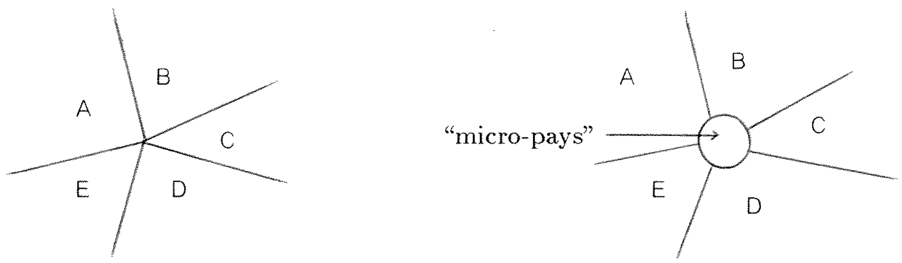
VARIATIONS SUR LE THÉORÈME DES 4 COULEURS

Jean LEFORT

Depuis 1977 on sait, grâce à Wolfgang HAKEN et Kenneth APPEL, qu'on peut colorier toute carte plane (ou sphérique) de pays connexes (c'est-à-dire en un seul morceau) à l'aide de quatre couleurs de façon que deux pays ayant une frontière commune n'aient pas la même couleur.

Dans leur démonstration, les deux mathématiciens ont travaillé sur des cartes simplifiées. La première simplification consiste à ne considérer que des cartes où les points frontières ne sont jamais communs à plus de trois pays. C'est ce qu'on appelle une **carte normale** (*).



Point frontière commun à cinq pays.

Normalisation d'un point frontière commun à cinq pays.

Figure 1

Il est toujours possible de normaliser une carte en ajoutant des "micro-pays" comme sur la figure 1. Si on a trouvé un coloriage avec quatre couleurs d'une carte normalisée alors, en supprimant les "micro-pays", on obtient un coloriage en quatre couleurs de la carte originale.

Nous appellerons **nœuds** les points communs à trois frontières et nous limiterons le sens du mot "frontière" à la ligne frontière qui joint deux nœuds consécutifs. Une frontière est donc adjacente à deux pays et à deux nœuds exactement; un nœud est adjacent à trois pays et trois frontières exactement.

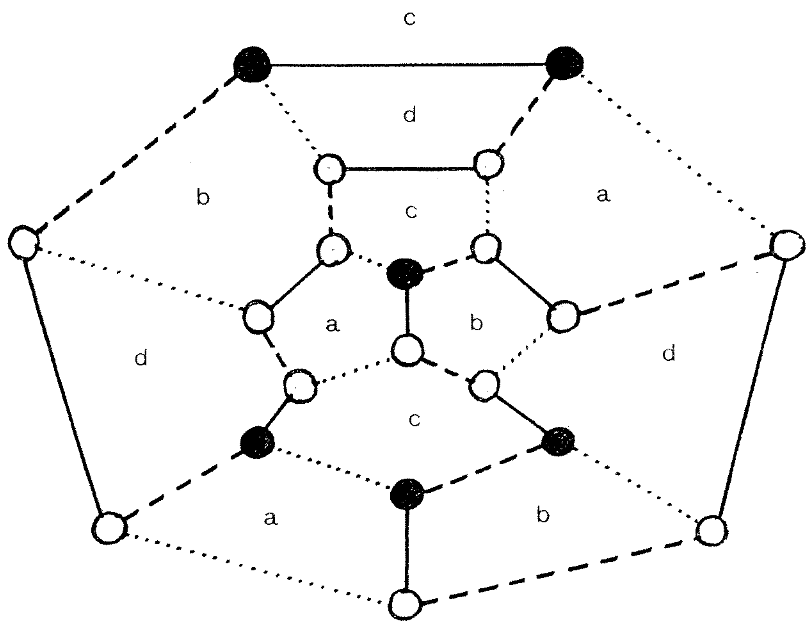
L'objet du présent article est la démonstration du théorème suivant :

(*) En toute rigueur il faut aussi imposer aux pays d'être simplement connexes sur la sphère, mais cette propriété n'intervient pas dans les présentes démonstrations.

Sur une carte normale les trois propositions suivantes sont équivalentes :
1) On peut colorier les pays à l'aide de quatre couleurs de façon que deux pays voisins n'aient pas la même couleur.
2) On peut colorier les frontières à l'aide de trois couleurs de façon que tout nœud soit adjacent aux trois couleurs.
3) On peut colorier les nœuds de deux couleurs de façon que pour tout pays, la différence entre le nombre de nœuds adjacents d'une couleur et ceux de l'autre couleur soit divisible par trois.

Ce résultat peut paraître paradoxal. Il l'est moins quand on remarque que s'il y a quatre types de pays, selon sa couleur, il y a alors $6 = 2 \times 3$ types de frontières selon la couleur des pays adjacents ; de plus s'il y a trois types de frontières, selon sa couleur, il y a deux types de nœuds selon l'ordre dans lequel se succèdent les frontières autour de chaque nœud. La figure 2 donne un exemple d'un tel coloriage.

