SOUCOUPES VOLANTES ET CAUSTIQUES

(AVEC POINT DE VUE SUR L'ARC-EN-CIEL)

Michèle AUDIN

> La récente réforme des études de licence en mathématiques a complètement évincé des programmes la théorie des enveloppes. Sans vouloir discuter ici d'une réforme à beaucoup d'égards bénéfique, je ne puis que trouver cette disparition très regrettable; rappelons, pour mémoire, le rôle des enveloppes dans la théorie des équations différentielles (intégrales singulières), et des équations aux dérivées partielles; mais est-il concevable qu'un professeur de lycée ait quelque usage des problèmes de Géométrie élémentaire, sans connaître — ne fût-ce qu'approximativement — les phénomènes généraux de cette théorie? Même d'un point de vue pratique, la théorie des enveloppes rend compte de phénomènes familiers, sans elle inexpliqués; pour s'en convaincre, il suffit d'observer, à l'intérieur d'un bol hémisphérique de café au lait convenablement éclairé, la structure cuspidale des caustiques de réflexion, et leur variation lorsque l'éclairage se modifie.
>
> René THOM. '*Journal de Math.*' Tome XLI - Fasc. 2 (1962)

...On peut préférer le café noir comme sur la figure 1, c'est plus lisible.

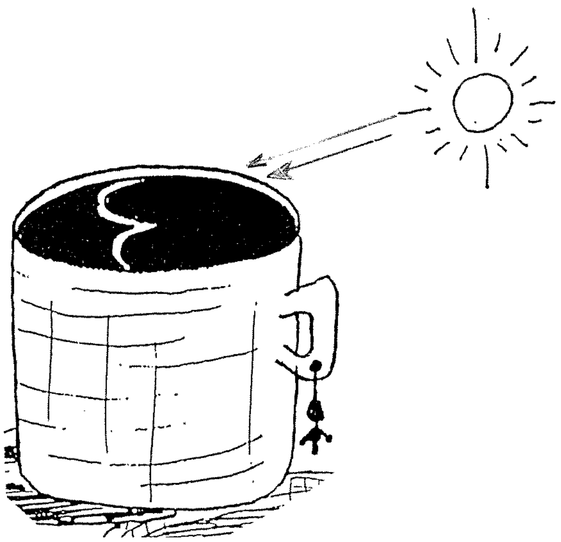


Figure 1
Schéma du dispositif expérimental.

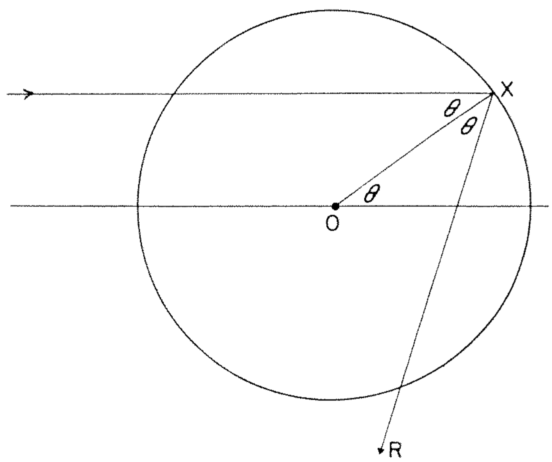


Figure 2
L'équation du rayon réfléchi xR est $(y - \sin\theta)\cos 2\theta = (x - \cos\theta) sin 2\theta$ en éliminant θ entre cette équation et sa différentielle par rapport à θ on trouve l'enveloppe.

Sur la figure 3, on n'a pas dessiné l'enveloppe : c'est la concentration de l'encre ayant servi à dessiner les rayons réfléchis qui la fait apparaître.

