LA CONSTRUCTION DES LOGARITHMES DE NEPER

Quelques pages destinées aux élèves des classes terminales et à leurs professeurs

Nicole VOGEL

N.B. : La lecture des passages entre étoiles n'est pas indispensable à la compréhension générale de l'ensemble. Le nombre d'étoiles indique leur degré de difficulté ; * : pour tous ; ** : accessible à tous ceux qui acceptent de faire un petit effort ; *** : pour les élèves des terminales scientifiques après l'étude des équations différentielles.

En ce temps là, les calculatrices n'existaient pas, et le calcul numérique était fastidieux.

Après divers essais visant à remplacer les multiplications par des additions ou à simplifier les calculs trigonométriques, vint enfin NEPER qui inventa les logarithmes. NEPER (1550-1617) était un baron écossais qui fréquentait le milieu scientifique de son époque. Dans la préface de son premier traité de 1614, écrit en latin, il annonça sa découverte ainsi :

> "Préface de la merveilleuse règle des Logarithmes
>
> Très illustre amateur de mathématiques,
> comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions et les extractions des racines carrées ou cubiques portent sur de grands nombres; qu'elle est soumise à l'ennui des longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Dans ce but, j'en ai examiné soigneusement une grande quantité, les uns après les autres, et enfin j'en ai trouvé plus d'un, clair et d'un emploi facile, dont je traiterai probablement ailleurs. A la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un d'eux; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement. Est-il un mystère, qui, au milieu de tant d'autres, lui soit supérieur; il m'a plu de communiquer son usage au monde des mathématiciens ..."

Les astronomes furent évidemment ravis de cette découverte et KEPLER (1571-1630) salua l'œvre de NEPER en 1624 :

"*... Je résous la question par le bienfait des logarithmes. Je ne pense pas que quelque chose soit supérieur à la théorie de Neper ...*" D'ailleurs, KEPLER lui-même publia une contribution à l'étude des logarithmes en 1624 et 1625.

Notons au passage qu'il existait une véritable communauté scientifique européenne à cette époque puisque l'allemand KEPLER utilisa les travaux de l'écossais NEPER.

Mais comment a-t-on défini un logarithme au début du XVII^e siècle ? Peut-on parler de fonction logarithme et dans ce cas, quelle en est la base ? Comment a-t-on pu calculer des tables ? C'est ce que nous allons essayer de comprendre.

1.— Quelques remarques préliminaires.

A l'époque de NEPER, la notion de fonction n'existait pas. Au contraire, les logarithmes serviront de prototype dans le développement de ce concept général (défini par EULER en 1748 seulement). Pourtant, nous parlerons de fonction par commodité, puisque NEPER donne un moyen de faire correspondre un logarithme à chaque nombre positif. Il s'agit donc bien d'une fonction.

De même, la notation décimale n'était pas encore généralisée, et là encore les logarithmes contribueront à son adoption générale. Mais je ne pense pas qu'il faille attacher beaucoup d'importance à la position de la virgule dans les tables de NEPER. Elles semblent plutôt présentées en virgule flottante, comme nos tables actuelles. D'ailleurs, au cours de ses calculs, NEPER convertit une unité principale en 10^7 unités secondaires lorsque cela simplifie l'écriture de ses nombres.

Avant de poursuivre, je voudrais encore préciser que ce texte n'est pas un travail d'historienne, pour lequel je n'ai ni la compétence, ni les documents originaux, mais un essai d'explication et d'analyse, avec le vocabulaire, les notations et les outils que nous utilisons dans notre enseignement actuel, d'une partie du raisonnement de NEPER.

2.— La définition des logarithmes par Neper.

Le but de NEPER est d'établir une table des logarithmes des sinus d'angle de $0°$ à $90°$ c'est-à-dire une table qui a la propriété suivante : si $LN\ a = A$ et si $LN\ b = B$, alors $LN(a \times b) = A + B$. (Nous noterons LN la fonction construite par NEPER.)

