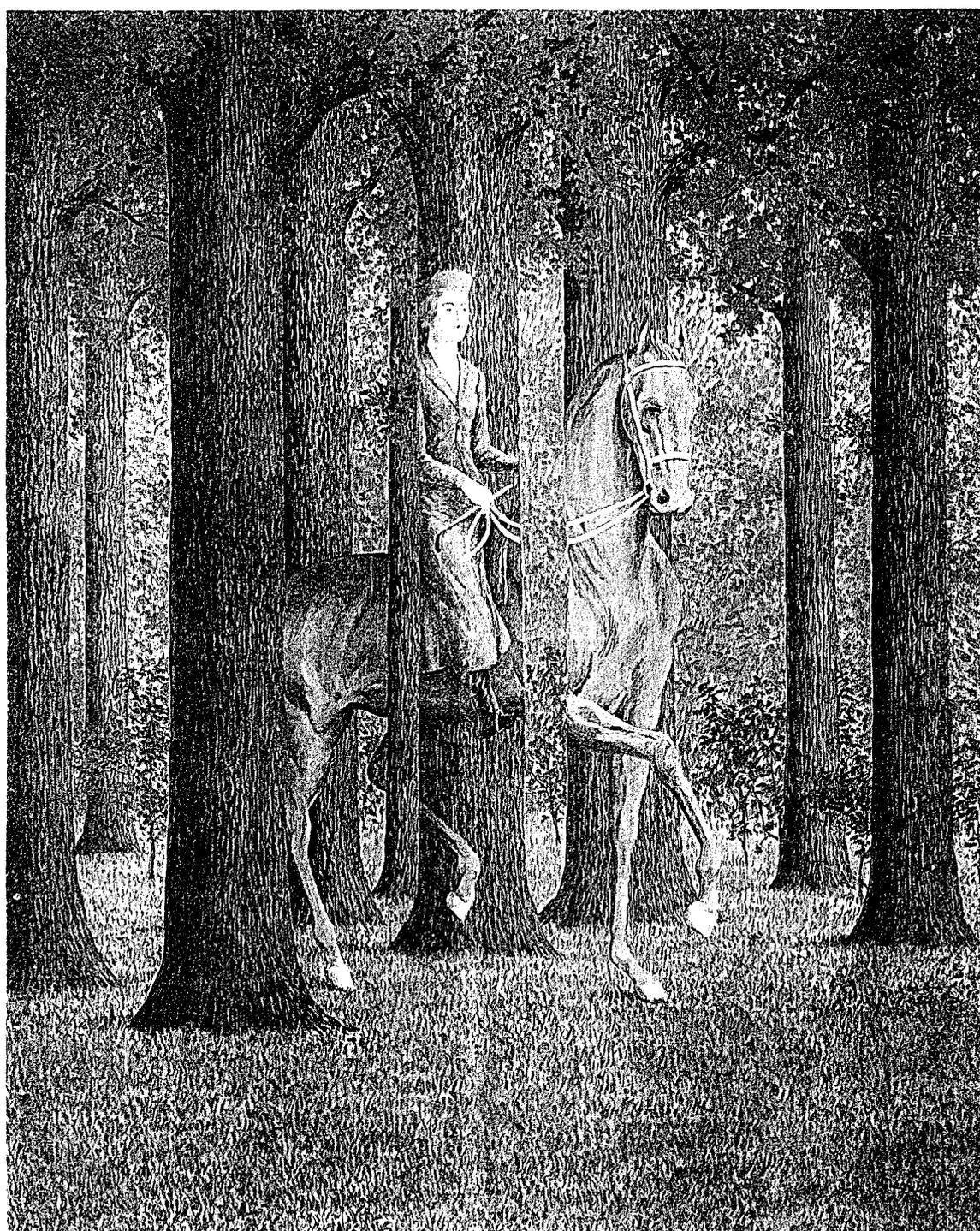


# L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG  
n° 54 - MARS 1989

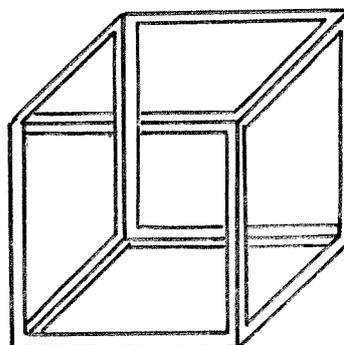
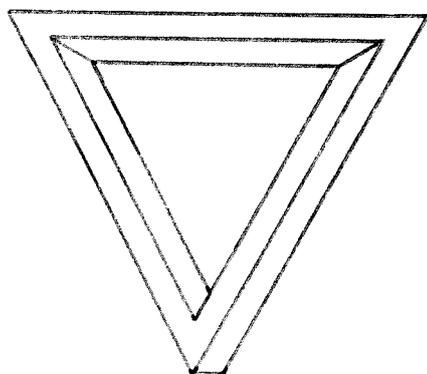
I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE : Le blanc-seing (1965)  
huile sur toile de MAGRITTE.

D'après l'auteur, "*les choses visibles peuvent toujours cacher d'autres choses visibles. La femme qui passe devant les quatre arbres les cache. Les autres arbres la cachent. Le Blanc-seing, c'est l'autorisation qu'elle a de faire ce qu'elle fait*".

Dans ce tableau, MAGRITTE soulève le problème de la représentation plane d'objets de l'espace. Localement, il est toujours possible d'interpréter logiquement l'image. Globalement cela est impossible. Il y a dislocation de l'image et les morceaux ont été disposés de façon ambiguë. C'est une situation analogue que l'on retrouve dans les images ci-dessous :



## LE NIVEAU BAISSÉ! LE NIVEAU MONTE!

Non, il ne s'agit pas de celui des élèves, mais de celui de '*L'Ouvert*'. Nous sommes bien tous conscients que la qualité de ce périodique n'est pas d'un niveau constant et d'un intérêt égal d'un numéro au suivant. Obtenir des articles est une course sans fin. Faute d'un véritable choix nous assurons la régularité de la parution (\*) à défaut de la régularité du niveau.

Chacun trouve midi à sa porte et tel article sur telle spécialité paraîtra trop facile ou de peu d'intérêt au spécialiste mais trop difficile ou sans intérêt pour celui qui travaille dans un tout autre domaine. Ce qui prouve que trouver le juste milieu, vulgariser correctement n'est pas si facile. Ayons donc du respect pour ceux qui y réussissent.

'*L'Ouvert*' a plusieurs rôles à jouer :

— Vulgariser ou populariser les recherches mathématiques actuelles. Et c'est essentiellement aux enseignants du supérieur ou aux chercheurs que nous demandons d'écrire.

— Diffuser les nouveautés ou les expériences pédagogiques. Et c'est tous les enseignants qui peuvent être auteur.

Mais dans les deux cas, il s'agit d'écrire et d'écrire non pas pour ses pairs mais pour d'autres dont l'intérêt doit être suscité soit pour approfondir ses connaissances sur le sujet, soit pour l'utiliser en cours de bien des façons (devoir, T.D., culture, ...). L'idée est d'écrire pour un niveau TC ou DEUG, car nous savons par expérience que l'on a toujours tendance à viser trop haut (pour faire monter le niveau).

C'est pourquoi nous nous permettons de lancer un appel pour obtenir des projets d'articles et des articles. Ce n'est qu'ainsi que '*L'Ouvert*', restant en contact avec la réalité mathématique quotidienne, assurera la diffusion de la culture mathématique et restera un trait d'union entre ses lecteurs.

J. LEFORT.

## II

---

(\*) Il faut oser le dire quand un changement de matériel informatique a entraîné un bon mois de retard dans la parution du dernier numéro.

## SOMMAIRE

N° 54 – 1989

◇ <i>Notre couverture</i> .....	I
◇ <i>Editorial : Le niveau baisse ! Le niveau monte</i> .....	II
◇ <i>Soucoupes volantes et caustiques</i> , par M. AUDIN .....	1
◇ <i>Le calcul des dérivations d'Arbogast</i> , par J.-P. FRIEDELMEYER .....	11
◇ <i>Géométrie analytique sans coordonnées... ou presque</i> , par J. MARTINET .....	18
◇ <i>La grande saga des calendriers</i> , par J. LEFORT .....	27
◇ <i>Les lycéens face à l'enseignement des maths</i> , par G. BARBANÇON, C. DUPUIS, R. DUVAL et F. PLUVINAGE .....	33
◇ <i>Une expérience pédagogique</i> , d'après S. SCHANNE .....	39
◇ <i>P.A.E. au collège C. Munch</i> , par F. REISS .....	41
◇ <i>A vos stylos</i> , par 'L'Ouvert' .....	46

### L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT
- ◇ *Correspondance à adresser à* :  
Université Louis Pasteur  
Bibliothèque de l'I.R.E.M.  
10, rue du Général Zimmer  
67084 STRASBOURG CEDEX  
Tél. : 88-41-64-40
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*  
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace  
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace  
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
- ◇ Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent  
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro* : 25.- F

# SOUCOUPES VOLANTES ET CAUSTIQUES

## (AVEC POINT DE VUE SUR L'ARC-EN-CIEL)

Michèle AUDIN

La récente réforme des études de licence en mathématiques a complètement évincé des programmes la théorie des enveloppes. Sans vouloir discuter ici d'une réforme à beaucoup d'égards bénéfique, je ne puis que trouver cette disparition très regrettable; rappelons, pour mémoire, le rôle des enveloppes dans la théorie des équations différentielles (intégrales singulières), et des équations aux dérivées partielles; mais est-il concevable qu'un professeur de lycée ait quelque usage des problèmes de Géométrie élémentaire, sans connaître — ne fût-ce qu'approximativement — les phénomènes généraux de cette théorie? Même d'un point de vue pratique, la théorie des enveloppes rend compte de phénomènes familiers, sans elle inexplicables; pour s'en convaincre, il suffit d'observer, à l'intérieur d'un bol hémisphérique de café au lait convenablement éclairé, la structure cuspidale des caustiques de réflexion, et leur variation lorsque l'éclairage se modifie.

René THOM. 'Journal de Math.' Tome XLI - Fasc. 2 (1962)

... On peut préférer le café noir comme sur la figure 1, c'est plus lisible.

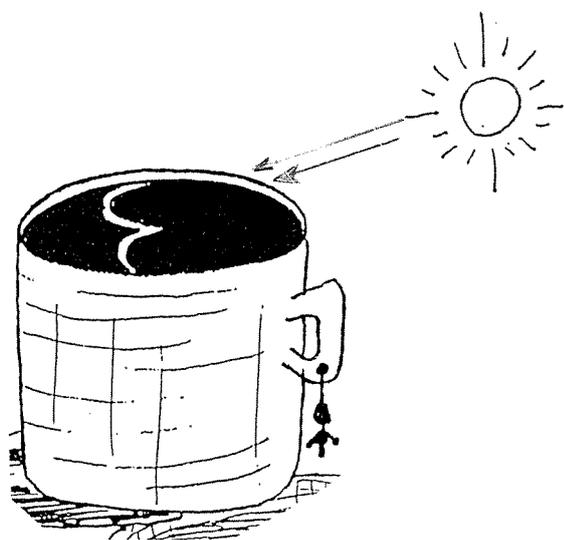


Figure 1

Schéma du dispositif expérimental.

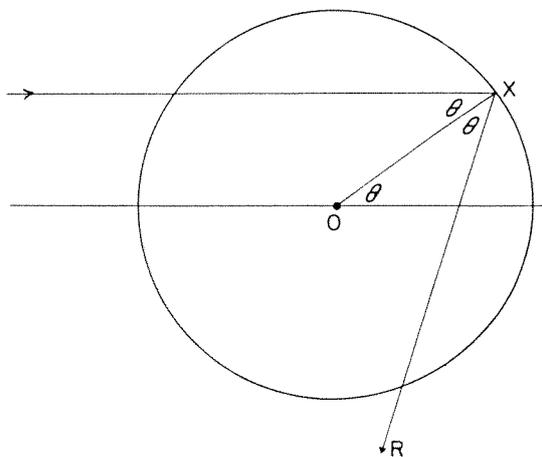


Figure 2

L'équation du rayon réfléchi  $xR$  est  $(y - \sin \theta) \cos 2\theta = (x - \cos \theta) \sin 2\theta$  en éliminant  $\theta$  entre cette équation et sa différentielle par rapport à  $\theta$  on trouve l'enveloppe.

Sur la figure 3, on n'a pas dessiné l'enveloppe : c'est la concentration de l'encre ayant servi à dessiner les rayons réfléchis qui la fait apparaître.

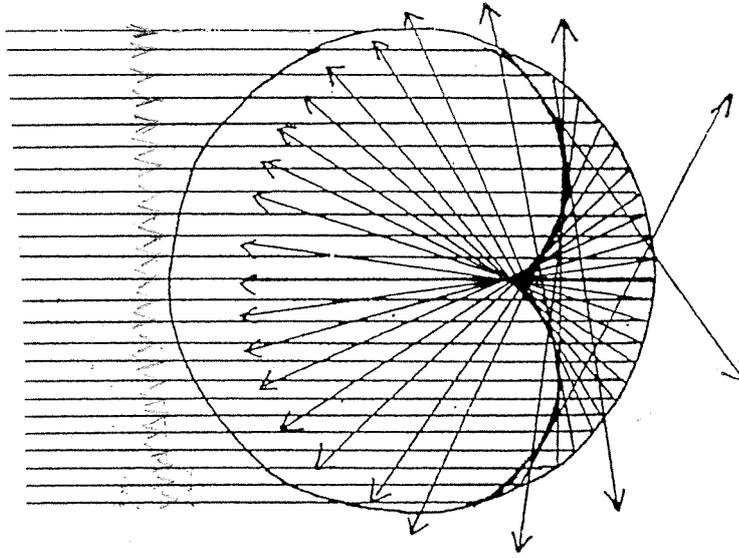
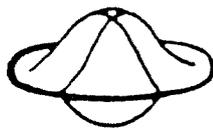


Figure 3

De façon tout à fait analogue, il y a concentration de l'intensité lumineuse le long de l'enveloppe des rayons lumineux dans la tasse de café. C'est pourquoi cette enveloppe reçoit le nom de CAUSTIQUE (du grec qui signifie *brûlant*). On remarquera que la courbe lumineuse elle-même a un point singulier (un point de rebroussement) où l'intensité de la lumière est encore plus grande.

• Les soucoupes volantes : des caustiques ?



engendrée par  
la rotation de :

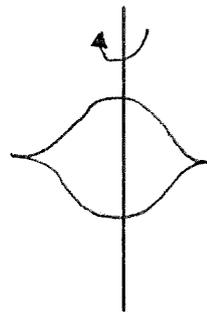


Figure 4

La surface représentée sur la figure 4 a quelques titres à être appelée **caustique**. Elle a assez intéressé l'astrophysicien soviétique ZELDOVITCH pour que, après l'avoir utilisée pour donner un modèle de la formation des galaxies, il l'ait encore mise à contribution pour proposer une explication du phénomène *ovni*. Les objets *soucoupoïdes* très lumineux décrits par les observateurs d'ovnis ne seraient que ces caustiques, *objets* imaginaires mais bien visibles (comme la courbe à la surface du café) créés par la réflexion et la réfraction de la lumière, à travers les nuages par exemple.

SOUCOUPES VOLANTES ET CAUSTIQUES

Cette explication, sans nul doute séduisante, est combattue par un théorème démontré il y a deux ans par un jeune mathématicien soviétique, TCHÉKANOV : la surface de la figure 4 n'est pas une enveloppe de rayons lumineux".

• ... Les extra-terrestres n'ont pas dit leur dernier mot ...

Pour comprendre cette discussion, il va falloir aborder plus sérieusement la théorie en proposant un modèle mathématique.

Considérons d'abord l'espace dans lequel la lumière se propage, ici, pour simplifier, ce sera  $\mathbb{R}^m$ , espace euclidien de dimension  $m$  avec  $m = 3$ , modèle au moins local de l'espace dans lequel nous vivons ou bien  $m = 2$ , le seul dans lequel je sais dessiner.

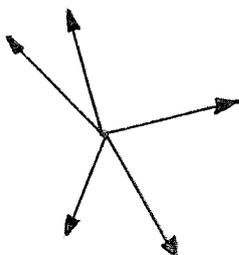
Le milieu est supposé *homogène et anisotrope* de façon que le **principe de Fermat** oblige les rayons lumineux à être rectilignes.

A chaque point  $x$  de cet espace  $\mathbb{R}^m$ , on associe tous les vecteurs d'origine  $x$ . Ainsi on considère  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , l'espace des couples  $(x, \xi)$  où  $x$  est un point de  $\mathbb{R}^m$  et  $\xi$  est un vecteur d'origine  $x$ .

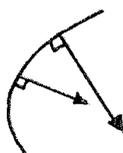


Figure 5

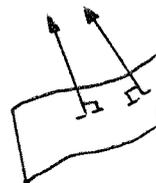
Soit  $S_0$  une *source lumineuse* dans  $\mathbb{R}^m$  (c'est-à-dire un point, une courbe si  $m = 2$ , ou une surface si  $m = 3$ ) de chaque point de laquelle partent des rayons lumineux dans des directions normales à  $S_0$ .



$m = 2$  ou 3



$m = 2$



$m = 3$

Figure 6

On peut toujours supposer que  $S_0$  est de dimension  $m - 1$  et qu'en chaque point il n'y a qu'une seule direction normale à  $S_0$  (le cas d'une source ponctuelle étant, par exemple, assimilé à un petit cercle ou une petite sphère suivant la valeur de  $m$ ).

Il va y avoir concentration de l'intensité de la lumière le long de l'enveloppe de ces rayons orthogonaux à  $S_0$ ; c'est-à-dire de la *développée* de  $S_0$ .