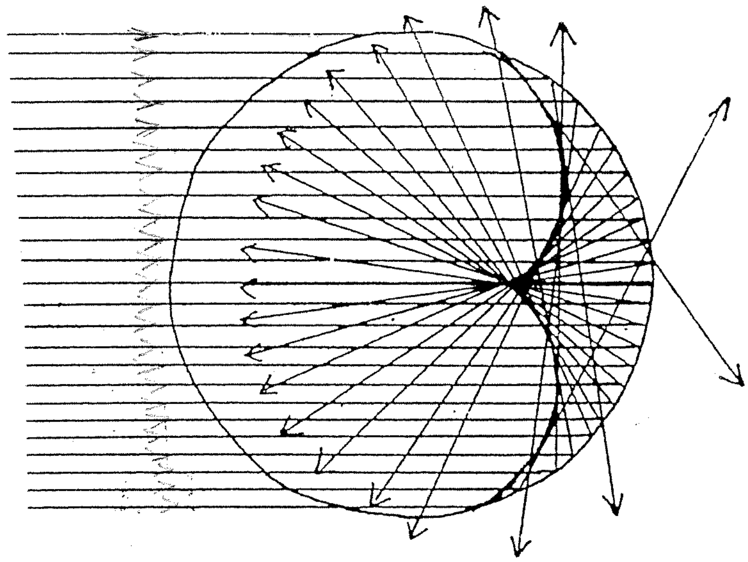


Figure 3

De façon tout à fait analogue, il y a concentration de l'intensité lumineuse le long de l'enveloppe des rayons lumineux dans la tasse de café. C'est pourquoi cette enveloppe reçoit le nom de CAUSTIQUE (du grec qui signifie *brûlant*). On remarquera que la courbe lumineuse elle-même a un point singulier (un point de rebroussement) où l'intensité de la lumière est encore plus grande.

• **Les soucoupes volantes : des caustiques?**

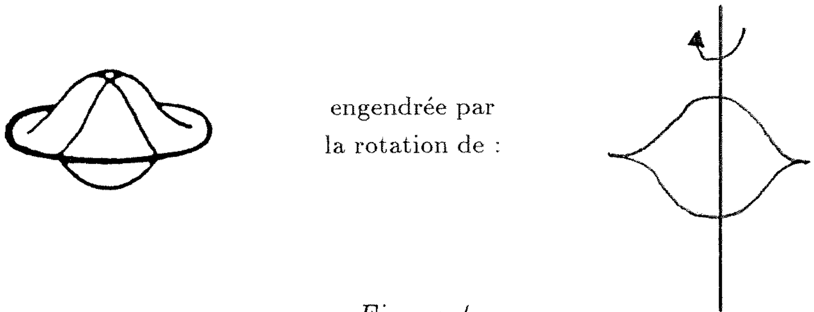


Figure 4

La surface représentée sur la figure 4 a quelques titres à être appelée **caustique**. Elle a assez intéressé l'astrophysicien soviétique ZELDOVITCH pour que, après l'avoir utilisée pour donner un modèle de la formation des galaxies, il l'ait encore mise à contribution pour proposer une explication du phénomène *ovni*. Les objets *soucoupoïdes* très lumineux décrits par les observateurs d'ovnis ne seraient que ces caustiques, *objets* imaginaires mais bien visibles (comme la courbe à la surface du café) créés par la réflexion et la réfraction de la lumière, à travers les nuages par exemple.

Cette explication, sans nul doute séduisante, est combattue par un théorème démontré il y a deux ans par un jeune mathématicien soviétique, TCHÉKANOV : la surface de la figure 4 n'est pas une enveloppe de rayons lumineux".

• **...Les extra-terrestres n'ont pas dit leur dernier mot ...**

Pour comprendre cette discussion, il va falloir aborder plus sérieusement la théorie en proposant un modèle mathématique.

Considérons d'abord l'espace dans lequel la lumière se propage, ici, pour simplifier, ce sera $\mathbb{R}^m$, espace euclidien de dimension m avec $m = 3$, modèle au moins local de l'espace dans lequel nous vivons ou bien $m = 2$, le seul dans lequel je sais dessiner.

Le milieu est supposé *homogène et anisotrope* de façon que le **principe de Fermat** oblige les rayons lumineux à être rectilignes.

A chaque point x de cet espace $\mathbb{R}^m$, on associe tous les vecteurs d'origine x. Ainsi on considère $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, l'espace des couples (x, ξ) où x est un point de $\mathbb{R}^m$ et ξ est un vecteur d'origine x.

