être obtenu directement par la formule (2).

$$A_8 = D^8a^5 = (\Delta^8a^5)b^8 + \Delta^7a^5Db^7 + \cdots + \Delta^2a^5D^6b^2 + \Delta a^5D^7b$$

$\Delta a^5 = 5a^4$	$\Delta^7 b = 0$
$\Delta^2 a^5 = 10a^3$	$D^6b^2 = 0$
$\Delta^3 a^5 = 10a^2$	$D^5b^3 = 3cd^2$
$\Delta^4 a^5 = 5a$	$D^4b^4 = 6b^2d^2 + 12bc^2d + c^4$
$\Delta^5 a^5 = 1$	$D^3b^5 = 20b^3cd + 10b^2c^3$
$\Delta^6 a^5 = 0$	$D^2b^6 = 6b^5d + 15b^4c^2$
$\Delta^7 a^5 = 0$	$Db^7 = 7b^6c$
$\Delta^8 a^5 = 0$	$b^8 = b^8$

La deuxième colonne est obtenue selon la même formule, ainsi pour obtenir D^4b^4, on développe $(b+cx+dx^2)^4$:

$$\begin{aligned}D^4b^4 &= (\Delta^4b^4)c^4 + \Delta^3b^4Dc^3 + \Delta^2b^4D^2c^2 + \Delta b^4D^3c \\ &= c^4 + 12bc^2d + 6b^2d^2 \quad (\text{car} D^3c = 0)\end{aligned}$$

En réalité ARBOGAST donne une règle de calcul de D^rb^s à partir de $D^{r-1}b^{s+1}$ ce qui lui permet d'écrire de proche en proche les termes de la seconde colonne. Mais pour ne pas alourdir excessivement cet article, nous pouvons nous en passer et calculer chaque terme de cette colonne isolément, par la méthode indiquée. Signalons toutefois que les anglais ayant, comme je l'ai indiqué au début, beaucoup pratiqué cette formule ils ont établi une fois pour toute des tables de dérivation donnant D^sb^m pour divers exposants s et m.

Nous obtenons donc pour A_8 :

$$A_8 = 30a^2cd^2 + 30ab^2d^2 + 60abc^2d + 5ac^4 + 20b^3cd + 10b^2c^3$$

résultat que l'on peut vérifier en continuant le développement (3).

Remarquons en passant, que ce coefficient A_8 nous donne aussi toutes les solutions du système

$$(1)\begin{cases} \alpha \quad +\beta \quad +\gamma \quad +\delta \quad = 5 \\ \qquad \beta \quad +2\gamma \quad +3\delta \quad = 8 \end{cases}$$

qui sont les exposants des termes $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$, soit :

$$(2,0,1,2)\ ;\ (1,2,0,2)\ ;\ (1,1,2,1)\ ;\ (1,0,4,0)\ ;\ (0,3,1,1)\ ;\ (0,2,3,0).$$

Bien entendu la formule (2) est valable pour une fonction φ quelconque, dans la mesure où elle est développable en série entière. En voici une autre application utilisant le développement $\ell\eta(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots$

2.— Calcul des sommes des puissances $n^{\text{ième}}$ des racines d'un polynôme.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les racines de $X^m + bX^{m-1} + cX^{m-2} + \cdots = 0$. En transformant l'équation par $X = \frac{1}{Z}$ et factorisant

$$(1-\alpha Z)(1-\beta Z)(1-\gamma Z)\ldots = 1 + bZ + cZ^2 + \cdots$$

D'où

$$\begin{aligned} \ell\eta(1 + bZ + cZ^2 + \cdots) = &-(\alpha+\beta+\gamma)Z - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\cdots)(Z^2/2) \\ &-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\cdots)(Z^3/3)\ldots \text{etc}\ldots \end{aligned}$$

Posant $S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$; $S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \cdots$ et développant $\ell\eta(a + bZ + cZ^2 + \cdots)$ par la règle d'ARBOGAST , puis remplaçant a par 1 on obtient :

$$\ell\eta(a + bZ + cZ^2 + \cdots) = \ell\eta a + (a^{-1}b)Z + (-a^{-2}\frac{b^2}{2} + a^{-1}c)Z^2$$
$$+(2a^{-3}\frac{b^3}{3!} - a^{-2}bc + a^{-1}d)Z^3 + (-6a^{-4}\frac{b^4}{4!} + 2a^{-3}b^3c - a^{-2}bd - a^{-2}\frac{c^2}{2} + a^{-1}e)Z^4 + \cdots$$

D'où

$$S_1 = -b\ ;\ S_2 = b^2 - 2c\ ; S_3 = -b^3 + 3bc - 3d$$
$$S_4 = b^4 - 4b^2c + 4bd + 2c^2 - 4e \text{ etc } \ldots$$

et d'une façon générale $\frac{S_n}{n} = -D^n(\ell\eta a)$ que l'on pourra développer par la formule (2) en ayant soin de remplacer a par 1 dans le développement.