Soit  $x$  un point de  $S_0$  et  $\vec{n}(x)$  un vecteur unitaire normal à  $S_0$ , dans le sens de propagation des rayons lumineux. On considère la surface

$$S_t = \{x + t\vec{n}(x) / x \in S_0\}$$

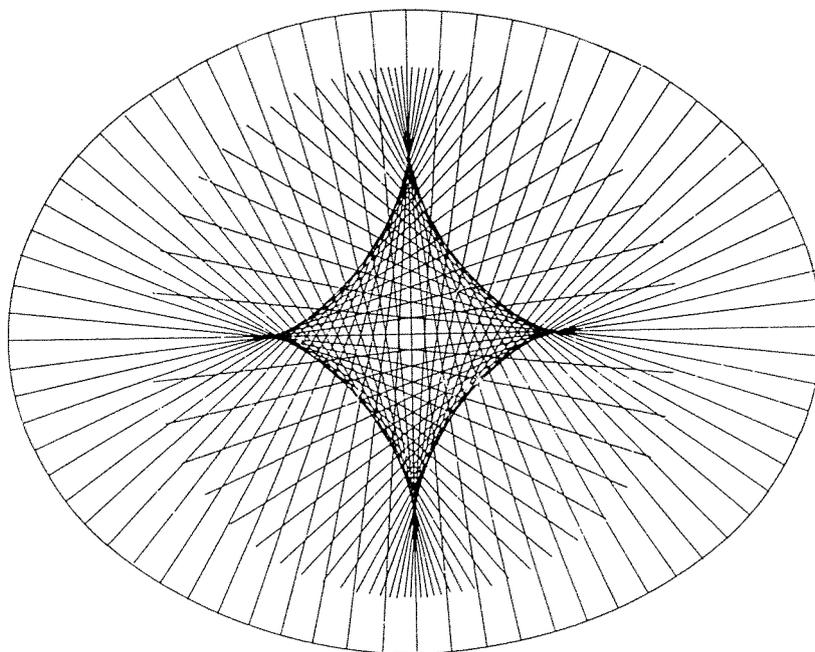
qui est une surface *parallèle* à  $S_0$ . Au lieu de regarder chaque parallèle individuellement, on peut considérer le sous-espace de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$$NS_0 = \{(x + t\vec{n}(x), \vec{n}(x)) / x \in S_0, t \in \mathbb{R}\}$$

et son image par la projection

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, \xi) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Rappelons le célèbre principe de HUYGENS : “*l’enveloppe des rayons normaux (la caustique) est l’image de l’ensemble des points singuliers de  $f$* ”.



*Figure 7*

Le principe de HUYGENS.

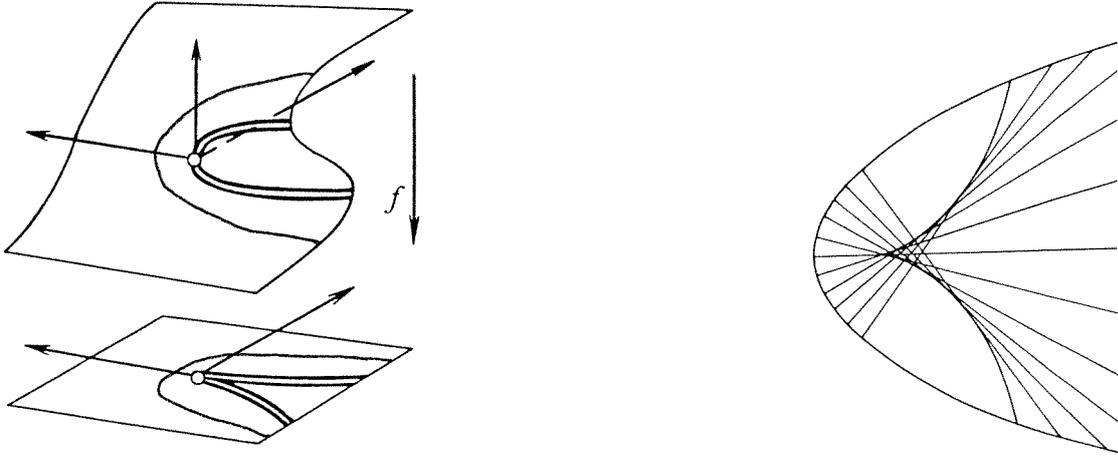


Figure 8

La caustique n'est autre que le contour apparent de  $NS_0$  dans la projection.

### • Essai de définition d'une caustique

$NS_0$  n'est pas n'importe quelle *sous-variété* de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ; elle a notamment les deux propriétés :

- $\dim NS_0 = m$  puisque  $x$  est sur  $S_0$  de dimension  $m - 1$  et que  $t$  est dans  $\mathbb{R}$  : ( $m - 1 + 1 = m$ ),
- le *produit scalaire*  $\xi \cdot dx$  sur  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  restreint à  $NS_0$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \vec{n}(x) \cdot (dx + t d\vec{n}(x) + dt \vec{n}(x)) &= \\ = \vec{n}(x) dx + t \vec{n}(x) d\vec{n}(x) + dt \|\vec{n}(x)\|^2 &= dt \end{aligned}$$

est une **différentielle exacte** puisque  $\vec{n}(x) \cdot dx = 0$  par définition de  $\vec{n}$  et  $\vec{n} \cdot d\vec{n} = 0$  en dérivant  $\|\vec{n}\|^2 = 1$ .

**Première définition :** La caustique est l'image des points singuliers de la projection sur le premier facteur d'une sous-variété  $L$  de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  sur laquelle  $\xi \cdot dx$  est exacte (voir la fig. 8).

Exemple : La soucoupe volante (Fig. 4). Voilà comment on trouve des équations de l'engin.  $L$  est l'image de  $F$  :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( \frac{1}{3}x^3 + x(y^2 + z^2 - 1), y, z; -x, x^2y, x^2z \right) \end{aligned}$$

On vérifie que  $\xi \cdot dx$  est exacte. La projection  $f$  est :

$$f(x, y, z) = \left( \frac{1}{3}x^3 + x(y^2 + z^2 - 1), y, z \right)$$

et pour les points singuliers on trouve :

$$\begin{aligned} \Sigma(f) &= \{(x, y, z) / \frac{\partial f}{\partial x} = 0\} \\ &= \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \end{aligned}$$

c'est donc la sphère unité dans  $\mathbb{R}^3$ , et la caustique  $C = f(\Sigma(f))$  est l'ensemble

$$\{(-\frac{2}{3}x^3, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

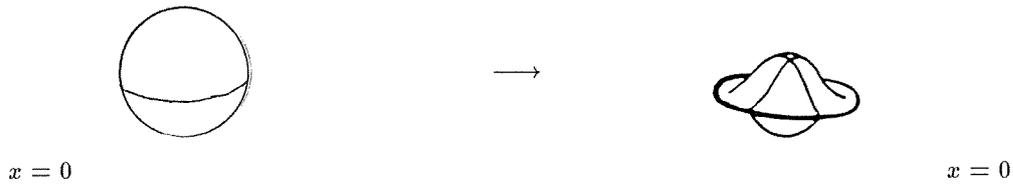


Figure 9

$$\text{La caustique } C = f(\Sigma(f)) = \{(-\frac{2}{3}x^3, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Au commencement, il y a une source lumineuse, c'est-à-dire une sous variété  $NS_0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  sur laquelle  $\xi \cdot dx$  est exacte.

Ensuite la lumière émise traverse un système optique : lentille, miroir, ... , nuage, rideau de pluie... Il n'y a plus de raison de penser que le nouveau système de rayons lumineux *diffusé* soit de la forme  $NS_0$ . Mais c'est dans les axiomes de la théorie que la traversée d'un diffuseur équivaut à une transformation *canonique* de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  : **la forme  $\xi \cdot dx$  reste exacte**, d'où la définition choisie.

Malheureusement, la définition ci-dessus tolère des objets qui ne sont sûrement pas des enveloppes de rayons lumineux comme le prouve l'exemple suivant :

Considérons la sphère de dimension 3, sphère unité de  $\mathbb{R}^4$  :  $S^3 = \{(x, y, z, t) / x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$  et l'application :

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (x, y, z; 2tx, 2ty, 2tz) \end{aligned}$$

Ici  $f$  est particulièrement simple :

$$f(x, y, z, t) = (x, y, z).$$

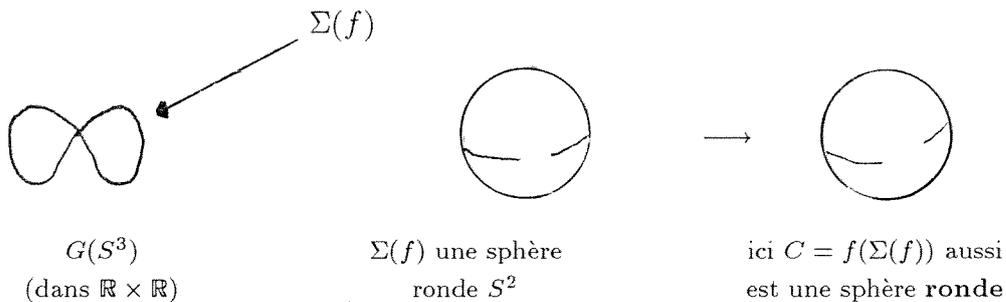
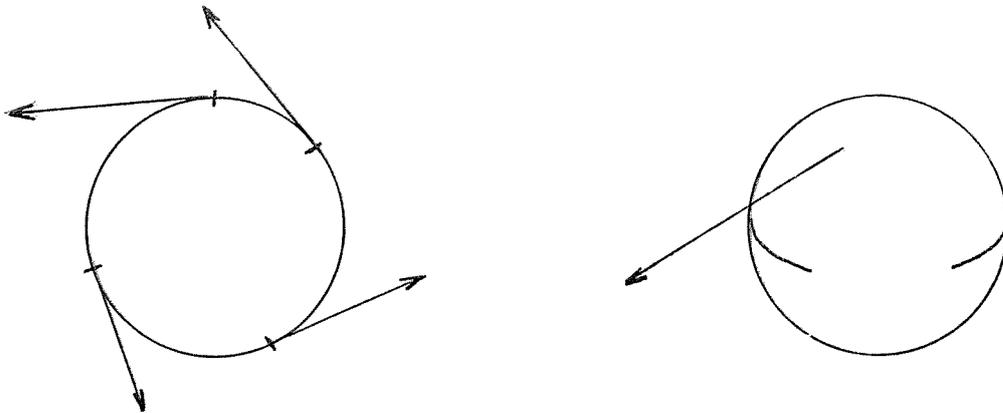


Figure 10

## SOUCOUPES VOLANTES ET CAUSTIQUES

Avec cette fonction  $G$ , on construit donc une caustique au sens de la définition proposée et qui est une sphère  $S^2$  de l'espace euclidien ordinaire.

Mais cette sphère  $S^2$  n'est sûrement pas une enveloppe de rayons lumineux.



**Le cercle :** on peut trouver un champ de vecteurs tangents non nuls.

**La sphère :** on ne peut PAS trouver un champ de vecteurs tangents non nuls (théorème de la sphère chevelue).

*Figure 11*

La définition n'est donc pas bonne. En fait  $NS_0$  a une jolie propriété que nous n'avons pas exploitée

$$NS_0 \subset \{(x, \xi) / \|\xi\|^2 = 1\}.$$

Il se trouve que les variétés de l'optique géométrique telles que  $NS_0$  et ce qu'il en advient après traversée d'un diffuseur satisfont ce type d'équations (équation de l'**eikonal**) : ce sont des sous-variétés de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  sur lesquelles  $\xi \cdot dx$  est exacte et qui sont contenues dans une hypersurface *convexe dans les fibres*. Ici cette hypersurface est  $\mathbb{R}^m \times S^{m-1}$  et dans chaque fibre c'est une sphère parce qu'on a supposé l'indice de réfraction constant.

Le théorème de TCHÉKANOV dit tout simplement que si  $L \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  est une telle sous-variété, alors pour la projection :

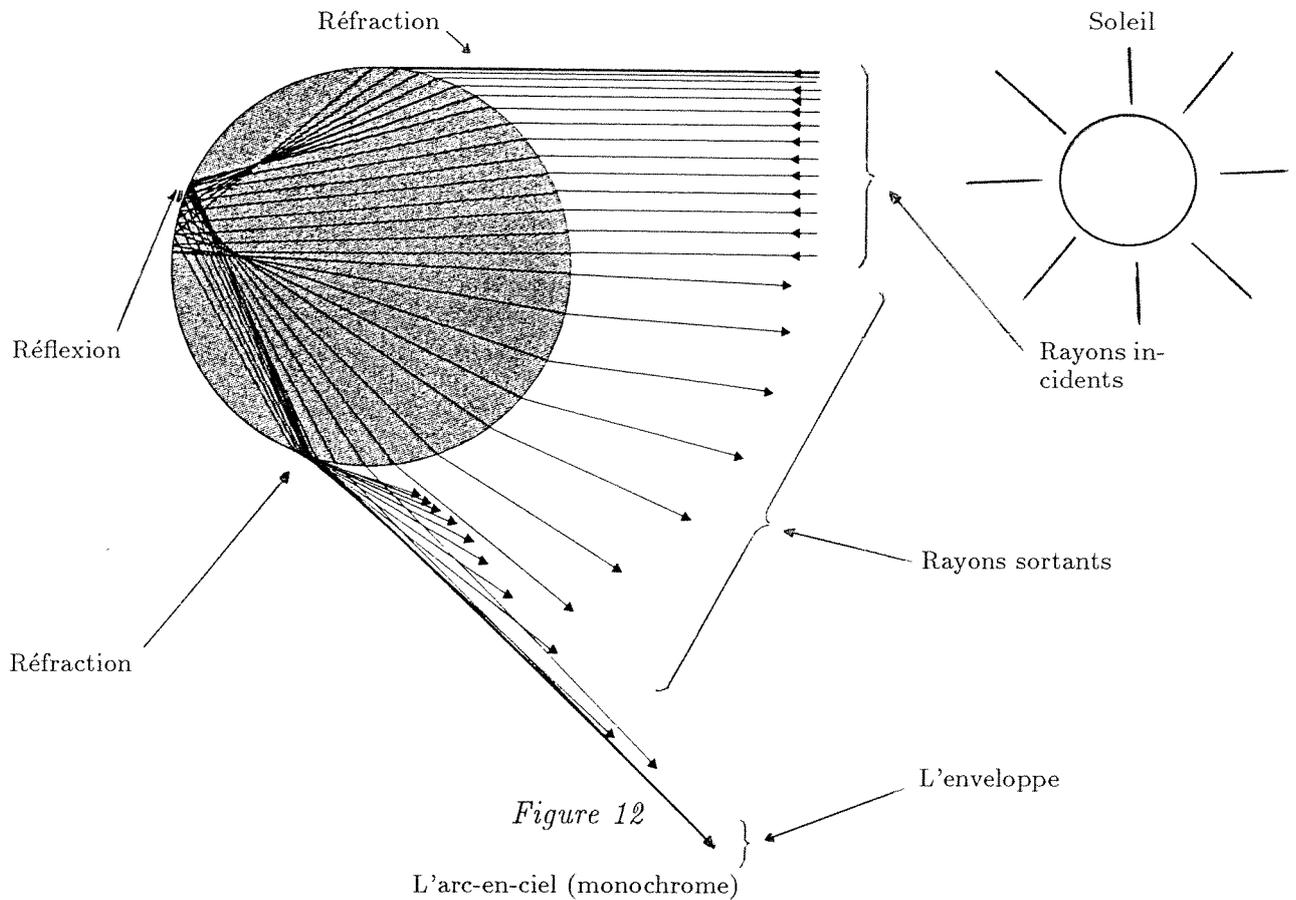
$$f : L \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

le lieu singulier  $\Sigma(f) \subset L$  lui-même doit avoir un champ de vecteurs tangents non nuls.

Ceci interdit bien la soucoupe volante puisqu'on a vu que dans ce cas la variété critique  $\Sigma(f)$  est une sphère ronde (voir la fig. 9).

Une *soucoupe volante* n'étant pas une enveloppe de rayons lumineux, n'étant pas une caustique, cela ne prouve pas pour autant l'existence d'extra-terrestres puisque les dites *soucoupes volantes* aperçues dans le ciel pourraient être des **manifestations indirectes** de l'existence de caustiques. En voici un exemple familier.

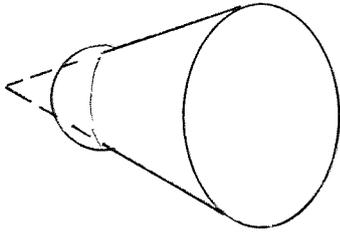
• L'arc-en-ciel, une manifestation de caustiques.



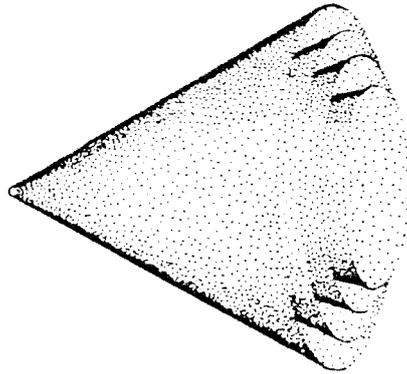
Un rayon monochromatique rencontre une goutte de pluie.

Des rayons incidents parallèles et monochromatiques se réfractent et se réfléchissent dans une goutte de pluie et en ressortent. L'enveloppe des rayons sortants dessinés sur la figure a une asymptote. Grâce à la symétrie sphérique de la goutte de pluie, l'enveloppe de tous les rayons sortants a un cône asymptote dont l'angle est fonction de l'indice de réfraction qui lui-même dépend de la couleur.

