

# DES TAS DE SABLE AUX GRAPHS

(ou les étonnements d'un amateur de géométrie)

Roger Iss

J'avais proposé à Jean LEFORT un article faisant suite à ceux qu'il avait bien voulu passer dans 'L'Ouvert' (n° 41, 42 et 51). Mais notre rédacteur en chef a dû le trouver ennuyeux (point de vue que je partage, après relecture) et m'a demandé d'exposer, plutôt, la démarche qui m'a conduit, à partir des tas de sable, à des considérations bien éloignées de ceux-ci. Aussi, bien qu'il soit assez gênant de parler de soi (les mathématiciens, même amateurs, sont plutôt modestes et répugnent à exposer leurs états d'âme), je vous convie à refaire, avec moi, un parcours un peu insolite, mais, rassurez-vous, très élémentaire.

---

## 1.— LES POLYÈDRES TAS DE SABLE

Quand on accumule du sable fin et sec sur une plaque plane horizontale et surélevée (pour que le sable excédentaire puisse s'écouler librement), on obtient un tas de sable limité par une surface dont toutes les lignes de pente sont des droites également inclinées sur l'horizontale. Lorsque le contour de la plaque est un **polygone convexe** (1) de  $n$  côtés, le tas obtenu est un polyèdre qui a  $n$  faces (en plus de sa base), chacune passant par un des côtés du polygone et faisant toutes le même angle aigu avec le plan de celui-ci. Une base triangulaire donne, évidemment, un tétraèdre; avec une base à quatre (resp. cinq) côtés, on obtient un "toit à quatre (resp. cinq) pentes". Mais vous avez beau modifier la forme du quadrilatère ou du pentagone, vous obtenez toujours le même type de toit, présentant la même succession de faces à 3, 4 ou 5 côtés. Par contre, quand on passe à l'hexagone, c'est la surprise : on obtient trois types distincts de tas de sable, irréductibles l'un à l'autre. Bien sûr, on rencontre aussi des "cas limites" où certains sommets sont venus se confondre — le cas extrême étant celui de la pyramide. Mais on ne tarde pas à décréter ces cas "sans intérêt", et on décide de ne s'occuper, dorénavant, que des polyèdres dont chaque sommet est commun à trois faces et trois seulement.

Il vous prend alors l'envie de voir ce qui se passe quand le nombre des côtés de la plaque augmente... Vous abandonnez d'ailleurs vos tas de sable, pour vous contenter de les dessiner. En effet, chaque arête ou ligne de faite d'un de ces tas, est l'intersection de deux faces de même pente. Elle se projette donc, orthogonalement sur le plan de base, suivant la **bissectrice** de l'angle formé par les côtés du polygone, traces de ces deux faces sur ce plan.

---

© L'OUVERT 56 (1989)

(1) Il est essentiel que le polygone soit convexe. Dans le cas contraire, chaque angle rentrant de la plaque engendre, sur le tas de sable, une portion de cône de révolution.

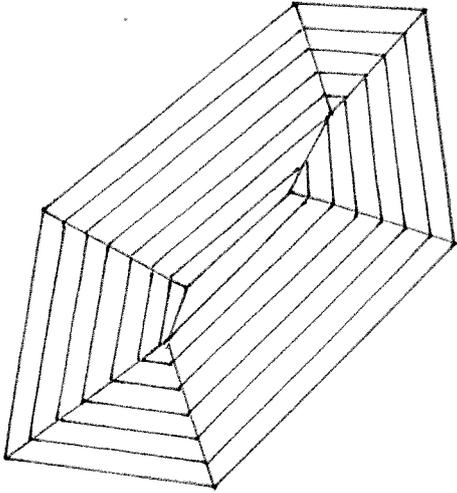


Figure 1

Un **polyèdre tas de sable** est un polyèdre convexe de l'espace euclidien dont une face, appelée base, a un côté commun et un seul avec chacune des autres faces et fait le même angle aigu avec chacune d'elles. On suppose, de plus, que tous les sommets du polyèdre sont communs à trois faces et trois seulement (on dira que ce sont des sommets **simples**).

Avec cette définition, on peut démontrer toutes les propriétés des tas de sable polyédraux. Mais nous n'allons pas en rester là, pour deux raisons :

D'abord parce qu'un bon mathématicien cherche toujours à généraliser une définition, donc à plonger l'ensemble des objets qu'il étudie, dans un ensemble plus vaste. Or, dans la définition ci-dessus, il y a des contraintes dont il semble facile de se libérer : l'égalité de l'inclinaison des faces en est une.

Ensuite, à force de dessiner des tas de sable, vous finissez par tracer, de manière de plus en plus approximative, les arêtes des polyèdres, censées être des bissectrices. Cependant, vous respectez les règles suivantes :

- une "bissectrice" passe par le sommet de l'angle qu'elle divise en deux ;
- quand deux "bissectrices" se coupent, une troisième passe par leur point commun...

Vous vous apercevez, alors, que "ça marche" encore, c'est-à-dire que vos dessins représentent toujours, en projection, des solides de l'espace qui seraient des "tas de sable" où l'égalité des pentes ne serait plus respectée ! Et chose curieuse, les propriétés des bissectrices sont devenues de simples propriétés des intersections de plans ...

## 2.— LES TECTOÈDRES

Il ne reste donc plus qu'à définir ces nouveaux polyèdres auxquels nous allons donner un nom, pour la commodité du langage :

On appelle **tectoèdre** (du latin "tectum" = toit), tout polyèdre convexe tel que :

1. Une de ses faces, appelée base, a un côté et un seul en commun avec chacune des autres faces;
2. Tous ses sommets sont simples.