Figure 2
Un exemple de coloriage de pays, frontières et nœuds.



Nous allons démontrer l'équivalence de ces trois propositions selon le schéma $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)$.

(A) 4 couleurs pour les pays implique 3 couleurs pour les frontières

Soit $(a), (b), (c), (d)$ les quatre couleurs affectées aux pays et $(x), (y), (z)$ les 3 couleurs que nous affecterons aux frontières. La figure 3 indique de quelle façon nous devons colorier les frontières en fonction des couleurs des pays adjacents. Par exemple nous attribuons la couleur (z) à une frontière adjacente à des pays de couleur (a) et (d) ou bien (b) et (c) ...

Maintenant, un nœud est adjacent à trois pays de couleurs distinctes et cette même figure 3 montre que quel que soit le choix de ces trois couleurs parmi les quatre, les trois frontières adjacentes à ce nœud auront exactement une fois chacune des trois couleurs $(x), (y)$ et (z).

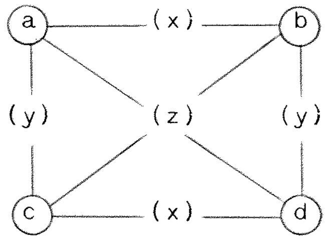


Figure 3
Le coloriage des frontières

(B) **3 couleurs pour les frontières implique 2 couleurs pour les nœuds**

Soit (0), (1), (2) les trois couleurs affectées aux frontières et (+1) et (−1) les deux couleurs que nous affecterons aux nœuds. (On ne confondra pas les couleurs (1) et (+1).)

Atribuons à un nœud la couleur (+1) si les couleurs (0), (1), (2) des frontières adjacentes se succèdent dans le sens trigonométrique et la couleur (−1) dans le cas contraire.

Regardons ce qui se passe pour les nœuds adjacents d'un pays donné. La connaissance des couleurs des frontières successives de ce pays permet de déterminer la couleur de chacun des nœuds adjacents puisqu'en chaque nœud il n'y a qu'une troisième frontière qui est évidemment coloriée avec la troisième couleur encore disponible. Parcourons les frontières d'un pays dans le sens des aiguilles d'une montre : alors un nœud est de couleur (+1) si la frontière passe de la couleur (0) à la couleur (1) ou bien de (1) à (2) ou bien de (2) à (0) et il est de couleur (−1) dans les autres cas (fig. 4). Une autre façon de voir, consiste à remarquer que si la i$^{\text{ième}}$ frontière (en partant d'une origine arbitraire) est de couleur x_i alors la couleur du nœud adjacent aux frontières numéro i et $i+1$ est de couleur ($x_{i+1} - x_i$ modulo 3) en identifiant les couleurs (tant des frontières que des nœuds) leur valeur numérique. Maintenant si on fait la “somme” des couleurs des nœuds successifs, on trouve :

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + (x_1 - x_n) = 0 \text{ modulo } 3.$$

Cela revient bien à dire que la différence du nombre de nœuds de chaque couleur est divisible par 3.

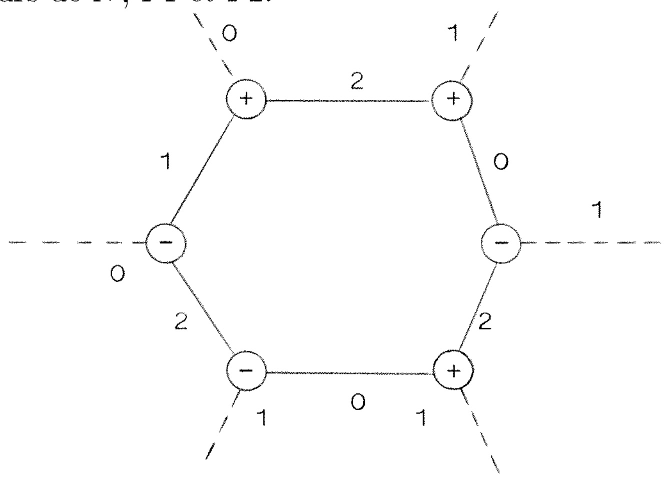
(C) **2 couleurs pour les nœuds implique 4 couleurs pour les pays**

Soit (+1) et (−1) les couleurs affectées aux nœuds (avec la règle de divisibilité par trois pour les nœuds adjacents à un pays donné) et notons (0), (1), (2), (3) les couleurs que nous affecterons aux pays. (Ici non plus on ne confondra pas les couleurs (+1) et (1).)

Attribuons les couleurs (0) et (1) à deux pays arbitraires adjacents, puis continuons à colorier les pays selon la règle suivante :

Soit N un nœud adjacent aux trois pays P1, P2 et P3 numérotés dans le sens trigonométrique autour de N. On attribue à P3 la couleur indiquée dans le tableau de la figure 5 selon les couleurs de N, P1 et P2.

