REGISTRES MIS EN JEU PAR LA NOTION DE FONCTION

I. GUZMAN - RETAMAL

In order to deal with the subject of function in the 3rd years, a pedagogical project was envisaged that introduces the concept of function by using loga language. A table of values can be constructed, then the function in question is written algebraically and finally its graphic representation is constructed. All this, without losing sight of either the associated mathematical vocabulary or the interpretation of proposition in natural language.
This article is a didactic analysis of the results of a questionnaire that was formulated by taking into account the more standard objectives involved in the subject of functions at 3rd years level. It was submitted to the students that worked on this project and students belonging to a control class that worked with a traditional method.

Des difficultés d'apprentissage se présentent au sujet des fonctions, à tous les niveaux d'enseignement où elles interviennent, même dans les premières années de faculté.
Nous avons choisi la classe de troisième pour notre recherche, puisque non seulement elle termine le cycle de collège où les élèves rencontrent les fonctions depuis la sixième d'une façon intuitive, mais encore elle marque le commencement d'un enseignement moins intuitif et plus mathématique des fonctions. A ce stade plusieurs questions se posent naturellement : **qu'est-ce que les élèves retiennent des fonctions à la fin de la 3ème? Comment les perçoivent-ils? Quel degré de maîtrise peuvent-ils en acquérir ?** Il est évident que les réponses sont très dépendantes du type d'enseignement reçu. Nous avons donc décidé d'étudier deux points de vue différents d'enseignement : l'un traditionnel et l'autre s'appuyant sur l'informatique, notamment dans le langage Logo, de plus en plus considéré dans l'enseignement à l'heure actuelle.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p.230-260) IREM de Strasbourg

Nous avons construit un questionnaire prenant en compte les objectifs les plus classiques dans une étude de fonctions. Ils sont indiqués dans les programmes et dans de nombreux manuels français actuels. Notre premier objectif est la **reconnaissance d'une fonction à partir de situations différentes** (graphique, algébrique, vie courante, programmation). Le second porte sur la **manipulation de la notion de fonction** (le changement de registre). Le troisième est **l'application de cette notion aux équations de droites et aux propriétés de proportionnalité.** Un projet pédagogique qui prétend faire en sorte que les élèves acquièrent cette notion dans toute sa globalité doit tenir compte de la complexité de cette notion et concerner tous les registres qu'elle met en jeu.
Dans le questionnaire (en annexe) nous avons considéré davantage les registres graphique, algébrique et de programmation au niveau du traitement, parce que ce sont ceux qui, d'une façon ou d'une autre, sont considérés dans la plupart des projets usuels d'enseignement des fonctions. Ce questionnaire a été proposé à des élèves de troisième, 24 d'une classe témoin et 20 d'une classe expérimentale, que nous avons observée du 14 mars au 11 mai 1987. Les résultats ont mis en lumière les avantages et les inconvénients des deux projets d'enseignement pour l'apprentissage des fonctions par les élèves. Et il est apparu très nettement qu'un apprentissage correct des fonctions exige que l'enseignement ait envisagé tous les registres liés à la notion de fonction et ses applications.

I Les registres mis en jeu par la notion de fonction

Les fonctions interviennent, au niveau de l'enseignement, sous diverses formes : des formules, des relations explicites entre deux ensembles, des tableaux de valeurs, des touches de calculette (touche √, cos, ln ...), des programmes (Logo,...), des graphiques, des expressions courantes de mesures; par exemple, en un lieu donné, la pression atmosphérique est fonction du temps (du moment) ou l'aire d'un disque est fonction de son rayon. Cette notion se trouve aussi dans des situations extra-mathématiques lorsque l'idée de cause et d'effet est présente, l'effet étant vu comme fonction de la cause dans le langage usuel. Les fonctions se rencontrent aussi dans bien d'autres disciplines : physique, géographie, sciences naturelles, langues.

Registres mis en jeu par la notion de fonction

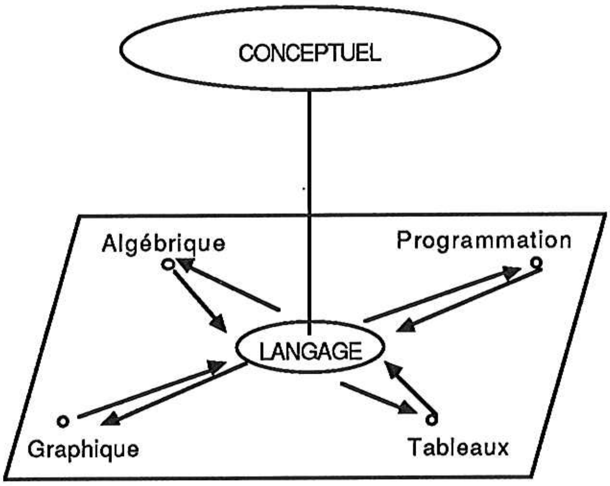
Tout cela indique la complexité de cette notion que le document de la COPREM (1987. P. 33) résume de la façon suivante :

" Une fonction n'est :
ni un tableau de valeurs
ni une représentation graphique
ni une suite de touches de calculette
ni une formule.
C'est tout cela à la fois."

Aux aspects de tableaux de valeurs, de représentation graphique, à l'aspect algèbrique (formules, $y = f(x)$), à celui de programmation, relevés par ce texte, nous ajouterons les aspects conceptuel de correspondance et le langage (vocabulaire, discours) surtout importants pour l'introduction de cette notion .

En essayant de préciser le statut de la notion de fonction, nous avons remarqué que parmi ces aspects, il y a ceux qui définissent un registre de présentation et de traitement permettant de fournir une concrétisation de cette notion. Ceci explique la diversité des projets d'enseignement qu'on pourrait envisager. Dans un sens didactique nous pouvons considérer que la notion de fonction renvoie à une multiplicité de registres tous reliés par le langage. Pour représenter les multiples registres mis en jeu par la notion de fonction, nous proposons le schéma suivant :

REGISTRES MIS EN JEU PAR LA NOTION DE FONCTION



Dans ce schéma les registres de traitement sont placés sur un même plan : ils ont le même statut, puisque chacun se caractérise par la possibilité de fournir une représentation concrète d'une fonction. La structure mathématique de la fonction constituant son aspect conceptuel relève d'un autre plan. Nous avons indiqué par des flèches les liaisons, à double sens, entre le langage et chacun des registres. Ce sont les liaisons qui sont les plus fréquemment mises en oeuvre, mais il existe aussi des passages directs entre registres qui ne sont pas représentés, pour des raisons de simplicité. Bien que le langage puisse constituer aussi un registre, nous ne le considérons pas ici dans ce sens, en raison de sa nature très complexe et trop large. Nous retiendrons ici son rôle de communication. Entre autres, le langage permet de dire "la même chose" en parlant de registres différents.