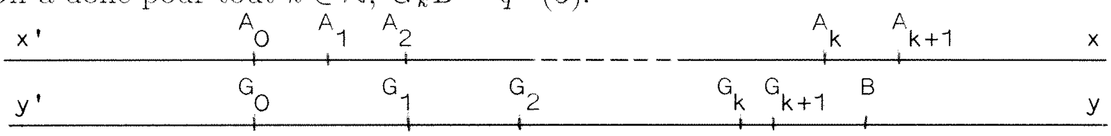
angles	sinus	logarithmes
α	a	A
β	b	B
	$a \times b$	$A + B$

La présence des sinus s'explique par la difficulté des calculs trigonométriques, malgré leur importance en astronomie et en navigation en particulier.

NEPER raisonne ainsi : il découpe une demi-droite d'origine A_0 suivant une progression arithmétique, (l étant une longueur donnée, les points A_k de cette demi-droite sont définis par : $l = A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_kA_{k+1}$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_0A_k = kl = kA_0A_1$ (1)) et un segment $[G_0B]$ de longueur 1 suivant une progression géométrique. Etant donné $q \in]0,1[$, les points G_k de ce segment sont définis par :

$$q = G_1B = \frac{G_1B}{G_0B} = \frac{G_2B}{G_1B} = \cdots = \frac{G_{k+1}}{G_kB} \ (2).$$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_kB = q^k$ (3).



L'idée de comparer une progression arithmétique à une progression géométrique est assez naturelle, puisqu'il s'agit de mettre en relation un produit avec une somme. Ceci explique que NEPER ait choisi le nom *logarithme* formé de *logos* ("raisons" = rapports) et de *arithmos* ("nombres").

D'autre part, représenter des nombres par des segments est la règle de l'époque, héritée des Eléments d'EUCLIDE.

A partir de ces segments, NEPER définit (sans l'écrire ainsi, évidemment) : $LN(G_kB) = A_0A_k$ (4).

Ceci ne donne bien sûr pour le moment que le logarithme des nombres de la forme q^k ($k \in \mathbb{N}$).

		explications :
[* Mais nous avons déjà	$LN(G_0B) = A_0A_0$	relation (4)
c'est à dire	$LN\ 1 = 0$	
Et aussi	$LN(G_kB) = A_0A_k$	(4)
Or	$G_kB = q^k$	(3)
et	$A_0A_k = kA_0A_1$	(1)
donc	$LN(q^k) = kA_0A_1$	
De plus	$A_0A_1 = LN(G_1B) = LNq$	(4) et (2)
D'où	$LN(q^k) = kLNq$	*]

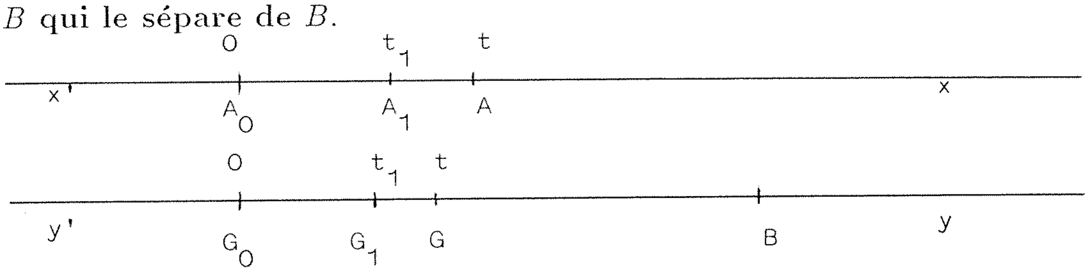
NEPER passe ensuite des nombres de la forme q^k à l'ensemble des réels positifs à l'aide de la cinématique :

• A **est un point mobile sur** $x'x$ **qui se déplace avec un mouvement uniforme** dans le sens de A_0 vers A_1 et qui passe en A_0 à l'instant 0. v est la vitesse constante de A sur $x'x$.

• G **est un point mobile sur** $y'y$ qui se déplace de la manière suivante :

  • **A l'instant 0, il passe en** G_0 **avec la vitesse** v.

  • A chaque instant, **la vitesse de** G **est proportionnelle à la distance** GB **qui le sépare de** B.



Soit t_1 un instant positif fixé, A_1 la position de A sur $x'x$ et G_1 la position de G sur $y'y$ à l'instant t_1.