Ces polyèdres ont, non seulement, toutes les propriétés des tas de sable (sauf, bien entendu, celles qui sont liées à l'inclinaison des faces), mais ils peuvent être étudiés indépendamment de ces derniers. On peut les matérialiser (de manière moins fragile que les tas de sable!), les construire en projection sur leur base, donc les développer ... Ils ont été étudiés sous le nom de "polyèdres *T*" dans un article de 'L'Ouvert' [2] auquel je renvoie le lecteur intéressé.

Je ne rappellerai ici que les deux "découvertes" que l'on ne peut manquer de faire en manipulant ces tectoèdres, car elles vont se révéler capitales pour la suite.

### a. La "formule" :

Ce n'est pas la forme exacte de ces polyèdres qui nous intéresse, mais la nature et la répartition de leurs faces. En marquant sur chacune de celles-ci le nombre de ses côtés et en lisant ces nombres dans l'ordre où ils se présentent quand on parcourt le polygone de base dans un certain sens, on obtient une suite d'entiers — par exemple 35344 pour l'ordre 5 (fig. 2).

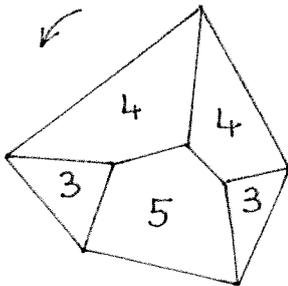


Figure 2

Evidemment, une telle suite, n'est pas unique : elle peut être commencée par n'importe quel terme (c'est un cycle) et lue dans n'importe quel sens (tout au moins, si on convient de ne pas faire de distinction entre un polyèdre et son "image-miroir"). Mais on peut en classer les différentes écritures, par ordre lexicographique, et n'en retenir que la "plus grande" (53443 pour l'ordre 5).

D'autre part, si, jusqu'à l'ordre 9, les termes de cette suite s'écrivent avec un seul chiffre, il n'en est plus de même à partir de 10 et la suite devient peu lisible. Si on diminue de trois unités tous les termes (ce qui donne 20110 pour l'ordre 5), on recule cet inconvénient jusqu'à l'ordre 13. En passant ensuite en hexadécimal, on peut aller jusqu'à 18. Les nombres obtenus, après cette soustraction, ont encore un sens concret : chacun d'eux indique le nombre d'arêtes sommitales que comporte la face correspondante (0 pour le triangle, etc ...). On les appellera **indices** des

faces et leur suite sera la **formule du tectoèdre**.

Désormais, nous ne ferons pas de différence entre deux tectoèdres de même formule. Nous établissons ainsi une relation d'équivalence dans l'ensemble des tectoèdres, chaque classe étant caractérisée par une formule.

### b. La “troncature triangulaire” :

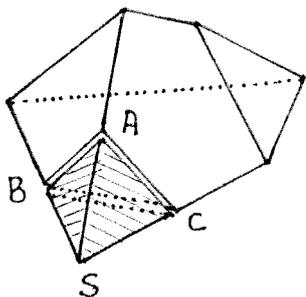


Figure 3

Si vous coupez une “pointe” d’un tectoèdre, en lui enlevant un tétraèdre  $SABC$  (fig. 3), vous l’enrichissez d’une face triangulaire  $ABC$  qui vient s’intercaler entre deux faces dont le nombre de côtés augmente, de ce fait, d’une unité. Cette opération, que nous appellerons **troncature triangulaire**, permet donc, à partir d’un tectoèdre d’ordre  $n$ , d’en fabriquer un d’ordre  $n + 1$ .

Inversement, supposons qu’un tectoèdre d’ordre  $n$  possède une face triangulaire  $ABC$  telle que les arêtes qui aboutissent en  $A$ ,  $B$  et  $C$  se coupent en un point  $S$  **extérieur** au tectoèdre.

En lui rajoutant le tétraèdre  $SABC$ , on le transforme en un tectoèdre d’ordre  $n - 1$ . Or, et c’est assez surprenant a priori, on constate (et on démontre) que tout tectoèdre possède au moins **deux** faces triangulaires et que, sur ces deux faces, il y en a au moins une qui a la propriété considérée ci-dessus (la seule exception est sans gravité : elle se produit pour l’ordre 4 — voir [2] page 7). Tout tectoèdre “descend” donc d’un tectoèdre d’ordre inférieur. La filiation ainsi découverte va donc nous permettre de déduire tous les tectoèdres du tectoèdre d’ordre 3, c’est-à-dire du tétraèdre!

Par ailleurs, cette troncature se traduit de façon très simple au niveau de la formule. Faire une troncature triangulaire c’est, en effet, insérer un zéro entre deux termes consécutifs de la formule et augmenter ces derniers d’une unité. Ainsi 1010 donne 20110 dans le sens descendant et 000 dans le sens ascendant.

Ayant ainsi “mathématisé” notre problème, nous pouvons ranger notre matériel : il nous suffit désormais de travailler sur les “formules”.

