DES POINTS SUR UN GRAPHIQUE

Jacques LUBCZANSKI

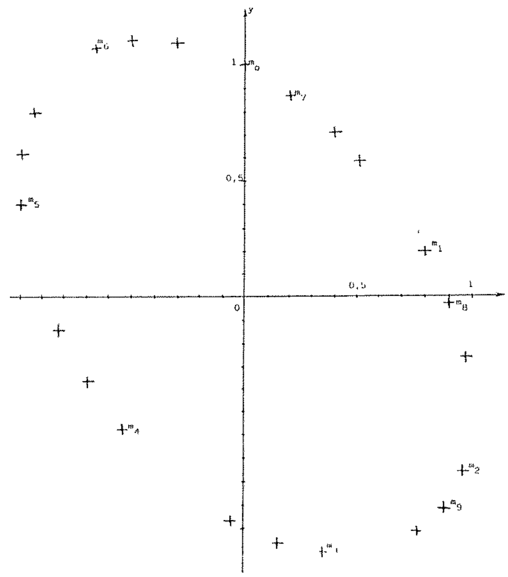
ÉNONCÉ

L'objet de ce problème est d'étudier une suite de points $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du plan euclidien, dont les coordonnées x_n et y_n dans un repère orthonormé vérifient :

$$\begin{cases} x_0 & = 0 \\ y_0 & = 1 \end{cases}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = & x_n + 0,8y_n \\ y_{n+1} = & -x_n + 0,2y_n \end{cases}.$$



A.— TOUS LES POINTS m_n SONT SUR UNE COURBE Γ :

1.- Calculer les coordonnées des points m_1, m_2 et m_3.
Calculer des valeurs approchées, à 10^{-3} près, des coordonnées de $m_4, m_5 \ldots m_{19}$ et m_{20}.
Tracer, dans un repère où une unité vaut 8 cm, tous les points m_n calculés.

2.- Calculez les nombres A, B, C et D de façon que les points m_0, m_1 et m_2 appartiennent à la courbe Γ d'équation $Ax^2 + By^2 + Cxy + D = 0$.

3.- Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_n \in \Gamma$.

B.— INSCRIPTION DE LA COURBE Γ DANS UN PARALLÉLOGRAMME

1.– On coupe Γ par une droite "verticale" d'équation $x = m$ où $m \in \mathbb{R}$.
Discuter selon les valeurs de m le nombre de points d'intersection.

2.– Lorsqu'il y a deux points d'intersection M_1 et M_2, on note I le milieu de $[M_1M_2]$.
Etablir une relation entre les coordonnées x_I et y_I de I, où m n'intervient pas.
Quel est l'ensemble des points I, lorsque m varie?

3.– On note E et F les positions extrêmes de I, et on coupe Γ par une droite D parallèle à $[EF]$. Montrer que l'ensemble des milieux J des points d'intersection ainsi obtenus, lorsque D varie, est le segment $[A, B]$ où $A\binom{0}{-1}$ et $B\binom{0}{1}$.

4.– Quelles sont les tangentes à Γ aux points A, B, E et F?

C.— TRANSFORMATION DE Γ EN UN CERCLE

Dans cette partie, on va transformer, par une application affine, Γ en un cercle : l'étude de la suite des points m_n se ramènera alors à l'étude, plus facile, de la suite des points M_n correspondants sur le cercle.

1.– Soit $C\binom{-1}{0}$, $D\binom{1}{0}$ et $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2=1$.
On cherche les applications affines qui transforment l'ensemble des deux *diamètres* $[A,B]$ et $[E,F]$ de Γ en l'ensemble des deux diamètres $[A,B]$ et $[C,D]$ du cercle $\mathcal{C}$.
Si f est une telle application, montrer que $f(0)=0$ et que $f(A)$ est un des quatre points A,B,C,D. Quelles sont alors les images possibles pour E?
Combien d'applications affines répondent à la question?