Si on pose $l = A_0A_1$ et $q = G_1B$ (5), **les points** A_k **définis plus haut** (par (1)) **sont alors les positions de** A **sur** $x'x$ **aux instants** kt_1**, et les points** G_k (définis par (2)) **sont les positions de** G **sur** $y'y$ **aux mêmes instants.**

[** Prouvons-le en faisant une disgression dans le XX^{e} siècle pour les méthodes.

	explications :
Appelons t_k l'instant où A est en A_k.	
Nous avons donc $\frac{A_0A_k}{A_0A_1} = \frac{t_k}{t_1}$.	le mouvement sur $x'x$ est uniforme ;
D'où $\frac{kl}{l} = \frac{t_k}{t_1}$	(1) et (5)
donc $kt_1 = t_k$ (6).	
D'autre part, la vitesse de G à l'instant t est de la forme $C.GB$, où C est une constante.	la vitesse de G est proportionnelle à GB ;
Donc, la vitesse de G à l'instant 0 est $C.G_0B = C$.	$G_0B = 1$;
D'où $c = v$.	la vitesse de G à l'instant 0 est aussi v.

Conclusion : **la vitesse de** G **à l'instant** t **est** $v.GB$ (7)

Appelons y l'abscisse de G sur $y'y$ (de repère $G_0, \overrightarrow{G_0B}$) à l'instant t.	
Donc $GB = 1 - y$ (8)	$\overline{G_0B} = 1$ et $\overline{G_0G} = y$ donc $GB = \overline{GB} = \overline{G_0B} - \overline{G_0G}$
et la vitesse de G à l'instant t est $v(1 - y)$.	**]

[*** Nous en déduisons $\frac{dy}{dt} = v(1 - y)$
donc y est une solution de l'équation différentielle $Y' + vY = v$.

- Une solution particulière de $Y' + vY = v$ est $Y = 1$.
- Donc (y est solution de $Y' + vY = v$) $\Longleftrightarrow$ ($y - 1$ est solution de $Y' + vY = 0$).
- La solution générale de $Y' + vY = 0$ est $Y = Ke^{-vt}$ ($K \in \mathbb{R}$)

Donc $y = 1 + Ke^{-vt}$. De plus, pour $t = 0$, nous avons $y = 0$, donc $K = -1$.

Conclusion : $y = 1 - e^{-vt}$.	
Donc $GB = e^{-vt}$ (9).	(8)
Cherchons enfin où se trouve G à l'instant t_k :	
$GB = e^{-vt_k}$	(9)
$= e^{-vkt_1} = (e^{-vt_1})^k$.	(6)
D'autre part $G_1B = e^{-vt_1}$	G_1 est défini comme la position de G à l'instant t_1 et (9)
et $G_1B = q$	(5)
donc $e^{-vt_1} = q$,	
d'où $GB = q^k = G_kB$.	(3)
Conclusion : $G = G_k$ c.q.f.d.	***]

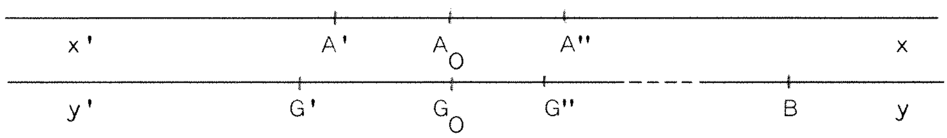
[** Evidemment, NEPER n'utilise pas le calcul infinitésimal. Il considère que t_1 est une valeur suffisamment petite pour qu'on puisse confondre la vitesse instantanée avec la vitesse moyenne pendant un intervalle de temps t_1.

Alors on a $G_0G_1 = vt_1$	v : vitesse à l'instant 0
	t_1 : durée du déplacement de G_0 à G_1 ;
donc $G_1B = 1 - vt_1$.	$G_1B = G_0B - G_0G_1$ et $G_0B = 1$;
D'où $1 - vt_1 = G_1B = \frac{G_1B}{G_0B} = \frac{G_2B}{G_1B} = \frac{G_{k+1}B}{G_kB}$ (10).	(2)
Soit G la position du mobile à l'instant $2t_1$:	
$G_1G = G_1B.v.(2t_1 - t_1)$	en t_1 le mobile est en G_1 et sa vitesse est $v.G_1B$ d'après (7)
	$2t_1 - t_1$ est la durée du déplacement de G_1 à G ;
donc $G_1B - GB = G_1B.v.t_1$	
d'où $G_1B(1 - vt_1) = GB$	
et $\frac{GB}{G_1B} = 1 - vt_1 = \frac{G_2B}{G_1B}$.	(10)
Donc $GB = G_2B$ c'est-à-dire $G = G_2$	