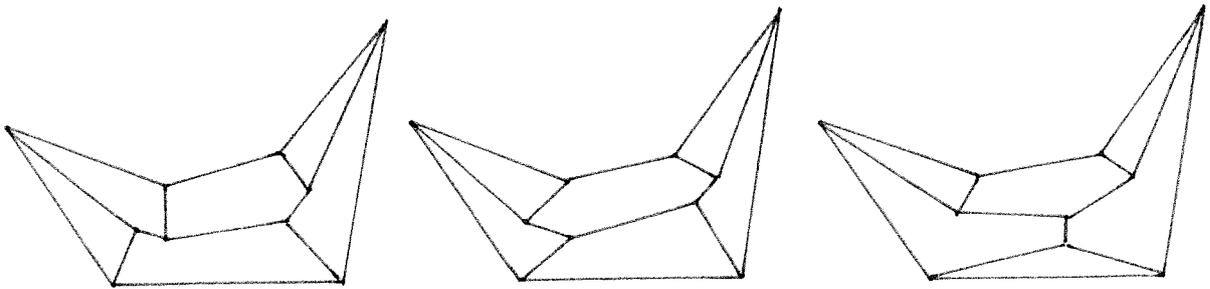
On peut ainsi établir que tous les tectoèdres d’un ordre donné  $n$  ont tous  $(2n - 2)$  sommets et  $(3n - 3)$  arêtes (y compris les sommets et arêtes de la base). La somme des entiers qui figurent dans la formule est alors une constante — pour  $n$  donné — et vaut  $(2n - 6)$ .

### 3. TECTOEDRES A BASE CONCAVE

Cette première généralisation des tas de sable ayant réussi, il est tentant d’échapper à une autre restriction : la condition de convexité. En d’autres termes, existe-t-il des tectoèdres à base concave? Oui. Il y a d’abord ceux que l’on obtient, par analogie

avec les polyèdres tas de sable, en menant, par les côtés de la base, des plans faisant le même angle aigu avec le plan de celle-ci. Ce sont des “pseudo-tas de sable”, car on ne peut plus les réaliser physiquement avec du sable. Malheureusement, un de nos raisonnements-clés ne s’applique plus. Si on peut toujours tronquer un tectoèdre non convexe, en revanche l’opération inverse n’est généralement plus possible : un tectoèdre non convexe n’est pas toujours “descendant” d’un homologue d’ordre inférieur (c’est le cas des deux premiers polyèdres de la figure ci-dessous). Dans ces conditions, on ne sait pas s’il y a des tectoèdres à base concave correspondant à chacune de nos classes d’équivalence ...

En fait, s’il y a de “bons” polygones concaves pour lesquels tout se passe comme pour les convexes (fig. 4), l’ensemble des polygones concaves apparaît comme un univers inexploré, peuplé de “monstres” — tordus, spiralés ou tentaculaires — auprès desquels les convexes paraissent d’une étonnante simplicité ! Retirons-nous donc, à pas feutrés, de ce monde où il faudrait sans doute, revenir avec d’autres moyens.



210210

301110

202020

*Figure 4*

#### 4. DUALITÉ

Jusqu’à présent, nous avons surtout fait appel à l’expérience et à l’intuition. Il serait peut-être temps d’utiliser des grands procédés, classiques dans l’étude des polyèdres, comme, par exemple, la transformation par **dualité**.

Prenez le dessin d’un tectoèdre de  $n$  côtés, mettez un point dans chaque face et reliez par un segment deux de ces points, chaque fois que les faces correspondantes ont un côté commun (fig. 5).

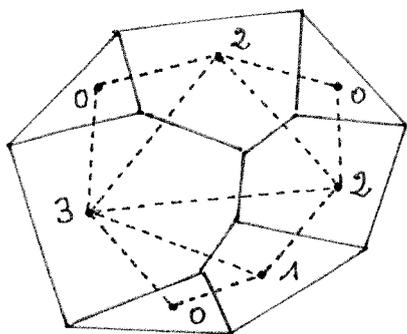


Figure 5

Le résultat obtenu est assez étonnant : le dessin est celui d'un polygone de  $n$  côtés que  $(n - 3)$  diagonales partagent en  $(n - 2)$  triangles (2).

Autrement dit, avec nos tectoèdres, nous pensions faire de la géométrie à trois dimensions, et, en fin de compte, notre problème se révèle "isomorphe" à un problème de combinatoire à deux dimensions, celui de la **triangulation des polygones** ou encore, d'association de triangles (similaire au problème bien connu des pentaminos, qui est un problème d'association de carrés ou de quadrilatères).

Tout ce qui a été démontré sur les tectoèdres se démontre donc directement — parfois plus simplement — sur les triangulations. Ainsi, notre "formule" s'adapte parfaitement à la nouvelle situation : l'indice d'une face, devenu l'indice d'un sommet du polygone, représente le nombre de diagonales qui en sont issues.

Il est facile de construire la triangulation correspondant à une formule donnée. C'est presque un petit jeu. Dessiner le polygone à trianguler et marquer chaque sommet de son indice, lu dans la formule. Pour chaque sommet d'indice 0, tracer la diagonale qui joint les deux sommets adjacents et enlever une unité à l'indice de ces derniers. Recommencer ensuite l'opération sur la partie non encore triangulée du polygone ... Vous trouverez le tectoèdre correspondant par dualité. Faites un essai avec l'octogone et le décagone de formules respectives 31 022 020 et 4 103 103 110 ...

(2)

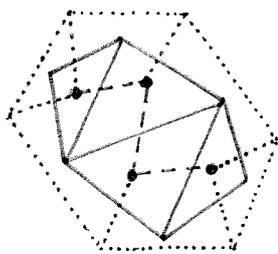
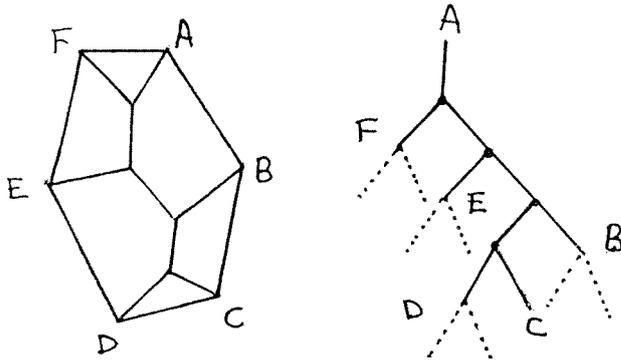


Figure 6

En effectuant la même opération sur la figure duale, on doit, théoriquement, retrouver le schéma initial. Ici, parce que dans la construction indiquée il n'a pas été tenu compte de la base du tectoèdre, on n'obtient que les sommets et les arêtes sommitales de celui-ci. Il reste donc à tracer les arêtes latérales, une par côté du polygone (fig. 6), pour retrouver le dessin schématique du tectoèdre, que l'on peut ensuite "construire" effectivement (voir [2], p. 5).

