

LA RELATION ENTRE MODELISATIONS MATHÉMATIQUES ET SITUATIONS D'EXPERIENCE POUR LE SAVOIR PROBABILISTE

*Une conception épistémologique pour l'analyse des
processus d'enseignement*

H. STEINBRING

In teaching/learning processes, mathematical knowledge and its meaning cannot be adequately characterized as an a priori fixed and rigid structure. Understanding and personal meaning of knowledge is generated in recursive social interaction in mathematics teaching. A method for analyzing mathematics teaching is developed which tries to take into account the fact that the establishment of meaning depends on teacher-student interaction ;conceptual patterns of the development of mathematical knowledge with its different levels of meaning are visualized by means of specifically constructed graphical diagrams.

Mathématiques et enseignement - Phénomènes linéaires ou systèmes complexes ?

Le paradigme prédominant et disséminé de la nature du savoir et de l'enseignement des mathématiques est celui d'une suite linéaire et déductive de phénomènes . Fondé sur des concepts élémentaires, l'édifice entier du savoir mathématique serait construit d'une manière déductive. Et, en suivant cet ordre linéaire et logique, les processus d'enseignement et d'apprentissage devraient être organisés comme une suite linéaire de pas.

Ce paradigme est accepté plus ou moins immédiatement par la plupart des enseignants et des chercheurs. Que le savoir mathématique soit organisé de manière déductive n'est pas mis en question. Et, en raison des conditions temporelles et séquentielles de toute activité d'enseignement, les enseignants de mathématiques considèrent que leur tâche essentielle est de transmettre les connaissances pas à pas et concept par concept.

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

Ce paradigme se trouve aussi, implicitement, dans les recherches didactiques sur l'enseignement en mathématiques, et dans la pratique de l'enseignant. Même si les maîtres ont des conceptions personnelles sur les mathématiques et sur leur enseignement, ils ne contestent pas le paradigme d'une organisation linéaire (cf. Brown 1985, Cooney 1985). Des expériences faites dans l'observation de classes et dans des cours de formation continue pour les enseignants confirment cette impression : pour les professeurs de mathématiques c'est un fait irréfutable que le savoir mathématique et sa transmission sont des phénomènes linéaires.

Une vue superficielle de la structure du savoir et du cours d'enseignement peut donner l'impression du bien fondé de cette conception. La séquentialisation du savoir par sa présentation discursive et l'exigence didactique de le présenter d'une manière séquentielle et temporelle (Chevallard 1985 chap. 5&6) font que la recherche des "solutions" dans la théorie et dans la pratique de l'enseignement des mathématiques se dirige surtout vers des arrangements linéaires optimisés du savoir scolaire, et vers des ordres linéaires conformément adaptés aux processus d'enseignement et d'apprentissage.

Cette interprétation apparemment évidente est-elle valide ? Récemment, plusieurs études concernant les rapports sous-jacents à la "structure de surface" de la représentation du savoir et de son déroulement didactique viennent mettre en doute ce paradigme.

Dans la perspective socio-communicative sur les processus d'enseignement réels, cette interprétation est mise en question. Il paraît plus raisonnable de considérer le déroulement de l'enseignement comme un processus mutuellement interactif qui ne peut être déterminé ni complètement ni uniquement par les conditions initiales mais qui possède un caractère de système complexe. L'enseignement représente un "système de rétroactions" au sein duquel certaines structures, certains modes de déroulement et certains symptômes se produisent. Des routines et rituels communicatifs (cf. Bauersfeld 1978, Voigt 1984) par exemple ou des phénomènes spécifiques liés à l'activité d'enseignement comme l'effet "Topaze" ou l'effet "Jourdain" (cf. Brousseau 1986).

