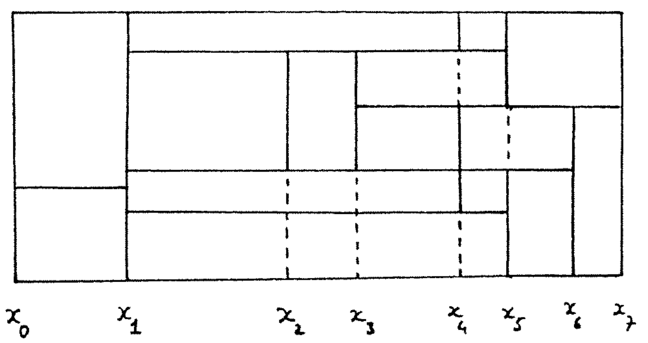
A VOS STYLOS

PROBLÈME 8

Enoncé

Appelons reQtangle, tout rectangle dont le rapport des côtés est rationnel. Démontrer que tout rectangle pavé par des reQtangles est lui-même un reQtangle.

Solution



Soient $x_0, x_1, \ldots, x_p$ les abscisses des côtés verticaux des rectangles du pavage, prises dans l'ordre croissant. Pour $0 \leq i < j \leq p$, intéressons-nous aux rectangles du pavage dont la projection sur l'axe des x est le segment $[x_i, x_j]$; la somme de leurs hauteurs est $a_{ij}(x_j - x_i)$ où a_{ij} est un rationnel ≥ 0 (nul s'il n'y a aucun tel rectangle). Posons $a_{ii} = 0$, et $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i > j$. Alors, pour tout i,

$$(*) \qquad \Sigma_j a_{ij}(x_j - x_i) = \begin{cases} h & \text{si} \quad i = 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < i < p \\ -h & \text{si} \quad i = p \end{cases}$$

En désignant par B la matrice carrée de terme général

$$\begin{cases} b_{ii} = & \Sigma_j a_{ij} \\ b_{ij} = & -a_{ij} \text{ si } i \neq j, \end{cases}$$

(*) se réécrit $BX = H$, où

$$X = \begin{pmatrix} x0 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad H = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}$$

Pour en déduire que $x_p - x_0$ est le produit de h par un rationnel, nous allons inverser cette relation. Le lemme qui suit dit que la matrice B n'est pas inversible, mais presque : connaissant h et B, on peut retrouver les x_i à une constante additive près.

LEMME. Le noyau de B, de dimension 1, est formé des multiples du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Il est clair que ce vecteur annule B. Réciproquement, si $BZ = 0$, on a pour tout i :

$$\Sigma_j \ a_{ij}(z_j - z_i) = 0$$

donc $\Sigma_i \ z_i \Sigma_j \ a_{ij}(z_i - z_j) = 0$, et $\Sigma_{ij} \ a_{ij}(z_i^2 - z_i z_j) = 0$.
Echangeant i et j et ajoutant, il vient $\Sigma_{ij} \ a_{ij}(z_i - z_j)^2 = 0$, donc $z_i = z_j$ dès que $a_{ij} > 0$, c'est-à-dire dès que l'un des rectangles du pavage joint x_i à x_j ; en définitive, tous les z_i sont égaux. CQFD.

Donc une certaine ligne de B est combinaison linéaire des p autres, qui sont elles indépendantes. Supprimons cette ligne du système $BX = H$, et remplaçons-la par l'équation $x_0 = 0$ (qui revient à choisir l'origine). On obtient maintenant un nouveau système $B'X = H'$, avec B' inversible; d'où $X = (B')^{-1}H'$. Comme B', $(B')^{-1}$ a tous ses coefficients rationnels; et puisque H' ne contient que $\pm h$ et 0, ceci entraîne $x_p = bh$ avec b rationnel.

Plus généralement, cette méthode établit que le rapport des côtés du grand rectangle appartient au sous-corps de $\mathbb{R}$ engendré par les rapports des côtés des rectangles du pavage.

Comment pouvait-on tomber sur cette solution? Tout simplement grâce à une analogie électrique : imaginons le plan fait d'un matériau conducteur homogène, et parcouru d'un courant électrique uniforme de la droite vers la gauche. La différence de potentiel entre deux points est simplement la différence de leurs abscisses, et chaque rectangle du pavage est parcouru par une intensité égale à sa hauteur; sa résistance V/I est donc le rapport longueur/hauteur, et le pavage n'est rien d'autre qu'un réseau de résistances électriques, les nœuds du réseau correspondant aux x_i. En fin de compte, le problème est d'établir que si, dans un réseau de résistances électriques, chaque résistance est rationnelle, alors la résistance équivalente à tout le réseau est, elle aussi, rationnelle. Et maintenant tout bon manuel de physique donne la méthode : écrire, pour chaque nœud, la loi de KIRCHHOFF — c'est ce que fait (*) — et résoudre le système obtenu.

PROBLÈME 9

Enoncé

Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(0,0) = 0$ et que $f(x,y)$ soit le plus petit entier qui ne soit pas de la forme $f(x',y)$ avec $x' < x$ ou $f(x,y')$ avec $y' < y$. Fournir une méthode de calcul de f aussi simple que possible.

Indication

Penser à la numération binaire.

PROBLÈME 10

(proposé par D. DUMONT)

Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, \ldots\}$ dont on propose trois définitions :

Définition 1 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 + xy + y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

Définition 2 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 - xy + y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

Définition 3 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 + 3y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

1°) Montrer que ces trois définitions sont bien équivalentes.

2°) Montrer que E est stable pour la multiplication, c'est-à-dire que $n_1 \in E$ et $n_2 \in E \Rightarrow n_1 n_2 \in E$.

3°) Soit $P = \{3, 7, 13, 19, 31, 37, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers appartenant à E. Montrer que P se compose de 3 et de l'ensemble des nombres premiers de la forme $6k+1$, et que pour ces nombres premiers la représentation sous la forme $x^2 + 3y^2$ est unique. En outre, si p est de la forme $6k+1$ alors $4p$ s'écrit de manière unique comme suit :

$$4p = x^2 + 27y^2 \qquad (x, y \text{ entiers } > 0).$$

Une réponse exacte, mais malheureusement tardive, au problème n° 7 a été donnée par Monsieur GUINOT de Bourg en Bresse.