## 5. GRAPHEs

Depuis EULER, on sait associer à un polyèdre, un graphe (3) appelé **squelette** du polyèdre. Les sommets (ou nœuds), les arêtes du graphe correspondent, respectivement, aux sommets et arêtes du polyèdre (la similitude de vocabulaire n'étant pas une simple coïncidence). Dans ces conditions, notre problème se formule aussi en langage de la théorie des graphes et toute la géométrie que nous avons pu faire n'était qu'un habillage inutile (mais sans doute commode)!



Sans entrer trop loin dans la théorie des graphes, remarquons simplement que, si, dans le dessin d'un tectoèdre, on supprime le polygone de base (fig. 7), il reste la représentation d'un **arbre binaire** (pour lequel n'importe quelle arête latérale peut servir de "tronc"), sous-graphe de l'arbre binaire illimité.

Figure 7

Etudier les tectoèdres, c'est donc aussi étudier les sous-graphes de l'arbre binaire qui comportent  $(n - 2)$  nœuds et  $n$  rameaux libres issus de ceux-ci.

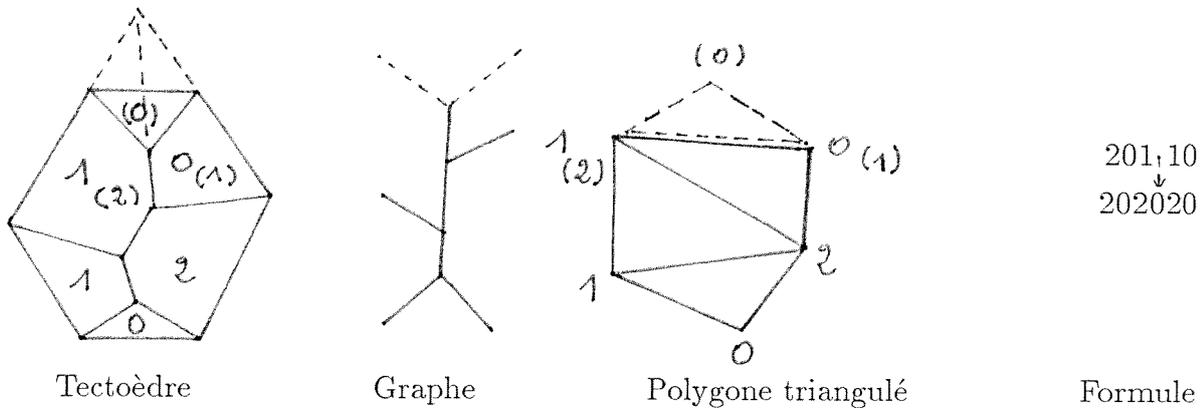
A toute solution de ce problème de graphe, correspond donc une classe de tectoèdres. Or, rien ne nous empêche de "représenter" ce graphe à partir d'un polygone concave. Il y aurait donc autant de tectoèdres concaves que de convexes! Seulement, ce type de représentation ne garantit plus que des arêtes ne se coupent pas en dehors de leurs extrémités et nos tectoèdres risquent d'avoir des faces polygonales croisées. Peut-on encore parler de "polyèdres" dans ce cas?

Faisons le point. Partis des tas de sable, nous voici, maintenant, en possession de plusieurs ensembles isomorphes : les tectoèdres, les polygones triangulés, les arbres binaires, les formules (4) ... Nous disposons ainsi d'un matériel fort intéressant pour une étude ultérieure, car, bien que tout ce que l'on peut dire à propos de l'un de ces ensembles, soit valable pour les autres (par exemple la troncature, comme l'illustre la figure 8), il est évident que, suivant les cas, l'un ou l'autre de

(3) Un **graphe** (non orienté) est la donnée de deux ensembles  $S$  et  $A$ , finis ou dénombrables (dont les éléments sont appelés respectivement **sommets** et **arêtes**) et d'une application de  $A$  dans l'ensemble des paires d'éléments de  $S$  qui, à chaque arête, fait correspondre deux sommets qui sont ses **extrémités**. Une **représentation** d'un graphe est un "dessin" où les sommets sont des points et les arêtes des arcs joignant ces points.

(4) On peut en imaginer d'autres ... Par exemple, si dans les dessins de tectoèdres, vous renoncez aux alignements qui en font des projections de solides de l'espace, il vous reste un "**pavage**" du polygone de base par des pavés polygonaux. L'ensemble de ces pavages — tout au moins pour les convexes — est isomorphe aux ensembles cités ci-dessus.

ces ensembles sera plus facile ou, simplement, plus agréable à manipuler que les autres.



201,10  
↓  
202020

Figure 8

## 5. RECHERCHE DES FORMULES

Le problème que l'on se pose normalement maintenant est le suivant : rechercher les formules qui correspondent à un ordre donné, ou, à défaut, les dénombrer.

