LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Jean LEFORT

5.— INTERMÈDE MATHÉMATIQUE

Comme il a beaucoup été question de série de FAREY et de fractions continues et bien que je sache le lecteur doué d'une culture mathématique certaine, je me permets de donner ici un certain nombre de résultats qui éclaireront les chapitres précédents ainsi que les suivants.

1) Les séries de Farey

a) Considérons l'ensemble des nombres rationnels compris au sens large entre 0 et 1. Ecrivons ces nombres sous forme de fractions irréductibles et limitons nous à ceux dont le dénominateur est inférieur ou égal à d. Si on classe ces nombres par ordre croissant on obtient la série de FAREY d'ordre d notée F_d.

Exemple :

à l'ordre 1	F_1	$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$
à l'ordre 2	F_2	$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$
à l'ordre 3	F_3	$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$
à l'ordre 4	F_4	$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$.

On remarque que les fractions nouvelles qui apparaissent à l'ordre d ont évidemment toutes un dénominateur égal à d, mais que de plus, si on note n le numérateur de l'une d'entre elle on a: $(n/d) = (a+a'/b+b')$ où (a/b) et (a'/b') sont les fractions immédiatement voisines.

Théorème 1 : *Si a, b, a', b' sont quatre nombres entiers positifs tels que $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ alors $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$.*

$$\begin{array}{lcc} \text{En effet si } \frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} & \text{alors} & ab' < ba' \\ & \text{donc} & ab' + ab < ab + ba' \\ & \text{soit} & a(b+b') < b(a+a') \\ & \text{c'est-à-dire} & \frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} \end{array}$$

et on démontre de la même façon l'autre inégalité.

Théorème 2 : *Si $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ sont deux termes successifs d'une série de Farey; alors $ba' - ab' = 1$.*

Cela est manifestement vrai pour la série F_1. Supposons que ce résultat soit vrai pour la série F_d et soit $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ deux fractions consécutives de F_d avec $b+b' = d+1$;

© L'OUVERT 56 (1989)

alors on sait que $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'}$ mais $b(a+a') - (b+b')a = ba' - ab' = 1$ et on obtient le même résultat pour l'autre inégalité.

Le théorème est donc démontré par récurrence.

Corrolaire 1 : *La construction indiquée des séries de* FAREY *conduit à des fractions irréductibles.*

D'après l'égalité de BÉZOUT $ba' - ab' = 1$ implique que a et b sont premiers entre eux.

Corrolaire 2 : *L'écart entre deux fractions consécutives* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{a'}{b'}$ *est égal à* $\frac{1}{bb'}$.

b) Applications

• Soit r un réel compris entre 0 et 1. Si on cherche une approximation rationnelle de r, il suffit de placer r dans la série de FAREY d'ordre d, on obtient alors le meilleur encadrement possible de r à l'aide de fractions de dénominateur inférieur ou égal à d.

Exemple : $r = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad d = 4.$

Comme F_4 est :$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$, on a :

$$\frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$$

ce qui place $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans un intervalle d'amplitude $1/12$ limité par des fractions de dénominateur inférieur à 4.

• Si r est extérieur à l'intervalle $[0,1]$, il suffit de considérer sa partie décimale puis de rajouter sa partie entière.

Exemple : $r = \sqrt{5} \quad d = 5.$

On place $\sqrt{5}-2$, on trouve $\frac{1}{5} < \sqrt{5}-2 < \frac{1}{4}$ et par conséquent $2+\frac{1}{5} < \sqrt{5} < 2+\frac{1}{4}$, d'où l'encadrement

$$\frac{11}{5} < \sqrt{5} < \frac{9}{4}$$

qui a pour amplitude $\frac{1}{20} = \frac{1}{5\times 4}$ et qui permet d'approcher $\sqrt{5}$ à l'aide de fractions dont le dénominateur est inférieur à 5.

• Il semble que pour construire la série de FAREY d'ordre d il faille construire toutes les séries précédentes, ce qui risque d'être long. Mais dans la pratique on ne cherche que les deux termes encadrant un certain réel. Il suffit donc de construire les termes de chaque série encadrant ce réel.