SOUCOUPES VOLANTES ET CAUSTIQUES

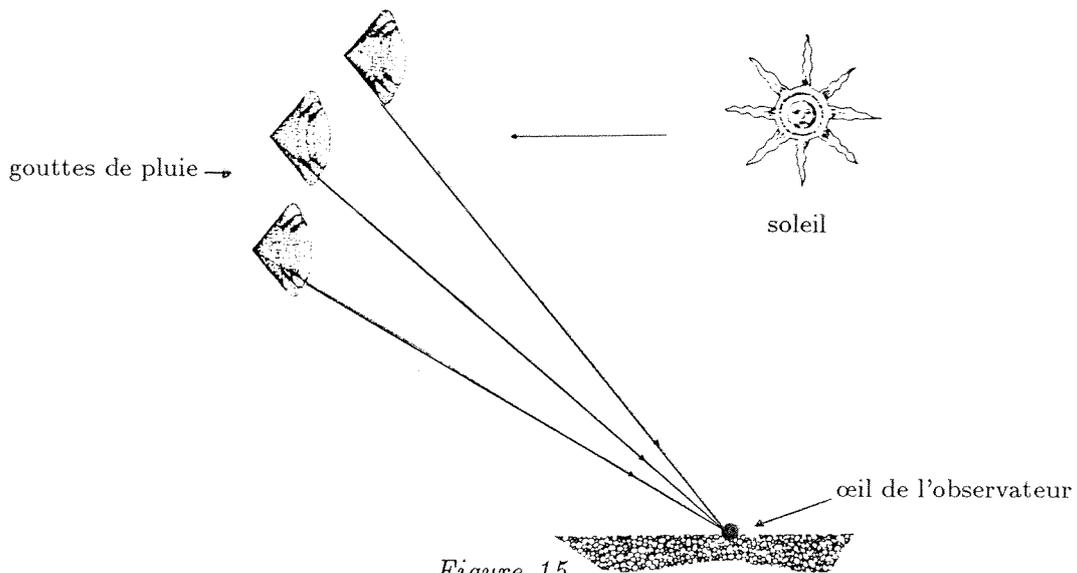


*Figure 13*  
 Vue de loin l'enveloppe se confond avec son cône asymptote.



*Figure 14*  
 De chaque goutte et pour chaque couleur il sort un cône.

Pour chaque goutte et pour chaque couleur il sort un cône. Les cônes correspondants à toutes les gouttes ont leurs axes parallèles.



*Figure 15*  
 L'Arc-en-ciel (polychrome, c'est plus joli).

On peut ne considérer que les gouttes contenues dans un plan  $\mathcal{P}$ . L'ensemble des points de  $\mathcal{P}$  d'où une droite issue selon la direction  $\alpha$  passe par le point  $O$  est l'intersection du cône de sommet  $O$  et d'angle  $\alpha$  avec le plan  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire un cercle.

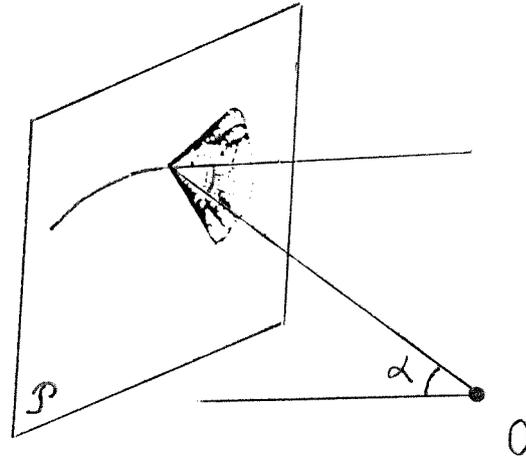


Figure 16

L'observateur verra donc arc de cercle brillant (cas monochromatique!) soit en réalité ... un arc-en-ciel.

Ainsi l'arc-en-ciel, qui n'est pas une caustique, est **la manifestation visible de l'existence des caustiques** produites par les gouttes de pluie.

### Bibliographie

*Une référence générale très accessible (mais pas parfaite!) :*

“Oh! catastrophe” (les aventures de Rose Polymath).— B.D. de I. STEWART.

*Plus de contenu :*

Article de THOM sur la “théorie des enveloppes”.— Journ. de Math. Pures et Appliquées (1962).

Livre d'ARNOLD.— “Théorie des catastrophes”.— (en russe, ou en anglais chez Springer) (1983).

*Un peu plus général :*

“Geometric Asymptotics” (de GUILLEMIN et STERNBERG) A.M.S.

Il y a un traité d'optique ... lumineux, de LUNEBURG, mais assez introuvable.

*L'article de Tchekanov*

dans la revue Funkts. Anal. (1986).

*Sur l'Arc-en-Ciel :*

The Rainbow, par Carl BOYER.

# LE CALCUL DES DÉRIVATIONS D'ARBOGAST

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Dans un précédent article (*'L'Ouvert'* n° 53) j'avais tenté de retracer la vie et l'œuvre de ce mathématicien alsacien oublié du 18<sup>e</sup> siècle : Louis François ARBOGAST. Je voudrais montrer ici que cet oubli est injuste au moins sur une contribution originale et extrêmement performante au calcul algébrique formel et qui peut à mon avis intéresser les professeurs de mathématiques encore aujourd'hui. Cette contribution est développée dans un solide volume de 400 pages environ, paru à Strasbourg en 1800 chez Berger-Levrault, et qui, à défaut d'être très connu en France, eut très vite un immense succès auprès de l'école mathématique anglaise du 19<sup>e</sup> siècle, en particulier DE MORGAN et CAYLEY. Il s'agit du *'Calcul de dérivations'*.

Comme l'indique le titre, ce livre donne d'abord des méthodes de **calcul** formel, ce mot ayant l'acception que les anglais donnent au mot *'calculus'* pour désigner le calcul différentiel et intégral. Il est important aussi de ne pas se leurrer quant au sens du mot *'dérivation'* qui chez ARBOGAST doit être pris dans sa signification originelle et étymologique : *"avoir son origine dans ... , se déduire de ... , découler de ..."*. C'est pourquoi nous utiliserons le mot *"différentiation"* pour le passage de  $f(x)$  à  $\frac{df}{dx} = f'(x)$ , réservant le terme *"dérivation"* à l'usage qu'en fait ARBOGAST et que je vais expliquer maintenant.

## 1.— Développement d'une puissance de polynôme.

Déjà en 1697, Abraham de MOIVRE avait tenté de généraliser la formule du binôme de NEWTON en proposant *"une méthode pour élever à n'importe quelle puissance un polynôme infini"* c'est-à-dire le développement de  $(az + bz^2 + cz^3 + \dots)^m$ ; et il donne explicitement les coefficients de  $z^m, z^{m+1}, z^{m+2}$  jusqu'à  $z^{m+6}$ . Aujourd'hui l'analyse combinatoire nous permet d'écrire

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p)^r = \sum_{n=0}^{n=pr} A_n x^n$$

où le coefficient  $A_n$  est donné par

$$A_n = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \varpi!} \cdot a_0^\alpha \cdot a_1^\beta \cdot a_2^\gamma \dots a_p^\varpi$$

cette dernière somme étant effectuée sur tous les ensembles d'entiers naturels  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  vérifiant simultanément :

$$(1) \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \dots + \varpi = r \\ \beta + 2\gamma + \dots + p\varpi = n \end{cases}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}(a + bx + cx^2)^3 &= a^3 + 3a^2bx + (3a^2c + 3ab^2)x^2 + (6abc + b^3)x^3 \\ &= +(3ac^2 + 3b^2c)x^4 + 3bc^2x^5 + c^3x^6.\end{aligned}$$

Mais la difficulté devient vite énorme pour trouver les coefficients  $A_n$  lorsque  $p$  et  $r$  augmentent. Le ‘*Calcul des dérivations*’ d’ARBOGAST donne une réponse à la fois simple et efficace à ce problème, et cela de deux façons :

- l’une **récurrente**, permettant de déduire **directement, sans aucun calcul combinatoire**, le coefficient  $A_{n+1}$  du coefficient  $A_n$ ,
- l’autre **ponctuelle**, permettant de calculer  $A_n$  **isolément** pour un indice  $n$  fixé, sans avoir besoin de calculer les coefficients d’indice inférieur.

Voici le principe sur lequel est basée cette méthode. Soit  $u$  une fonction développée en série entière selon la formule de TAYLOR (il s’agit en fait d’un développement formel, ARBOGAST ne s’occupant pas ici de problèmes de convergence). On a donc :

$$\begin{aligned}u(t+x) &= u(t) + u'(t)x + \frac{1}{2!}u''(t)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}u^{(n)}(t)x^n + \dots \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots\end{aligned}$$

avec  $a_0 = u(t)$ ;  $a_1 = u'(t)$ ;  $a_2 = \frac{1}{2!}u''(t)$ ;  $\dots$ ;  $a_n = \frac{1}{n!}u^{(n)}(t)$ . Ces coefficients  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des fonctions qui “*dérivent*” les unes des autres et que nous noterons avec ARBOGAST

$$a_1 = Da_0 ; a_2 = Da_1 = D^2a_0 ; \dots, a_n = D^n a_0$$

et pour tous entiers naturels  $n$  et  $p : n \geq 0 ; p \geq 1 ; D^p a_n = a_{n+p}$ .

Réciproquement, ARBOGAST pose que tout développement formel, fini ou non, de la forme

$$a + bx + cx^2 + \dots \text{ etc } \dots$$

où  $a, b, c, \dots$  sont des coefficients **indéterminés**, peut être considéré comme le développement d’une fonction  $u$  telle que  $u(t+x) = a + bx + cx^2 + \dots$  avec

$$a = u(t) ; b = u'(t) = Da ; c = \frac{1}{2!}u''(t) = D^2a = Db \text{ etc } \dots$$

Soit alors  $\varphi$  une autre fonction, telle que,

$$\varphi[u(t+x)] = \varphi(a + bx + cx^2 + \dots) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_nx^n + \dots$$

On a  $A_0 = \varphi(a)$  appelé **origine des dérivations** et  $A_n = D^n A^0 = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (\varphi_0 u)(t)$  dérivé d’ordre  $n$  pour lequel ARBOGAST établit la formule fondamentale suivante :

$$\begin{aligned}D^n A_0 &= (\Delta^n A_0)b^n + (\Delta^{n-1} A_0)Db^{n-1} + \dots \\ &+ (\Delta^{n-k} A_0)D^k b^{n-k} + \dots + (\Delta A_0)D^{n-1}b \quad (2)\end{aligned}$$

LE CALCUL DES DÉRIVATIONS D'ARBOGAST

où  $\Delta^p A_0 = \frac{1}{p!} \frac{d^p}{da^k} \varphi(a)$  (différentiation classique) et  $D^s b^m$  est le dérivé de  $b^m$  d'ordre  $s$  au sens d'ARBOGAST c'est-à-dire le coefficient de  $x^s$  dans le développement de  $(b + cx + dx^2 + \dots)^m = b^m + (mb^{m-1}c)x + \dots$

Limitons nous pour l'instant au cas d'une fonction  $\varphi$  puissance, c'est-à-dire à  $\varphi(u) = u^r = (a + bx + cx^2 + \dots)^r$ . ARBOGAST démontre la double règle suivante pour "dérivée" le coefficient  $A_{n+1}$  du coefficient  $A_n$ .

Après avoir disposé les lettres suivant leur ordre de succession :

$$\boxed{R_1}$$

"On ne fera varier, dans chaque terme, que la dernière lettre ou sa puissance, en suivant les règles de différentiations, et en mettant simplement  $b$  pour  $Da$ ,  $c$  pour  $Db$ ,  $d$  pour  $Dc$  etc... sans autre coefficient que l'unité : c'est-à-dire  $Da^s = sa^{s-1}b$  ;  $Db^m = mb^{m-1}c$  etc..."

$$\boxed{R_2}$$

"On fera de plus varier "suivant les règles de différenciations" l'avant dernière lettre ou sa puissance, si elle se trouve être la lettre qui, dans l'ordre alphabétique précède immédiatement la dernière du terme ; et comme la puissance de la dernière lettre augmente alors d'une unité, on divisera par l'exposant ainsi augmenté."

Illustrons cela en supposant que  $A_n$  contienne un terme en  $a^2 b^3 c^5$ . Alors  $A_{n+1}$  contiendra par "dérivation"

$$\text{selon } \boxed{R_1} \quad 5a^2 b^3 c^4 d; \text{ selon } \boxed{R_2} \quad 3a^2 b^2 \frac{c^6}{6}.$$

Ainsi nous pouvons développer très simplement et de proche en proche n'importe quelle expression  $(a + bx + cx^2 + \dots)^r$ . Considérons par exemple  $(a + bx + cx^2 + dx^3)^5$ . L'origine des dérivations est ici  $a^5 = A_0$  qui donne

$$\text{par } \boxed{R_1} \quad A_1 = 5a^4 b \text{ lequel donne à son tour}$$

$$\text{par } \boxed{R_1} \text{ et } \boxed{R_2} \quad A_2 = 5a^4 c + 20a^3 \frac{b^2}{2} = 5a^4 c + 10a^3 b^2$$

$$\text{puis } A_3 = 5a^4 d + 20a^3 bc + 10a^2 b^3.$$

Dans  $A_4$ , comme le dérivé de  $d$  est nul :  $Dd = 0$  (il n'y a pas de terme  $ex^4$  dans l'expression initiale), le terme  $5a^4 d$  ne donne rien ni par  $\boxed{R_1}$ , ni par  $\boxed{R_2}$  (puisque  $a$  ne précède pas immédiatement  $d$ ). Par contre les deux autres termes

donneront chacun deux termes par  $\boxed{R_1}$  et  $\boxed{R_2}$

$$A_4 = 20a^3 bd + 10a^3 c^2 + 30a^2 b^2 c + 5ab^4$$

$$\text{par } \boxed{R_1} \text{ par } \boxed{R_2} \text{ par } \boxed{R_1} \text{ par } \boxed{R_2}$$

D'où le développement :

$$\begin{aligned}
 (a + bx + cx^2 + dx^3)^5 = & a^5 + 5a^4bx + (5a^2c + 10a^3b^2)x^2 \\
 & + (5a^4d + 20a^3bc + 10a^2b^3)x^3 \\
 & + (20a^3bd + 10a^3c^2 + 30a^2b^2c + 5ab^4)x^4 \\
 & + (20a^3cd + 30a^2b^2d + 30a^2bc^2 + 20ab^3c + b^5)x^5 \\
 & + (10a^3d^2 + 60a^2bcd + 10a^2b^3 + 20ab^3d + 30ab^2c^2 + 5b^4c)x^6 \\
 & + \text{etc...} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Ceci pour l'aspect récurrent de la formule d'ARBOGAST . Si nous nous intéressons à un coefficient isolément, par exemple  $A_8$ , celui-ci peut être obtenu directement par la formule (2).

$$A_8 = D^8 a^5 = (\Delta^8 a^5)b^8 + \Delta^7 a^5 D b^7 + \dots + \Delta^2 a^5 D^6 b^2 + \Delta a^5 D^7 b$$

$\Delta a^5 = 5a^4$	$\Delta^7 b = 0$
$\Delta^2 a^5 = 10a^3$	$D^6 b^2 = 0$
$\Delta^3 a^5 = 10a^2$	$D^5 b^3 = 3cd^2$
$\Delta^4 a^5 = 5a$	$D^4 b^4 = 6b^2d^2 + 12bc^2d + c^4$
$\Delta^5 a^5 = 1$	$D^3 b^5 = 20b^3cd + 10b^2c^3$
$\Delta^6 a^5 = 0$	$D^2 b^6 = 6b^5d + 15b^4c^2$
$\Delta^7 a^5 = 0$	$D b^7 = 7b^6c$
$\Delta^8 a^5 = 0$	$b^8 = b^8$

La deuxième colonne est obtenue selon la même formule, ainsi pour obtenir  $D^4 b^4$ , on développe  $(b + cx + dx^2)^4$  :

$$\begin{aligned}
 D^4 b^4 = & (\Delta^4 b^4)c^4 + \Delta^3 b^4 D c^3 + \Delta^2 b^4 D^2 c^2 + \Delta b^4 D^3 c \\
 = & c^4 + 12bc^2d + 6b^2d^2 \quad (\text{car } D^3 c = 0)
 \end{aligned}$$

En réalité ARBOGAST donne une règle de calcul de  $D^r b^s$  à partir de  $D^{r-1} b^{s+1}$  ce qui lui permet d'écrire de proche en proche les termes de la seconde colonne. Mais pour ne pas alourdir excessivement cet article, nous pouvons nous en passer et calculer chaque terme de cette colonne isolément, par la méthode indiquée. Signalons toutefois que les anglais ayant, comme je l'ai indiqué au début, beaucoup pratiqué cette formule ils ont établi une fois pour toute des tables de dérivation donnant  $D^s b^m$  pour divers exposants  $s$  et  $m$ .

LE CALCUL DES DÉRIVATIONS D'ARBOGAST

Nous obtenons donc pour  $A_8$  :

$$A_8 = 30a^2cd^2 + 30ab^2d^2 + 60abc^2d + 5ac^4 + 20b^3cd + 10b^2c^3$$

résultat que l'on peut vérifier en continuant le développement (3).