Comme on l'a déjà vu [2], la récurrence par "troncature" donne bien les formules d'ordre  $n$  à partir de celles d'ordre  $(n - 1)$ , mais elle les donne avec répétitions et cela d'une manière (apparemment) imprévisible, certaines formules étant obtenues plusieurs fois, d'autres une seule. Pour  $n = 8$ , par exemple, les quatre formules de l'ordre 7 ont 28 descendants, parmi lesquels 12 seulement sont distincts; pour  $n = 9$ , il y aura donc  $8 \times 12$  formules à trier ... Ce tri devient fastidieux et précaire quand on le fait à la main. Mais c'est un travail pour lequel un ordinateur est tout désigné. En ce qui me concerne, j'ai d'abord utilisé un petit "micro", avec des programmes rédigés dans un Basic sans doute rudimentaire : ce pauvre ordinateur a mis plus d'une semaine pour me calculer les 733 formules de l'ordre 12. Naturellement, il m'a fallu changer d'ordinateur et de langage de programmation. Avec un PC et un programme écrit en Turbo-Pascal, j'ai obtenu le même résultat en ... 10 minutes!

En fait, en passant de l'ordre  $n$  à l'ordre  $(n + 1)$ , les temps de calcul se trouvent multipliés par un coefficient voisin de 5, si bien que même un gros ordinateur atteint rapidement ses limites. Pour aller plus loin, il faut trouver de nouveaux algorithmes (ce qui vous donne des idées pour le raisonnement pur) et améliorer vos programmes (donc perfectionner vos capacités en informatique). A part cela, allez-vous sans doute me dire, quel intérêt y a-t-il à connaître les formules des tectoèdres à 20 faces et plus? C'est une bonne question que je laisserai sans réponse ...

Voici le nombre  $T_n$  des formules d'ordre  $n$ , calculées par ordinateur (lequel peut vous donner, pour le même prix, leur répartition par nombre de zéros) jusqu'à l'ordre 17 :

DES TAS DE SABLE AUX GRAPHES

$n$	$Tn$	$n$	$Tn$	$n$	$Tn$
3	1	8	12	13	2 282
4	1	9	27	14	7 528
5	1	10	82	15	24 834
6	3	11	228	16	83 898
7	4	12	733	17	285 357

Puisqu'il n'est pas possible d'aller beaucoup plus loin, il ne reste plus qu'une solution : trouver un moyen de calculer le nombre  $Tn$  sans déterminer les formules correspondantes ... Travail décevant, car, ou bien vos recherches sont vaines, ou bien, quand elles aboutissent, le résultat vous paraît tellement simple et "évident" que vous vous dites : si j'étais plus intelligent, j'aurais trouvé cela depuis longtemps! Mais, à force de "gratter" vous arrivez à faire quelques brèches et vous avez finalement le plaisir de voir la forteresse s'effondrer, par pans entiers. Comme un amateur de mots croisés qui remplit une grille difficile.

6. DÉNOMBREMENT DES TECTOÈDRES

a. Un cas particulier

La première idée qui vient à l'esprit est de dénombrer les formules qui ont un nombre donné de zéros. Ainsi, pour deux zéros, le calcul est facile en faisant appel au graphe. Celui-ci peut se représenter (fig. 9) en alignant les arêtes sommitales, ce qui donne une espèce d'"arête de poisson" à deux queues (les faces triangulaires). Un tel graphe est appelé "chenille" (caterpillar) par les anglo-saxons.

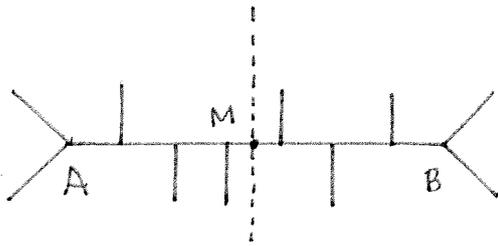


Figure 9

Associons à ce graphe le nombre binaire de  $(n - 4)$  chiffres obtenu en notant 0 pour une arête latérale dirigée vers le haut et 1 pour une arête dirigée vers le bas. Ainsi le binaire correspondant à la figure ci-contre est 011010.

Mais, d'après nos conventions sur la formule, deux chenilles qui se correspondent par symétrie par rapport au milieu  $M$  de  $AB$  ou par rapport à la médiatrice de  $AB$ , ne sont pas considérées comme distinctes. Sur les  $2^{n-4}$  binaires, ceux qui admettent un axe de symétrie (la formule correspondante est aussi symétrique, tout au moins à une permutation circulaire près) ou un centre de symétrie (la formule correspondante est périodique de période  $n/2$ ) sont donc comptés deux fois et tous les autres quatre fois. On trouve ainsi que le nombre de formules à

deux zéros, est, à l'ordre  $n$  :

$$\left(2^{n-6} + 2^{E(\frac{n-6}{2})}\right).$$

Le procédé s'étend — péniblement — aux formules à trois zéros, mais semble devenir impraticable au-delà, et aucune récurrence ne se profile à l'horizon ... Il faut changer de méthode. Mais nous aurons au moins appris que les difficultés provenaient des éléments comportant une symétrie ou une périodicité.

Commençons par les formules que nous dirons “symétriques” (les cycles qu'elles représentent se lisent dans les deux sens, ce sont des palindromes). Il est évident que, si dans une telle formule, on supprime (ou rajoute) deux zéros symétriques, on obtient encore une formule symétrique. Elles descendent donc toutes, par double troncature, des formules 1010 (filère paire) ou 20110 (filère impaire). Votre ordinateur, que vous lancez sur cette nouvelle piste, vous montrera que

1. le nombre des symétriques d'ordre  $(2n+1)$  est le même que celui des symétriques d'ordre  $2n$  ;
2. la suite des nombres  $S_{2n+1}$  de ces formules est

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430 \dots$$

C'est une suite que l'on peut avoir rencontré quelque part : ce sont les nombres de CATALAN (5) ...