2.– Montrer que deux des applications trouvées sont des symétries axiales.
On note σ celle qui est une symétrie axiale de direction $\vec{j}$, et Δ son axe.
Etablir les formules analytiques de σ et vérifier que $\sigma(\Gamma)=\mathcal{C}$.
Tracer, dans un repère d'unité 8 cm, Δ, $\mathcal{C}$ et Γ.

3.– On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\ M_n=\sigma(m_n)$. Si X_n et Y_n sont les coordonnées de M_n, établir les formules de récurrence liant X_{n+1},Y_{n+1} et X_n,Y_n.
Par quelle transformation géométrique passe-t-on de M_n à M_{n+1}?
En déduire une construction géométrique de m_{n+1} à partir de m_n.

4.– Comment évolue la distance m_nm_{n+1} quand n tend vers l'infini?
Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes?

5.– Soit α tel que $\sin\alpha=0,8$ et $\cos\alpha=0,6$; en admettant que, pour p et q premiers entre eux, $(p>1, q>2) \Rightarrow (\sin\frac{p}{q}\pi$ irrationnel), montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n\alpha \neq 2K\pi, k \in \mathbb{Z}$.
La suite (m_n) est-elle périodique?

ÉLÉMENTS DE SOLUTION

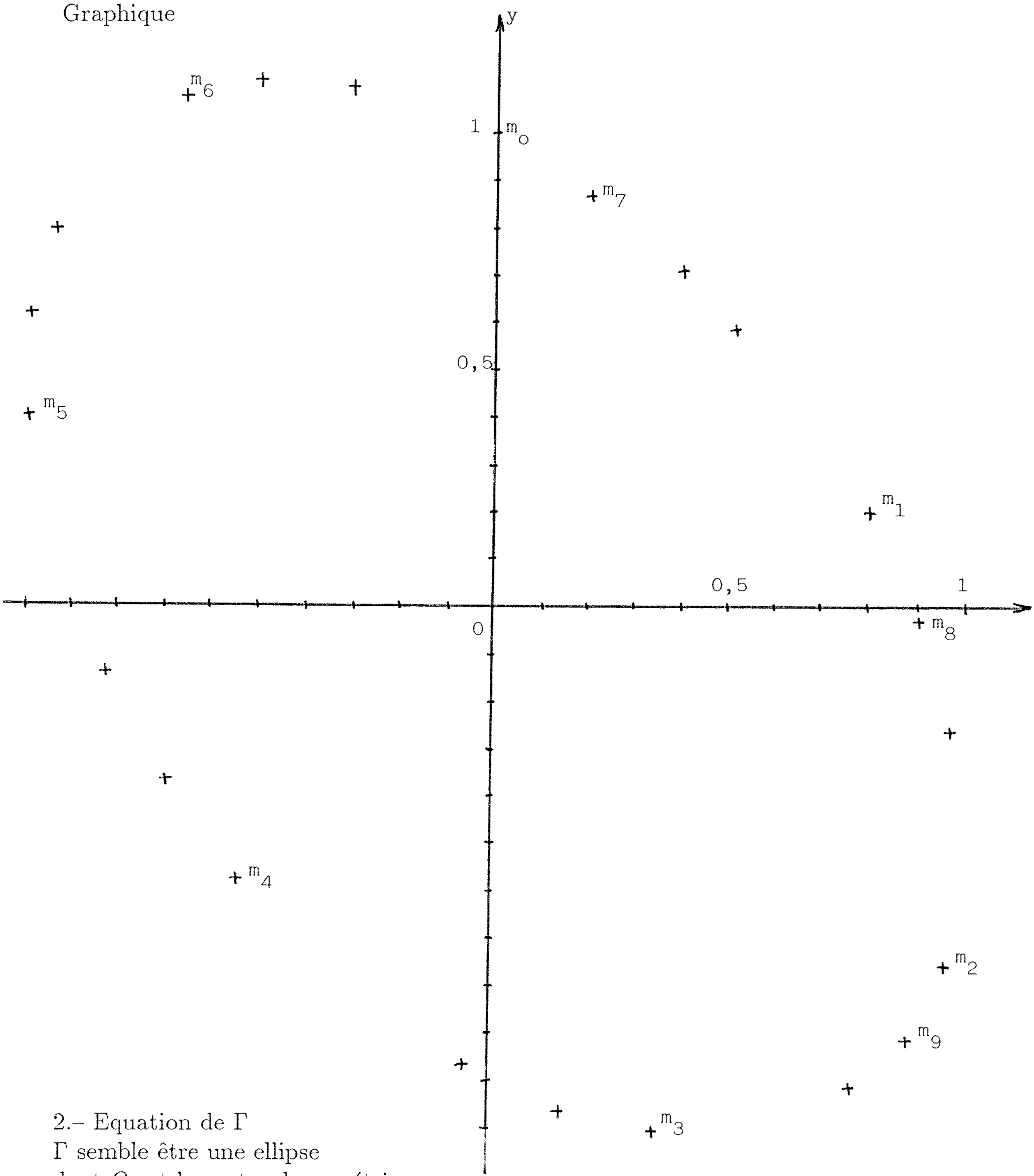
A.— TOUS LES POINTS m_n SONT SUR UNE COURBE Γ