Remarquons en passant, que ce coefficient  $A_8$  nous donne aussi toutes les solutions du système

$$(1) \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 5 \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = 8 \end{cases}$$

qui sont les exposants des termes  $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ , soit :

$$(2, 0, 1, 2) ; (1, 2, 0, 2) ; (1, 1, 2, 1) ; (1, 0, 4, 0) ; (0, 3, 1, 1) ; (0, 2, 3, 0).$$

Bien entendu la formule (2) est valable pour une fonction  $\varphi$  quelconque, dans la mesure où elle est développable en série entière. En voici une autre application utilisant le développement  $\ell\eta(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots$

**2.— Calcul des sommes des puissances n<sup>ième</sup> des racines d'un polynôme.**

Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  les racines de  $X^m + bX^{m-1} + cX^{m-2} + \dots = 0$ . En transformant l'équation par  $X = \frac{1}{Z}$  et factorisant

$$(1 - \alpha Z)(1 - \beta Z)(1 - \gamma Z) \dots = 1 + bZ + cZ^2 + \dots$$

D'où

$$\begin{aligned} \ell\eta(1 + bZ + cZ^2 + \dots) &= -(\alpha + \beta + \gamma)Z - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)(Z^2/2) \\ &\quad - (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \dots)(Z^3/3) \dots \text{etc} \dots \end{aligned}$$

Posant  $S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \dots$ ;  $S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \dots$  et développant  $\ell\eta(a + bZ + cZ^2 + \dots)$  par la règle d'ARBOGAST, puis remplaçant  $a$  par 1 on obtient :

$$\begin{aligned} \ell\eta(a + bZ + cZ^2 + \dots) &= \ell\eta a + (a^{-1}b)Z + (-a^{-2}\frac{b^2}{2} + a^{-1}c)Z^2 \\ &+ (2a^{-3}\frac{b^3}{3!} - a^{-2}bc + a^{-1}d)Z^3 + (-6a^{-4}\frac{b^4}{4!} + 2a^{-3}b^3c - a^{-2}bd - a^{-2}\frac{c^2}{2} + a^{-1}e)Z^4 + \dots \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} S_1 &= -b ; S_2 = b^2 - 2c ; S_3 = -b^3 + 3bc - 3d \\ S_4 &= b^4 - 4b^2c + 4bd + 2c^2 - 4e \text{ etc } \dots \end{aligned}$$

et d'une façon générale  $\frac{S_n}{n} = -D^n(\ell\eta a)$  que l'on pourra développer par la formule (2) en ayant soin de remplacer  $a$  par 1 dans le développement.

Les applications de cette formule (2) sont innombrables, d'autant plus qu'ARBOGAST la généralise aux fonctions de plusieurs variables, et au produit de fonctions. Il peut aussi calculer le terme général d'une suite récurrente linéaire simple ou multiple, sans passer par la résolution d'une équation caractéristique. Ou encore traiter ce qu'on appelait alors le problème général du "retour des suites" et qui peut s'énoncer ainsi :

Etant donnée la série  $y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$  etc...  
on demande d'exprimer  $x$  par une série en  $y$  sous la forme :  
$$x = ay + by^2 + cy^3 + \dots$$
 etc...

Contentons nous, dans le cadre étroit de cet article, de montrer l'intérêt des méthodes d'ARBOGAST pour le calcul de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'une fonction composée (au sens classique, cette fois, du mot dérivée).

### 3.— Calcul de la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction composée.

Soit  $V = \varphi(a + bx + cx^2 + \dots)$ . Pour avoir  $\frac{1}{n!} \frac{d^n \varphi}{dx^n}$  il suffit de remplacer  $x$  par  $(x + dx)$  et de chercher le coefficient de  $(dx)^n$  dans le développement de

$$\varphi\{a + b(x + dx) + c(x + dx)^2 + \dots\}.$$

Limitons nous pour l'instant au cas où  $V = (a + bx + cx^2)^r$  ( $r \in \mathbb{R}$ ). Le lecteur pourra s'exercer à la manipulation de la formule (2) et calculer le développement de  $V = \sum_{n \geq 0} A_n x^n$ . Il trouvera

$$A_n = \sum_{0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]} \frac{r(r-1) \dots (r-n+k+1)}{k!(n-2k)!} a^{r-n+k} b^{n-2k} c^k.$$

Si donc nous y remplaçons  $x$  par  $(x + dx)$ , de sorte que  $a$  doit être remplacé par  $a + bx + cx^2$ ,  $b$  par  $b + 2cx$  et  $c$  reste  $c$ , nous aurons

$$\frac{d^n V}{dx^n} = n! \sum_{0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]} \frac{r(r-1) \dots (r+k-n+1)}{k!(n-2k)!} (a + bx + cx^2)^{r-n+k} (b + 2cx)^{n-2k} c^k.$$

**Exemple 1 :**  $V = (1 - x^2)^{-1/2}$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (\text{Arc sin } x) = \frac{n!}{2^n} \frac{x^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]} C_n^k C_{2n-2k}^n \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^k$$

**Exemple 2 :**  $V = (1 + x^2)^{-1}$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (\text{Arc tan } x) = n! \frac{(2x)^n}{(1+x^2)^{n+1}} \sum_{0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]} (-1)^{n-k} C_{n-k}^k \left(\frac{1+x^2}{4x^2}\right)^k.$$

Pour terminer, appliquons la méthode d'ARBOGAST à une famille de polynômes qui ont été étudiés bien après sa mort par HERMITE, et définis ainsi :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

## LE CALCUL DES DÉRIVATIONS D'ARBOGAST

La formule (2) nous donne, pour  $e^{a+bx+cx^2}$

$$D^n e^a = e^{a \sum_{0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]} \frac{1}{(n-k)!} C_{n-k}^k b^{n-2k} c^k.$$

Pour obtenir  $\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$  remplaçons  $x$  par  $x + dx$ ,  $a$  par  $-x^2$ ,  $b$  par  $-2x$ ,  $c$  par  $(-1)$  :

$$e^{-(x+dx)^2} = e^{-x^2 - 2x dx - (dx)^2}$$

et alors

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = n! e^{-x^2} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{(n-k)!} C_{n-k}^k (-2x)^{n-2k} (-1)^k$$

et

$$H_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]} (-1)^k k! C_n^k C_{n-k}^k (2x)^{n-2k}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2; \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

### ERRATUM

Dans l'article de Eugène EHRHART ('*L'Ouvert*' n° 53) : "Des conjectures", un signe d'inégalité a été retourné. Le lecteur aura compris qu'il faut lire (5 lignes avant le bas de la page 27) :

"Sans nuire à la généralité on peut supposer  $X < Y \dots$ "  
(et non pas  $X > Y$ ).

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE SANS COORDONNÉES ... OU PRESQUE

Exposé de Jean MARTINET (Mai 1988 - Conférence APMEP)

rédigé d'après les notes de Nathalie MATHERN

## Introduction

Je voudrais présenter ici quelques démarches classiques de démonstration, en géométrie élémentaire, peu connues me semble-t-il des jeunes générations de professeurs. Ces méthodes sont pourtant aux sources de la géométrie algébrique moderne; elles ont fait l'objet de cours développés au XIX<sup>e</sup> siècle, comme le magnifique '*Traité de Géométrie Analytique*' de George SALMON (Gauthiers-Villars, 1870).

Nous ne parlerons ici que de géométrie plane. Le plan est rapporté à un repère cartésien, arbitraire en géométrie affine, orthonormé en géométrie euclidienne; mais les raisonnements que nous ferons n'utiliserons pratiquement pas les coordonnées : ils seront essentiellement *intrinsèques*, c'est ce qui fait leur intérêt, et justifie le titre de l'exposé.

Voici les idées principales dont nous voulons illustrer, sur quelques exemples, l'efficacité *démonstrative*.

D'abord, on privilégie les **courbes** par rapport aux points, et on identifie toute courbe (**algébrique** exclusivement) à l'un quelconque des polynômes  $P(x, y)$  qui donne une équation de cette courbe ( $P = 0$ ).

**Exemples** : La droite  $d = 2x + 3y - 1$ . Le couple de droites  $d.d' = (2x + 3y - 1). (x - y + 5)$ . Le cercle  $C = x^2 + y^2 - 2x + 1$  (repère orthonormé). La parabole  $P = y - x^2$ .

C'est donc plus exactement aux fonctions (polynômes uniquement) que nous faisons jouer le rôle principal, et nous utilisons les opérations naturelles (addition et multiplication), donc la structure d'**anneau**, pour traduire des propriétés géométriques. Donnons quelques exemples de telles traductions (ceux que nous utiliserons dans la suite).

**I.1.** Trois droites  $d_1, d_2, d_3$  sont **concourantes** si on a :

$$\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = 0$$

pour des constants  $\lambda_i$  non toutes nulles (dépendance linéaire). Le cas particulier où  $d_3 = 1$  représente le parallélisme de  $d_1$  et  $d_2$  : le polynôme constant 1 représente la droite de l'infini.

**I.2.** (Plan euclidien). Deux droites  $d_1$  et  $d_2$  sont **orthogonales** si et seulement si on peut trouver deux nombres  $\lambda_1, \lambda_2$  (non nuls) tels que :

$$\lambda_1 d_1^2 + \lambda_2 d_2^2 \text{ soit un cercle ("cercle - point").}$$

Nous entendons ici par cercle tout polynôme de degré 2 dont la partie homogène de degré 2 est de la forme  $\alpha(x^2 + y^2)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ ).

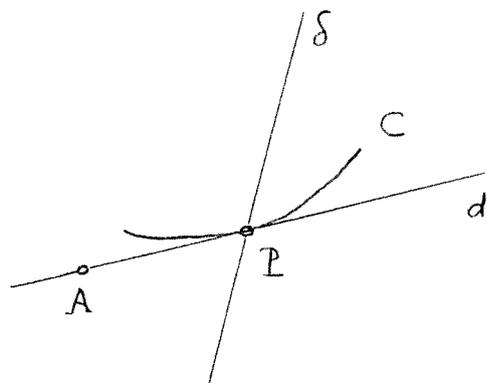
**I.3.** Soit  $C$  une courbe algébrique de degré  $n \geq 1$  (i.e.  $C$  est un polynôme de degré  $n$ ). Une droite  $d$  est contenue dans  $C$  si et seulement si  $C = d.C'$  ( $d^\circ C' = n - 1$ ); ceci est assuré dès que la courbe  $C$  contient  $n + 1$  points de  $d$ . (La démonstration de ces faits est immédiate en se ramenant au cas où  $d$  est la droite  $y = 0$ .) Noter que l'assertion plus générale suivante est **fausse** : si  $P$  et  $P'$  sont deux polynômes tels que  $\{P = 0\} \subset \{P' = 0\}$  alors  $P' = P.Q$  (exemple :  $P = x^2 + y^2$  et  $P' = xy$ ); elle serait vraie si l'on se plaçait dans le plan **complexe**  $\mathbb{C}^2$  au lieu du plan réel, et si l'on supposait  $P$  **irréductible** ou **réduit** (c'est-à-dire produit de polynômes irréductibles premiers entre eux).

**I.4.** Soient  $d$  et  $\delta$  deux droites sécantes en un point  $P$ . Cherchons à exprimer algébriquement qu'une courbe  $C$  de degré  $n$  ( $n \geq 2$ ) est **tangente** à  $d$  au point  $P$ . J'affirme que cette propriété se traduit par l'égalité

$$C = \lambda \delta^2 + d.Q$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $Q$  est un polynôme de degré  $n - 1$ .

Voici pourquoi : la tangence de  $C$  à  $d$  signifie naturellement que la restriction du polynôme  $C$  à la droite  $d$  (rapportée à un repère) a une racine **double** correspondant au point  $P$ .



Choisissons alors un point  $A \neq P$  sur  $d$ . La condition  $C(A) - \lambda \delta^2(A) = 0$  définit un nombre  $\lambda$  (car  $\delta(A) \neq 0$ ). Le polynôme  $C' = C - \lambda \delta^2$  admet alors trois "racines" sur  $d$  ( $A$  d'une part;  $P$  d'autre part comme racine **double** : il l'est en effet pour  $C$  par hypothèse, et pour  $\delta^2$  par définition). D'après le critère donné en **I.3.**,  $C' = d.Q$ , et finalement  $C = \lambda \delta^2 + d.Q$ .

Figure 1

En particulier, si  $C$  est une **conique** (courbe de degré 2), l'égalité précédente s'écrit  $C = \lambda\delta^2 + d\delta'$  où  $d'$  est une **droite**, qui est évidemment la tangente à  $C$  au second point  $P'$  où  $\delta$  coupe  $C$ .

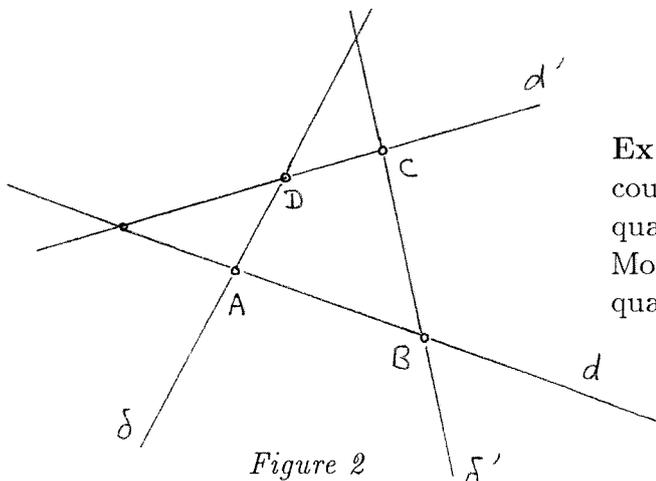


Figure 2

**Exercice 1.** Soient  $(d, d')$  et  $(\delta, \delta')$  deux couples de droites sécantes, définissant les quatre points  $A, B, C, D$ .

Montrer que les coniques passant par ces quatre points sont les polynômes :

$$C = \lambda dd' + \mu \delta \delta' \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Passons maintenant à l'étude de quelques problèmes mettant en jeu les remarques précédentes

### 1.— Droites, cercles et coniques

1.1. Commençons par revoir un principe général de construction de coniques.

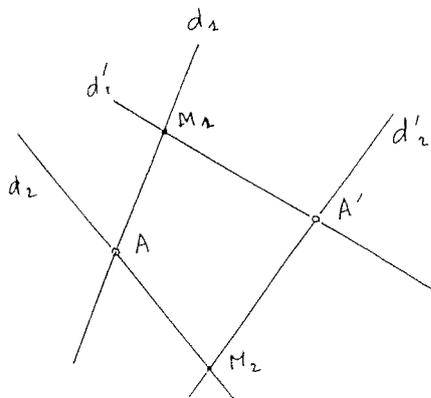


Figure 3

On donne deux droites  $d_1, d_2$  se coupant en un point  $A$ , et deux droites  $d'_1, d'_2$  se coupant en un point  $A'$  distinct de  $A$ .

A chaque droite  $d = \lambda d_1 + \mu d_2$  passant par  $A$  on associe la droite  $d' = \lambda d'_1 + \mu d'_2$  passant par  $A'$ .

Quelle courbe  $\Gamma$  décrit le point  $M$  intersection de  $d$  et  $d'$  ?

**Réponse :** c'est la conique  $\Gamma = d_1 d'_2 - d_2 d'_1$ . En effet, un point  $M$  appartient à  $\Gamma$  si et seulement si le système d'équations homogènes en  $(\lambda, \mu)$  :

$$\begin{cases} \lambda d_1(M) + \mu d_2(M) = 0 \\ \lambda d'_1(M) + \mu d'_2(M) = 0 \end{cases}$$

admet une solution **non nulle**. Ceci équivaut au fait que son déterminant  $d_1 d'_2 - d_2 d'_1$  est nul.

**Cas particulier** bien connu au lycée. Si deux droites  $d$  et  $d'$  pivotent autour de deux points  $A$  et  $A'$  respectivement, en faisant un angle  $\theta$  constant, leur point d'intersection décrit un cercle.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE SANS COORDONNÉES ... OU PRESQUE

Choisissons le repère orthonormé tel que  $A$  soit l'origine, et  $A'$  le point de coordonnées  $(a, 0)$ . Soit  $d_1 = y$ ,  $d_2 = x$ ,  $d'_1 = -(x - a) \sin \theta + y \cos \theta$ ,  $d'_2 = (x - a) \cos \theta + y \sin \theta$ ; il est alors clair qu'à  $d = \lambda d_1 + \mu d_2$  correspond  $d' = \lambda d'_1 + \mu d'_2$ . La courbe cherchée est donc définie par le polynôme :

$$\begin{aligned} \Gamma &= d_1 d'_2 - d_2 d'_1 = y^2 \sin \theta + y(x - a) \cos \theta + x(x - a) \sin \theta \\ &= (x^2 + y^2) \sin \theta - ax \sin \theta - ay \cos \theta \end{aligned}$$

L'énoncé général que nous venons d'établir peut être reformulé ainsi : si l'on définit une **bijection linéaire** entre le faisceau  $\mathcal{F}_A$  (on dit aussi pinceau aujourd'hui) des droites passant par  $A$  et celui  $\mathcal{F}_{A'}$  des droites passant par  $A'$ , le point d'intersection de deux droites correspondantes décrit une conique  $\Gamma$  passant par  $A$  et  $A'$ .

### Exercice 2 :

- 1) La conique  $\Gamma$  est dégénérée (réunion de deux droites) si et seulement si à  $AA' \in \mathcal{F}_A$  correspond  $A'A \in \mathcal{F}_{A'}$ .
- 2) Quand  $\Gamma$  n'est pas dégénérée, sa tangente en  $A$  est la droite  $d \in \mathcal{F}_A$  ayant pour image  $A'A \in \mathcal{F}_{A'}$  (appliquer I.4.).

### 1.2. Un problème classique de cocyclicité :

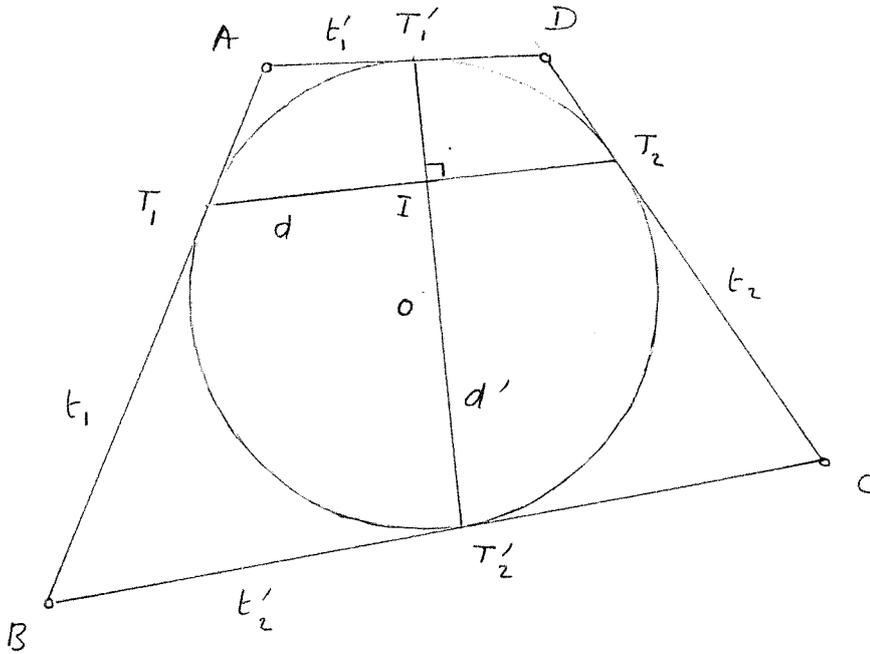
On donne un cercle  $\Gamma$  et deux couples  $(t_1, t_2), (t'_1, t'_2)$  de tangentes à  $\Gamma$ ; les points de contact sont  $T_1, T_2, T'_1, T'_2$ . Soient  $A, B, C, D$  les points  $t_1 \cap t'_1, t'_1 \cap t_2, t_2 \cap t'_2, t'_2 \cap t_1$ . Montrer que  $A, B, C, D$  sont cocycliques si et seulement si les droites  $d = T_1 T_2$  et  $d' = T'_1 T'_2$  sont perpendiculaires.