De même, de proche en proche, (en fait, par récurrence, mais ce principe n'a été mis en forme par PASCAL qu'en 1654) on prouve que pour tout $k \in \mathbb{N}$, G_k est la position de G à l'instant kt_1. **]

Poursuivons maintenant le raisonnement de NEPER :
Il définit $LN(GB) = A_0A$ (11), A et G étant les positions des deux mobiles au même instant t. Nous obtenons ainsi le logarithme de tout nombre de $]0,1]$ et même de $]0,+\infty[$ si nous nous intéressons aussi aux positions du mobile avant l'instant 0.

[** Soit Δt un petit intervalle de temps non nul, A' et G' les positions des mobiles à l'instant $-\Delta t$, et A'' et G'' les positions des mobiles à l'instant Δt.



Nous avons $G'G_0 > A'A_0$	la vitesse de G décroît puisqu'elle est proportionnelle à GB et est égale à celle de A à l'instant 0, donc le mobile G est plus rapide que A avant l'instant 0.
et $A_0A'' > G_0G''$.	Par contre, après l'instant 0 A est plus rapide que G.
De plus $A'A_0 = A_0A''$.	le mouvement de A est uniforme et la durée des déplacements $A' \to A_0$ et $A_0 \to A''$ est la même, Δt.

Finalement $G'G_0 > A'A_0 = A_0A'' > G_0G''$ (12)

Posons $h = G_0G''$ (13).	
On en tire $G''B = 1 - h$.	$G''B = G_0B - G_0G''$ et $G_0B = 1$;
Or $LN(G''B) = A_0A''$	(11)
d'où $LN(1-h) = A_0A''$ (14).	

Ecrivons les déplacements élémentaires de G de l'instant $-\Delta t$ à l'instant 0 et de l'instant 0 à l'instant Δt :

$G'G_0 = v.G'B.\Delta t$	$v.G'B$ est la vitesse de G à l'instant $-\Delta t$ d'après (7) et Δt est la durée du déplacement ;
et $G_0G'' = v.\Delta t$.	v = vitesse à l'instant 0
D'où $\frac{G'G_0}{G_0G''} = G'B = G'G_0 + 1$.	
Or $G_0G'' = h$	(13)
donc $G'G_0 = h(G'G_0 + 1)$	
d'où $G'G_0 = \frac{h}{1-h}$ (15)	

En portant (13), (14) et (15) dans (12) nous obtenons : **]
Conclusion : $\frac{h}{1-h} > LN(1-h) > h$ (16) pour les "petites" valeurs positives de h.

3.— Base des logarithmes ainsi construits

Quelques rappels (ou compléments) de cours :

C_1 Soit $\alpha \in]0,1[\cup]1,\infty[$.
On appelle fonction logarithme de base α et on note $\log_\alpha$
la fonction : $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\ell\eta x}{\ell\eta\alpha}$$

C_1' Une telle fonction vérifie, pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*\,2}$ et $\beta \in \mathbb{R}$,
$\log_\alpha(x.y) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$ et $\log_\alpha(x^\beta) = \beta \log_\alpha x$.

[** C_2 Si dans un voisinage de a, $f(x) > g(x) > h(x)$ et si $\lim_a f = \lim_a h = l$ alors $\lim_a g = l$

C_3 $\lim_{x\to 0} \frac{\ell\eta(1+x)}{x} = 1$ **]

Prouvons que la fonction LN définie par Neper est bien une fonction logarithme et cherchons son lien avec $\ell\eta$:

[*** Revenons encore au XX^e siècle et utilisons les résultats du paragraphe 2.

Soit $y \in]0,+\infty[$, G sur $y'y$ tel que $y = GB$ et A la position du mobile sur $x'x$ au même instant t.