II Présentation globale des deux démarches mise en pratique La démarche logo et la démarche traditionnelle.

1) La démarche logo.

Elle prend surtout en compte, dans le traitement des fonctions et des équations de droites, le registre programmation.

Les **objectifs spécifiques** considérés par cette démarche sont les suivants:

A) Pour la notion de fonction

1) Reconnaître une fonction comme une procédure.
2) Ecrire une procédure-fonction qui permette d'obtenir l'image d'un élément par une fonction donnée.
3) Déterminer à l'aide de l'ordinateur la fonction correspondant à un tableau de valeurs incomplet (Fonction cachée)
4) Représenter à l'aide de l'ordinateur les fonctions affines et linéaires proposées précédemment dans l'objectif 3.
5) Ecrire une procédure dépendant des paramètres A et B permettant d'obtenir la représentation graphique d'une fonction affine F: $F(x) = Ax + B$.
6) Représenter graphiquement sur l'écran et dans le même repère des fonctions affines en faisant varier l'un des paramètres A ou B et en laissant l'autre fixe.

B) Pour les équations de droites.

7) Arriver à la notion d'équation d'une droite par des activités de recherche.
8) Déterminer l'équation d'une droite, à partir de différentes situations (un point et un vecteur directeur, deux points etc...).
9) Comprendre le rôle du coefficient directeur et faire le rapport entre la relation de parallélisme et celle de perpendicularité.

La mise en oeuvre de ces objectifs a été faite à l'aide de quatre fiches, intitulées : fonctions, les équations de droites, la fonction cachée et la représentation graphique des fonction affines (cf. Annexe). L'organisation de ces fiches met en jeu les deux domaines de l'informatique éducative, signalés dans la brochure Logo 3 (Dupuis,Egret,Guin, 1987) de l'Irem de

Strasbourg, à savoir **l'informatique objet** (fiches fonctions (intégrale) et représentation graphique (Ex.3; 4; 5)) et **l'informatique outil** (fiches fonction cachée (intégrale) et représentation graphique (Ex.1; 2).

Caractéristiques de la démarche Logo.

Parmi les caractéristiques principales de cette démarche nous signalons les suivantes:

1) La fonction apparaît comme une **procédure** qui permet d'obtenir l'image d'un antécédent donné.Et la construction d'un tableau des valeurs est naturelle.(Fiche 1 : fonctions).
Cette présentation :

- met en jeu des aspects conceptuels dans les registres de programmation et des tableaux.
- permet l'introduction naturelle du vocabulaire fonctionnel. (images, antécédents, ensemble de départ et d'arrivée ...).
- permet le choix de sujets le plus divers pour les exercices (numériques et extranumériques).

2) Le traitement des équations de droites est présenté comme une **situation de recherche** d'une condition nécessaire et suffisante (fiche : Les équations de droites).
Condition nécessaire: chercher la relation entre les coordonnées (x,y) d'un point M du plan pour que ce point appartienne à une droite (AB) (les coordonnées des points A et B étant données). Condition suffisante : Etant donnés trois points dont les coordonnées vérifient une relation du type $ux + vy + w = 0$, que peut-on dire de ces trois points ? Ce traitement, effectué sans le support informatique, apparaît dans tous les exercices classiques et permet un travail actif de la part des élèves dans le registre algébrique.

3) La **manipulation** de la notion de fonction et de son vocabulaire est mise en oeuvre dans des exercices qui portent sur des fonctions affines : linéaires, affines par morceaux etc, recherche de la fonction cachée. (fiche : fonction cachée). Dans cette partie on met en jeu des aspects de langage et les registres tableaux et algébrique.

4) La représentation graphique d'une fonction F se présente comme un **dessin de l'ensemble des points** de coordonnées (x, F(x)) dans le plan reperé. En mettant en jeu des

aspects de langage et les registres : programmation (Logo), tableaux, algébrique , graphique, ce traitement permet de mettre l'accent sur la lecture graphique et de mettre en évidence les rôles des paramètres A, B de l'expression $F(x) = Ax + B$, à travers la variation systématique et indépendante de ces paramètres.
5) Le **temps** d'enseignement de la séquence complète sur les fonctions et les équations de droites proposée dans la démarche Logo a été de **16 heures** dans la classe expérimentale.

2) La démarche traditionnelle

Cette démarche tient compte, pour le traitement de fonctions, des aspects conceptuels de correspondance avec le support graphique. En particulier, pour l'introduction de la notion de fonction elle privilegie le registre graphique.

Les **objectifs spécifiques** considerés dans cette démarche sont les suivants:

*1) **Rappeler et Préciser** les notions vues dans les classes précédentes telles que : relation, fonction, application, bijection, relation réciproque, source-but-graphe, image-antécédent, en insistant sur le vocabulaire mathématique. L'élève arrivera à reconnaître une fonction (et à le justifier) aussi bien dans les ensembles numériques qui lui sont proposés que dans des exercices concrets de la vie courante.*
*2) **Présenter des notions nouvelles :** les relations composées (sous forme d' exercices)et les ensembles de définition et des images (avec le support graphique).*
*3) **Etudier les conditions d'existence** de l'ensemble de définition ou domaine de la fonction, en mettant l'accent sur la nécessité de cette étude,(la racine carrée, expressions rationnelles avec des inconnues au dénominateur...).*
*4) **Travailler sur la représentation graphique:***
- *des fonctions pas seulement sur R (en faisant remarquer qu'il n'est pas toujours possible de joindre les points),*
- *des fonctions affines et linéaires.*
- *La fonction en escalier est traitée à l'aide d'un exercice, sans mettre l'accent là-dessus.*
- *Faire remarquer que l'axe des abscisses contient la source de la fonction.*

*5) **Manipuler** le* sens de variation, *le coefficient angulaire, le vecteur directeur (des nombreuses manipulations entre autres , trouver la fonction connaissant deux images,etc).*

Nous ne donnons pas les objectifs spécifiques à propos des équations de droites, car ce sont là les objectifs classiques qui se trouvent dans le manuel actuel de 3ème, Faire de Mathématique et dans bien d'autres encore (cf. bibliographie).

Caractéristiques de la démarche traditionnelle.