Encore disponible : la brochure  
**“TRAVAUX PRATIQUES EN TERMINALES SCIENTIFIQUES”**  
 Par E. BUSSE, M. de COINTET, C. KAHN,  
 J. MARTINET, J. SAMSON et O. SCHLADENHAUFEN.  
 200 pages - 70 F (Port compris)

Au sommaire : Trajets en temps minimum - Les autoroutes de Monsieur Fermat - La duplication du cube - Le problème des abeilles - Résolution de l'équation  $x^3 - 3x - 1 = 0$  par la méthode du point fixe et par la méthode de Newton - Un problème d'échelles - Exemples d'itérations d'une fonction trinôme du second degré - Paradoxe - Un calcul d'aire dans l'évolution historique des mathématiques - Calcul d'aire : méthodes de Simpson et de Hermitte - Trois utilitaires classiques pour calculatrices programmables - Intégrations par parties répétées - Encadrements de fonctions par des fonctions rationnelles - Circuit oscillant - Calcul numérique et fonction exponentielle - Dérangements - Somme de puissances entières des  $p$  premiers naturels non nuls - Un procédé de calcul numérique de logarithmes népériens - Equations du troisième degré - Résolution de l'équation  $x^3 - 3x - 1 = 0$  à l'aide de la trigonométrie - Construction (à la règle et au compas) de polygones réguliers - Construction d'un polygone régulier "solution approchée" - Où l'on retrouve l'angle des abeilles - Etude d'une configuration à l'aide de barycentres, de nombres complexes - Plusieurs méthodes pour un même problème de construction - Alignement et cocyclicité - La trisection de l'angle - A propos de trisection - Problème de réservoir - Inverses de coniques - Réflecteurs micro-ondes - Zone d'audibilité - A la recherche d'un triangle rectangle - Coniques, constructions et lieux géométriques - Solution "approchée" d'un système - Un peu de trigonométrie sphérique.

D'après I.4., les hypothèses se traduisent en les égalités de polynômes :

$$(1) \quad \begin{aligned} \Gamma &= \lambda d^2 + t_1 t_2 \\ \Gamma &= \lambda' d'^2 + t'_1 t'_2 \end{aligned} \quad (\lambda, \lambda' \in \mathbb{R})$$



D'autre part, les coniques passant par  $A, B, C, D$  sont de la forme (Exercice 1) :

$$\Gamma' = \alpha t_1 t_2 + \alpha' t'_1 t'_2 \quad (\alpha, \alpha' \in \mathbb{R})$$

soit

$$\begin{aligned} \Gamma' &= (\alpha + \alpha')\Gamma \\ &\quad -(\mu d^2 + \mu' d'^2) \\ (\mu &= \lambda\alpha, \mu' = \lambda'\alpha'). \end{aligned}$$

Figure 4

Ainsi, l'une des  $\Gamma'$  est un cercle si et seulement si il existe  $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$  tels que  $\mu d^2 + \mu' d'^2$  soit un cercle ; mais (I.2.) ceci veut dire que  $d$  et  $d'$  sont perpendiculaires.

Ceci prouve de plus qu'alors les cercles  $\Gamma, \Gamma'$  et le cercle point  $I$  ( $I = d \cap d'$ ) sont linéairement dépendants, c'est-à-dire appartiennent au même faisceau (dont  $I$  est un point limite).

**Exercice 3.** Montrer que si  $d$  et  $d'$  pivotent autour de  $I$  (fixé) en restant perpendiculaires, le cercle  $\Gamma'$  reste le même.

Il est intéressant de comparer cette argumentation à une autre démarche, utilisant par exemple les angles orientés.

## 2.— Cubiques. Les théorèmes de Pappus et de Pascal.

On appelle **cubique** toute courbe de degré 3. Le premier résultat fondamental sur les cubiques est le

**Théorème.** Soit  $\Gamma$  une cubique; soit  $d$  (resp.  $d'$ ) une droite coupant  $\Gamma$  en  $A, B, C$  (resp.  $A', B', C'$ ); soient  $A'', B'', C''$  les points où les droites  $AA', BB', CC'$  recoupent  $\Gamma$ . Alors  $A'', B'', C''$  sont alignés.

En effet, désignons par  $a, b, c$  les droites  $AA', BB', CC'$ , et considérons le polynôme  $P = \Gamma - \lambda abc$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est choisi de sorte que  $P$  s'annule au point d'intersection  $I$  de  $d$  et  $d'$ . D'après I.3.,  $P = d.Q$  car la courbe  $P$ , de degré au plus 3, contient

quatre points de  $d(A, B, C, I)$ ; de plus  $Q = d'.R$  car la courbe  $Q$ , de degré au plus 2, contient trois points de  $d'(A', B', C')$ . Finalement,  $d^\circ R \leq 1$ , et  $P$  s'annule aussi en  $A'', B'', C''$  : il en résulte que ces trois points appartiennent à la droite  $R$ , ce qu'on voulait montrer.

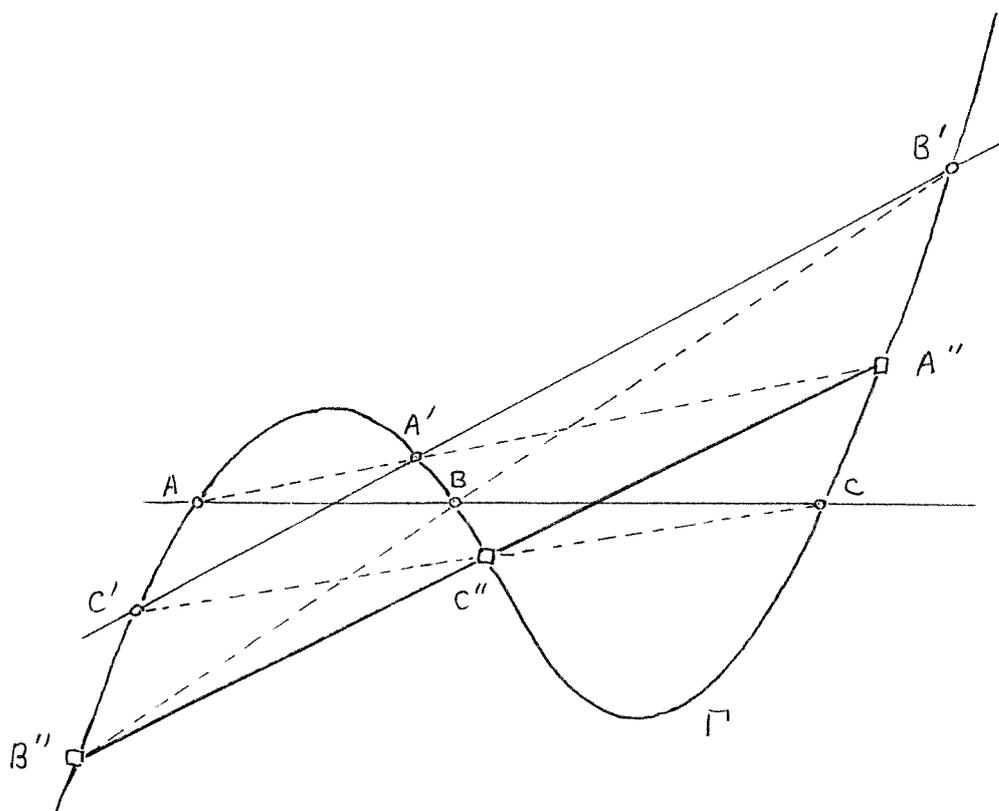


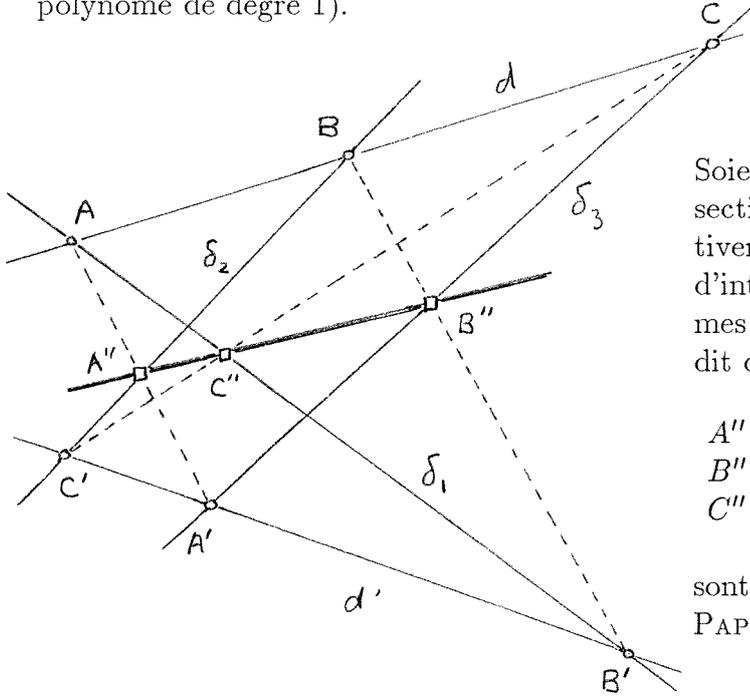
Figure 5

On remarquera qu'à partir des données  $\Gamma$ ,  $d$  et  $d'$ , ce théorème fournit, en général, six alignements : autant que de bijections entre  $\Gamma \cap d$  (3 points) et  $\Gamma \cap d'$  (3 points).

Donnons maintenant les principales applications de ce théorème.

### 2.1. Le théorème de Pappus.

Nous allons voir qu'il correspond au cas où la cubique  $\Gamma$  est dégénérée en le **produit** (géométriquement : la réunion) de trois droites, c'est-à-dire  $\Gamma = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3$  ( $\delta_i =$  polynôme de degré 1).



Soient  $A, B, C$  les points d'intersection de  $d$  avec  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  respectivement, et  $B', C', A'$  les points d'intersection de  $d'$  avec ces mêmes droites. Le résultat général dit que :

$$\begin{aligned} A'' &= AA' \cap \delta_2 = AA' \cap BC' \\ B'' &= BB' \cap \delta_3 = BB' \cap CA' \\ C'' &= CC' \cap \delta_1 = CC' \cap AB' \end{aligned}$$

sont alignés; c'est le théorème de PAPPUS.

Figure 6

(Remarquer le choix des notations; la donnée de  $\Gamma, d$  et  $d'$  ne produit plus, dans ce cas de dégénérescence, que deux alignements : celui figuré ci-dessus, et celui qu'on en déduirait en remplaçant  $B', C', A'$  par  $C', A', B'$  respectivement.)

### 2.2. Le théorème de Pascal.

Rappelons qu'il s'agit de l'énoncé suivant : soit  $\Gamma$  une conique (non dégénérée) et six points de cette conique. Si l'on se donne une permutation **circulaire**  $\sigma$  de ces six points ( $\sigma : M \rightarrow M'$ ) et on note  $\tau M \rightarrow \overline{M}$  l'**involution**  $\tau = \sigma^3$ , alors les points d'intersection des droites  $MM'$  et  $\overline{MM'}$  (au nombre de **trois**) sont alignés (fig. 7).

Cette configuration apparaît précisément si l'on part des données suivantes : une cubique  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cdot \delta$  **dégénérée** en le produit de la conique  $\Gamma$  et d'une droite  $\delta$ ; deux droites  $d$  et  $d'$  coupant  $\tilde{\Gamma}$  en trois points (fig. 8). On a désigné en traits pleins les données, et en pointillés les droites construites selon l'énoncé du théorème général.

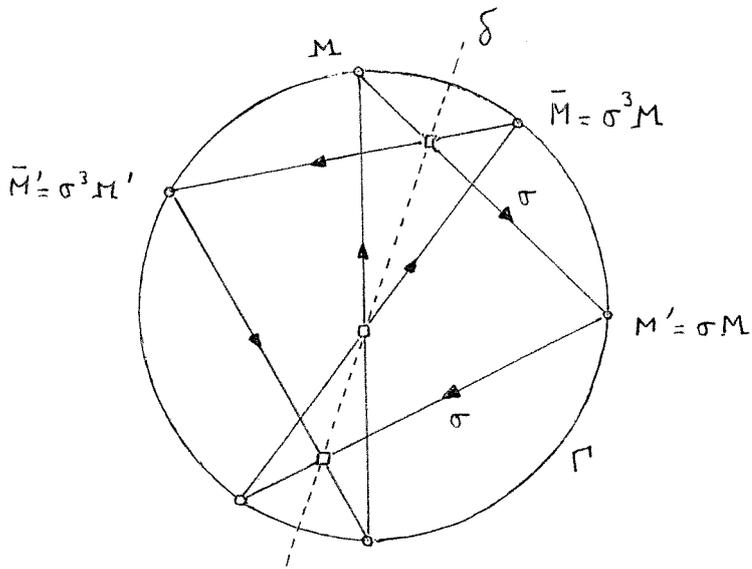


Figure 7

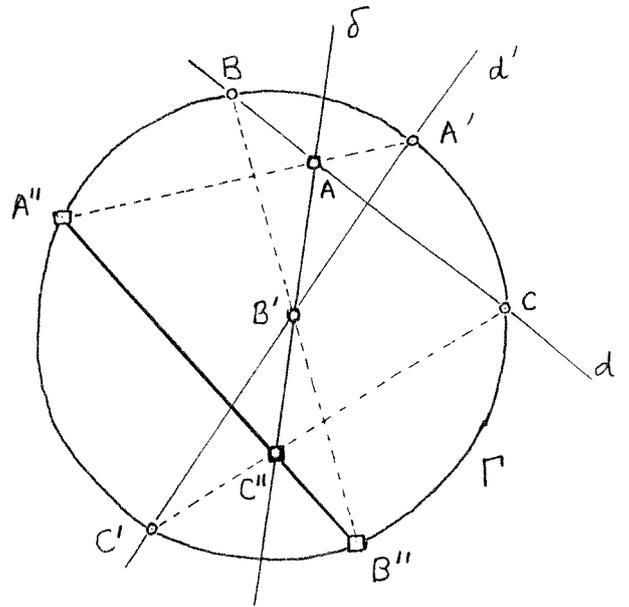


Figure 8

2.3. La loi de groupe commutatif sur les cubiques non singulières.

Considérons une cubique non singulière, comme, par exemple

$$\Gamma = y^2 - x(x+1)(x-1).$$

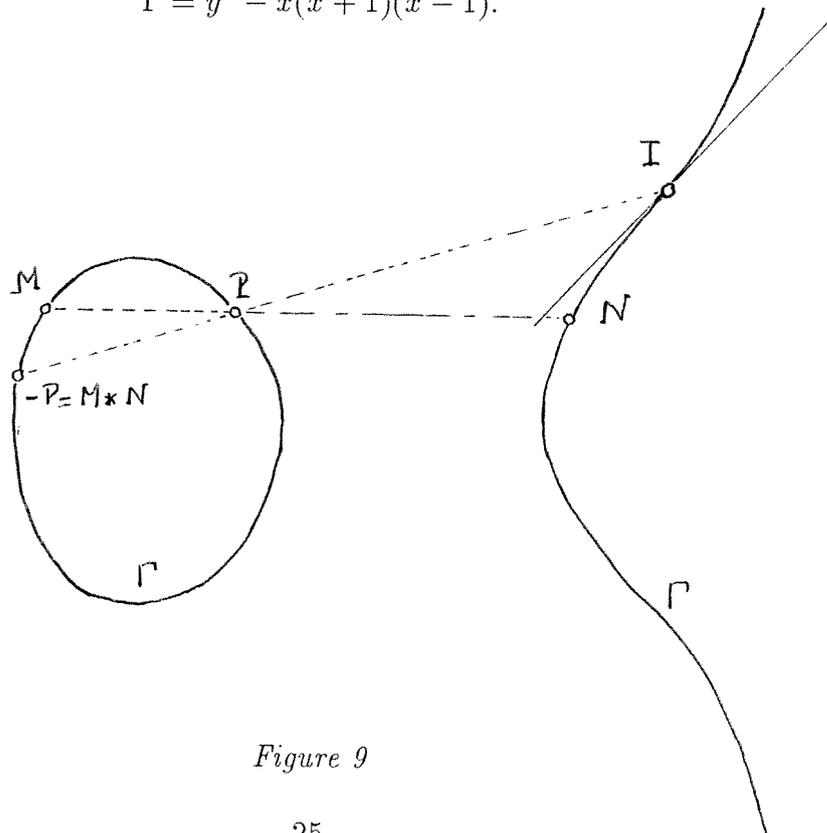


Figure 9

Cette courbe est constituée de deux branches, dont l'une a une direction asymptotique verticale (point à l'infini  $J$ ), et l'autre est bornée.