Exemple : $r = \frac{\pi}{4} \quad d = 13 \quad (r \simeq 0,78539816\ldots).$

On part de F_2 : $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ et comme $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{1}{1}$ on ne s'intéresse qu'au deuxième intervalle de F_2 pour écrire une partie de F_3 :

F_3 :	$\cdots \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$	et comme $\frac{2}{3} < \frac{\pi}{4} < \frac{1}{1}$, on continue avec $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{1}$ ce qui donne
F_4 :	$\cdots \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$	et comme $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} < \frac{1}{1}$ on passe à
F_5 :	$\cdots \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$	puis, comme $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} < \frac{4}{5}$ on passe à
F_9 :	$\cdots \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \ldots$	

On remarque qu'il y a ici passage direct de F_5 à F_9, que l'on a

$$\frac{7}{9} < \frac{\pi}{4} < \frac{4}{5}$$

ce qui place $\frac{\pi}{4}$ dans un intervalle d'amplitude 1/45 et enfin que l'on obtient les meilleures approximations de $\frac{\pi}{4}$ avec des fractions de dénominateurs inférieurs ou égaux à 13 puisque l'étape suivante conduirait à $\frac{11}{14}$ qui est dans F_{14}. (Les lecteurs malins auront reconnu en $\frac{11}{14}$ le quart de $\frac{22}{7}$.)

2) Développement d'un réel en fractions continues

Soit r un réel strictement positif. Définissons à partir de r les deux suites a et b par :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \text{partie entière de } r \\
r &= a_0 1 + b_0 \\
1 &= a_1 b_0 + b_1 \\
b_0 &= a_2 b_1 + b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{i-2} &= a_i b_{i-1} + b_i \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

où les a_i sont tous des entiers positifs et où $0 \leq b_i < b_{i-1}$. On reconnaît là un procédé tout à fait analogue à celui des divisions euclidiennes successives pour la recherche du pgcd de deux entiers. On arrête ce procédé dès qu'on obtient un *reste* b_i nul. Cela ne peut se produire que si r est rationnel. Dans les autres cas les suites a et b sont infinies. Nous nous placerons dans ces cas.

Il est facile de voir que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned}
r = a_0 + b_0 \qquad &= a_0 + \frac{1}{\frac{1}{b_0}} \\
= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{b_1}{b_0}} \qquad &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{b_0}{b_1}}} \\
= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{b_2}{b_1}}} &= \ldots
\end{aligned}$$

On dit qu'on a développé r en fraction continue. Les nombres a_0 ; $a_0 + \frac{1}{a_1}$; $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$; ... s'appellent les réduites successives de r et on écrit $r = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

Nous allons démontrer que la suite des réduites converge vers r et nous évaluerons l'écart entre r et la réduite d'ordre n.

Théorème 1 :

Si on définit les suites (p) et (q) par

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1}a_n + p_{n-2} \quad \text{et} \quad p_0 = a_0; p_1 = a_0a_1 + 1 \\ q_n &= q_{n-1}a_n + q_{n-2} \quad \text{et} \quad q_0 = 1; q_1 = a_1 \end{aligned}$$

alors $\frac{p_n}{q_n}$ est la réduite d'ordre n.

La démonstration est immédiate, par récurrence quand on remarque que l'on passe de la réduite d'ordre n à la réduite d'ordre $n+1$ en remplaçant a_n par $a_n + \frac{1}{a_{n-1}}$.

Par ailleurs on remarque que les suites (p) et (q) sont strictement croissantes à termes entiers et positifs; par conséquent la suite (q) en particulier tend vers $+\infty$.

Théorème 2 :

$\frac{p_n}{q_n}$ est la forme irréductible de la réduite d'ordre n, c'est-à-dire que p_n et q_n sont premiers entre eux.

En effet :

$$\begin{aligned} p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} =& (p_{n-1}a_n + p_{n-2})q_{n-1} - (q_{n-1}a_n + q_{n-2})p_{n-1} \\ =& p_{n-2}q_{n-1} - q_{n-2}p_{n-1} \end{aligned}$$

et par récurrence descendante $p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} = (-1)^{n-1}$ ce qui démontre le résultat d'après l'identité de BÉZOUT.