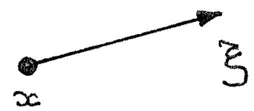
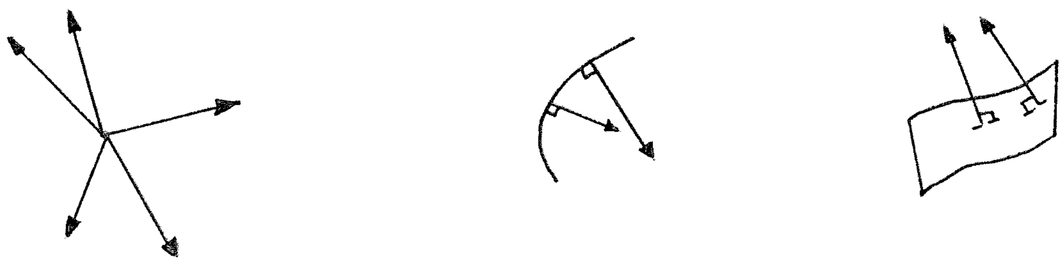


Figure 5

Soit S_o une *source lumineuse* dans $\mathbb{R}^m$ (c'est-à-dire un point, une courbe si $m = 2$, ou une surface si $m = 3$) de chaque point de laquelle partent des rayons lumineux dans des directions normales à S_o.



$m = 2$ ou 3 $\qquad$ $m = 2$ $\qquad$ $m = 3$

Figure 6

On peut toujours supposer que S_0 est de dimension $m - 1$ et qu'en chaque point il n'y a qu'une seule direction normale à S_0 (le cas d'une source ponctuelle étant, par exemple, assimilé à un petit cercle ou une petite sphère suivant la valeur de m).

Il va y avoir concentration de l'intensité de la lumière le long de l'enveloppe de ces rayons orthogonaux à S_0 ; c'est-à-dire de la *développée* de S_0.

Soit x un point de S_0 et $\overrightarrow{n}(x)$ un vecteur unitaire normal à S_0, dans le sens de propagation des rayons lumineux. On considère la surface

$$S_t = \{x + t\overrightarrow{n}(x)/x \in S_0\}$$

qui est une surface *parallèle* à S_0. Au lieu de regarder chaque parallèle individuellement, on peut considérer le sous-espace de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$$NS_0 = \{\big(x + t\overrightarrow{n}(x), \overrightarrow{n}(x)\big)/x \in S_0, t \in \mathbb{R}\}$$

et son image par la projection

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, \xi) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Rappelons le célèbre principe de HUYGENS : "*l'enveloppe des rayons normaux (la* **caustique***) est l'image de l'ensemble des points* **singuliers** *de f*".