Nous allons utiliser les **points d'inflexion** de  $\Gamma$ . On les obtient en exprimant qu'une tangente d'inflexion est une droite qui coupe  $\Gamma$  en trois points confondus (l'équation aux points d'intersection a une racine triple). On obtient ainsi les points  $I$  et  $I'$  de même abscisse  $\sqrt{1 + (2/\sqrt{3})}$  et d'ordonnées opposées; le point à l'infini  $J$  de  $\Gamma$  est aussi un point d'inflexion [ $\Gamma + x^3 = 1.(y + x^2)$ ] avec pour tangente la droite de l'infini. Noter que les trois points  $I, I', J$  sont **alignés** (Exercice : montrer, en appliquant le théorème général, que si  $I$  et  $I'$  sont deux points d'inflexion d'une cubique  $\Gamma$ , le point  $I''$  où  $II'$  recoupe  $\Gamma$  est aussi un point d'inflexion.).

Nous voulons en venir à la remarquable propriété suivante : soit  $\Gamma$  une cubique non singulière (cela veut dire : sans point double, réel ou complexe), et  $I \in \Gamma$  un point d'inflexion. Soit  $M, N \mapsto M * N$  la loi de composition, sur  $\Gamma$ , définie par la construction que voici : on construit le point  $P$  où  $MN$  recoupe  $\Gamma$ , puis le point  $Q$  où  $IP$  recoupe  $\Gamma$ , et on pose  $Q = M * N$ ; si  $M = N$ ,  $MN$  désigne la tangente en  $M$  à  $\Gamma$ . Alors  $*$  est une loi de **groupe commutatif** sur l'ensemble  $\Gamma$ , dont l'élément neutre est le point  $I$ ; pour  $M \in \Gamma$ , l'opposé de  $M$  pour  $*$  est le point  $-M$  où  $IM$  recoupe  $\Gamma$ .

Démontrons ceci. Il est clair que  $M * N = N * M$ , que  $I * M = M$  pour tout  $M$ , et que  $M * (-M) = I$ . La seule propriété non évidente est l'**associativité** de  $*$ ; soient  $M, N, I$  trois points de  $\Gamma$ ; par définition on a les alignements :

$$\begin{array}{lll} A = M, & B = N, & C = -(M * N) \quad \text{alignés} \\ A' = N * P, & B' = -(N * P), & C' = I \quad \text{alignés} \end{array}$$

D'après notre théorème général, il en résulte l'alignement de  $A'', B'', C''$ ; or

$$A'' = -[M * (N * P)]; B'' = P; C'' = M * N;$$

ainsi :

$$C'' * B'' = -A''$$

soit

$$(M * N) * P = M * (N * P).$$

La signification profonde de cette loi de groupe est hors du cadre de cet exposé : elle passe par l'étude géométrique des cubiques dans le plan **complexe** et la mise en évidence de leur paramétrisation naturelle par les fonctions  $\mathcal{P}$  de WEIERSTRASS.

## LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Jean LEFORT

### 4.— LES CALENDRIERS SOLAIRES

Avez-vous déjà remarqué l'étrange lumière du soleil un jour d'équinoxe ou de solstice? Non? Cela est tout à fait normal et malheureusement ce phénomène n'existe pas. Sinon cela ferait belle lurette que l'on connaîtrait une mesure exacte (disons assez exacte pour ne pas exagérer) de l'année solaire. Imaginez notre malheureux ancêtre en train de se souvenir de la position exacte du soleil un an auparavant; il se brûle les yeux pour un bien maigre résultat. Monsieur "réponse à tout" me souffle qu'il suffit de mesurer la longueur de l'ombre d'un bâton inamovible et de compter le nombre de jours nécessaires pour que l'ombre redevienne la plus courte possible. Monsieur "réponse à tout" n'habite pas sous les tropiques où l'ombre est nulle deux fois par an. Et de toute façon la précision est faible. Il n'est donc pas étonnant de trouver des calendriers de 360 jours chez les peuples les plus anciens comme le calendrier égyptien d'il y a 10 mille ans. C'est ce calendrier qui a dû influencer la division du cercle en 360°. Mais quelques années suffisent pour se rendre compte qu'il vaut mieux prendre une durée de 365 jours.

Quant à fixer le début de l'année, il n'y a aucune raison de choisir une date plutôt qu'une autre. On trouvera un peu n'importe quoi célébrant un évènement tellement important qu'il est tombé dans l'oubli. On trouvera cependant assez souvent un équinoxe ou un solstice ou un autre évènement astronomique parfois lié à la lune (traduisant ainsi le souvenir d'un ancien calendrier lunaire). Il en fut ainsi en France aux XII<sup>e</sup> et XIII<sup>e</sup> siècles et même encore plus tard. A ce propos on trouve dans la 'Généalogie des rois de France' de BOUCHET publié en 1506 : "*Charles VIII alla à trépas au chasteau d'Amboise le 7 avril 1497 avant Pasques à compter l'année à la feste de Pasques ainsi qu'on le fait à Paris, et en 1498 à commencer à l'annonciation de Nostre-Dame ainsi qu'on le fait en Aquitaine*". On ne peut que fustiger cette façon de compter à partir de Pâques car alors l'année varie continuellement en longueur pouvant avoir de 11 à 13 mois! Quelle confusion! D'autant plus que des mois ont exactement le même nom!

#### 1) Le calendrier vague égyptien

C'est en l'an 4236 avant notre ère (pour rester laïque on ne dit plus avant Jésus-Christ) ou -4235 que les égyptiens font remonter l'origine de leur calendrier de 365 jours formé de 12 mois de 30 jours plus 5 jours complémentaires dits *épagomènes*. Les 12 mois furent regroupés en trois saisons de la façon suivante :

I	{	Thoth Paophi Athyr Choéac	II	{	Tybi Méchir Phaménouth Pharmouti	III	{	Pachon Payni Epiphi Mésori
inondations			végétation			récoltes		

Le début de l'année fut fixé au solstice d'été : le 1er Thoth qui correspondait sensiblement au début de la crue du Nil, mais ce qui était encore plus important c'est qu'à cette époque le 1er Thoth correspondait exactement au lever héliaque de Sirius <sup>(1)</sup> étoile pour laquelle les égyptiens avaient une admiration particulière. Cette coïncidence multiple avait de quoi frapper l'imagination des prêtres et à plus forte raison celle, savamment entretenue, du peuple.

Nous savons bien que l'année ne fait pas 365 jours et le lever héliaque de Sirius, tout comme le solstice d'été eu bientôt lieu le 2 Thoth, puis le 3... prenant à peu près une journée tous les quatre ans.

Les prêtres et le pouvoir trouvèrent rapidement la parade : plutôt que de modifier le calendrier pourtant essentiel pour rythmer la vie agricole des paysans du Nil, ils décidèrent que les Dieux avaient fait les choses ainsi pour que chaque jour de l'année soit sanctifié à tour de rôle par les fêtes en l'honneur du lever héliaque de Sirius et si la fête célébrant la moisson finit par tomber en plein hiver, les prêtres n'y étaient pour rien, c'étaient les Dieux qui portaient le chapeau.

(Petite parenthèse : on remarquera que les choses ont bien changées et que les gouvernements actuels n'hésitent pas à prendre leurs responsabilités.)

Au bout de 1461 années vagues, le lever héliaque de Sirius coïncida de nouveau avec le 1er Thoth. Ce fut une année faste. Les fêtes se succédèrent et on célébra des mystères extraordinaires. Cette période de 1461 années vagues ou 1460 années juliennes de 365,25 jours ( $1461 \times 365 = 1460 \times 365,25$  ou encore  $\frac{1}{4} = \frac{365}{1460}$ ) reçut le nom de période sothiaque (sothis veut dire Sirius en égyptien).

Malheureusement rien n'est parfait ni en ce bas monde, ni dans le monde d'en haut. C'est pourquoi, même le lever héliaque de Sirius n'est pas fixe et a dérivé lentement vers l'été (environ d'une semaine par millénaire). A l'époque de la fixation du calendrier, il y avait, nous l'avons vu, coïncidence du lever héliaque de Sirius, du solstice d'été et de la crue du Nil, ce qui avait frappé les prêtres. Mais la précession des équinoxes a troublé cette magnifique ordonnance (à qui, diantre, se fier?), et si crue du Nil et solstice d'été coïncident toujours, les périodes sothiaques raccourcissent, la seconde n'ayant eu que 1459 années vagues, la troisième 1457.

Malgré ses imperfections par rapport au cours des astres, ce calendrier très simple dura environ 4500 ans. C'est le seul exemple connu d'une aussi longue durée. Et pourtant après la conquête de l'Égypte par les romains, Auguste imposa en -29 un sixième jour épagomène tous les quatre ans, mais cette réforme ne fut pas acceptée par le peuple qui célébra le 21 juillet 139 (calendrier julien) la fin de la

<sup>(1)</sup> Dans son mouvement apparent le Soleil occulte une fois par an, pendant quelques semaines, par sa lumière, chaque étoile. Le lever héliaque correspond à la réapparition de l'étoile un peu avant le lever du Soleil.

troisième période sothiaque. Et pourtant Auguste n'était pas le premier à essayer de réformer ce calendrier. Déjà en 238 avant notre ère Ptolémée III avait décrété l'emploi d'un sixième jour égagomène, mais en vain, sauf bien sûr dans les actes officiels.

Quand finalement cette réforme entra dans les mœurs vers la fin du 3<sup>e</sup> siècle de notre ère, le 1er Thoth tomba un 29 août (julien). Mais il s'agit ici d'une autre sorte de calendrier. Nous invitons donc le lecteur à poursuivre ce passionnant roman !

## 2) Les calendriers juliens

### a) Origine

Après avoir compté 365 jours dans l'année, une meilleure précision des mesures conduit à 365,25 jours. C'est évidemment la réduite suivante pour le développement en fraction continue de l'année tropique. Nous venons de voir que les Egyptiens ont dû connaître très tôt cette valeur approchée, mais le premier exemple connu d'utilisation systématique dans un calendrier fut le calendrier julien imposé par Jules César en l'an 708 de Rome. Il faut remarquer qu'il devenait urgent d'avoir un calendrier stable à Rome. Le calendrier était en effet devenu source de corruption et de prévarication. On verra dans un prochain chapitre qu'un 13<sup>e</sup> mois était alors intercalé de temps en temps à la place du 24 février pour harmoniser la durée de l'année de 12 mois lunaires avec le Soleil. Ce mois MERCEDONIUS avait été créé sur décision du collège des pontifes qui en profitait pour favoriser leurs amis politiques et embêter leurs ennemis.

Jules César mit fin au désordre en -45 sur les conseils de l'astronome égyptien SOSIGÈNE. Après une *année de confusion* de 15 mois (455 jours en tout) le début de l'année fut fixé au 1er janvier, l'équinoxe de printemps au 25 mars <sup>(2)</sup> l'année eut 365 jours avec un 366<sup>e</sup> jour tous les quatre ans, placé après le 24 février qui portait alors le nom de *sexto ante calendas martis* d'où le nom de *bis sexto ante calendas martis* qui a donné *bissextile*. La durée des mois fut alors la suivante :

Januarus	31	Maius	31	September	31
Februarus	29 ou 30	Junius	30	October	30
Martius	31	Quintilis	31	November	31
Aprilis	30	Sextilis	30	December	30

Ultérieurement, pour honorer Jules César, on donna son nom au mois Quintilis puis celui d'Auguste au mois Sextilis. Comme il ne fallait pas que l'un de ces grands hommes soit plus ou moins honoré que l'autre, il fut nécessaire d'aligner la durée de ces deux mois à 31 jours. On modifia alors la durée des autres mois pour éviter qu'il y ait trois mois consécutifs de 31 jours. Le calendrier avait alors pratiquement la forme que nous lui connaissons (la semaine n'était pas encore inventée).

C'est le moine Denys le Petit qui proposa en 532 l'adoption de l'ère chrétienne. Denys le Petit supposait d'après ses recherches que Jésus est né le 25 décembre

<sup>(2)</sup> En fait, les mesures de l'époque étaient peu précises et Sosigène se trompait d'un jour pour l'équinoxe.

(VIII des calendes de janvier) de l'an 753 de Rome. Il aurait aimé qu'en conséquence le début de l'ère chrétienne fut fixé ce jour là en commémoration de la naissance du Christ. On peut se demander quels genres de recherches fit ce moine. Il était vraisemblablement plus important de récupérer au profit de la chrétienté les fêtes païennes du solstice d'hiver que de chercher à tout prix la date de naissance de Jésus. On hésite toujours à ce propos et il est fort possible que Jésus Christ soit né en 5 ou 7 avant lui-même!

Cette proposition de Denys le Petit fut d'emblée adoptée par l'Eglise, mais on garda le début de l'an au 1er janvier <sup>(3)</sup> et on fixa donc au 1er janvier de l'an 754 de Rome le début de notre ère. Cette façon de compter les années ne devint d'usage en France que sous Pépin le Bref et Charlemagne et ne figure sur les édits royaux qu'à partir de l'an mille (sous Hugues Capet), et on a vu au début de ce chapitre que le peuple conserva longtemps d'autres habitudes pour le début de l'année.

### **b) Usage du calendrier julien**

Dans le calendrier julien les années bissextiles sont celles qui sont multiples de 4. Cette règle peut aussi s'appliquer aux années négatives à condition de faire intervenir une année 0, comme dans l'usage astronomique. Pour les années avant 1582, c'est systématiquement le calendrier julien qui est utilisé pour dater un évènement quelconque. Actuellement ce calendrier n'est plus utilisé pour les usages civils, mais les fêtes religieuses des églises orthodoxes en dépendent et les astronomes l'utilisent assez systématiquement à cause de la longueur constante du siècle : 36525 jours.

Entre le XVI<sup>e</sup> et le XX<sup>e</sup> siècle, il faut être prudent quand on donne une date; elle dépend du pays comme l'exemple suivant, en forme de question piège, le prouve :

Cervantès et Shakespeare sont morts tous les deux à la même date :  
le 23 avril 1616. Lequel est mort le premier?

On verra plus loin, au paragraphe 3b, que l'Espagne est grégorienne depuis 1582 tandis que l'Angleterre ne le sera qu'en 1752; elle a donc encore le calendrier julien qui a alors 10 jours d'écart avec le grégorien. Cervantès est mort 10 jours avant Shakespeare (!).

### **c) Passage du calendrier julien au jour julien**

Du fait que le jour supplémentaire (le jour bissextile) est ajouté fin février, il est plus facile de numérotter mois et année de la façon suivante :

Soit  $a$  l'année julienne et  $m$  le numéro du mois dans l'année

- si  $m = 1$  ou  $2$  on pose  $A = a - 1$  et  $M = m + 12$ ,
- sinon on pose  $A = a$  et  $M = m$ .

---

<sup>(3)</sup> Heureusement pour les amateurs de ponts et week-ends prolongés. Cela fait deux jours chômés à une semaine d'intervalle!

**Formule** : Soit  $A$  et  $M$  l'année et le mois modifié comme ci-dessus. Soit  $j$  le jour du mois. Alors le jour julien  $JJ$  est donné par :

$$JJ = [365, 25A] + [30, 6(M + 1)] + j + 1\,720\,994,5$$

où  $[ \ ]$  signifie qu'on prend la partie entière du résultat calculé dans le crochet.

Comme toujours, pour un calcul du jour julien, je suppose qu'on s'est ramené auparavant à l'heure  $UT$  en tenant compte du décalage de l'heure officielle par rapport au temps universel.

Tous les termes de la formule se comprennent bien sauf peut-être le  $[30, 6(M + 1)]$ . Il s'agit ici d'une formule empirique qui donne, à une constante près (122 jours), le nombre de jours écoulés depuis le 1er mars inclu jusqu'au dernier jour du mois précédent.

**Formule inverse** : Connaissant le jour julien  $JJ$  on cherche la date dans le calendrier julien sous la forme  $A, M, j$  où  $A$  et  $M$  sont les années et mois modifiés comme ci-dessus.

La suite de calculs suivants conduit au résultat :

$z = JJ - 1\,721\,117,5$	Nombre de jours depuis le 1er mars 0.
$A = [\frac{z}{365,25}]$	Valeur de l'année modifiée.
$b = z - [365, 25A]$	Nombre de jours écoulés dans l'année $A$ .
$M = [\frac{b}{30,6}] + 3$	Numéro du mois modifié.
$j = b - [30, 6(M + 1)] + 123$	Quantième dans le mois.

On obtient facilement  $a$  et  $m$  à partir de  $A$  et  $M$  : si  $M > 12$  ( $M = 13$  ou  $14$ ), on pose  $m = M - 12$  et  $a = A + 1$ , sinon on a  $m = M$  et  $a = A$ .

#### d) La calendrier copte

C'est un calendrier julien de 12 mois de 30 jours suivis de 5 ou 6 jours épagomènes. Bien que calendrier chrétien, c'est le successeur direct du calendrier vague égyptien grâce à l'adjonction d'un sixième jour épagomène tous les quatre ans. Mais ces années *bissextils* ont lieu lorsque le millésime de l'année est congru à trois modulo quatre. L'an I est fixé au vendredi 29 août 284 de l'ère chrétienne. Le début de l'année correspond donc soit au 29 soit au 30 août julien (actuellement  $\cong$  11 septembre grégorien).

Le nom des mois et leur début dans le calendrier julien est donné ci-dessous :

Tout	29 août	} Les années qui suivent les années de 366 jours donc celles dont le millésime est divisible par 4, ces sept premiers mois commencent un jour plus tard.
Bâbah	28 septembre	
Hâtour	28 octobre	
Keihak	27 novembre	
Toubah	27 décembre	
Amchîr	26 janvier	
Barmahât	25 février	
Barmoudah	27 mars	} Ici pas de changement du fait de l'existence d'un 29 Février julien.
Bachnas	26 avril	
Bou'nah	26 mai	
Abîb	25 juin	
Masari	25 juillet	
Jours épagomènes	24 août	

On vérifie facilement que le nom des mois est issu tout droit du nom des mois égyptiens.