Parmi les caractéristiques de cette démarche nous signalons les suivantes:

1) La présentation de la notion de fonction à l'aide d'un graphique permettant de visualiser la source et le but.
Cette présentation prend en compte le registre graphique et des aspects conceptuels de correspondance. Elle permet d'acquerir un critère intuitif pour reconnaître une fonction à partir d'un graphique donné et de rappeler le vocabulaire mathématique associé.

2) Le registre algébrique des formules a été bien privilégié dans cette démarche comme d'habitude, ce qui est clair d'après l'objectif 3. Mais le registre tableaux à été complètement ignoré dans le déroulement de l'enseignement.

3) *Le **temps d'enseignement** sur les fonctions par la démarche traditionnelle en considérant les équations de droites fut de **12 heures** dans la classe témoin.*

III Comparaison des deux démarches par rapport au question naire.

Nous nous proposons d'examiner comment des élèves de 3ème accèdent à ce traitement multi-registres, auquel la notion de fonction donne lieu. Cela semble devoir dépendre en priorité du type d'enseignement donné. En effet, étant donnée la multiplicité de registres, un enseignement de fonctions peut en privilégier certains en détriment d'autres, ou au contraire prendre comme objectif les changements de registres en vue de permettre une meilleure compréhension de la notion de fonction.
Nous nous sommes fixés trois objectifs, comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, lesquels ont donné lieu à 10 questions ayant chacune un ou plusieurs items. Dans le tableau suivant nous présentons l'organisation des questions et des items dans le questionnai-

re par rapport aux nos objectifs de reconnaîssance, production et application, en considérant les tâches des élèves et les buts de l'enseignement.

1) Structure du Questionnaire

	RECONNAISSANCE	PRODUCTION	APPLICATIONS
Tâches des élèves	**Question 1** (5 item) Reconnaître des fonction à partir de graphiques. **Questions 2** (2 items, Logo) Reconnaître une fonction à partir de données théoriques **Question 3** (3 items) Reconnaître une fonction à partir d'une formule...	A partir de la notion de fonction avec interprétation donner une : **Question 4** (3 items) expression algébrique **Question 5** (3 items) expression algébrique et une représentation graphique **Question 10** (2 items) expression algébrique plus un énoncé.	**Question 6** (3 items) Associer des données mixtes : équations et dessin, **Question 7** (2 items) même tâche que la question 6 mais avec quadrillage. **Question 8** (3 items) Interpréter des données sur un graphique et donner un résultat. **Question 9** (1 item) Même tâche que la question 8 à partir d'autres données.
Buts de l' enseignement	Travail dans les différents registres: graphique programmation algébrique en tenant compte des aspects conceptuels (définition et vocabulaire).	Changements entre les registres graphique et algébrique en tenant compte des aspects conceptuels, de compréhension et de langage en ... ...tâches de production	...tâches d'application directe de propriétés

2) Etude comparative

On peut procéder à une étude comparative des deux classes sur des questions complètes ou seulement sur des items correspondant à des parties de questions. Comme chaque question correspond à un de nos objectifs, nous avions pensé a priori que l'analyse du comportement des élèves sur chacune des questions pourrait nous donner un panorama des performances des élèves des deux classes. Mais les résultats que nous avons obtenus avec une telle analyse sont très globaux et ils ne permettent pas une distinction nette entre les situations réelles des deux classes. Par exemple si on prend la question 5 nous obtenons le tableaux suivant de réussite - échec.

Classe \ Q5	R	E
Expérimentale	11	9
Témoin	7	17

On remarque que la différence entre les deux classes n'est pas significative au seuil .05, puisqu'on obtient $\chi^2 = 3{,}4$. Pourtant si on regarde séparément les items de cette question, le test du chi - 2 indique des différences significatives entre les taux de réussite. Voici les taux de réussite à chaque item :

Classe \ items	5.1	5.2	5.3
Expérimentale	1	.85	.55
Témoin	.84	.33	.54

Ceci nous donne des informations permettant d'apprécier plus nettement le comportement réel des élèves. Pour ces raisons, nous avons finalement choisi l'item comme "atome" pour procéder aux comparaisons des performances.

D'après l'analyse des performances des élèves par rapport au questionnaire, nous avons fait une classification des items en trois groupes. Le premier groupe contient les items où il n'y a pas de différences significatives entre les deux classes (Tableau 4.1). Le deuxième groupe contient les items où les différences sont significatives en faveur de la classe expérimentale (Tableau 4.2). Le troisième groupe contient les items où les différences sont significatives en faveur de la classe témoin (Tableau 4.3). La question 2 qui porte sur le Logo ne fait pas partie de cette comparaison, parce que ce sujet est hors du programme. Alors les items en comparaison apparaissent respectivement dans les tableaux suivants où est indiqué le taux de réussite à chaque item.

Tableau 1.- Taux de réussite des items du groupe 1.

Items / Classe	4.1	6.1	6.3	4.3	7.1	6.2	5.3	5.1	1.4	3.3	3.1	3.2	1.1
Expérimentale	.90	.85	.85	.80	.70	.65	.55	1	.55	0	25	0	.60
Témoin	.92	.83	.71	.75	.71	.62	.54	.84	.50	.17	.29	.04	.58

Pas de différences significatives entre les deux classes.

Tableau 2.- Taux de réussite des items du groupe 2.

Items / Classe	4.2	5.2	10.1	10.2	7.2
Expérimentale	.65	.85	1	.50	.90
Témoin	.25	.33	.50	.12	.67
χ^2	7,11	11, 8	13,7	7,36	3, 38

Différences significatives en faveur de la Classe Expérimentale.

Les différences significatives en faveur de la classe expérimentale sont assurées par le test de χ^2 ou de Fisher. En raison des effectifs on a utilisé le test de χ^2 d'homogénéité au seuil 0.05 avec conclusion de rejet pour $\chi^2 > 3{,}84$, à un degré de liberté.

Tableau 3.- Taux de réussite des items du groupe 3.

Items / Classe	1.2	1.3	8.1	8.2	8.3	9	1.5
Expérimentale	.35	.25	.20	.20	.20	.20	.30
Témoin	.71	.67	.75	.79	.87	.46	.50
χ^2	5,6	7.59	13,2	15,3	20,2	3,24	1,8

Différences en faveur de la Classe Témoin.

Pour l'item 1.5 et la question 9 il n'y a pas de différence significative entre les taux de réussites, puisque $\chi^2 < 3.84$.