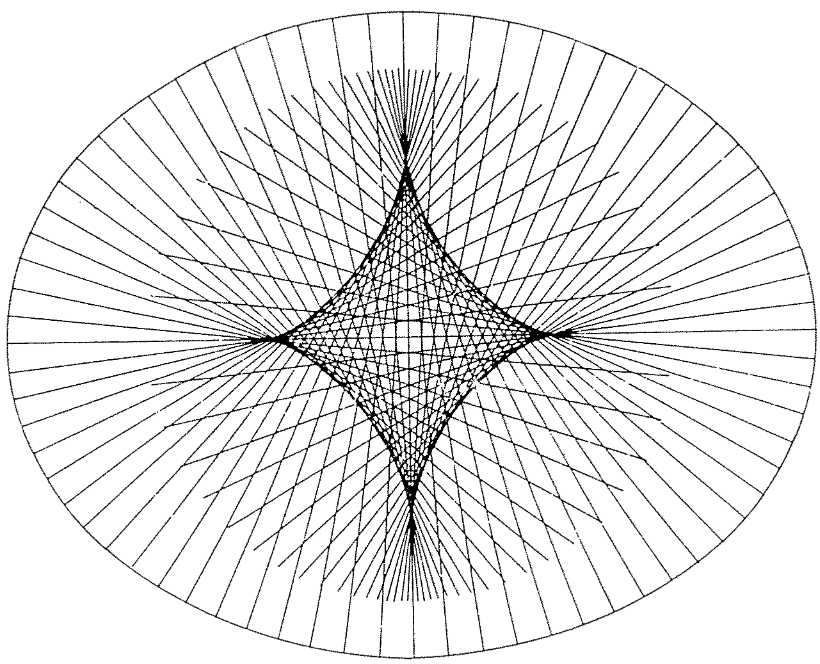


Figure 7

Le principe de HUYGENS.

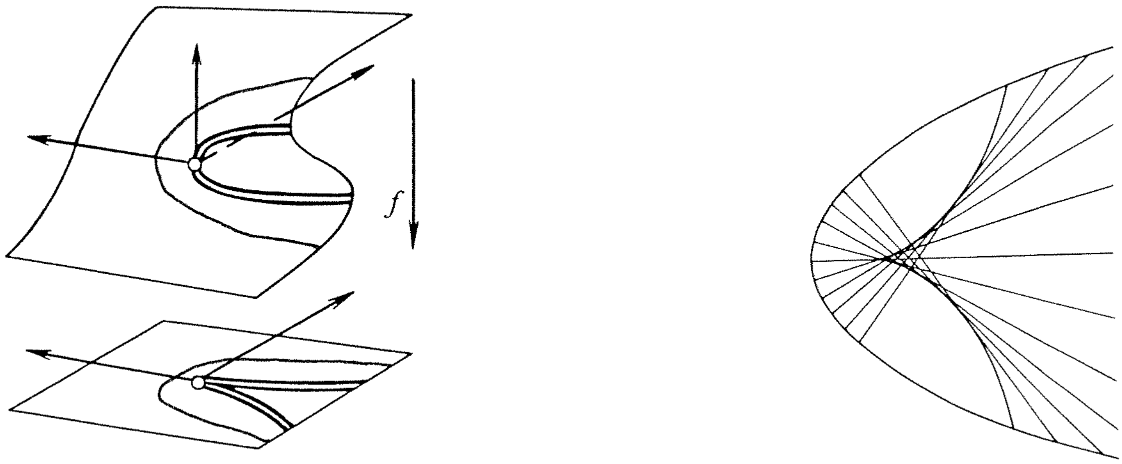


Figure 8
La caustique n'est autre que le contour apparent
de NS_0 dans la projection.

• Essai de définition d'une caustique

NS_0 n'est pas n'importe quelle *sous-variété* de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$; elle a notamment les deux propriétés :
a) dim $NS_0 = m$ puisque x est sur S_0 de dimension $m-1$ et que t est dans $\mathbb{R}$: $(m-1+1=m)$,
b) le *produit scalaire* $\xi.dx$ sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ restreint à NS_0, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{n}(x).(dx + td\overrightarrow{n}(x) + dt\overrightarrow{n}(x)) =$$
$$= \overrightarrow{n}(x)dx + t\overrightarrow{n}(x)d\overrightarrow{n}(x) + dt||\overrightarrow{n}(x)||^2 = dt$$

est une **différentielle exacte** puisque $\overrightarrow{n}(x).dx = 0$ par définition de $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}.d\overrightarrow{n} = 0$ en dérivant $||\overrightarrow{n}||^2 = 1$.

Première définition : La caustique est l'image des points singuliers de la projection sur le premier facteur d'une sous-variété L de dimension m de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ sur laquelle $\xi.dx$ est exacte (voir la fig. 8).