Si vous ne connaissez pas les nombres de CATALAN, n'en faites pas un complexe ! Je les connais moi-même depuis peu seulement. Ils interviennent dans beaucoup de problèmes de combinatoire. CATALAN les a obtenus à propos du problème suivant :

Etant donné un ensemble  $E$  muni d'une loi de composition **non associative**, quel est le nombre de composés distincts que l'on peut former avec  $n$  éléments de  $E$ , pris dans un ordre donné ?

Par exemple, avec quatre éléments  $a, b, c, d$  on peut former les 5 “produits” distincts suivants :  $[a(bc)]d, [(ab)c]d, a[b(cd)], a[(bc)d]$  et  $(ab)(cd)$ .

Le nombre  $C_n$  de ces composées est

$$C_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

Voilà une découverte encourageante, même si elle ne nous avance pas beaucoup !

### b. Les symétriques d'ordre impair :

Examinons d'un peu plus près le cas des symétriques d'ordre impair : la confrontation de deux manières de les générer va, en effet, nous donner les clefs du calcul.

---

(5) Eugène CATALAN, mathématicien belge (1814 - 1894).

Il est intéressant d'utiliser, pour cela, des polygones triangulés **réguliers**, car la symétrie de la formule se traduit alors par une symétrie géométrique.

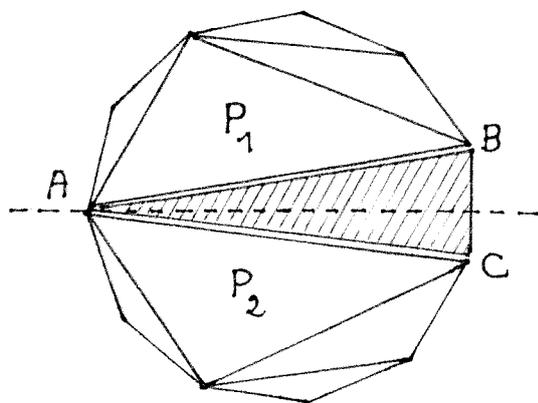


Figure 10

Soit donc un polygone  $P$ , triangulé, régulier, de  $(2n + 1)$  côtés, de formule symétrique. Il admet un axe de symétrie passant par un de ses sommets  $A$  et par le milieu du côté opposé  $BC$  (fig. 10). Comme une diagonale de la triangulation ne peut pas couper l'axe de symétrie, le polygone  $P$  est constitué par le triangle  $ABC$  "coincé" entre deux polygones  $P_1$  et  $P_2$  d'ordre  $(n + 1)$ , symétriques l'un de l'autre.

On voit ainsi

- qu'il y a autant de symétriques d'ordre  $(2n + 1)$  que de manières distinctes de "placer", sur le côtés  $AB$ , un polygone  $P_1$  triangulé d'ordre  $(n + 1)$ ;
- que les sommets d'indice 0, étant ceux de  $P_1$  et  $P_2$ , sont en nombre pair.

Supposons de plus que le polygone  $P_1$  soit lui-même d'ordre impair (donc que  $n$  soit pair,  $n = 2p$ ) et que le nombre de ses sommets d'indice 0 soit égal à  $p$  (c'est le maximum possible). Chaque côté de  $P_1$ , autre que  $AB$  (fig. 11), est alors côté d'un triangle "bordant" dont les sommets sont trois sommets consécutifs du polygone.

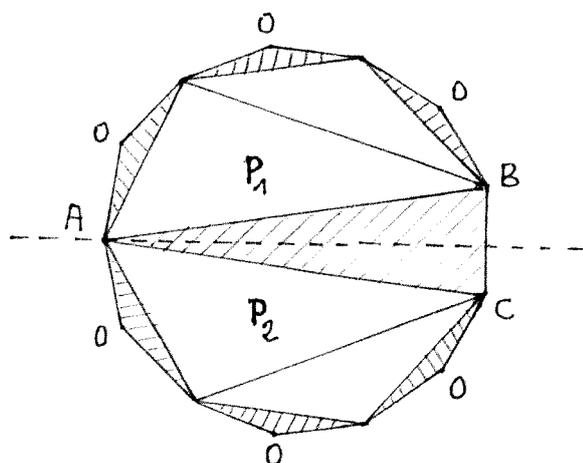


Figure 11

Si nous supprimons ces  $p$  triangles bordants dans  $P_1$ , ainsi que leurs homologues dans  $P_2$ , il nous reste un polygone d'ordre  $(2p + 1)$ , triangulé et toujours symétrique. Comme inversement on peut rajouter des triangles bordants à un tel polygone, nous en déduisons que *le nombre des symétriques d'ordre  $(2p + 1)$  est égal au nombre des symétriques d'ordre  $2n + 1 = 4p + 1$  ayant  $2p$  zéros.*

Naturellement, vous aviez déjà découvert cette propriété en examinant les listes de nombres fournies par votre ordinateur ...

Cela nous incite à déterminer le nombre de symétriques d'ordre  $(2n + 1)$  ayant un nombre donné de zéros. Pour cela, revenons à nos formules. Celles qui ont  $2k$  zéros peuvent s'obtenir, en effectuant deux troncutures symétriquement,

- d'abord sur les formules symétriques d'ordre  $(2n - 1)$  à  $2k$  zéros, en intercalant les nouveaux zéros à côté des zéros existants (car cela ne modifie pas leur nombre).