Les applications de cette formule (2) sont innombrables, d'autant plus qu'ARBOGAST la généralise aux fonctions de plusieurs variables, et au produit de fonctions. Il peut aussi calculer le terme général d'une suite récurrente linéaire simple ou multiple, sans passer par la résolution d'une équation caractéristique. Ou encore traiter ce qu'on appelait alors le problème général du "*retour des suites*" et qui peut s'énoncer ainsi :

Etant donnée la série $y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots$ etc...
on demande d'exprimer x par une série en y sous la forme :
$x = ay + by^2 + cy^3 + \cdots$ etc...

Contentons nous, dans le cadre étroit de cet article, de montrer l'intérêt des méthodes d'ARBOGAST pour le calcul de la dérivée n^ième^ d'une fonction composée (au sens classique, cette fois, du mot dérivée).

3.— Calcul de la dérivée n^ième^ d'une fonction composée.

Soit $V = \varphi(a + bx + cx^2 + \cdots)$. Pour avoir $\frac{1}{n!}\frac{d^n\varphi}{dx^n}$ il suffit de remplacer x par $(x + dx)$ et de chercher le coefficient de $(dx)^n$ dans le développement de

$$\varphi\{a + b(x + dx) + c(x + dx)^2 + \cdots\}.$$

Limitons nous pour l'instant au cas où $V = (a + bx + cx^2)^r$ $(r \in \mathbb{R})$. Le lecteur pourra s'exercer à la manipulation de la formule (2) et calculer le développement de $V = \Sigma_{n\geq 0} A_n x^n$. Il trouvera

$$A_n = \Sigma_{0\leq k\leq [\frac{n}{2}]} \frac{r(r-1)\dots(r-n+k+1)}{k!(n-2k)!} a^{r-n+k} b^{n-2k} c^k.$$

Si donc nous y remplaçons x par $(x + dx)$, de sorte que a doit être remplacé par $a + bx + cx^2$, b par $b + 2cx$ et c reste c, nous aurons

$$\frac{d^nV}{dx^n} = n!\Sigma_{0\leq k\leq [\frac{n}{2}]} \frac{r(r-1)\dots(r+k-n+1)}{k!(n-2k)!} (a+bx+cx^2)^{r-n+k}(b+2cx)^{n-2k}c^k.$$

Exemple 1 : $V = (1 - x^2)^{-1/2}$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\operatorname{Arc}\sin x) = \frac{n!}{2^n}\frac{x^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\Sigma_{0\leq k\leq [\frac{n}{2}]} C_n^k C_{2n-2k}^n \Big(\frac{1-x^2}{x^2}\Big)^k$$

Exemple 2 : $V = (1 + x^2)^{-1}$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\operatorname{Arc}\tan x) = n!\frac{(2x)^n}{(1+x^2)^{n+1}}\Sigma_{0\leq k\leq [\frac{n}{2}]}(-1)^{n-k} C_{n-k}^k \Big(\frac{1+x^2}{4x^2}\Big)^k.$$

Pour terminer, appliquons la méthode d'ARBOGAST à une famille de polynômes qui ont été étudiés bien après sa mort par HERMITE, et définis ainsi :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

La formule (2) nous donne, pour $e^{a+bx+cx^2}$

$$D^n e^a = e^a \Sigma_{0\leq k\leq[\frac{n}{2}]} \frac{1}{(n-k)!} C_{n-k}^k b^{n-2k} c^k.$$

Pour obtenir $\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ remplaçons x par $x + dx$, a par $-x^2$, b par $-2x$, c par (-1) :

$$e^{-(x+dx)^2} = e^{-x^2-2xdx-(dx)^2}$$

et alors

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = n!e^{-x^2} \Sigma_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} \frac{1}{(n-k)!} C_{n-k}^k (-2x)^{n-2k}(-1)^k$$

et

$$H_n(x) = \Sigma_{0\leq k\leq[\frac{n}{2}]}(-1)^k k! C_n^k C_{n-k}^k (2x)^{n-2k}.$$

Ainsi

$$H_1(x) = 2x \text{ ; } H_2(x) = 4x^2 - 2 \text{ ; } H_3(x) = 8x^3 - 12x$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad \text{etc...}$$

ERRATUM

Dans l'article de Eugène EHRHART ('*L'Ouvert*' n° 53) : "Des conjectures", un signe d'inégalité a été retourné. Le lecteur aura compris qu'il faut lire (5 lignes avant le bas de la page 27) :

"Sans nuire à la généralité on peut supposer $X < Y$..."
(et non pas $X > Y$).