$LN\ y = LN(GB) = A_0A$	(11)
$= vt$	car le mouvement de A est uniforme de vitesse v.
D'autre part $GB = e^{-vt}$	(9)
donc $\ell\eta(GB) = -vt$	
d'où $vt = -\ell\eta(GB) = -\ell\eta y$.	***]

Conclusion : $LN\ y = -\ell\eta y$ et donc $LN\ y = \frac{\ell\eta y}{\ell\eta(1/e)}$ et d'après C_1 cela signifie que LN est la fonction logarithme de base $\frac{1}{e}$.

[** Trouvons la base de LN autrement :

Nous avons $\frac{1}{1-h} > \frac{LN\ (1-h)}{h} > 1$	d'après (16) en divisant par $h > 0$
Or $\lim_{h>0}^{h\to 0} \frac{1}{1-h} = 1$	
donc $\lim_{h>0}^{h\to 0} \frac{LN\ (1-h)}{h} = 1$	d'après C_2
Posons $x = -h$	
Nous avons alors $lim_{x<0}^{x\to 0} \frac{LN\ (1+x)}{-x} = 1$	
donc $\lim_{x<0}^{x\to 0} \frac{LN\ (1+x)}{x} = -1$	(17)
Appelons N la base de LN :	
$\frac{LN(1+x)}{x} = \frac{\ell\eta(1+x)}{\ell\eta N}.\frac{1}{x}$	C_1
$= \frac{\ell\eta(1+x)}{x}.\frac{1}{\ell\eta N}$	

$$\begin{array}{r|c} \text{Donc } \lim_{x<0}^{x\to 0} \frac{LN(1+x)}{x} = \lim_{x<0}^{x\to 0} \frac{\ell\eta(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{\ell\eta N} & \\ = \frac{1}{\ell\eta N} & C_3 \\ \text{D'où } -1 = \frac{1}{\ell\eta N} & (17) \\ \ell\eta N = -1 & \\ \text{Nous retrouvons donc ainsi } N = \frac{1}{e} \quad **] & \end{array}$$

4.— Les tables

Neper établit d'abord une table de logarithmes provisoire qu'il appelle "tables radicales".

Il y met des nombres de 0,5 à 1 avec un pas (variable) inférieur à 5.10^{-4}, et leur logarithme. Pour cela, il procède ainsi :

Il prend $A = 0,9995$ et $B = 0,99$ et en utilisant les propriétés C_1' (paragraphe 3), il constitue le tableau suivant, formé de 69 colonnes et 21 lignes :

1^e^ colonne		2^e^ colonne		3^e^ colonne		69^e^ colonne	
Nb	LN	**Nb**	LN	**Nb**	LN	**Nb**	LN
1	0	B	b	B^2	$2b$	B^{68}	$68b$
A	a	AB	$b+a$	AB^2	$2b+a$	$A.B^{68}$	$68b+a$
A^2	$2a$	A^2B	$b+2a$	A^2B^2	$2b+2a$	$A^2.B^{68}$	$68b+2a$
–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–
A^{20}	$20a$	$A^{20}B$	$b+20a$	$A^{20}.B^2$	$2b+20a$	$A^{20}.B^{68}$	$68b+20a$

Entre deux nombres consécutifs d'une colonne, le pas est inférieur à 5.10^{-4}.

[* Ces deux nombres sont de la forme B^pA^n et B^pA^{n+1} $(p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N})$

$$\begin{array}{r|c} \text{Posons } C = B^pA^n. \text{ Alors } B^pA^n - B^pA^{n+1} = C(1-A) & \\ = C.5.10^{-4} & \text{car } A = 0,9995 \\ \text{Or } 0 < C < 1 & \text{car } 0 < A < 1 \\ & \text{et } 0 < B < 1 \\ \text{donc } 0 < B^pA^n - B^pA^{n+1} < 5.10^{-4} \quad *] & \end{array}$$

Entre le nombre situé à la fin d'une colonne et celui du début de la colonne suivante, le pas est inférieur à 5.10^{-4}.

[* Ces deux nombres sont $A^{20}B^p$ et B^{p+1} $(p \in \mathbb{N})$
Or $A^{20} \simeq 0,99005$ et $B < 0,99$
donc $0 < A^{20} - B < 5.10^{-4}$
donc $0 < B^pA^{20} - B^{p+1} < 5.10^{-4}$ | car $0 < B^p < 1$ *]

La suite des nombres lus colonne après colonne de la 1ère à la 69[e] est décroissante.