#### e) Calendrier julien et cycle

Il est facile de voir que la combinaison des années bissextiles tous les quatre ans et du rythme de la semaine ramène le même calendrier tous les 28 ans.

Désignons par *ABCDEFG*, *AB...* à partir du 1er janvier les jours successifs d'une année. Les jours de même nom correspondent à la même lettre. On appelle *lettre dominicale* la lettre correspondant au dimanche. Si il n'y avait pas d'année bissextile, les lettres dominicales se succèderaient dans l'ordre *GFEDCBA...* A cause des années bissextiles, il y a un saut d'une lettre tous les quatre ans. C'est pourquoi on attribue ordinairement deux lettres dominicales aux années extraordinaires que sont les années bissextiles.

La deuxième lettre devrait être utilisée à partir du 1er mars. En fait nous verrons plus loin que la lettre dominicale est surtout utilisée pour la détermination de la date de Pâques, c'est-à-dire à des fins religieuses. Or, le calendrier ecclésiastique reste très conservateur et le jour bissextile y est toujours fixé comme sous Jules César au 24 février. Donc dans le comput ecclésiastique la seconde lettre dominicale doit s'utiliser à partir du 25 février inclus.

Une autre période qui intervient dans le calendrier ecclésiastique est la période de 15 ans de l'indiction romaine. Cette période qui n'a aucun fondement astronomique, date du début de notre ère. C'était une unité commode de temps et qui a peut-être dû régler le rythme des marchés et des foires. Il faut bien comprendre que le siècle de 100 ans est une invention récente. Chez les auteurs romains, le mot *siècle* a recouvert des réalités très variables jusqu'à 120 ans. On peut donc parfaitement comprendre le regroupement par 15 années (cette période a d'ailleurs été utilisée par Scaliger pour la définition des jours juliens).

— à suivre —

## LES LYCÉENS

### FACE À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

#### Quelques résultats de l'opération 50 lycées (les maths et vous)

Gérard BARBANÇON – Claire DUPUIS – Raymond DUVAL – François PLUVINAGE

Une enquête sur l'image que les lycéens ont des mathématiques et de leur rôle dans l'activité scientifique aujourd'hui a été effectuée à l'échelon national en mai-juin 1988, sous le patronage de la Société Mathématique de France et de quatre autres sociétés savantes. Des enquêtes similaires ont été faites à l'échelon régional dans les différentes académies. Cette opération surnommée "50 lycées" s'inscrit dans une action de réflexion et d'information dont le but est de faire découvrir les mathématiques comme une discipline vivante et vitale pour le potentiel scientifique et technique de notre pays. Un journal "*Mathématiques A Venir*" assure ce travail de réflexion et d'information. On peut se le procurer auprès de J.-P. RESSAYRE (Université Paris VII – Equipe de Logique – 45-55, 5<sup>e</sup> étage – 2, place Jussieu – 75251 PARIS CEDEX 05).

Des comptes rendus, de tonalités très diverses, ayant paru dans la presse, il est utile de présenter ici des extraits du rapport de l'enquête nationale. Nous avons retenu deux thèmes dont les résultats vont à l'encontre d'idées toutes faites.

---

#### Ambivalence d'une grande partie des élèves à l'égard du rôle des mathématiques dans l'enseignement.

L'ambivalence apparaît à l'égard du couple de mots qui caractérise la perception de l'enseignement des mathématiques : SÉLECTION-FORMATION.

**Il y a une majorité écrasante, voire sur certains points une quasi unanimité pour reconnaître la nécessité des mathématiques dans la formation.** Presque tous les élèves reconnaissent que les qualités développées en mathématiques aident en physique, en informatique, en chimie et en économie.

Un sur deux reconnaît aussi cette aide pour les sciences naturelles, 1/3 pour la géographie et 1/2 des élèves de terminale le reconnaissent pour la philosophie. Rien d'étonnant alors à ce que la très grande majorité choisirait (à plus des 3/4) de faire des mathématiques si celles-ci devenaient une matière facultative. Et, en même temps, les trois quarts des élèves pensent que, dans l'orientation scolaire, la sélection se fait surtout par les mathématiques.

	Garçons 1164	Filles 1070
Q.11.7 "Faire des Mathématiques", cela évoque pour vous une activité nécessaire à la formation      oui	89%	86%
Q.6 Si les mathématiques devenaient une matière facultative, choisiriez-vous d'en faire ?      oui	87%	73%

Q.7. Pensez-vous que les qualités développées en mathématiques aident dans ces matières : oui

	774 Seconde	755 Première	705 Terminale	2234 TOTAL
Français	13%	21%	16%	17%
Philosophie	17%	25%	47%	29%
<b>Physique</b>	98%	97%	97%	97%
<b>Chimie</b>	89%	84%	81%	85%
Sciences Nat.	50%	47%	49%	48%
<b>Economie</b>	80%	82%	77%	80%
Histoire	10%	12%	11%	11%
Géographie	35%	35%	31%	34%
<b>Informatique</b>	90%	92%	92%	91%

Mais ils se partagent en deux parties inégales pour l'accepter ("*c'est justifié*") ou pour le rejeter ("*c'est excessif*"). En fait, quatre élèves sur dix, de l'ensemble de la population, pensent que ce rôle de sélection est excessif. Cette proportion aurait sans doute été plus élevée si les élèves de G avaient été normalement représentés dans l'échantillon.

Il y a donc, pour une grande partie des lycéens, ambivalence à l'égard du rôle joué par les mathématiques dans l'enseignement au lycée. Le rôle de formation apparaît indispensable et n'est pas de tout contesté. Mais cette reconnaissance du rôle important des mathématiques dans la formation pousse à leur attribuer un rôle inévitable de sélection dans l'orientation scolaire. Et ce rôle de sélection apparaît prédominant en raison même de l'importance incontestée du rôle des maths dans la formation : la réponse "*la sélection se fait surtout par les maths*" est choisie par presque les 3/4 de la population. C'est ce caractère prédominant du rôle de sélection, envers de leur rôle incontesté de formation, qui est ressenti comme inacceptable par une grande partie des lycéens (4/10).

Question 12

Dans l'orientation scolaire la sélection se fait	Total 2234	Garçons 1164	Filles 1070
surtout par les maths	71%	75%	65%
pas plus par les maths que par d'autres matières	27%	22%	33%
surtout par les maths et c'est justifié	30%	37%	21%
surtout par les maths et c'est excessif	42%	39%	45%

## LES LYCÉENS FACE À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

	Bons résultats		Mauvais résultats	
	698 G	543 F	459 G	523 F
La sélection se fait SURTOUT par les maths et c'est JUSTIFIÉ	41%	26%	20%	15%
La sélection se fait SURTOUT par les maths et c'est EXCESSIF	34%	42%	45%	48%

Il aurait été très intéressant de savoir si ce rôle de formation reconnu quasi unanimement aux mathématiques est aussi reconnu de la même façon à une autre matière. Cela aurait permis de voir si l'ambivalence des élèves est spécifique ou non vis à vis des mathématiques.

### **Les filles se sentent dans une situation différente de celle des garçons vis à vis de l'enseignement des mathématiques.**

Il y a un écart frappant entre les réponses données par les filles et celles données par les garçons à ces différentes questions.

Rappelons qu'en seconde deux filles sur trois et un garçon sur deux dit avoir eu des difficultés à comprendre. Si on regarde la population des élèves de première et celle de terminale, nous trouvons une fille sur deux (370 sur 700) et un garçon sur trois (253 sur 760) qui disent avoir eu des difficultés en seconde. Et nous n'avons pas ici les élèves de la série G!

Dans le même sens nous trouvons beaucoup plus de garçons que de filles qui s'estiment "*assez*" ou "*très doué*" pour les mathématiques. Mais cet écart diminue un peu lorsqu'il s'agit d'estimer les résultats obtenus.

Q. 1. Comment estimez-vous vos résultats scolaires actuels en mathématiques ?

	Population 2234	Garçons 1164	Filles 1070
bons à très bons convenables	56%	60%	51%
plutôt faibles faibles à très faibles	44%	39%	49%

Q. 3. Indépendamment de vos résultats scolaires, comment vous estimez-vous doué(e) pour les mathématiques ?

	Population 2234	Garçons 1164	Filles 1070
très assez	61%	71%	50%
peu, pas du tout ou très peu	39%	29%	50%

Ce qui est le plus révélateur n'est pas tant ces réponses considérées isolément que leur croisement. Un phénomène intéressant apparaît alors! Pour les garçons, comme pour les filles les deux diagonales sont respectivement de même poids  $2/3$ ,  $1/3$ . Mais les cases des deux diagonales sont en équilibre quasi parfait dans le tableau filles, tandis que chez les garçons l'une des cases pèse au moins le double de l'autre! Et nous retrouvons ce même phénomène quand nous croisons les réponses à la question "difficulté du niveau des exercices" et celles à la question "vous estimez-vous doué?".

GARÇONS		
---------	--	--

FILLES		
--------	--	--

RESULTATS  
Doué    Bons    Faibles

oui	49%	21%
non	10%	18%

RESULTATS  
Doué    Bons    Faibles

oui	34%	16%
non	16%	33%

NIVEAU EXERCICES  
Doué    Facile    Difficile

oui	39%	29%
non	10%	16%

NIVEAU EXERCICES  
Doué    Facile    Difficile

oui	26%	21%
non	19%	28%

## LES LYCÉENS FACE À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

### Question 4

Avec laquelle des deux opinions suivantes êtes-vous le plus d'accord ?

	Garçons	Filles
"Il y a un don pour les mathématiques; on l'a ou on ne l'a pas"	1164 28%	1070 40%
"On devient doué pour les mathématiques"	70% 28%	59% 38%

		Question 3	
		S'estime peu doué	S'estime assez ou très doué
Question 4 on l'a ou on ne l'a pas	Garçons 338	28%	72%
	Filles 425	62%	38%

### Questions 1 et 12

Elèves estimant avoir de BONS résultats et trouvant que la sélection se fait SURTOUT par les maths. Ils estiment ce rôle prédominant :

	Justifié	Excessif
Garçons 527	55%	45%
Filles 367	38%	62%

Elèves estimant avoir des résultats FAIBLES et trouvant que la sélection se fait SURTOUT par les maths. Ils estiment ce rôle prédominant :

	Justifié	Excessif
Garçons 343	40%	60%
Filles 330	24%	76%

Cette différence entre garçons et filles, concernant le sentiment de difficulté éprouvée (q. 12 item 4) et l'estimation de ses propres capacités en mathématiques (croisements q.3, q.1, q.3, q.2 item 2), se retrouve d'une façon spectaculaire dans la signification donnée à l'opinion : "*il y a un don pour les mathématiques : on l'a ou on ne l'a pas*" (croisement q.4 - q.3)! Il y a un peu plus de filles que de garçons à partager cette opinion (40% contre 28%). Mais les garçons qui acceptent cette opinion pensent **avoir ce don** (à une majorité des trois quarts). Les **filles** qui acceptent cette opinion pensent, au contraire **ne pas avoir ce don** (à une majorité des deux tiers). Ainsi la croyance en l'existence d'un don pour les maths

prend des significations contraires selon qu'elle est énoncée par un garçon ou par une fille.

Il ressort à l'évidence des réponses recueillies avec ce questionnaire, que les filles se sentent, vis à vis de l'enseignement des maths, dans une situation différente de celle des garçons.

Comment interpréter ce phénomène? Le questionnaire n'a pas été conçu de façon à recueillir des informations sur ce problème. Quelques éléments, que nous n'allons pas tous indiquer ici, permettent d'avancer une interprétation à titre d'hypothèse.

**1. En cas de bons résultats**, les filles restent plus critiques que les garçons sur le rôle de sélection joué par les maths dans l'orientation : les deux tiers de la population féminine trouvent ce rôle excessif contre moins de la moitié de la population masculine. **En cas de résultats faibles**, les filles sont encore plus sévères que les garçons : un quart de la population féminine admet que le rôle de sélection joué par les maths est justifié contre 40% de la population masculine! (voir les tableaux concernant l'intersection des questions 1 et 2).

**2.** La population féminine (proportionnellement faible) qui parvient en P.S. et en T.C. ne se différencie pas de la population masculine pour ce qui concerne l'estimation de sa compétence et celle de ses performances. Mais elle apparaît sur-sélectionnée dans la mesure où très peu, comparativement aux garçons, disent avoir eu des difficultés dans les classes antérieures. Et surtout cette sous-population continue, pour plus de la moitié, à souligner le rôle excessif donné aux maths dans la sélection. Pour être plus précis nous avons 56% des filles contre 41% des garçons en 1ère S (effectifs respectifs 133 et 154); l'écart est significatif au seuil  $\%$ . En Terminale C les effectifs interrogés ne permettent pas de conclure, même si la réponse "*surtout par les maths et c'est excessif*" est choisie par 28 filles sur 46 (taux 61%) contre seulement 48 garçons sur 105 (taux 46%). Mais si on replace ces taux dans le contexte des autres réponses, ils apparaissent révélateurs d'une attitude propre à la population féminine. On peut prévoir que des effectifs de Terminale C plus importants permettraient de conclure statistiquement.

**3.** Les filles sont un peu moins unanimes que les garçons à reconnaître le rôle indispensable des maths dans la formation.

Ces remarques et d'autres éléments nous conduisent à poser la question suivante : la façon dont les mathématiques sont présentées dans l'enseignement ne tend-elle pas à les faire apparaître comme une activité qui néglige des qualités intellectuelles importantes aux yeux de la population féminine?

## UNE EXPERIENCE PEDAGOGIQUE

d'après Stephan SCHANNE

Pour la deuxième année consécutive, quatre élèves primés au rallye d'Alsace ont pu bénéficier d'une bourse pour un séjour de trois semaines à l'université de Long-Island aux Etats-Unis, dans le cadre du "Summer Institute" (cf. 'L'Ouvert' n° 50 de mars 1988).

Nous devons remercier Monsieur le Recteur Deyon qui a su trouver les parrainages nécessaires pour que les familles n'aient à supporter qu'un faible coût pour le séjour et le voyage.

A la manière américaine, cette école d'été allie le sport et les sciences, et les participants reconnaissent le très bon niveau des animateurs. Il nous a paru intéressant de donner ci-après un résumé de la recherche menée par Stephan SCHANNE, élève de première au lycée franco-allemand de Sarrebruck. Sur une quinzaine de pages rédigées en anglais il étudie l'intersection d'une sphère et d'un cube.

### 1° Etude de l'équation d'une sphère

- Sphère de centre  $I$  et de rayon  $R$ .
- Sphère passant par quatre points  $A, B, C, D$  donnés, non coplanaires. Un calcul bien mené conduit à discuter l'intersection des plans médiateurs des segments  $[A, B]$ ,  $[A, C]$  et  $[A, D]$ . En notant  $(x_M, y_M, z_M)$  les coordonnées du point  $M$ , le médiateur de  $[A, B]$  a pour équation :

$$(x_A - x_B).x + (y_A - y_B).y + (z_A - z_B).z = \frac{1}{2}(x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 + z_B^2 - z_B^2).$$

La résolution du système de trois équations obtenu lui permet de trouver le centre  $I$  et le rayon  $R$ .

### 2° Etude de l'équation du cube :

Il se ramène systématiquement au cas :

$$\begin{aligned} (x = 0 \text{ ou } x = 1) \text{ et } (y, z) &\in [0, 1]^2 \\ (y = 0 \text{ ou } y = 1) \text{ et } (z, x) &\in [0, 1]^2 \\ (z = 0 \text{ ou } z = 1) \text{ et } (x, y) &\in [0, 1]^2 \end{aligned}$$

### 3° Etude de l'intersection du cube et de la sphère :

- Tout d'abord il se contente d'étudier l'intersection d'une face du cube ( $xOz$ ) avec la sphère pour montrer que l'intersection est, selon des conditions qu'il détaille :
  - soit vide,
  - soit un cercle,
  - soit formée d'arcs de cercle.

D'APRÈS S. SCHANNE

Puis il généralise au cube tout entier.

- Dans un deuxième temps il se place dans le cas particulier :

$$I : (3/4, 3, 3/4); R^2 = 9,09$$

et calcule très exactement la longueur de l'intersection dans ce cas grâce à la trigonométrie.

N'est-il pas étonnant de constater comment certains de nos élèves peuvent se passionner pour des calculs qui passent pour les dégouter habituellement. Et si cet exercice n'apporte rien de nouveau peut-être incitera-t-il des collègues à tenter l'expérience de clubs mathématiques?

#### A PROPOS DES CONFÉRENCES IREM-APMEP

Nous avons mis en place cette année un cycle de conférences au cours desquelles vous sont présentées des questions mathématiques, qui font actuellement l'objet de recherches et les résultats récents obtenus sur ces questions. Tous les conférenciers se sont imposés la règle de présenter leurs exposés à un niveau qui puisse être abordable et intéressant pour les professeurs de lycée et pour les étudiants de second cycle et de 2<sup>e</sup> année du 1<sup>er</sup> cycle.

D'une certaine manière ces conférences ont été un succès, puisque nous avons un public qui dépasse largement nos prévisions, mais je regrette que l'assistance des collègues de l'APMEP et du secondaire ne soit pas plus importante. L'horaire choisi (mercredi en fin d'après-midi) est a priori optimal, les dates sont annoncées longtemps à l'avance et nous n'avons reçu aucune critique sur les thèmes proposés ou sur le niveau auquel se situaient les exposés, alors je ne comprends pas ce qui se passe, d'autant moins que ce type de conférences correspond à un souhait formulé publiquement à Paris (devant la presse) par l'APMEP.

Nous continuerons l'an prochain si nous trouvons des conférenciers en nombre suffisant, la fréquentation étudiante le justifiant à elle seule, mais je souhaite très vivement que nous ayons à l'avenir un peu plus de succès auprès de nos collègues de l'APMEP.