Par rapport à la structure du questionnaire, les items de chacun des trois groupes se situent conformement aux tâches et registres concernés comme l'illustrent les trois tableaux suivants :

Registres mis en jeu par la notion de fonction

Tableau 4.1 Items du 1er Groupe

Registre \ Tâche	Reconnaissance	Production	Application
Graphique	1.4 (M)		
Algébrique	3.3 (N) 3.2 (N) 3.1 (N)		
Gra → Alg.		4.1 (B) 4.3 (B)	6.1(B) ; 6.3(B) 6.2(B); 7.1(B)
Alg. → Gra.		5.3 (M)	

TABLEAU 4.2 Items du 2ème Groupe

Registre \ Tâche	Reconnaissance	Production	Application
Graphique			
Algèbre			7.2
Gra → Alg.	10.1	4.2	
Français. ↗ Alg ↘ Gra		5.2 10.2	

TABLEAU 4.3 Items du 3ème Groupe

Registre \ Tâche	Reconnaissance	Production	Application
Graphique			
Algèbrique	1.3 ; 1.2 1.5 ; 1.1		8.1; 8.2 8.3 ; 9
Gra. → Alg.			

Analyse des items par groupes

Premier Groupe

(Pas de différences significatives entre les deux classes)

On remarque que les performances des élèves aux items de ce 1er groupe sont très variables, elles vont de la réussite complète à l'échec total. Pour les commenter nous distinguerons les tâches bien réussies, les moyennement réussies et les tâches non réussies.

Les tâches bien réussies correspondent aux items 4.1, 4.3 et 6.1, 6.3, 7.1, 6.2.

Les items **4.1** et **4.2**, comme le montre le tableau 4.1, font appel à des tâches de production, lesquelles exigent un changement de registre, (dans ce cas un changement très simple entre le registre graphique et algébrique) qui tient compte de l'interprétation de données sur un graphique et sa traduction en termes algébriques.
Les items **6.1; 6.3; 7.1; 6.2** correspondent à des tâches d'application demandant d'établir la correspondance entre des équations proposées et des droites dessinées. Ici il s'agit du passage du registre algébrique au registre graphique dans une tâche de vérification concernant l'équation d'une droite.

Les tâches moyennement réussies correspondent aux items 5.3 et 1.4

Item 5.3: cet item demande une tâche de production, il porte sur la représentation graphique d'une fonction linéaire dont la détermination était l'objet de l'item 5.2. Il s'agit ici du passage du registre algébrique au graphique dans une tâche simple de construction d'une droite à partir de la relation algébrique.
Les résultats de la classe expérimentale sont moins bons que ceux obtenus dans l'item 5.2 qui comportait une tâche plus complexe. A quoi tient cette perte apparente dans le registre graphique dans cette classe?.
Dans la classe témoin on trouve une situation normale, un taux de réussite plus grand à l'item 5.3 qu' à 5.2.

Item 1.4 : cet item demande une tâche de reconnaissance, il s'agit de reconnaître une fonction à partir d'une droite horizontale. On est ici dans le registre graphique en faisant appel au concept de fonction. Plus de la moitié des élèves des deux classes ont réussi la tâche demandée en employant un langage fonctionnel, c'est à dire en utilisant les mots image, fonction affine etc... Le reste des élèves a un comportement semblable dans les deux classes. La grosse difficulté pour les élèves est de justifier convenablement leur réponses. Parmi ceux qui reconnaissent une fonction , on trouve :
dans la classe expérimentale des réponses telles que :

"parce que cette fonction est une fonction constante".
"parce que c'est une droite parrallèle à l'abscisse " .
"Dans le cas où la représentation est (0,1)".

Les deux premières sont insuffisantes. La dernière est confuse. Ce style de réponses atteint un taux de **.25.**

Dans la classe témoin on a une situation très semblable, on trouve ce même type de réponses avec un taux de **.21.** Par exemple :

"l'élément de la source a 0 ou 1 image".
"parce que la fonction a des images par rapport à x".
"car chaque élément a au moins une image".

Parmi les réponses de ceux qui ne reconnaissent pas une fonction, on trouve des justifications confuses dans les deux classes avec des taux semblables, **.15** dans la classe expérimentale et **.21** dans la classe témoin.Le style de réponses est le suivant :
Dans la classe expérimentale :

"parce que c'est y qui représente la fonction".
"on a toujours la même valeur 1".
"x varie mais c'est pas en fonction de x que y change,
y est fixe (c'est une fonction constante)".

Dans cette dernière réponse il y a une contradiction avec le choix.

Dans la classe témoin :

"la droite est parallèle à x".
"parce qu'il existe qu'un seul point".

Les tâches non réussies

Elles correspondent à celles des items **3.1**, **3.2** et **3.3** dont le travail se situe dans le registre algébrique et fait appel au concept de fonction. On trouve des situations peu différentes dans les deux classes. Les élèves n'ont pas réussi à reconnaître une fonction à partir des formules proposées. Au lieu de regarder le comportement des variables x et y , ils vérifient la véracité des formules.

L'item 3.1 a pour but de décider si la formule donnée détermine y comme fonction de x.

Dans la classe expérimentale on trouve la situation suivante :
Un peu plus de la moitié des élèves répondent OUI, option correcte, (un taux de **.55.**) mais seulement un quart des élèves donne de bonnes justifications (un taux de **.25**). Et parmi le reste de réponses on trouve des justifications confuses. Par exemple:

"car $x \rightarrow -y$ "
" Parce qu'on ne peut trouver y qu'en ayant la valeur de x
(il faut que x ou y soit négatif)"

Les élèves qui choisissent l'option NON, option incorrecte, sont très peu nombreux dans cette classe et leurs réponses sont aussi confuses. Par exemple :

" Car comme il y a présence de la valeur absolue de x alors x a deux images".
"Car deux valeurs absolues additionnées $\neq 0$ ".

Presque un tiers des élèves de cette classe n' y répondent pas (un taux de **.30**).

Dans la classe témoin le panorama est très semblable, nous avons :
Plus de la moitié des élèves qui répondent correctement, (un taux de **.60**) mais seulement environ d'un tiers des élèves donnent des bonnes justifications. Le reste donne des justifications très imprécises, par exemple:

" Car chaque nombre a un opposé "
" Parce que c'est l'opposé ".

Un taux de **.25** des élèves choisissent l'option NON (incorrecte). Parmi ces réponses on trouve des justifications telles que:

" Car il existe une infinité de nombres qui en s'additionnant donne 0 ".
" Car il n'y a aucun nombre plus un autre qui soit égal à 0, car dans une valeur absolue on ne peut pas mettre des négatifs . Donc $| x + y | = 0$ est impossible".