[* Car $A < 1$ donc $B^pA^{n+1} < B^pA^n$ et nous avons vu plus haut que $B^{p+1} < B^pA^{20}$ *]

Cette suite de nombres commence par 1 et finit par $A^{20}B^{68} \simeq 0,4999 < 0,5$.

Pourquoi le choix de A et de B ?

Nous avons déjà vu plus haut que puisque A est voisin de 1, on modifie peu un nombre de la table en le multipliant par A.

B est un nombre tel que B soit proche de A^n pour un entier n "assez petit" : nous avons vu plus haut que c'est le cas pour $n = 20$. Mais surtout, il s'agit de faire beaucoup de calculs à la main, il faut donc qu'ils soient simples! Or, on multiplie un nombre par A en lui retranchant la moitié de son millième.

[* $C \times A = C \times (1 - 5.10^{-4}) = C \times (1 - \frac{1}{2000}) = C - \frac{C}{1000} \times \frac{1}{2}$ *]

Multiplier un nombre par B est encore plus simple, puisqu'il suffit de lui retrancher son centième.

[* $C \times B = C \times (1 - 10^{-2}) = C - \frac{C}{100}$ *]

Les calculs nécessaires pour remplir cette table sont maintenant assez simples lorsqu'on connaît a et b. Dans les colonnes "LN", ils se réduisent à des additions de a, et dans les colonnes "nombres", à des multiplications par A. Dans les lignes, il suffit de faire des additions de b et des multiplications par B.

Ces calculs auraient été confiés à des maîtres d'école.

Nous constatons que chaque colonne est indépendante des autres, et que de plus on peut vérifier les calculs des colonnes en les refaisant ligne par ligne. Les risques d'erreurs sont ainsi limités. La conception de ce tableau est donc trés ingénieuse.

Il nous reste à expliquer comment Neper a calculé a et b.

Pour cela, il calcule un logarithme fondamental, celui de $1 - 10^{-7}$ (nous poserons $\alpha = 1 - 10^{-7}$).

Puis il calcule une première table, celle des puissances de α jusqu'à α^{100}, dont il déduit $LN(1 - 10^{-5})$ (nous poserons $\beta = 1 - 10^{-5}$).

Il calcule enfin une deuxième table, celle des puissances de β jusqu'à β^{50}, dont il déduit $LN\ A$ c'est-à-dire a.

[* **Précisons** ses méthodes :

• Rappelons la relation (16) : $\frac{h}{1-h} > LN(1-h) > h$. La moyenne $\frac{1}{2}(h+\frac{h}{1-h})$ donne une bonne valeur approchée de $LN(1-h)$ lorsque h est petit. NEPER l'applique à $h = 10^{-7}$ et obtient ainsi $LN\alpha \simeq 1,000\ 000\ 050\ 000.10^{-7}$.

• Les calculs de la première table sont des multiplications par α, ce qui revient à retrancher à un nombre son quotient par 10^7. NEPER obtient ainsi $\alpha^{100} \simeq 0,9\ 999\ 900\ 000\ 495$, valeur que nous noterons X. Donc $100.LN\alpha \simeq LN\ X$.

Par ailleurs $\alpha^{101} = \alpha^{100}(1-10^{-7}) \simeq X - 0,999\ 990.10^{-7}$ que nous noterons X'. Donc $101.LN\alpha \simeq LN\ X'$.

Par interpolation linéaire (méthode que nous expliquerons à la fin de ce paragraphe), on obtient :

$$LN(0,99\ 999) = LN\beta \simeq 100,000\ 495\ 000.LN\alpha.$$

D'où $LN\beta \simeq 100,000\ 500\ 000.10^{-7}$.
(Remarque : on aurait pu calculer $LN\beta$ avec la relation (16), mais l'incertitude sur le résultat aurait été trop grande pour pouvoir baser tout le travail suivant sur ce nombre).