Corollaire :

$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}$, donc la différence entre deux réduites successives tend vers 0.

Théorème 3 :

La suite des réduites $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ converge vers r quand n tend vers l'infini.

On étudie la différence $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ qui vaut $\frac{a_n(p_{n-1}q_{n-2} - q_n + p_{n-2})}{q_nq_{n-2}}$ c'est-à-dire $\frac{(-1)^n a_n}{q_nq_{n-2}}$. Ce qui prouve que la sous suite des réduites d'ordre pair est croissante et celle d'ordre impair est décroissante. Les deux sous suites sont donc adjacentes en vertu du corollaire ce qui permet de conclure à la convergence des réduites.

D'autre part on passe de $\frac{p_n}{q_n}$ à r en remplaçant a_n par $a_n + \frac{b_n}{b_{n-1}}$ donc

$$\begin{aligned} \left|\frac{p_n}{q_n} - r\right| &= \left|\frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_n - a_n + q_{n-2}} - \frac{p_{n-1} + (a_n + \frac{b_n}{b_{n-1}}) + p_{n-2}}{q_{n-1}(a_n + \frac{b_n}{b_{n-1}}) + q_{n-2}}\right| \\ &= \left|\frac{(p_{n-2}q_{n-1} - q_{n-2}p_{n-1})b_n}{(q_{n-1}a_n + q_{n-2})[q_{n-1}(a_nb_{n-1} + b_n) + q_{n-2}b_{n-1}]}\right| \\ &= \frac{b_n/b_{n-1}}{q_n(q_{n-1}a_n + q_{n-2} + \frac{b_1q_{n-1}}{b_{n-1}})} < \frac{1}{q_n^2} \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

De plus on peut démontrer qu'une réduite est une meilleure approximation de r, c'est-à-dire que parmi toutes les fractions dont le dénominateur est plus petit que q_n aucune n'approche r d'aussi près que $\frac{p_n}{q_n}$.

Ce résultat admet également une sorte de réciproque c'est-à-dire que si une fraction $\frac{p}{q}$ est telle que

$$\left|\frac{p}{q} - r\right| < \frac{1}{q^2}$$

alors $\frac{p}{q}$ est une réduite du développement en fraction continue de r.

3) Approximations rationnelles de quelques "constantes astronomiques"

a) Nombres de jours dans une lunaison : $l = 29,530\,588\ j$.

- Décomposition en fractions continues :

$$l = [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 1, 4, 1, 12, 15, 1].$$

Premières réduites

$$29; 30; 29 + \frac{1}{2}; 29 + \frac{8}{15}; 29 + \frac{9}{17}; 29 + \frac{26}{49}; 29 + \frac{425}{801}; 29 + \frac{451}{850}; 29 + \frac{2229}{4201}; \ldots$$

- Encadrement au moyen des séries de FAREY pour $l' = l - 29$.

bornes supérieures de l'	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{17}{32}$			$\frac{26}{49}$		
bornes inférieures de l'	0			$\frac{1}{2}$						$\frac{9}{17}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{61}{115}$	$\frac{87}{164}$	$\frac{113}{213}$

				$\frac{26}{49}$								$\frac{451}{801}$
$\frac{139}{262}$	$\frac{165}{311}$	$\frac{191}{360}$	$\frac{217}{409}$	$\frac{243}{458}$	$\frac{269}{507}$	$\frac{295}{556}$	$\frac{321}{605}$	$\frac{347}{654}$	$\frac{373}{703}$	$\frac{399}{752}$	$\frac{425}{801}$	

Les bornes qui sont plus proches de l' que toutes les précédentes sont successivement :

$$1; \frac{1}{2}; \frac{5}{9}; \frac{6}{11}; \frac{7}{13}; \frac{8}{15}; \frac{9}{17}; \frac{17}{32}; \frac{26}{49}; \frac{243}{458}; \frac{269}{507}; \ldots$$

b) Nombres de jours dans une année : $a = 365,242\,199\ j$.