Les non réponses sont très peu nombreuses dans cette classe, elles atteignent un taux de **.16**, beaucoup plus petit que celui de la classe expérimentale.

Item 3.2 : Le but de cet item est le même que celui de l'item 3.1. Mais la formule proposée a un niveau de difficulté supérieur. Les résultats sont catastrophiques dans les deux classes. La présence de la valeur absolue a sans doute augmenté la difficulté de la tâche. Le taux de non réponses est très élevé dans les deux classes, **.60** dans la classe expérimentale et **.50** dans la classe témoin.
Dans la classe expérimentale il n'a pas de réponses justes et dans la classe témoin il n'y en a qu'une. Malgré le fait qu'il y a des choix justes dans les deux classes, leurs justifications sont confuses.
Dans la classe expérimentale pour l'option NON, (correcte) on trouve par exemple des justifications telles que:

" Car il faudrait que x ou y soit négatif et il y a valeur absolue ".
" Car, comme il y a la valeur absolue de x , alors x a deux images ".

Parmi les options OUI (incorrecte) on trouve:

" Parce que y est déterminé $y = 1 - x$ ".

" Car la fonction peut être $Ax + 1$ (affine); ex. : si $x=0$, $f(x) = 1$ ".

" Je crois que y est la fonction qui ajoute à x son opposé moins 1 ".

" Parce que y est l'opposé de $x+1$ quand x est négatif et -1 quand x est positif ".

Dans la classe témoin parmi les options NON (correcte) on a les exemples suivants de justifications :

" $(x + 1) - y = 1$ ex.: $|5+7| \neq 1$ $(13 \neq 1)$ ".

"Il faut que la somme de x et y égal 0. Car par ex.: si on prend $3 + 4$ on obtient 7 ".

" $|x - 1| = -y$ ".

Parmi les options OUI (incorrect) on trouve les exemples suivants :

" si $x = 0$, $y = 1$, $|x + 1| = 1$ le résultat est égal à 0.

Donc $|x + y| = 1$ est une fonction ".

" Parce qu'une valeur absolue est toujours positive ".

" 1er cas) $-x - y = 1$ donc $y = -x - 1$

2ème cas) $x + y = 1$ donc $y = -x + 1$

$y = -x + 1$.

Ces deux cas représentent des applications affines et sont donc des fonctions " .

Item 3.3 : il a pour but de décider si la formule $x^2 + y^2 = 0$ détermine y comme fonction de x.

Cet item n'a pas été réussi par les élèves de la classe expérimentale et dans la classe témoin il y a un taux de réussite de **.17**.

Dans la classe expérimentale on trouve plus des deux tiers des élèves (un taux de **.70**) qui affirment que la formule n'exprime pas y en fonction de x et les arguments donnés sont tels que:

" Car un nombre élevé au carré est positif. Donc 2 nombres additionés $\neq 0$ ".

" Parce qu'il n'y a pas de valeur pour y (x^2 est positif, y^2 est positif)

donc $x^2 + y^2 \neq 0$."

Cette fonction n'est possible que pour x = y = 0 . Car il faut que x^2 et y^2 soient opposés donc l'un des deux négatifs. Il n'existe pas de carré négatif. La seule solution est x es y égal 0 ".

Dans ces réponses les élèves se prononcent sur la vérité de la formule au lieu de répondre à la question. La dernière réponse est contradictoire avec l'option choisie . Il semble que pour cet élève les valeurs x=y=0 ne suffisent pas pour définir une fonction. La même situation de contradiction se présente dans la réponse suivante :

" C'est pas possible car le résultat de deux nombres au carré puis s'ajoutant n'est jamais ϕ sauf si x est ϕ. "

Encore un autre exemple montrant comment cet élève à la suite d'une manipulation formelle non pertinente dans ce cas, continue son raisonnement :

" $x^2 = -y^2$ alors x = y et x = -y et -x = y .
Etant donné qu'il y a plusieurs possibilités (2),
cette formule ne détermine pas y comme fonction de x ."

Les non réponses à cet item sont peu nombreuses, elles atteignent un taux de **.15.**

Dans la classe témoin la situation est la suivante :
Il y a presque un tiers d'élèves que ne répondent pas (un taux de **.29**), près du double de l'autre classe.Près de la moitié des élèves considère que la formule ne détermine pas y comme fonction de x (un taux de **.46**) .Les justifications sont du même type que celles de la classe expérimentale, nous avons par exemple :

" il faut que x et y $\neq 0$ et alors c'est impossible,
car 2 carrés ne sont jamais négatifs, donc $\neq 0$."
" Un carré ne sera jamais nul, sauf si l'on prend 0^2 ".
" Les carrés sont toujours positifs donc il est impossible que le résultat soit nul."

Les réponses correctes dans la classe témoin atteignent un taux de **.17**, c'est à dire que presque un cinquième des élèves admettent que la formule exprime y comme fonction de x et arrivent à le justifier correctement.
On rencontre en général le même type d'argumentations dans les deux classes. Ces résultats

montrent que le concept de fonction dans le registre algébrique est encore faible. Les élèves ont considéré la véracité globale de la formule au lieu de penser à identifier des couples d'antécédents-images.

Deuxième Groupe.

(Différences significatives en faveur de la classe expérimentale)

Les tâches réclamées par les items du 2ème groupe correspondent à des objectifs de production, sauf celle de l'item 7.2 où il s'agit d'une vérification. Les items **10.1** et **4.2**, font appel à des tâches de reconnaissance, il s'agit d'arriver à écrire l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la droite qui la représente. C'est à dire le passage du registre graphique au registre algébrique comme l'indique le tableau 4.2.
Dans les items **5.2** et **10.2** il s'agit du passage du langage naturel au registre algébrique ainsi que du registre graphique au langage naturel

.

Item 10.1. Comme l'indique le tableau 2, toutes les réponses de la classe expérimentale sont exactes. Ce qui montre un acquis des élèves dans la maîtrise du passage entre les registres graphique et algébrique, suite à l'enseignement mis en place, et non pas un item qui n'a aucune discrimination.
Dans la classe témoin la moitié de réponses données sont incorrectes (un taux de.**33**).Voici quelques exemples :

"C'est une application affine linéaire, donc passe par l'origine, donc q=0

$y = 5px \quad C(1,5)$

$y = 2px\, D(1,2)$

$y = p/2x\, E(2,1)$".

Un autre exemple : "$g(x) \longrightarrow 5x$

$g(x) \longrightarrow 2x$

$g(x) \longrightarrow 1/2\ x$".