Exemple : La soucoupe volante (Fig. 4). Voilà comment on trouve des équations de l'engin. L est l'image de F :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (\tfrac{1}{3}x^3 + x(y^2+z^2-1), y, z; -x, x^2y, x^2z) \end{aligned}$$

On vérifie que $\xi.dx$ est exacte. La projection f est :

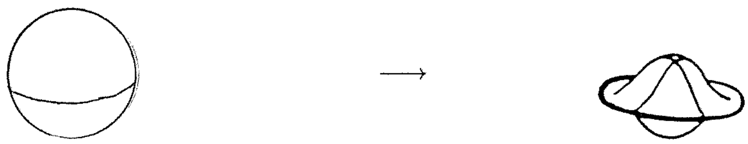
$$f(x,y,z) = \Big(\frac{1}{3}x^3 + x(y^2+z^2-1), y, z\Big)$$

et pour les points singuliers on trouve :

$$\begin{aligned}\Sigma(f) &= \{(x,y,z)/\frac{\partial f}{\partial x}=0\}\\ &= \{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2=1\}\end{aligned}$$

c'est donc la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$, et la caustique $C = f\big(\Sigma(f)\big)$ est l'ensemble

$$\{(-\frac{2}{3}x^3, y, z)/x^2+y^2+z^2=1\}$$



$x=0$ $x=0$

Figure 9

La caustique $C = f\big(\Sigma(f)\big) = \{(-\frac{2}{3}x^3, y, z)|x^2+y^2+z^2=1\}$

Au commencement, il y a une source lumineuse, c'est-à-dire une sous variété $NS_0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ sur laquelle $\xi.dx$ est exacte.

Ensuite la lumière émise traverse un système optique : lentille, miroir, ..., nuage, rideau de pluie... Il n'y a plus de raison de penser que le nouveau système de rayons lumineux *diffusé* soit de la forme NS_0. Mais c'est dans les axiomes de la théorie que la traversée d'un diffuseur équivaut à une transformation *canonique* de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$: **la forme $\xi.dx$ reste exacte**, d'où la définition choisie.

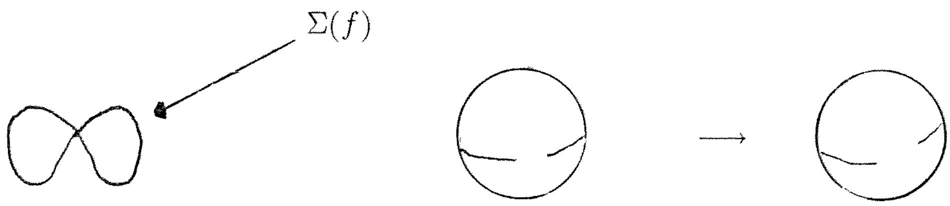
Malheureusement, la définition ci-dessus tolère des objets qui ne sont sûrement pas des enveloppes de rayons lumineux comme le prouve l'exemple suivant :

Considérons la sphère de dimension 3, sphère unité de $\mathbb{R}^4$: $S^3 = \{(x,y,z,t)/x^2 + y^2+z^2+t^2=1\}$ et l'application :

$$\begin{aligned}G : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\\ (x,y,z,t) &\longmapsto (x,y,z;2tx,2ty,2tz)\end{aligned}$$

Ici f est particulièrement simple :

$$f(x,y,z,t) = (x,y,z).$$



$G(S^3)$ (dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

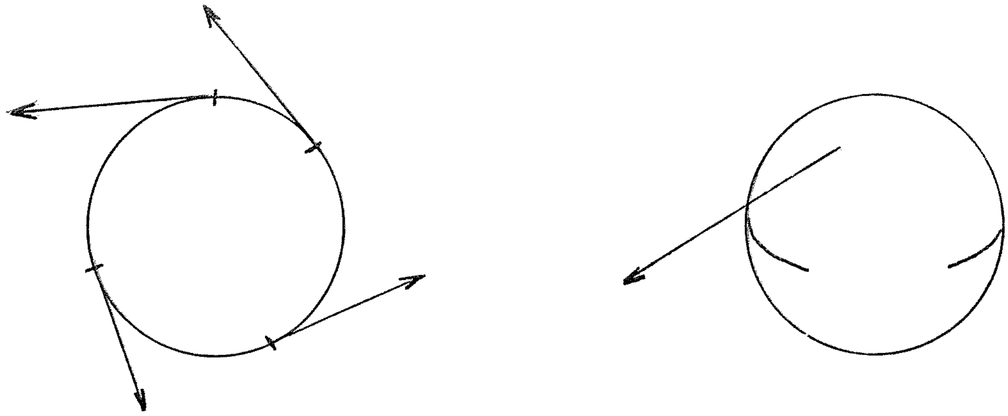
$\Sigma(f)$ une sphère ronde S^2

ici $C = f(\Sigma(f))$ aussi est une sphère **ronde**

Figure 10

Avec cette fonction G, on construit donc une caustique au sens de la définition proposée et qui est une sphère S^2 de l'espace euclidien ordinaire.