• Les calculs de la deuxième table sont des multiplications par β, ce qui revient à retrancher à un nombre son quotient par 10^5. NEPER obtient ainsi $\beta^{50} \simeq 0,9\ 995\ 001\ 222\ \mathbf{927}$ et introduit ici une erreur, puisqu'il devrait trouver $0,9\ 995\ 001\ 224\ \mathbf{804}$.

En faisant une interpolation linéaire et en utilisant $LN\beta$, on trouve alors $LN(0,9\ 995)$, c'est-à-dire a. *]

Neper trouve finalement $a \simeq 5\ 001,25.10^{-7}$, mais les décimales suivantes de son résultat sont fausses.

Avec cette valeur, NEPER remplit la première colonne de ses tables radicales avec la meilleure précision possible et en déduit b.

[* En effet, il a A^{20} et $LN(A^{20}) = 20.a$. Il calcule aussi A^{21} et $LN(A^{21}) = 21a$. Comme $A^{21} < 0,99 < A^{20}$, il en déduit $LN(0,99)$, c'est-à-dire b, par interpolation linéaire. *]

Finalement Neper obtient $b \simeq 100\ 503,4.10^{-7}$.

Maintenant, il ne reste plus qu'à remplir les autres colonnes des tables radicales.

A partir des tables radicales, Neper calcule ensuite les logarithmes des sinus des angles de 90° à 30°, avec un pas d'une minute d'angle. Il part pour cela d'une table de sinus (la construction d'une telle table est une autre histoire ...) et situe chaque sinus entre deux nombres des tables radicales. Pour trouver son logarithme, il fait une interpolation linéaire sur les logarithmes des deux nombres, c'est-à-dire qu'il calcule le logarithme du sinus en admettant qu'entre deux nombres consécutifs des tables, les différences des logarithmes sont proportionnelles aux différences des nombres (cette approximation est légitime puisque le pas des tables est très petit).

[* Précisons : supposons que dans la table suivante les lignes 1) et 3) figurent dans les tables radicales et que y soit compris entre x et z. On cherche Y :

	nombres	LN
1)	x	X
2)	y	$Y?$
3)	z	Z

Faire une interpolation linéaire consiste à supposer $\frac{x-y}{x-z} = \frac{X-Y}{X-Z}$, ce qui permet de calculer Y. *]

Pour les angles inférieurs à 30°, NEPER utilise les formules de trigonométrie.

[** $\sin(2.x°) = 2\sin(x°).\cos(x°)$
donc $\frac{1}{2}.\sin(2x°) = \sin(x°).\sin(90° - x°)$
d'où $LN(\sin(x°)) = LN(\frac{1}{2}) + LN(\sin(2.x°)) - LN(\sin(90° - x°))$.

A partir des valeurs déjà calculées, cette formule donne $LN(\sin(x°))$ pour $15 \leq x \leq 30$ (puisqu'alors $30 \leq 2x \leq 60$ et $60 \leq 90 - x \leq 75$). Puis avec les nouvelles valeurs on complète pour les angles de 7°30′ à 15°, et ainsi de suite on arrive jusqu'à un angle égal à 1′. **]

Plus, et c'est là qu'intervient une nouvelle fonction de l'enseignant, les mathématiques peuvent devenir psychothérapiques. "*Il ne faut jamais oublier que jouer est une thérapie en soi. Faire le nécessaire pour que les enfants soient capables de jouer, c'est une psychothérapie qui a une application immédiate et universelle* ". Dans cette perspective, un enseignant de mathématiques ne fait pas qu'apprendre les mathématiques à ses élèves; il peut les aider à s'épanouir, à développer à la fois leur adaptation au réel et leur pouvoir créatif. Il existe par exemple un courant de propositions de "*problèmes ouverts* " où le but est d'inventer de multiples procédés d'études et de comparer les différents chemins suivis. Ce qui compte alors, c'est le pouvoir créatif de l'élève. Ce procédé stimule l'initiative, évite les démarches étroitement balisées, laisse place à l'erreur indispensable au progrès et peut déboucher parfois sur une production individuelle ou collective. Voilà à quoi peut servir une discipline comme les mathématiques.

"Les maths, les français, les langues...
à quoi ça me sert?
(l'enseignant et la représentation de sa discipline)"
Jacques NIMIER, Cédic, 1985

5.— Extrait des tables.