1.– Coordonnées des points m_n ($\times$ 1000)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
800	960	352	−538	−997	−659	206	907	882	151
200	−760	−1112	−575	423	1082	875	−31	−913	−1064

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
−700	−991	−490	404	974	765	−56	−832	−943	−299	584
−364	627	1117	713	−261	−1026	−970	−138	805	1104	520

Graphique



2.– Equation de Γ

Γ semble être une ellipse dont O est le centre de symétrie.

Son équation serait alors de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + D = 0.$$

Cherchons A, B, C et D pour que les trois premiers points m_0, m_1 et m_2 soient sur Γ :

$$m_0\binom{0}{1}\ ;\ m_1\binom{0,8}{0,2}\ ;\ m_2\binom{0,96}{-0,76} \to m_0 \in \Gamma \Leftrightarrow \quad B + D = 0 \quad (1)$$
$$m_1 \in \Gamma \Leftrightarrow \quad 64A + 4B + 16C + 100D = 0 \quad (2)$$
$$m_2 \in \Gamma \Leftrightarrow 9216A + 5776B - 7296C + 10000D = 0 \quad (3)$$

D'où le système, après simplification de (2) par 4 et de (3) par 16 :

$B + D = 0$ $\qquad \Leftrightarrow D = -B$ qu'on reporte : 16A-24B+4C+25D=0 (4)
$16A + B + 4C + 25D = 0$ $\qquad$ 576A-264B-456C=0 (5)
$576A + 361B - 456C + 625D = 0.$

Soit après simplification de (4) par 4 et de (5) par 8 $\begin{cases} 4A - 6B + C = 0 \\ 72A - 33B - 57C = 0 \end{cases}$

Supposons C connu et résolvons en inconnues A et B le système de CRAMER :

$$\begin{cases} 4A - 6B = -C \\ 72A - 33B = 57C \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 72 & -33 \end{vmatrix} = 300 \quad A = \frac{\begin{vmatrix} -C & -6 \\ 57C & -33 \end{vmatrix}}{300} = \frac{375}{300}C = 1,25C$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -C \\ 72 & 57C \end{vmatrix}}{300} = \frac{300}{300}C = C.$$

On obtient donc $A = 1,25C$; $B = C$; $D = -C$.

Si on choisit $C = 1$, l'équation de Γ peut s'écrire : $\boxed{1,25x^2 + y^2 + xy - 1 = 0.}$

3.– Tous les points m_n sont sur Γ :

Par récurrence :
— initialisation : $m_0 \in \Gamma$ d'après le calcul précédent
— incrémentation : $m_n \in \Gamma \iff 1,25x_n^2 + y_n^2 + x_n y_n - 1 = 0$
Calculons alors $1,25x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + x_{n+1}y_{n+1} - 1$. Cela donne :
$1,25(x_n + 0,8y_n)^2 + (-x_n + 0,2y_n)^2 + (x_n + 0,8y_n)(-x_n + 0,2y_n) - 1$
$= \dots$
$= 1,25x_n^2 + y_n^2 + x_n y_n - 1 = 0$ d'après l'hypothèse : $m_{n+1} \in \Gamma$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\forall n, m_n \in \Gamma$.