Encore un autre exemple : " $y = px + q$ *avec* $q = 0$

$5y = 1 \qquad y = 1/5\ x$

$2y = 1 \qquad y = 1/2\ x \qquad y = 2x$ ".

Ces réponses montrent la difficulté des élèves pour interpréter sur le graphique les coordonnées des points donnés, faire la transcription en x et y, et arriver à écrire les expressions algébriques correspondantes. En plus il apparaît une confusion dans le vocabulaire employé qui est fréquente parmi les élèves de la classe témoin et chez d'autres élèves de ce niveau que nous avons observés.
Les non réponses atteignent un taux de **.17.**

Item 4.2 : il s'agit d'écrire une relation algébrique à partir d'un graphique.
La classe expérimentale à obtenu un taux de réussite de **.65** et un taux de **.20** de réponses erronées, parmi lesquelles on trouve par exemple:

" x + 3 " ; " y + 3 " ; ou " -2 < x< 3 " .

Les non réponses atteignent un taux de **.15.**

Dans la classe témoin cet item a été réussi par un tiers des élèves (un taux de **.33**). Les réponses erronées sont nombreuses (un taux de **.58**). Parmi elles, on trouve des expressions telles que:

" f(x) = R+ " ; "f(x) = R " ;"f(x) égal à un nombre (0 , 2 , 3) ".
"f(x) = tous les points de la droite" ;"f(x) = l'ordonée de x ".

On observe que dans toutes ces expressions les élèves n'arrivent pas à donner une relation entre x et y. Ils n'ont pas vu qu'il s'agissait d'une fonction linéaire.Cela montre la difficulté des ces élèves à traduire un énoncé en langage algébrique.
Les non réponses atteignent un taux de **.17.**

Item 5.2 . La tâche ici consiste à trouver une relation, étant donné un énoncé.
Dans la classe expérimentale cet item a été réussi par les trois quarts des élèves. Seulement un taux de **.15** des élèves n'arrivent pas à donner la relation. Parmi les réponses erronées on trouve l'essai suivant de programme Logo :

```
" POUR RER : X :Y
        X * Y
FIN. C'est une fonction linéaire".
```

Dans la classe témoin la réussite est moins bonne. Un tiers des élèves donnent une réponse juste.Un quart des élèves n'y répondent pas, et un taux **.42** des élèves répondent faux. Parmi les réponses fausses on a par exemple les expressions suivantes :

" $f(x) = 60\,y$ ".
" la relation $x \longrightarrow x : 60$ ".
" $x \longrightarrow 60\,y$; $y \longrightarrow x/60$ "
" $x = 60\,y$ ".

Dans ces réponses on remarque que les élèves ont fait de confusions, ils ont inversé les variables.
Un quart des élèves n'ont pas répondu à cet item.

Item 10.2. La tâche de cet item consiste à interpréter une situation graphique et à en tirer une conclusion.
Dans la classe expérimentale la moitié des élèves ont donné des réponses justes.Un quart des élèves n'ont pas du tout donné de réponses, et l'autre quart a donné de réponses très imprécises. Parmi lesquelles on trouve:

"Plus le résultat des expressions algébriques sont petit plus la droite va vers l'axe de l'abscisse. J'ai trouvé en lisant sur le graphique".
"Plus x devient petit et plus la droite est parallèle à l'axe des abscises. Plus x est grand plus la droite est parallèle à l'axe des ordonnées".

Dans la classe témoin près de la moitié des élèves ne répond pas à cet item. La réussite est très faible, avec un taux de **.12** et l'échec atteint un taux de **.42.** Parmi les réponses erronées on trouve :

" D1; D2; D3 passent par l'origine donc sont de la forme $y=px$ ".
" D1;D2;D3 sont de la forme $ax+by+c=0$ avec $c=0$ donc D1 ; D2 et D3 sont linéaires".
" Dans touts les expressions $Q=0$ ".

Ces élèves n'ont pas perçu, le rapport entre les positions des droites et leur expressions algébrique.

Troisième Groupe

(Différences en faveur de la classe témoin)

Les items de ce groupe correspondent à des objectifs de reconnaissance (items **1.1**; **1.3** et **1.5**) et d'application (items des questions **8** et **9**). Les premiers considèrent l'aspect conceptuel de la notion de fonction et les autres se refèrent à l'application directe d'une propriété.

Item 1.1. La tâche consiste ici à reconnaître une fonction à partir d'une droite oblique donnée.

Dans la classe expérimentale la moitié des élèves réussissent cette tâche. Dans l'autre moitié des élèves un taux de **.40** donnent de réponses erronées. On trouve par exemple des expressions comme les suivantes:

"Car, 0 a pour image 1, et -1 a aussi pour image 1. Impossible!".

" Car il n'y a pas de relation entre le nombre x et l'image y".

" Il y a 2 fonctions: une parallèle à l'axe et l'autre passant par l'origine O. Celle-ci ne représente aucune des 2 fonctions".

Dans ces réponses on remarque une faiblesse conceptuelle. La dernière expression revèle une faute de comprehension. Il y a aussi des réponses où les justifications sont très imprécises, par exemple:

" Parce que la droite coupe l'axe des abscises et des ordonnées".

" Car D passe par l'axe des ordonnées".

" Parce que cette fonction est une fonction linéaire où y = ax ".

Dans cette classe les non réponses atteignent seulement un taux de **.10**

Dans la classe témoin le taux de réussite est bon, il est de **.67.** La plupart des justifications indiquent graphiquement l'élément de la source et son correspondant dans le but. Cela donne un certain critère graphique pour reconnaître la représentation graphique d'une fonction. Le taux de réponses fausses est de **.29** et presque tous les élèves, sauf un taux de **.04**, ont répondu cet item.

Item 1.3. La tâche ici était de refuser la droite verticale comme représentation d'une fonction.

Dans la classe expérimentale un quart des élèves seulement réussissent la tâche. Et un taux de **.65** donnent de réponses fausses. Parmi ces réponses on trouve celles qui reconnaissent une fonction à partir de la droite verticale (taux de **.40**) et celles qui donnent des réponses contradictoires (taux de **.25**).

Dans la classe témoin, la réussite est bonne, elle atteint un taux de **.62**. Cette réussite est due à notre avis à ce critère graphique de reconnaîssance, que les élèves ont utilisé: ils relient les élèments de la source et du but par des traits. Le taux de réponses non réussies est de.**38**. Parmi ces réponses on trouve celles qui décrivent le graphique et d'autres qui donnent des justifications contradictoires, par exemple :

" Car chaque élémént de la source n'a pas d'image. Ex.2".
" Il n' y a aucune image".
" Parce qu'il existe qu'un seul point".