Mais cette sphère S^2 n'est sûrement pas une enveloppe de rayons lumineux.



Le cercle : on peut trouver un champ de vecteurs tangents non nuls.

La sphère : on ne peut PAS trouver un champ de vecteurs tangents non nuls (théorème de la sphère chevelue).

Figure 11

La définition n'est donc pas bonne. En fait NS_0 a une jolie propriété que nous n'avons pas exploitée

$$NS_0 \subset \{(x, \xi)/||\xi||^2 = 1\}.$$

Il se trouve que les variétés de l'optique géométrique telles que NS_0 et ce qu'il en advient après traversée d'un diffuseur satisfont ce type d'équations (équation de l'**eikonal**) : ce sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ sur lesquelles $\xi.dx$ est exacte et qui sont contenues dans une hypersurface *convexe dans les fibres.* Ici cette hypersurface est $\mathbb{R}^m \times S^{m-1}$ et dans chaque fibre c'est une sphère parce qu'on a supposé l'indice de réfraction constant.

Le théorème de TCHÉKANOV dit tout simplement que si $L \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ est une telle sous-variété, alors pour la projection :

$$f : L \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

le lieu singulier $\Sigma(f) \subset L$ lui-même doit avoir un champ de vecteurs tangents non nuls.

Ceci interdit bien la soucoupe volante puisqu'on a vu que dans ce cas la variété critique $\Sigma(f)$ est une sphère ronde (voir la fig. 9).

Une *soucoupe volante* n'étant pas une enveloppe de rayons lumineux, n'étant pas une caustique, cela ne prouve pas pour autant l'existence d'extra-terrestres puisque les dites *soucoupes volantes* aperçues dans le ciel pourraient être des **manifestations indirectes** de l'existence de caustiques. En voici un exemple familier.