B.— INSCRIPTION DE LA COURBE Γ DANS UN PARALLÉLOGRAMME

1.– Intersection de Γ avec des droites "verticales" :

Les coordonnées des points d'intersection sont solution du système

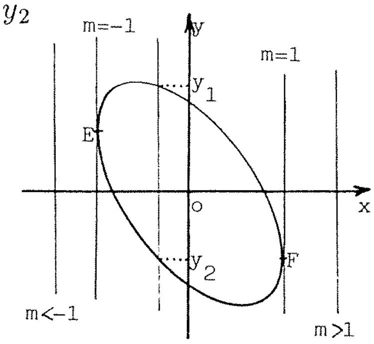
$$\begin{cases} 1,25x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \\ x = m \end{cases}.$$

En particulier les ordonnées y sont racines de l'équation :

$$\begin{aligned} & y^2 + my + 1,25m^2 - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow & (y+0,5m)^2 - 0,25m^2 + 1,25m^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (y+0,5m)^2 = 1 - m^2 \end{aligned}$$

Donc si

$1 - m^2 < 0 \Longleftrightarrow m < -1$ ou $m > 1$: pas de solution
$1 - m^2 = 0 \Longleftrightarrow m = \pm 1$: une racine double : la droite est tangente à Γ
$1 - m^2 > 0 \Longleftrightarrow -1 < m < 1$: deux racines y_1 et y_2

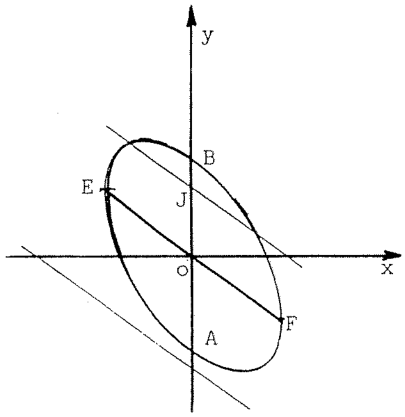


2.– Ensemble des milieux des points d'intersection :

L'ordonnée du milieu est $1/2(y_1 + y_2)$. Or $y_1 + y_2$, somme des racines de l'équation, vaut $-m$: donc l'ordonnée du milieu vaut $-m/2$. Or son abscisse vaut m : Le milieu appartient donc à la droite $y = (-1/2)x$.

L'ensemble des points I, lorsque m varie entre -1 et 1 est donc le **segment de droite** $[E, F]$ où E a pour coordonnées $\binom{-1}{0.5}$ et $F\binom{1}{-0,5}$.

3.– Intersection avec des droites parallèles à $[E, F]$



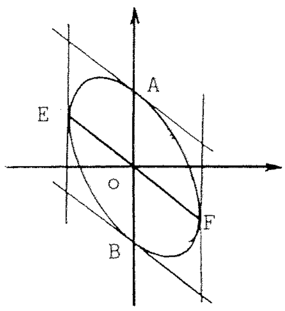
On doit résoudre :

$$\begin{cases} 1,25x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \\ y = (-1/2)x + m \end{cases}$$

D'où $1,25x^2 + (-0,5x+m)^2 + (-0,5x+m)x - 1 = 0$
$\Longleftrightarrow x^2 = 1 - m^2$:
si $m < -1$ ou $m > 1$: pas d'intersection
si $m = 1$: une racine double : tangence
si $-1 < m < 1$: deux racines x_1 et x_2.

Alors $x_J = 1/2(x_1 + x_2) = 0$: J **est sur le segment vertical** $[AB]$.

4.– Tangentes à Γ aux points A, B, E et F :



La situation de tangence est caractérisée par la racine double dans l'équation du second degré :
les tangentes en A et B sont parallèles à $[EF]$
les tangentes en E et F sont parallèles à $[AB]$.

C.— TRANSFORMATION DE Γ EN UN CERCLE

1.– Applications affines transformant $[A, B] \cup [E, F]$ en $[A, B] \cup [C, D]$

- On aura $f([A, B] \cap [E, F]) = f([A, B] \cap [C, D])$ c'est-à-dire $f(0) = 0$.