Il y a  $2k$  manières de le faire;

— ensuite sur les formules symétriques d'ordre  $(2n - 1)$  à  $(2k - 2)$  zéros, en intercalant les nouveaux zéros entre deux termes non nuls de la formule (ce qui augmente le nombre de zéros de deux unités). Il y a  $(n - 1) - (2k - 2) = n - 2k + 1$  places possibles pour ces zéros.

En observant que chaque formule est ainsi obtenue  $k$  fois (elle admet un “ascendant” pour chaque couple de zéros symétriques) et en notant  $S_{2n+1}(2k)$  le nombre de symétriques d'ordre  $(2n + 1)$  ayant  $2k$  zéros, on obtient la relation

$$k S_{2n+1}(2k) = 2k S_{2n-1}(2k) + (n - 2k + 1)S_{2n-1}(2k - 2).$$

Comme  $S_{2n+1}(2)$  a été calculé à propos des chenilles et vaut  $2^{n-2}$ , on en déduit, par récurrence, la formule

$$S_{2n+1}(2k) = 2^{n-2k} \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-2k+1)}{k!(k-1)!}.$$

Il ne reste plus qu'à écrire cette relation à l'ordre  $4n + 1$  et pour  $k = n$ , pour en déduire  $S_{2n+1}$ , nombre total de symétriques d'ordre  $2n + 1$ .

On trouve bien entendu, le résultat prévu :

$$S_{2n+1} = C_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

Comme

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{E(\frac{n}{2})} S_{2n+1}(2k)$$

on obtient, par la même occasion la formule sommatoire

$$\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!(n-2)!} = \sum_{k=1}^{E(\frac{n}{2})} \frac{2^{n-2k}}{k!(k-1)!(n-2k)!}.$$

Evidemment, va-t-on me dire, à quoi peut bien servir cette belle formule? Mais strictement à rien : c'est simplement une œuvre d'art!

Je vous ferai grâce du calcul analogue pour les symétriques d'ordre pair, calcul qui confirme le fait que  $S_{2n} = S_{2n+1} = C_n$ .

### c. Les formules périodiques

Il nous reste à nous occuper des formules périodiques et cela nous vaudra la dernière surprise de cette étude ...

Considérons une formule périodique d'ordre  $n$ . La “longueur”  $p$  de la période est un diviseur de  $n$  et le quotient  $n/p = f$  est un entier que nous appellerons fréquence. Par exemple, la formule 202020 de l'ordre 6 est périodique de fréquence 3. Or, on

sait que la somme des termes d'une formule d'ordre  $n$  est  $2n - 6$ . La somme des termes d'une période est donc

$$\frac{2n - 6}{f} = 2p - \frac{6}{f}.$$

La fréquence est donc un diviseur de 6 et ne peut prendre que les valeurs 2, 3 et 6! Or, si dans une formule périodique d'ordre  $n = pf$ , on supprime  $f$  zéros homologues, on obtient une formule d'ordre  $(p - 1)f$  qui est encore périodique. La réciproque étant vraie, toutes les formules périodiques de fréquence  $f$  descendent donc d'une formule périodique d'ordre  $2f$ . Pour  $f = 2$  et  $f = 3$ , cette formule existe : 1010 et 202020. Par contre, pour  $f = 6$ , la formule, qui devrait être 303030303030 n'a pas de sens (elle descendrait de 111111).

*Les seules fréquences sont donc 2 et 3.* En langage géométrique, cela signifie que les seules symétries possibles pour un polygone régulier triangulé sont : une symétrie centrale, une symétrie ternaire (invariance par rotation de  $2\pi/3$ ) — ces deux symétries étant incompatibles entre elles, mais cumulables avec une symétrie axiale. Ce résultat paraît tout à fait étonnant : a priori, la fréquence pouvait être n'importe quel diviseur de  $n!$  Il est aussi rassurant : on sait désormais que le nombre de cas à examiner ne dépassera pas 6.

Les procédés ayant réussi avec les formules symétriques s'appliquent aux formules périodiques et leur nombre s'exprime aussi à l'aide des nombres de CATALAN (6).

#### d. Le calcul final

Nous avons vu, ci-dessus (en 6,b), qu'il y a autant de symétriques d'ordre  $(2n - 1)$  que de manières distinctes de "poser", sur un de ses côtés, un polygone triangulé d'ordre  $n$ . Nous pouvons maintenant dénombrer ces différentes positions en distinguant les cas suivants : le polygone est symétrique (sans être périodique), périodique (sans être symétrique), périodique et symétrique, et enfin, sans aucune particularité (voir le détail du calcul en annexe) ... Comme le nombre de ces polygones "sans particularité" s'obtient par différence entre le nombre total  $T_n$  de formules et le nombre de polygones "particuliers" que l'on vient de calculer, on arrive à une formule d'où l'on peut, finalement, tirer le nombre  $T_n$ . Ce dernier s'exprime, à l'aide des nombres de CATALAN, par la relation :

$$T_n = \frac{1}{2n}C_{n-1} + \frac{3}{4}C_{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}C_{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{3}C_{\frac{n}{3}}$$

---

(6) On trouve, en notant  $P_n(f)$  le nombre des formules périodiques de fréquence  $f$  et  $PS_n(f)$  le nombre de celles qui sont, à la fois, périodiques et symétriques ( $f = 2$  ou  $3$ ) :

$$P_n(f) = \frac{1}{2}[C_{\frac{n}{f}} + C_{\frac{n}{2f}}] \quad PS_n(f) = C_{\frac{n}{2f}}$$

avec la convention  $C_i = 0$  lorsque l'indice  $i$  n'est pas un entier.