• **L'arc-en-ciel, une manifestation de caustiques.**

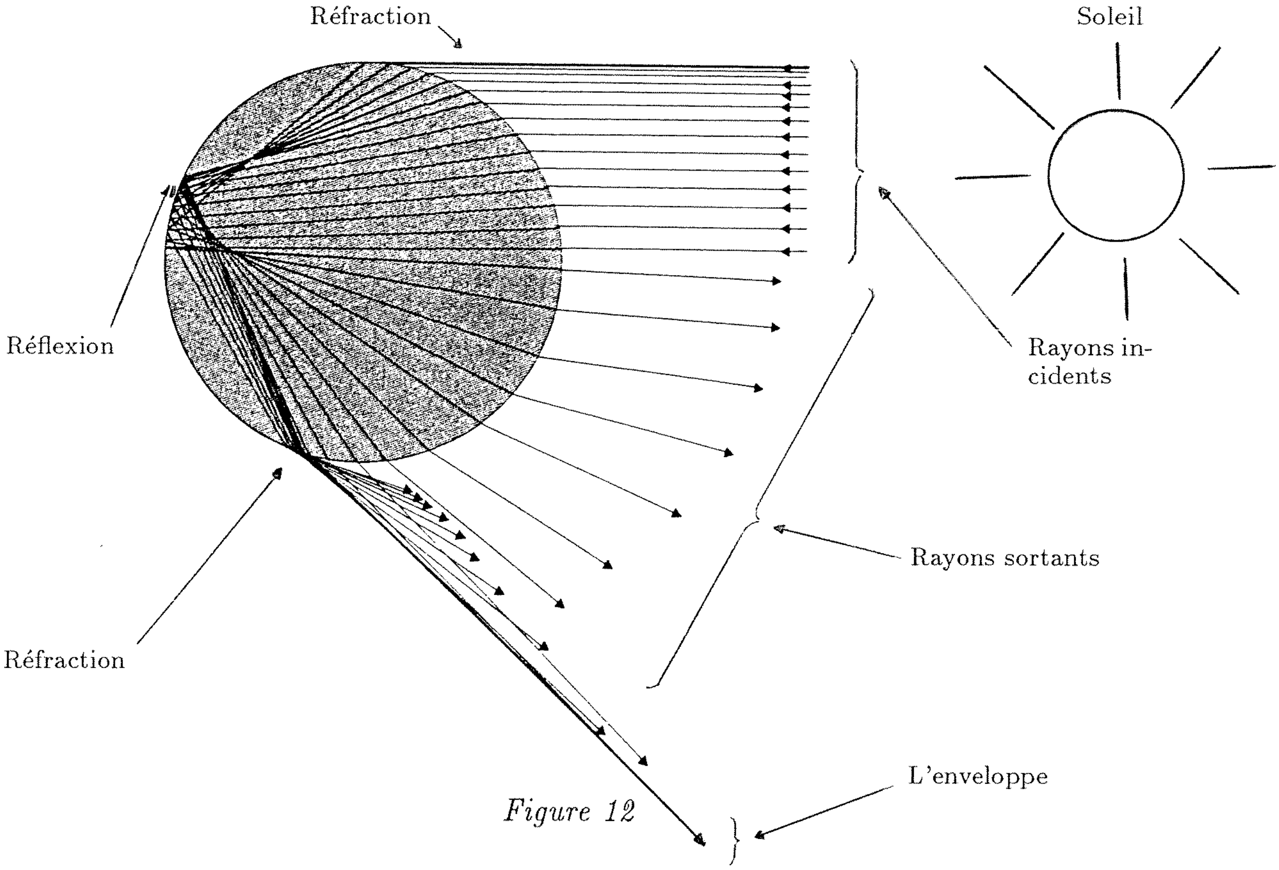


Figure 12

L'arc-en-ciel (monochrome)
Un rayon monochromatique rencontre une goutte de pluie.

Des rayons incidents parallèles et monochromatiques se réfractent et se réfléchissent dans une goutte de pluie et en ressortent. L'enveloppe des rayons sortants dessinés sur la figure a une asymptote. Grâce à la symétrie sphérique de la goutte de pluie, l'enveloppe de tous les rayons sortants a un cône asymptote dont l'angle est fonction de l'indice de réfraction qui lui-même dépend de la couleur.

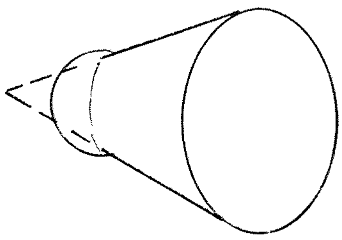


Figure 13
Vue de loin l'enveloppe se confond avec son cône asymptote.

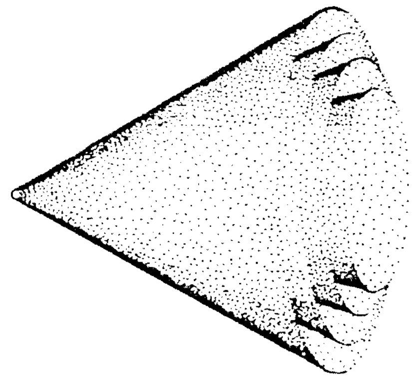


Figure 14
De chaque goutte et pour chaque couleur il sort un cône.

Pour chaque goutte et pour chaque couleur il sort un cône. Les cônes correspondants à toutes les gouttes ont leurs axes parallèles.