• En outre, f conservant les barycentres, tout point intérieur à l'un des diamètres aura pour image un point intérieur à l'un ou l'autre des deux diamètres : en effet

$$\begin{aligned} M \in]A,B[&\Longleftrightarrow \exists \alpha > O \text{ et } B > 0 \text{ tels que } M \text{ soit barycentre de } (A,\alpha) \text{ et } (B,\beta) \\ &\Longleftrightarrow f(M) \text{ barycentre de } (f(A),\alpha) \text{ et } (f(B),\beta) \text{ avec } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \\ &\Longleftrightarrow f(M) \in]f(A), f(B)[. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'image d'une extrémité sera aussi une extrémité de segment.
• A a donc quatre images possibles : A, B, C ou D.
Discutons alors selon les images de O, A et E, qui détermine complètement f :

si $[A,B] \mapsto [A,B]$ et $[E,F] \mapsto [C,D]$		si $[A,B] \mapsto [C,D]$ et $[E,F] \mapsto [A,B]$	
$A \mapsto A$	$A \mapsto B$	$A \mapsto C$	$A \mapsto D$
$E \mapsto C \Rightarrow \begin{matrix} B \mapsto B \\ F \mapsto D \end{matrix}$ formules analytiques $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}x + y \end{cases}$	$E \mapsto C \Rightarrow \begin{matrix} B \mapsto A \\ F \mapsto D \end{matrix}$ f est une symétrie d'axe KL (où K et L sont les milieux de EC et FD), de direction $\vec{\jmath}$	$E \mapsto A \Rightarrow \begin{matrix} B \mapsto D \\ F \mapsto B \end{matrix}$ formules analytiques $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - y \\ y' = -x \end{cases}$	$E \mapsto A \Rightarrow \begin{matrix} B \mapsto C \\ F \mapsto B \end{matrix}$ formules analytiques $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + y \\ y' = +x \end{cases}$
$E \mapsto D \Rightarrow \begin{matrix} B \mapsto B \\ F \mapsto C \end{matrix}$ f est une symétrie d'axe AB et de direction $\overrightarrow{ED}$	$E \mapsto D \Rightarrow \begin{matrix} B \mapsto A \\ F \mapsto C \end{matrix}$ formules analytiques $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -\frac{1}{2}x - y \end{cases}$	$E \mapsto B \Rightarrow \begin{matrix} B \mapsto D \\ F \mapsto A \end{matrix}$ formules analytiques $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - y \\ y' = x \end{cases}$	$E \mapsto B \Rightarrow \begin{matrix} B \mapsto C \\ F \mapsto A \end{matrix}$ formules analytiques $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + y \\ y' = x \end{cases}$

Huit applications affines répondent à la question, dont deux symétries axiales.

2.– L'image de Γ par σ est $\mathcal{C}$:

Les formules analytiques sont :

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -0,5x - y \end{cases}$$

Comme σ est une involution, $\sigma^{-1} = \sigma$, donc on a aussi :

$$\begin{cases} x &= x' \\ y &= -0,5x' - y'. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Longleftrightarrow 1,25x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow 1,25x'^2 + (-0,5x' - y')^2 - x'(0,5x' + y') - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow 1,25x'^2 + 0,25x'^2 + x'y' + y'^2 - 0,5x'^2 - x'y' - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x'^2 + y'^2 - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (M) \in \mathcal{C} : \text{l'image de } \Gamma \text{ est donc } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

3.– Transformation $M_n \to M_{n+1}$:

Posons $\varphi : m \to m'$ définie par :

$$\begin{cases} x' &= x + 0,8y \\ y' &= -x + 0,2y. \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'on a $\varphi(m_n) = m_{n+1}$.
Alors on peut résumer la situation par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{rccc} & & \varphi & \\ \text{sur } \Gamma : & m_n & \mapsto & m_{n+1} \\ & \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ & & ? & \\ \text{sur } \mathcal{C} : & M_n & \to & M_{n+1} \end{array}$$