(avec la convention :  $C_i = 0$  lorsque  $i$  n'est pas un entier). Si on l'explicite, cela donne

$$T_n = \frac{(2n-5)!}{n!(n-3)!} + \frac{3(n-3)!}{2(\frac{n}{2})!(\frac{n-4}{2})!} + \frac{1}{2} \frac{(n-3)!}{(\frac{n-1}{2})!(\frac{n-3}{2})!} + \frac{1}{3} \frac{(\frac{2n}{3}-2)!}{(\frac{n}{3})!(\frac{n-3}{3})!}$$

en convenant de considérer comme nul tout terme contenant une factorielle non entière (sinon il faudrait donner six expressions distinctes). Notons que, si  $T_n$  est bien un entier, curieusement, les termes, dont il est la somme, ne sont pas nécessairement des entiers ...

Si j'avais trouvé ce résultat, il y a trente ans (le problème du dénombrement des triangulations a été résolu pour la première fois en 1960 (7) ), cela aurait peut-être justifié une communication à l'Académie des Sciences! Mais, à cette époque-là, je ne m'intéressais pas encore aux tas de sable ... Aussi, aujourd'hui, je ne suis pas plus avancé que l'amateur de mots croisés déjà cité. Seulement, il ne viendrait pas à l'idée d'un cruciverbiste de raconter comment il a rempli sa grille. Pourquoi alors l'ai-je fait? D'abord, parce qu'il s'agit quand même de mathématiques ... Ensuite, parce que je pense que le cheminement que vous avez bien voulu faire avec moi, est accessible à des élèves (hormis, bien entendu, le dénombrement final). Cette occasion de faire des mathématiques expérimentales, sortant de l'ordinaire et conduisant à des résultats non scolaires, méritait bien d'être signalée ...

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ISS - "Sable et mathématique" - 'L'Ouvert' n° 41 (déc. 1985) et n° 42 (mars 1986).
- [2] R. ISS - "Considérations sur une famille de polyèdres" - 'L'Ouvert' n° 51 (juin 1988).
- [3] F. HARARY et E.-M. PALMER - "Graphical enumeration" - New York, Academic Press (1973).
- [4] R.-K. GUY - "Dissecting a polygon into triangles" - Univ. of Calgary, Research Report (1960).
- [5] J.-W. MOON et L. MOSER - "Triangular dissections of  $n$ -gons" - Canad. Math. Bull. 6 (1963).

## ANNEXE

Pour chaque polygone triangulé  $P_1$ , on détermine le nombre de manières distinctes de le "placer" sur le côté  $AB$  (fig. 10). Cela revient, en supposant le polygone régulier, à déterminer le nombre de figures différentes que l'on obtient en orientant un de ses côtés (par exemple, pour le carré, ce nombre est 2 (fig. 12)). Il nous faut distinguer quatre catégories de situations :

---

(7) Le problème a été résolu en 1960 par R. GUY, puis en 1963 par J. MOON et L. MOSER. Je ne connais pas les solutions de ces auteurs, n'ayant pu consulter leurs publications. Je connais, par contre, une autre solution proposée en 1973, par F. HARARY et E. PALMER. Elle utilise un théorème savant de George PÓLYA et consiste à déterminer une "fonction génératrice" telle que les coefficients de son développement en série entière soient justement les nombres  $T_n$ .

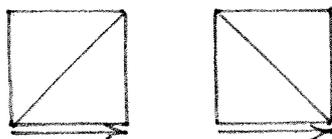


Figure 12

1. **P1 est sans particularité** : chacun de ses côtés joue un rôle différent et peut être placé de deux façons sur  $AB$  : il y a  $2n$  possibilités.

2. **P1 est symétrique sans être périodique** : Si  $n$  est pair, on n'utilise que la moitié des côtés, mais chacun deux fois : il y a  $n$  possibilités.

Si  $n$  est impair et  $n = 2p + 1$ , il y a  $p$  côtés ayant un symétrique et qui sont utilisés deux fois; par contre le côté, dont l'axe de symétrie est médiatrice, est utilisé une seule fois. Il y a encore  $2p + 1 = n$  possibilités.

3. **P1 est périodique sans être symétrique** : On utilise seulement les côtés relatifs à une période, mais chacun deux fois. Si la fréquence est  $f$ , il y a  $2n/f$  possibilités, soit  $n$  pour la fréquence 2 et  $2n/3$  pour la fréquence 3.

4. **P1 est périodique et symétrique simultanément** : On utilise seulement la moitié d'une période, mais deux fois; il y a respectivement  $n/2$  et  $n/3$  possibilités.

Il reste à déterminer le nombre de polygones P1 appartenant à chacune des catégories précédentes. Avec des notations déjà utilisées, ces nombres sont, pour le

4<sup>e</sup> type :  $PS_n(2)$  et  $PS_n(3)$

3<sup>e</sup> type :  $P_n(2) - PS_n(2)$  et  $P_n(3) - PS_n(3)$

2<sup>e</sup> type :  $S_n - PS_n(2) - PS_n(3)$

1<sup>er</sup> type : tout le reste c'est - à - dire

$$T_n - S_n - P_n(2) - P_n(3) + PS_n(2) + PS_n(3).$$

On trouve ainsi que

$$S_{2n-1} = 2nT_n - nS_n - n[P_n(2) - \frac{1}{2}PS_n(2)] - \frac{4n}{3}[P_n(3) - \frac{1}{2}PS_n(3)].$$

En remplaçant ces nombres par leurs expressions en fonction des nombres de CATALAN, on obtient la formule indiquée plus haut.