Ces exemples laissent imaginer que pour ces élèves tous les éléments de la source doivent avoir une image.
Les autres réponses non réussies sont celles qui reconnaissent une fonction à partir de la droite verticale, mais elles sont très peu nombreuses (un taux de **.08**).

Item 1.5. Ici il s'agit de refuser le cercle comme la représentation graphique d'une fonction.
Dans la classe expérimentale la réussite est faible, elle atteint un taux de **.30**. Et un quart des élèves ne répondent pas cet item. Les réponses fausses sont nombreuses elles atteignent un taux **.45**. Parmi ces réponses on trouve celles qui refusent le graphique parce que "ce n'est pas une droite", et d'autres étranges telles que :

" Parce qu'il n'y a pas des valeurs pour 2 ou 3".
" Parce que cette représentation passe par 4 points différents".

La dernière réponse voudrait dire que ce n'est pas une droite non plus ?...

Dans la classe témoin la moitié des élèves donnent des réponses justes et presque un tiers des réponses fausses. La plupart des celles-ci reconnaissent le cercle comme la représentation d'une fonction. Les non réponses atteignent un taux de **.21.**

Question 8. Dans cette question la tâche est l'application de la pente d'une droite. Cette tâche se situe dans le passage du registre graphique au algébrique. Cette question a été nettement mieux réussie par les élèves de la classe témoin.

Dans la classe expérimentale un cinquième des élèves seulement a donné des réponses justes. Malgré le fait que la plupart des élèves (un taux de .85) ont choisi le NON, qui était l'option correcte, leurs justifications ne sont pas recevables. Les élèves ont perçu une proportionnalité qu'ils n'ont pas su expliciter correctement, et un grand nombre d'entre eux a interpreté les mesures des segments donnés sur le graphique comme des coordonnées des points qui n'ont pas été explicités non plus. Voici quelques exemples :

Parce que les coordonnées ne sont pas proportionnelles."

" Parce qu'il n'y a pas de proportionnalité entre 3; 6 et 4;7."

"Car ce sont fonctions linéaires et il n'a pas de proportionnalité $6/3 \neq 7/4$".

"D1 : $y = 2x$

D2 : $y = 4x$

Puisque : $y \times 4x - 7y \times 2x = 4xy - 14yx \neq 0$

Alors (D1) n'est pas parallèle à (D2)".

Dans la classe témoin plus des trois quarts des élèves répondent correctement. Ils justifient leurs réponses en explicitant une proportion en se référant à des triangles proportionnels. Et dans l'item 8.3 quelques élèves, en plus, font appel à la transitivité du parallèlisme (un taux de .21). Cela explique peut-être la montée de la réussite de l'item 8.3 que montre le tableau 4.3.

Question 9. Cette question a aussi par but l'application de la pente. Il s'agissait ici de calculer la mesure du segment indiqué en noir sur la figure. La tâche demandée par cette question a été beaucoup plus difficile pour les élèves de la Classe Expérimentale que pour ceux de la classe témoin.

Dans la classe expérimentale on a la situation suivante :
Un cinquième des élèves a donné des réponses justes. (taux de .20). Ces élèves ont justifié leurs réponses en déterminant l'équation de la droite.Une moitié des élèves a donné des réponses fausses. (taux de .50). Parmi ces réponses on a par exemple les suivantes :

" Cette mesure est 6, car les deux droites étant colinéaires, les coordonnées sont donc proportionnelles : 1 x 3 = 3 ; 2 x 3 = 6".

"La mesure est 6 parce que la mesure sur l'axe des abscisses est 3 fois plus grande, donc la mesure sur l'axe des ordonnée doit être 3 fois plus grande que celle de départ. (proportionnalité)."

"Ce segment mesure environ 6 cm parce que l'axe des abscisses est paralléle à la droite en rouge et cela est proportionnel, car 1x3=3 et 2x3=6 ".

"La mesure du segment est 6, car le segment (F1) déjà mesuré en bas est (1, 2) et dans celui du haut (F2) l'abscisse est 3 (3, y) → le facteur des abscisse entre (F1) et (F2) est 3, donc connaissant l'ordonnée de (F1), je la multiplie par 3 pour obtenir l'ordonnée de (F2) → 6 ".

"L'équation de la droite est y=2x donc si y =3 alors x=6".

Dans ces réponses on trouve encore la difficulté des élèves pour expliciter la proportionnalité qu'ils ont perçu. On a trouvé aussi des réponses imprécises (un taux de .15).
Par exemple :

"Puisque la droite passe par l'origine il s'agit d'une fonction linéaire donc il y a une proportionnalité entre les coordonnées.(Voir le point C).
1 x ≠ 1/2 y donc on a à chaque fois 1x → 2y
1/2 x 2 = 2/2 ; 1 x 2 = 2 donc 3 x 2 = 6 ".

Ces réponses montrent aussi la difficulté pour expliquer la proportionnalité concernée.
Les élèves qui ne répondent pas cette question sont très peu nombreux.(un taux de .15).

Dans la classe témoin se présente une situation meilleure :
Presque la moitié des élèves donnent des réponses justes. (un taux de .46). Ces élèves ont justifié leurs réponses en s'appuyant sur la proportionnalité des côtés des triangles concernés.

Un tiers des élèves donnent des justifications confuses (un taux de **.33**). Voici quelques exemples:

"CAB triangle rectangle en B; AB segment en noir,
la mesure de ce segment AB fait 2 fois la mesure de BC qui est 3 donc AB =6".
"Pour trouver la mesure on fait :
3/1 = 3 (droite parallèle) 2x3=6. Donc 3/1 = 6/2 .
Les triangles ont un côté parallèle à l'axe des abscisses,
de plus ils ont la même droite qui leur sert d'hypothénuse,
ils sont donc proportionnels."
"En bas nous avons le triangle du haut en plus petit, l
a mesure du segment en noir est égale à 2.
Donc avec l'application affine on a y = 3/2 = 6 ".
"Dans le bas du dessin j'ai x=y/2 donc dans le triangle du haut j'ai
x=y/2; y=2x; 3 ; y=2X3=6".

Seuls deux élèves ne donnent pas de réponses à cette question (taux de **.08**). Et les autres élèves donnent une mesure fausse (taux de **.13**).