Il s'ensuit que l'application qui transforme M_n en M_{n+1} est la composée

$$\sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}.$$

Or $\sigma^{-1} = \sigma$: c'est donc

$$\sigma \circ \varphi \circ \sigma.$$

Il suffit alors de calculer les formules analytiques de $\sigma \circ \varphi \circ \sigma$: cela donne :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} x \\ -0,5x - y \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} x + 0.8(-0.5x - y) \\ -x + 0.2(-0.5x - y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6x - 0.8y \\ -1.1x - 0.2y \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} 0.6x - 0.8y \\ 0.8x + 0.6y \end{pmatrix}$$

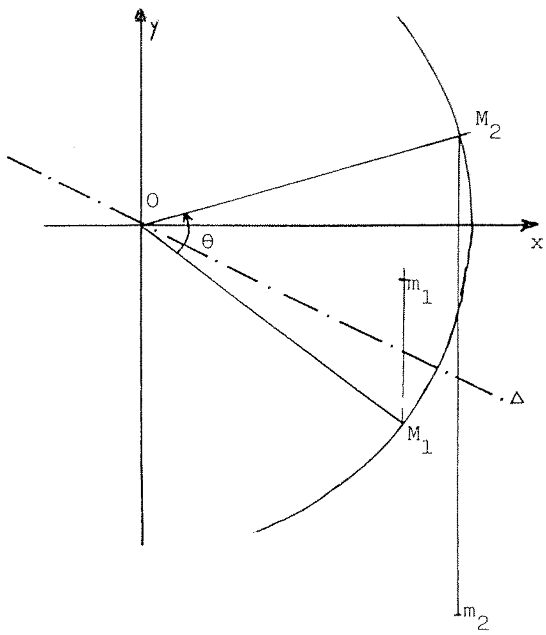
$\sigma \circ \varphi \circ \sigma$ a donc pour formules analytiques : $\begin{cases} x' = 0.6x - 0.8y \\ y' = 0.8x + 0.6y \end{cases}$

soit en posant $\cos\theta = 0.6$ et $\sin\theta = 0.8$: $\begin{cases} x' = \cos\theta x - \sin\theta y \\ y' = \sin\theta x + \cos\theta y \end{cases}$

On reconnaît les formules d'une rotation de centre O et d'angle θ

Si on la note r, on a donc $M_n \ {}^{r}\ M_{n+1}$.

- **Construction géométrique de m_{n+1} à partir de m_n.**



A partir de m_n on construit M_n, symétriquement de m_n par rapport à Δ.
Puis M_{n+1} est obtenu à partir de M_n par rotation d'angle θ.
Enfin m_{n+1} est le symétrique de M_{n+1}.

4.– Evolution quand $n \to +\infty$
Les points M_n et M_{n+1} sont à distance constante :

$$M_n M_{n+1} = 2 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Donc M_n et M_{n+1} ne peuvent jamais se rapprocher.
Il s'ensuit que leurs symétriques m_n et m_{n+1} ne peuvent pas non plus se rapprocher : la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.
Donc les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas non plus convergentes.

5.– La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle être périodique? (Raisonnement par l'absurbe)

Supposons qu'il existe p tel que $m_{n+p} = m_n$, alors $M_{n+p} = M_n$.

Or pour passer de M_n à M_{n+p}, on a effectué p fois une rotation d'angle θ : donc une rotation de $p\theta$.

Alors $M_{n+p} = M_n \Rightarrow p\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k}{p} \times \pi$.

D'après l'énoncé, si $2k > l$ et $p > 2$, alors $\sin\theta$ est irrationnel. Or $\sin\theta = 0,8 \in \mathbb{Q}$: il y a une contradiction. La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être périodique.

Les points (M_n) se répartissent donc sur le cercle et les points (m_n) sur l'ellipse. On peut montrer que cette répartition est "uniforme" dans le sens où tout point du cercle peut être approché aussi près qu'on veut par un point (M_n) pour un n bien choisi : on dit alors que l'ensemble des points (M_n) est "**dense**" dans le cercle.