G. BARBANÇON.

## CALCULS, CALCULATEURS, CALCULATRICES

### UN P.A.E. AU COLLÈGE CHARLES MUNCH

#### DE NIEDERBRONN-LES-BAINS

Frédéric REISS (coordonnateur du projet)

Sortir du carcan traditionnel d'un cours de mathématiques est une aventure passionnante. Le P.A.E. à dominante mathématique que deux classes de 3<sup>e</sup> ont mené à bien au collège Charles Munch en est la preuve éclatante. A l'origine, une petite équipe de professeurs courageux (deux professeurs de mathématiques, un de français, un de sciences physiques, un d'anglais et une documentaliste) et des élèves enthousiastes à l'idée de **vivre autrement** non seulement les mathématiques mais aussi le français, la technologie ou l'histoire.

Le projet était ambitieux et les domaines de recherches étaient vastes... très vastes pour ne pas dire illimités. Trois axes centraux furent retenus :

- **l'histoire** (ou plutôt un fragment d'histoire) **du calcul** et des calculatrices,
- **l'astronomie** qui a joué un rôle important dans l'évolution du calcul et des machines à calculer (la réciproque est vraie aussi!),
- **l'informatique** qui a permis de fulgurants progrès pour le calcul.

Les heures de travail (la plupart en dehors de l'emploi du temps officiel) n'ont pas été comptabilisées (et pour cause!) mais chacun, enseignant et enseigné, y a trouvé son compte. Le travail *normal et habituel* d'un élève de 3<sup>e</sup> n'a été négligé à aucun moment si bien qu'à la fin de l'année scolaire nos élèves, qui avaient réussi tout à fait honorablement au Brevet, étaient prêts pour le lycée.

#### Au départ, 22 dossiers.

Pendant un trimestre les élèves ont travaillé en groupes, de trois ou quatre, sur différents thèmes et sous la responsabilité d'un professeur.

Historique du calcul – Calculs et cailloux – Numération chinoise – Numération égyptienne et maya – Numération romaine – Les calculs rapides – Le boulier chinois – Le nombre  $\pi$  – Napier et les logarithmes – La trigonométrie – Le système solaire – L'horloge astronomique – Les éclipses – Le pouvoir des nombres – De l'art du problème – Nombres et littérature – Biographie de Pascal – Grandes dates de l'évolution des calculatrices – Calculatrices mécaniques – Numération binaire – Transistors et puces – L'informatique au collège.

Ces travaux hétéroclites et nullement exhaustifs ont ensuite été triés, les uns pour la confection d'un **fascicule**, les autres pour la réalisation de **panneaux d'exposition** et le reste pour des démonstrations et des **manipulations**.

La pierre angulaire a été la découverte de la 1<sup>ère</sup> machine à calculer par Blaise PASCAL en 1642. L'aboutissement de ce rêve ancien — qu'un travail intellectuel se fasse par une machine — nous a permis de toucher à l'histoire de l'humanité toute entière...

### Avant le calcul

L'homme primitif n'éprouvait pas le besoin de compter; il ne percevait que les nombres 1 et 2. Au delà, il avait du nombre une vision confuse relevant essentiellement de la pluralité. L'utilisation des cailloux (en latin *calculus* = petit caillou) est à l'origine des premiers calculs. L'invention de l'écriture, événement aussi révolutionnaire dans l'histoire de l'humanité que la maîtrise du feu, permit de fixer les nombres sur des tablettes de comptabilité (os entaillés, plaques d'argile...). Chaque civilisation avait alors son système de numération, chacun avec ses avantages et ses inconvénients : un système de numération efficace doit être économe de symboles afin de ne pas surcharger la mémoire, il doit permettre l'écriture des grands nombres et doit permettre la réalisation d'opérations.

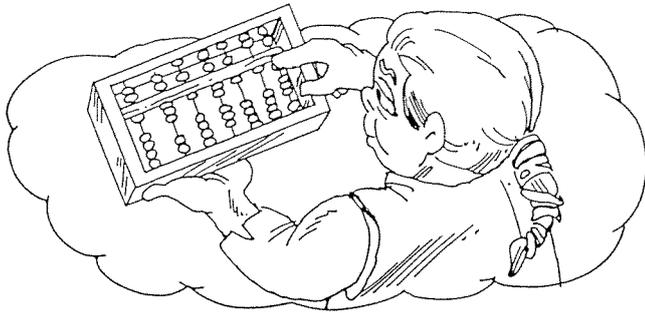
### Le calcul appelle à l'aide!

Compter sur **les doigts** est un procédé primitif qui n'est pas prêt de disparaître! Une technique de compte manuel répandue en Inde, en Chine, en Indochine, utilisait les quatorze phalanges de chaque main. D'autres procédés plus sophistiqués permettaient de compter jusqu'à 100000 sur les doigts d'une main!

En Chine, sous la dynastie des HAN au début de notre ère, apparurent les **baguettes** à calculer (appelées *suan* ou *chousuan*). Elles étaient cylindriques ou prismatiques, de section carrée ou triangulaire, en bois, en os, en bambou, en ivoire et parfois même en jade! Elles mesuraient 6 cuns ( $\simeq 13,8$  cm). Ces baguettes étaient disposées sur un tapis ou sur un échiquier pour faire les opérations. Elles ont connu un succès prolongé au Japon, jusqu'au XIX<sup>e</sup> siècle, avant d'être supplantées par le calcul écrit.

**Le boulier**, premier instrument de calcul autonome, a une origine difficile à déterminer. C'est au XVI<sup>e</sup> siècle que le boulier chinois (ou *suanpan*) s'imposa comme instrument de calcul privilégié; il devint vite l'outil de base des marchands.

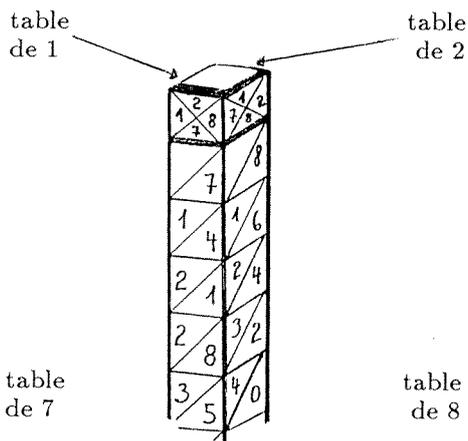
Le boulier chinois comporte plusieurs tringles dont chacune comporte cinq boules de valeur 1 et deux boules de valeur 5. L'inventeur a-t-il voulu compter en base 16? Toujours est-il que le boulier n'est pas prêt de disparaître! Aujourd'hui, à l'ère de l'électronique, il est couramment utilisé par le tiers de la population mondiale!



Les chinois, les russes (qui utilisent le *tchoty*), les japonais (qui utilisent le *soroban*) considèrent le boulier comme principal instrument de calcul courant et comme bagage indispensable que tout écolier et tout commerçant doit posséder. En 1979 a été créée la Fédération chinoise du boulier qui publie des revues mensuelles et organise des *compétitions sportives* au boulier.

### Le calcul devient mécanique

Trois personnages ont marqué de leur empreinte les débuts du calcul mécanique.



1) L'écossais John NAPIER. Après la publication de son "*Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio*" (découverte des logarithmes) en 1614, il inventa des bâtonnets de calcul en 1617. Ces bâtonnets de section carrée comportaient quatre tables de PYTHAGORE, une par face. En juxtaposant plusieurs bâtonnets, on peut obtenir la table de multiplication de n'importe quel nombre. **Ces bâtonnets, appelés "Napier bones"** (os de Napier), connurent une grande diffusion : en bois pour la plupart, ils furent fabriqués aussi en ivoire pour les riches et les nobles.

la somme de 2 faces opposées faisait toujours 9.

2) L'allemand Wilhelm SCHICKARD, diacre à Nuringen, fit en 1617 la connaissance du grand astronome KEPLER. Cette rencontre orienta SCHICKARD vers les sciences : il étudia l'astronomie, se passionna pour les mathématiques et la mécanique. SCHICKARD voulut aider KEPLER dans les calculs compliqués pour la constitution des "*tables rudolphines*" (description du mouvement des planètes). En 1623 SCHICKARD annonça à son ami qu'il avait réussi à construire *une machine qui compte immédiatement et automatiquement les nombres donnés*. Cette horloge à calculer utilisait le principe des bâtonnets de NAPIER que SCHICKARD avait transformés en cylindres. Mais cette **première machine à calculer de l'histoire** resta pratiquement inconnue car elle fut détruite dans un incendie quelques mois après sa construction. SCHICKARD ne construisit jamais de deuxième machine alors qu'il vécut encore 11 ans après cet incident. Pourquoi? L'obscurantisme de l'époque, la malveillance, un *signe divin* sont quelques éléments possibles de

réponse. Il est certain, par contre, que la machine de SCHICKARD resta ignorée de ses contemporains.

3) Le français Blaise PASCAL, mathématicien, physicien, écrivain et philosophe de génie, construisit la première machine en calculer en 1642. Il avait alors 19 ans (il est né l'année de la 1ère rencontre SCHICKARD-KEPLER, en 1623) et cherchait à soulager son père qui, en tant que “commissaire député de l'impôt et levée des tailles” travaillait tard chaque soir pour vérifier ses nombreux calculs. Après son premier modèle, qui fonctionnait assez mal, PASCAL en construisit d'autres : le mécanisme de l'addition reposait sur un simple jeu d'engrenages. On ignore combien d'exemplaires de la Pascaline furent commercialisés : le prix de ces machines était élevé et l'invention de PASCAL resta une curiosité destinée aux riches!

### Les années d'or du calcul mécanique

Après PASCAL, de nombreux savants et mathématiciens perfectionnèrent le calcul mécanique, notamment l'anglais Samuel MORLAND et le philosophe allemand LEIBNIZ. Ce n'est toutefois qu'au XIX<sup>e</sup> siècle que l'on put assister à la *démocratisation* du calcul mécanique grâce à Charles-Xavier THOMAS (de Colmar), homme d'affaires, spécialiste des calculs financiers. C'est lui qui, rassemblant tous les travaux connus vers 1820 et profitant des progrès technologiques, inventa l'**arithmomètre** et parvint à le commercialiser en France et à l'étranger. Vers 1850 les arithmomètres d'une capacité de 6 à 10 chiffres furent utilisés par les magasins du Louvre ou l'Observatoire de Paris. C'était l'avènement du calculateur de bureau.

Les modèles furent régulièrement améliorés : la mode était à l'innovation. En 1885 les américains FELT et TARRANT mirent au point le “**comptometer**”, première calculatrice dont le clavier comportait des touches à enfoncer.

Un cabaretier, James RITTY, inventa la première **caisse enregistreuse**. BURROUGHS contribua à la mise au point de la première **machine imprimante**. Le constructeur automobile Léon BOLLÉE inventa la première calculatrice à multiplication directe sur les nombres à plusieurs chiffres : son modèle de 1892 permit l'extraction non pensée de la racine carrée.

Au début du XX<sup>e</sup> siècle on ne compte plus le nombre de machines à calculer mécaniques, électromécaniques, électriques à clavier unique, facturières et autres machines comptables.

En 1949, Kurt HERZSTARK du Liechtenstein inventa la **première calculatrice de poche mécanique** : la célèbre Curta (elle ne pesait que 230 g!). D'un emploi simple et rapide, elle pouvait tenir dans une seule main. Les Curta connurent un grand succès jusqu'en 1970, lorsque les calculatrices de poche électroniques mirent un point final au calcul mécanique. Les calculs binaires, les transistors et les puces étaient passés par là ... mais ceci est une autre histoire!

### En guise de conclusion

Ce P.A.E. n'a pas seulement été l'occasion d'assimiler des connaissances livresques, il nous a également permis de *bouger et de faire bouger*. A la clé, quelques réalisations concrètes :

- sortie pédagogique à Paris, au CNAM (Conservatoire National des Arts et Métiers), pour voir et photographier la Pascaline. Nous en avons profité pour visiter le Musée des Sciences et des Techniques de la Villette ainsi que le Centre Georges Pompidou;
- collecte de toutes sortes de machines à calculer. Pas moins de 109 machines différentes ont été inventoriées dont quelques modèles particulièrement intéressants : un comptometer Felt et Tarrant de 1912, un cylindre de calcul Loga, des machines Curta, les premières calculatrices électroniques à notation polonaise inversée, de nombreuses règles à calculer, ...;
- travaux pratiques sur les machines à calculer Curta : tours additifs, tours soustractifs, multiplication (par distributivité), division (par encadrements);
- visite d'une horloge astronomique à Niederbronn et réalisation d'une page dans les D.N.A., dans le cadre du "Journal à l'école";
- fabrication et utilisation de baguettes de calcul chinoises;
- gestion informatique (utilisation de Multiplan) des stocks de la coopérative scolaire;
- confection d'un boulier chinois géant (à l'échelle 3) à 13 tringles : entraînement à l'addition, à la soustraction et à la multiplication;
- fabrication de bâtonnets de Napier et démonstration de multiplications;
- exposition, au collège d'abord, dans le cadre d'une "journée scientifique et technique", à l'Hôtel de Ville ensuite, pendant trois semaines en novembre 1988 : dialogue avec le public;
- fascicule de synthèse (en vente sur place, à la bibliothèque de l'IREM (15 F), ou par correspondance (30 F, port compris) au collège C. Munch, 4 rue des Sœurs 67110 Niederbronn les Bains).

### Bibliographie

- Mathématiques et mathématiciens, de Dedron et Itard, éd. Magnard (1959) (\*)  
 Préhistoire et histoire des ordinateurs, de Ligonnière, éd. Laffont (1987)  
 L'histoire universelle des chiffres, de Ifrah, éd. Seghers (1981) (\*)  
 Histoire des mathématiques chinoises, de Martzloff, éd. Massan (1988) (\*)



Matt et Matik  
 sont les deux personnages  
 qui servent de guides  
 dans la brochure  
 "Calculs, calculateurs,  
 calculatrices".



(\*) Disponible à la bibliothèque de l'IREM.

## A VOS STYLOS

### PROBLÈME 6

#### Énoncé

Pour  $\varepsilon > 0$ , soit  $\mathcal{M}^\varepsilon$  l'ensemble des matrices  $3 \times 3$ , à coefficients positifs ou nuls, telles que la somme de chaque colonne soit 1 et que l'une au moins des lignes ait tous ses coefficients plus grands que  $\varepsilon$ . Montrer que si  $(M_n)_{n \geq 1}$  est une suite dans  $\mathcal{M}^\varepsilon$ , le produit infini

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \times \dots$$

converge. La limite est-elle toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} ?$$

**Solution** de Pierre RENFER (nous avons également reçu une solution de Jacques MULLER et une de Christian CUVIER).

Soit

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

une matrice de  $\mathcal{M}^\varepsilon$ .

Il lui correspond un endomorphisme  $f$  de l'espace vectoriel  $R^3$ .

Comme la somme des colonnes est 1, l'application  $f$  conserve le plan affine  $p$  de  $R^3$ , d'équation :  $x + y + z = 1$ .

Soient  $A_1 = (1, 0, 0)$ ,  $A_2 = (0, 1, 0)$ ,  $A_3 = (0, 0, 1)$ . L'application  $f$  transforme  $A_1$  en  $A'_1$ , barycentre des points pondérés :

$$(A_1, a_{11}), (A_2, a_{21}), (A_3, a_{31}).$$

Soit  $T$  l'intérieur du triangle  $A_1A_2A_3$  (arêtes comprises). L'image de  $T$  par  $f$  est l'intérieur  $T'$  du triangle  $A'_1A'_2A'_3$ . Si les coefficients de la ligne  $i$  sont tous supérieurs à  $\varepsilon$ , alors  $T'$  est inclus dans le transformé de  $T$  par l'homothétie de centre  $A_1$ , de rapport  $(1 - \varepsilon)$ .

Donc : aire  $(T) \leq (1 - \varepsilon)^2$  aire  $(T')$ .

## A VOS STYLOS

Soit  $T_n$  le transformé de  $T$  par la composée de  $n$  applications associées à des matrices de  $\mathcal{M}^\varepsilon$ . Alors : aire  $(T_n) \leq (1 - \varepsilon)^{2n}$  aire  $(T)$ . La limite de l'aire de  $T_n$  est donc nulle et la composée a pour limite une application constante de matrice :

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

où  $(a, b, c)$  est l'unique point commun à tous les triangles  $T_n$ .

---

### PROBLÈME 7

#### Énoncé

Soit une fonction de deux variables  $f(x, y)$  telle que, pour tout  $x$ ,  $P_x(y) = f(x, y)$  est un polynôme en  $y$  et, pour tout  $y$ ,  $Q_y(x) = f(x, y)$  est un polynôme en  $x$ . Est-ce que  $f$  est un polynôme à deux variables ?

#### Indication

Oui dans  $\mathbb{R}$ , non dans  $\mathbb{Q}$ .

---

### PROBLÈME 8

#### Énoncé

Appelons  $\mathbb{Q}$ rectangle, tout rectangle dont le rapport des côtés est rationnel. Démontrer que tout rectangle pavé par des  $\mathbb{Q}$ rectangles est lui-même un  $\mathbb{Q}$ rectangle.

#### MATHÉMATIQUES À VENIR Actes du colloque

Enfin édités comme supplément au bulletin de la S.M.F. (Société Mathématique de France) (\*), les actes du colloque "*Mathématiques à venir*" méritent le détour. Trois grands thèmes y sont abordés et débattus :

- les mathématiques et les sciences;
- mathématiques et industrie;
- mathématiques et société.

On trouvera dans cette dernière partie de nombreuses études et statistiques sur la place des mathématiques et des mathématiciens (ou mathématiciennes) dans notre société.

Il ne faut pas cependant oublier les deux autres parties qui contiennent des comptes rendus de débats ou de conférences de très bonne facture, de haut niveau et qui restent toujours lisibles, même pour le non-spécialiste. Par exemple :

- modélisation et mathématiques dans le projet HERMES;
- débat sur l'analyse non-standard;
- concepts abstraits et quantités numériques (par A. CONNES).

(\*) A commander chez Gauthier-Villars (400 pages, 200 F).