- Décomposition en fractions continues

$$a = [365; 4, 7, 1, 3, 5, 20, 6, 12].$$

Premières réduites

$$365; 365 + \frac{1}{4}; 365 + \frac{7}{29}; 365 + \frac{8}{33}; 365 + \frac{31}{128}; 365 + \frac{163}{673}; \ldots$$

• Encadrement au moyen des séries de Farey pour $a' = a - 365$.

bornes supérieures de a'	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{33}$							
bornes inférieures de a'	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{7}{29}$	$\frac{15}{62}$	$\frac{23}{95}$	$\frac{31}{128}$	

	$\frac{39}{161}$	$\frac{70}{289}$	$\frac{101}{417}$	$\frac{132}{545}$	$\frac{163}{673}$	...
	$\frac{31}{128}$					...

les bornes qui sont plus proches de a' que toutes les précédentes sont successivement :

$$0; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{4}{17}; \frac{5}{21}; \frac{6}{25}; \frac{7}{29}; \frac{8}{33}; \frac{23}{95}; \frac{31}{128} \ldots$$

c) Nombres de jours dans une année lunaire de 12 lunaisons :

$$12\ l = 354,367\ 056\ j.$$

• Décomposition en fractions continues

$$12\ l = [354; 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 1, 6, 1, 4, 2].$$

Premières réduites :

$$354; 354 + \frac{1}{2}; 354 + \frac{1}{3}; 354 + \frac{3}{8}; 354 + \frac{4}{11}; 354 + \frac{7}{19}; 354 + \frac{11}{30}; 354 + \frac{29}{79}; 354 + \frac{127}{346}; \ldots$$

• Encadrement au moyen des séries de Farey pour $l" = 12\ l - 354$:

bornes supérieures de $l"$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{19}$	$\frac{18}{49}$	$\frac{29}{79}$
bornes inférieures de $l"$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{40}{109}$	$\frac{69}{188}$	$\frac{98}{267}$

Les bornes qui sont plus proches de $l"$ que toutes les précédentes sont successivement :

$$0; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{3}{8}; \frac{4}{11}; \frac{7}{19}; \frac{11}{30}; \frac{18}{49}; \frac{29}{79} \ldots$$

d) Nombres de lunaisons dans une année ordinaire : $m = 12,368\,267\ l$.

- Décomposition en fractions continues :

$$m = [12; 2, 1, 2, 1, 1, 17, 2, 2, 15, 1, 6, 5]$$

Premières réduites :

$$12; 12 + \frac{1}{2}; 12 + \frac{1}{3}; 12 + \frac{3}{8}; 12 + \frac{4}{11}; 12 + \frac{7}{19}; 12 + \frac{123}{334} \dots$$

- Encadrement au moyen des séries de FAREY pour $m' = m - 12$.

<table>
<tr><td>bornes supérieures de m'</td><td>1</td><td colspan="2">$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{2}{5}$</td><td colspan="2">$\frac{3}{8}$</td><td colspan="7">$\frac{7}{19}$</td></tr>
<tr><td>bornes inférieures de m'</td><td colspan="2">0</td><td colspan="3">$\frac{1}{3}$</td><td colspan="2">$\frac{4}{11}$</td><td>$\frac{11}{30}$</td><td>$\frac{18}{49}$</td><td>$\frac{25}{68}$</td><td>$\frac{32}{87}$</td><td>$\frac{39}{106}$</td><td>$\frac{46}{125}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="9">$\frac{7}{19}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{53}{144}$</td><td>$\frac{60}{163}$</td><td>$\frac{67}{182}$</td><td>$\frac{74}{201}$</td><td>$\frac{81}{220}$</td><td>$\frac{88}{239}$</td><td>$\frac{95}{258}$</td><td></td></tr>
</table>

Les bornes qui sont plus proches de l' que toutes les précédentes sont successivement :

$$0; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{8}; \frac{4}{11}; \frac{7}{19}; \frac{67}{182}; \dots$$