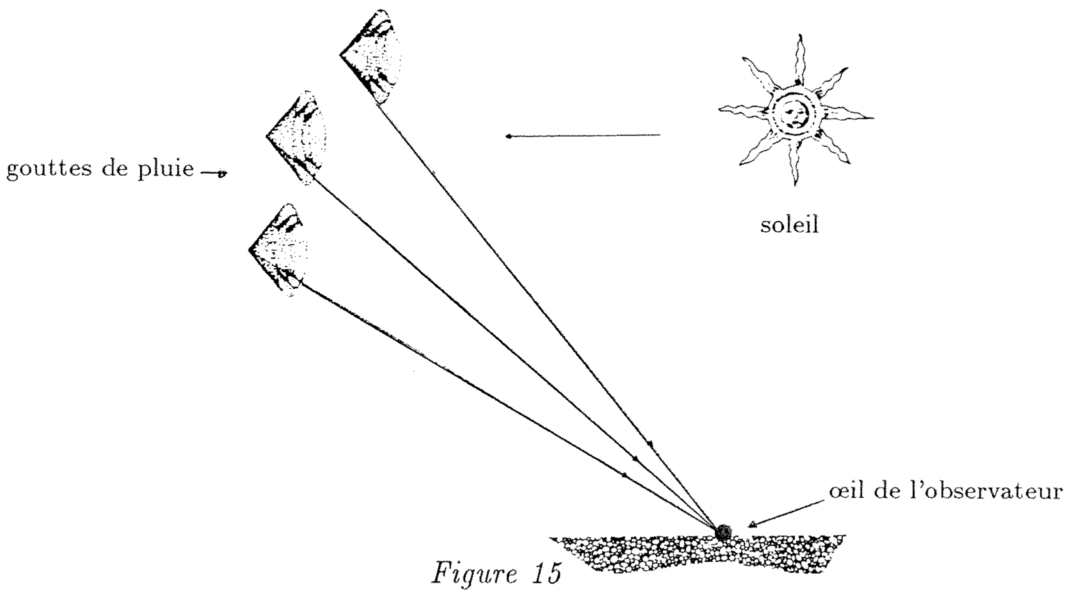


Figure 15
L'Arc-en-ciel (polychrome, c'est plus joli).

On peut ne considérer que les gouttes contenues dans un plan $\mathcal{P}$. L'ensemble des points de $\mathcal{P}$ d'où une droite issue selon la direction α passe par le point O est l'intersection du cône de sommet O et d'angle α avec le plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire un cercle.

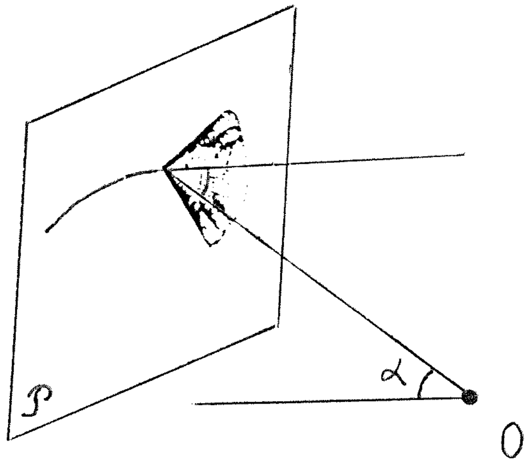


Figure 16

L'observateur verra donc arc de cercle brillant (cas monochromatique!) soit en réalité ... un arc-en-ciel.

Ainsi l'arc-en-ciel, qui n'est pas une caustique, est **la manifestation visible de l'existence des caustiques** produites par les gouttes de pluie.

Bibliographie

Une référence générale très accessible (mais pas parfaite!) :
"Oh! catastrophe" (les aventures de Rose Polymath).– B.D. de I. STEWART.

Plus de contenu :
Article de THOM sur la "théorie des enveloppes".– Journ. de Math. Pures et Appliquées (1962).
Livre d'ARNOLD.– "Théorie des catastrophes".– (en russe, ou en anglais chez Springer) (1983).

Un peu plus général :
"Geometric Asymptotics" (de GUILLEMIN et STERNBERG) A.M.S.
Il y a un traité d'optique ... lumineux, de LUNEBURG, mais assez introuvable.

L'article de Tchekanov
dans la revue Funkts. Anal. (1986).

Sur l'Arc-en-Ciel :
The Rainbow, par Carl BOYER.