Figure 4
Le coloriage des nœuds



N	P1	P2	P3
+1	0	1	2
	1	2	0
	2	0	1
	3	2	1
	2	1	3
	1	3	2
	0	2	3
	2	3	0
	3	0	2
	3	1	0
	1	0	3
	0	3	1

N	P1	P2	P3
−1	2	1	0
	0	2	1
	1	0	2
	1	2	3
	3	1	2
	2	3	1
	3	2	0
	0	3	2
	2	0	3
	0	1	3
	3	0	1
	1	3	0

Les lignes ont été regroupées trois par trois.
Dans un tel regroupement les couleurs ne diffèrent que d'une permutation circulaire.
Par conséquent dès qu'il est attribué une couleur à deux pays adjacents à N, la couleur du troisième pays est déterminée de manière unique.
Le problème est maintenant de savoir si en coloriant les pays successifs adjacents à un pays donné, on retombe sur la couleur du premier pays après un tour complet ?

Figure 5
Règle de coloriage des pays

Effectuons le raisonnement autour d'un pays P de couleur (0) dont on notera P1, P2 ... les pays adjacents successifs en tournant dans le sens trigonométrique. Alors la règle énoncée à la figure 5 montre que si le nœud est de couleur (+1) alors on passera de la couleur (1) à (2) ou bien (2) à (3) ou bien (3) à (1) et si le nœud est de couleur (−1) on passera pour les pays de la couleur (3) à (2) ou bien (2) à (1) ou bien (1) à (3). En identifiant à nouveau les couleurs avec leur valeur modulo 3, on remarque que la couleur (x_1) du pays P_i est donnée par la formule :

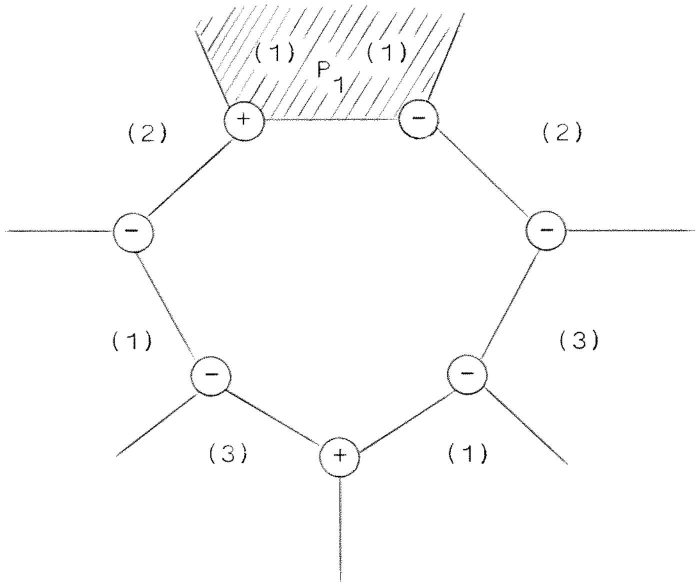
$$(x_i) = (x_{i-1}) + (s_{i-1}) \text{ modulo } 3$$

étant entendu qu'on choisi le résultat dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et où (s_i) est la couleur du nœud adjacent aux pays P, P_{i-1} et P_i. Maintenant notons (x'_1) la couleur que nous devrons attribuer à P1 après un tour complet autour de P. Nous avons :

$$\begin{array}{rlll}
 & (x_2) & = (x_1) + (s_1) & \text{modulo } 3 \\
 & (x_3) & = (x_2) + (s_2) & \text{modulo } 3 \\
 & \dots & & \\
 & (x_n) & = (x_{n-1}) + (s_{n-1}) & \text{modulo } 3 \\
 & (x'_1) & = (x_n) + (s_n) & \text{modulo } 3 \\
\hline
\text{par addition :} & (x'_1) & = (x_1) + \Sigma(s_i) & \text{modulo } 3
\end{array}$$

ce qui prouve l'égalité de (x_1) et (x'_1) en raison de la condition imposée sur le coloriage des sommets ($\Sigma(s_i) = 0$ modulo 3) : figure 6.

Figure 6
Coloriage des pays adjacents à un pays P donné.



Si maintenant le pays P est d'une couleur différente de (0), effectuons deux transpositions sur les couleurs (par exemple (0,1,2,3) → (1,0,3,2)), pour attribuer à P, provisoirement, la couleur (0). Comme la figure 5 permet de la voir, la double transposition évite de s'inquiéter de la couleur des nœuds. Alors le même raisonnement nous autorise à affirmer qu'après un tour complet autour de P, nous retombons sur les mêmes couleurs pour les pays adjacents.

Nous laissons le soin au lecteur de réinterpréter ce théorème soit en termes de graphes, soit en terme de polyèdres.