Voici un passage de la table des logarithmes de sinus obtenue, avec sa signification :

23°	Sinus	Logarithmes	Différences	Logarithmes	Sinus	66°
0′	3 907 311	9 397 354	8 569 026	828 328	9 205 049	60′
1	3 909 989	9 390 504	8 560 941	829 583	9 203 912	59
2	**3 912 666**	**9 383 660**	**8 552 861**	**830 799**	**9 202 774**	58
3	3 915 343	9 376 821	8 544 785	832 036	9 201 635	57
27						33
28	3 982 155	9 207 616	8 344 322	863 294	9 172 920	32
29	3 984 823	9 200 918	8 339 360	864 558	9 171 761	31
30	3 987 491	9 194 226	8 328 403	865 823	9 170 601	30

$\sin(23°2') \times 10^7$

$LN(\sin(23°2')) \times 10^7$

$LN(\tan(23°2')) \times 10^7 = [LN(\sin(23°2')) - LN(\cos(23°2'))] \times 10^7$

$LN(\sin(66°58')) \times 10^7$

$\sin(66°58')$ ou $\cos(23°2') \times 10^7$

Nous remarquons que dans la 1ère colonne les sinus sont croissants, alors que dans la 2e, les LN sont décroissants. Cette fonction LN est donc décroissante. Nous retrouvons ainsi que ce n'est pas $\ell\eta$. D'ailleurs, puisque les sinus sont dans $]0, 1]$, les $\ell\eta$ seraient négatifs.

[* Nous pouvons encore retrouver la base N de la fonction LN :

$$LN \sin 23° = \frac{\ell\eta \sin 23°}{\ell\eta N} \text{ d'après } C_1$$

$$\text{donc } \ell\eta N = \frac{\ell\eta \sin 23°}{LN \sin 23°} \simeq -1$$

Nous pouvons en déduire $N \simeq \frac{1}{e}$. *]

En vérifiant à la calculatrice, nous constatons aussi que les derniers chiffres des logarithmes de la table ne sont pas exacts. NEPER lui-même a reconnu qu'il restait une erreur qu'il n'a pas pu localiser. Nous avons vu qu'il s'est trompé dans le calcul de β^{50}. Mais nous lui pardonnons cette petite inexactitude, car nous qui peinons pour effectuer une petite multiplication sans calculatrice, sommes bien obligés d'admirer une réalisation aussi ingénieuse!

Références

Histoires des logarithmes de Neper à Euler.— Charles NAUX (Paris, Librairie scientifique et technique A. Blanchard – (1966)

The historical development of the calculus (Chap. 6).— C.-H. EDWARDS, Jr. (New York, Springer Verlag (1979)

On trouvera aussi un T.P. autour du travail de NEPER dans Transmath Terminales A_1B, page 260, ou Terminales C.E., Tome 1, page 124 (le T.P. porte sur $\ell\eta$ et non LN).

MUMATH OU DERIVE?

Etienne MEYER vient de publier à l'IREM de Strasbourg un fascicule : "*Faire des maths avec Mumath*" (prix de vente : 40 F).
Enfin un manuel d'informatique qui insiste sur la didactique et la pédagogie. Après la présentation de **mumath** et de son langage de programmation **musimp**, l'auteur nous initie à la manipulation des différents fichiers (arithmétique, algèbre, équations linéaires, analyse) et multiplie les exemples de travaux pratiques réalisables et réalisés en classe de première ou de terminale :

- fractions continues;
- calcul de log 2;
- méthode de NEWTON;
- recherche de nombres premiers;
- systèmes d'équations linéaires;
- exemple de calcul intégral;
- comportement asymptotique d'une fonction.

Avec la puissance de calcul que l'on connaît (voir l'article d'E. MEYER dans '*L'Ouvert*' n° 43), mumath réalise des prouesses qui sidèrent élèves et professeurs.

Mais voilà qu'on annonce sur le marché le successeur de ce magnifique logiciel : **derive**, beaucoup plus interactif (mais plus de programmation possible), plus performant, autorisant les représentations graphiques en $2D$ ou $3D$ et de façon directe, le calcul approché. A quand **derive** (a mathematical assistant) sur une calculatrice de poche?