CONCLUSIONS

D'après notre comparaison des deux classes mettant en pratique deux démarches différentes nous retenons les résultats suivants:

1) La démarche logo se révèle plus performante que la demarche traditionnelle par rapport aux tâches de production.

Du point de vue des objectifs de production, la classe expérimentale a des résultats nettement meilleurs que ceux de la classe témoin. (Tableau 4.2). Ces objectifs ne correspondent pas seulement à la manipulation de la notion de fonction mais aussi à la production ou reconnaissance (choix) d'expressions à variables. Les résultats obtenus montrent les fruits de la démarche Logo au niveau de l'enseignement, puisqu' elle permet, comme nous l'avons déjà fait remarquer, de mettre en jeu le maximun de registres liés à la notion de fonction en tenant compte des aspects conceptuels et du langage courant.
La démarche traditionnelle privilégie le registre algébrique des formules comme cela se fait d'habitude dans l'enseignement en laissant de côté les autres registres ou en n'insistant guère là-dessus. Cela ne favorise pas la maîtrise par les élèves du concept de fonction, ni la possibilité pour eux de se débrouiller dans des tâches de production, même pas dans le registre privilégié.

2) La démarche traditionnelle se révèle plus performante par rapport aux tâches d'application directe de propriétés et de reconnaissance d'une fonction à partir d'un graphique.

La démarche traditionnelle, en mettant l'accent sur la définition de la notion de fonction avec l'appui graphique, a atteint l'objectif de la question 1 (Tableau 4.2). La concrétisation de l'aspect correspondance de la notion de fonction de façon graphique est un résultat intéressant de cette démarche. Ce qui a permi aux élèves d'acquérir un critère intuitif pour reconnaître une fonction à partir d'un graphique donné. Par contre, les concrétisations d'une fonction comme un tableau de valeurs ou comme une formule n'ont pas été travaillées dans la

présentation faite de cette notion. En termes de registres, on peut dire que le registre graphique choisi pour présenter la notion de fonction n'a pas eu le renforcement adéquat des registres algébrique et tableaux, alors que le registre algébrique des formules a été bien privilégié de manière isolée. Le travail séparé de registres graphique et algébrique qui est fait dans la démarche traditionnelle n'a pas donné les fruits attendus au niveau des tâches de production. Tandis que la démarche logo en mettant l'accent sur le passage entre les registres a atteint les objectifs de production, malgré quelques point faibles au niveau conceptuel.
Par rapport au sujet de l'application de la proportionnalité, nous n'avons pas une explication didactique là-dessus. Nous sommes un peu surpris de ces résultats, parce que cette notion a été déjà rencontrée par les élèves dans leurs cours précédents et en troisième elle réapparaît liée aux fonctions affines. Dans la classe témoin l'enseignant en considérant cette notion très importante et en plus, difficile pour les élèves, a insisté davantage là-dessus, en mettant en évidence les propriétés pertinentes de la proportionalité chaque fois que l'occasion s'est présentée. Dans la classe expérimentale cette notion a été travaillée au moment du traitement de la représentation graphique des fonctions affines avec l'ordinateur. Donc ces derniers résultats n'expliqueraient pas une situation générale. Peut-être que dans la classe témoin il y a eu trop d'insistance sur le sujet et que dans la classe expérimentale il a manqué une mise au point là-dessus.

3) L'égalité de performances dans les deux classes.

Les items appartenant au premier groupe (Tableau 4.1) apparaissent comme neutres par rapport aux deux démarches considérées. Les tâches de ces items atteignent les trois objectifs du questionnaire. C'est à dire, qu'il y a dans ce groupe une diversité d'items significatifs du point de vue du questionnaire. Par exemple, les résultats obtenus pour l'item 5.3 attirent notre attention. En effet, la tâche demandée par cet item consiste à faire une représentation graphique d'une fonction linéaire. Du point de vue de la démarche logo, les résultats obtenus sont faibles par rapport à tout l'investissement fait par l'enseignement. On attendait des élèves une meilleure performance dans la représentation graphique. A notre avis cette perte apparente des élèves pourrait être due à ce que le travail sur la représentation graphique s'est fait davantage à l'aide de l'ordinateur et que peut-être le travail papier-crayon à ce sujet nécessite plus d'attention que celle qu'on lui a porté. Ainsi, les élèves de la classe expérimentale n'ont pas eu d'amélioration dans le registre graphique . Tandis que les élèves de la classe témoin ont eu des performances stables par rapport à la tradition.

Les performances à la question 3 révèlent que cette question a été trop difficile pour les élèves. La tâche demandée par cette question était de maîtriser la notion de fonction : pour y réussir il fallait bien reconnaître ce qu'est une fonction et pouvoir traduire l'expression algébrique d'une formule où les variables restent non distinguées, en une autre formule où chaque variable a un rôle précis.
Comme le montrent les résultats, l'objectif de cette question n'a été atteint par aucune des deux classes. Il se peut que la présence de la valeur absolue ait augmenté le niveau de difficulté des items **3.1; 3.2.**
Mais dans l'item **3.3** les élèves ont refusé la fonction pour $x = y = 0$, peut - être à cause de la présence d'un seul élément . On a trouvé cette idée chez d'autres élèves de troisième observés dans des situations semblables.
Finalement, à notre avis, la démarche logo ouvre de grandes possibilités d'obtenir des résultats meilleurs encore que ceux obtenus dans cette première expérience.

REFERENCES

Coprem. Document 1987. Imaginer le problème actuel (p.32-34).

Duval, R. "Graphique et équations : l'articulation de deux registres". P. 235 - 253. Annales de didactiques et sciences cognitives.Vol.1. 1988. ULP.Irem de Strasbourg.

Dupuis, Egret, Guin."Logo 3". 1987. Irem de Strasbourg.

Engel, A. "L'enseignement des probabilités et statistique". P.216 - 223. Vol.1. Cedic 1975.

Hajri, H. "Perception de relations dans le plan repéré". Thèse de doctorat 3e cycle.1986-.U.L.P. Strasbourg.

Manuels de troisième:

Deledicq (A), Lassave (C), Missenard (C et D). "Faire" de Mathématique. 3e. Paris, Cedic 1984.
Aguilar (P), Louquet (P), Moulia (L). "Mathématique 3e. Paris. Colin 1984.
Irem de Strasbourg."Mathématique Classe de 3e." 1980.
Gerll (D), Vitart (P)."Mathématique 3e". Collection M. Hachette 1980.
Biancamaria (P), Dehane (E)."Mathématique classe de 3e". Nathan, 1972. Coll.-Queysanne Revuz.