Non seulement du côté des analyses didactiques des processus réels d'enseignement, mais aussi du côté des études historiques et épistémologiques sur la nature du savoir mathématique, le paradigme "Les mathématiques et leur enseignement comme phénomènes linéaires" est mis en question. Le savoir mathématique ne peut pas simplement être saisi comme un inventaire objectif et universel de propositions vraies - comme la présentation du savoir

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

dans la littérature professionnelle le suggère. Les mathématiques dépendent des conditions sociales et historiques. Pour analyser la nature du savoir mathématique dans les processus d'enseignement et d'apprentissage, il paraît par conséquent plus raisonnable de regarder ce savoir comme un système toujours en développement - et non comme un produit préfabriqué et achevé. En outre, il est essentiel de ne pas considérer ce savoir en lui-même comme un domaine isolé, mais de toujours examiner son rapport au sujet de la connaissance (par exemple au maître, aux élèves, aux chercheurs etc...). A la suite d'une telle interprétation dynamique et rattachée au sujet, le savoir mathématique cesse d'apparaître comme une "structure linéaire et hiérarchique" et prend un caractère de système complexe.

Ce passage d'un point de vue qui privilégie les "phénomènes linéaires", à un autre qui explicite les "systèmes dynamiques de rétroactions", va être illustré dans les paragraphes suivants, avec l'exemple du savoir probabiliste élémentaire et l'enseignement des probabilités (au premier cycle).

Dans la théorie mathématique expérimentale du "chaos déterministe" (cf. Schuster 1985) il existe maintenant des concepts précis pour décrire le comportement des "systèmes non-linéaires et complexes des mécanismes de rétroaction". Cette description conceptuelle des phénomènes non-linéaires élaborée dans la théorie du chaos va tout d'abord nous servir d'analogie relativement "ouverte" pour ne pas perdre de vue la contradiction essentielle entre les interprétations "linéaires" et "non linéaires" du savoir mathématique et de son enseignement. Reste le problème assez difficile de la modélisation et de la simulation mathématique des processus non-linéaires de l'enseignement réel en mathématiques.

II Savoir mathématique comme système : le cas des probabilités.

La signification du savoir mathématique est-elle complètement enfermée dans la définition formelle des concepts ? Est-ce qu'une théorie mathématique peut être dérivée exhaustivement des concepts élémentaires et de définitions précises ? Les probabilités élémentaires sont un bon exemple pour étudier ces problèmes épistémologiques du savoir mathématique. Leur enseignement et l'analyse, aussi bien historique qu'épistémologique, de leur développement montrent que la relation entre fondation et déploiement de la théorie est plus complexe que ne le laisse supposer la conception linéaire (cf. Steinbring 1980, 1986, 1988a, Jahnke 1978).

Traditionnellement, l'enseignant des mathématiques cherche à partir de notions fondamenta-

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

les indubitables et de là il organise le processus d'enseignement et d'apprentissage sans jamais avoir besoin de reconstruire les fondements préalablement établis. Cette démarche ne peut être suivie dans l'enseignement des probabilités. Il est impossible de définir le concept de probabilité d'une façon universelle ou de l'appliquer automatiquement. De nouveaux problèmes mathématiques et des situations d'application diverses exigent souvent des modélisations stochastiques et des interprétations probabilistes radicalement nouvelles. Ce concept mathématique aux multiples significations chatoyantes ne peut qu'être défini de manière "locale" - non pas de manière universelle et absolue - par rapport à un contexte d'application ou d'interprétation (Steinbring 1984, 1988b).

On peut observer, dans le développement historique des probabilités, l'existence de définitions "locales" de probabilité et voir comment elles constitueraient une extension permanente des applications et des significations du concept. L'interprétation conceptuelle des probabilités a d'abord été liée au concept d'équipossibilité et d'équiprobabilité, puis elle a été rapportée à la probabilité classique, quelquefois dite "probabilité de Laplace", puis à la probabilité fréquentiste et à la probabilité logique, et enfin à la caractérisation axiomatique des probabilités. Les étapes de cette évolution ont conduit à une expansion des applications et des interprétations. La dynamique de cette évolution fut la circularité dans les définitions, résultat de l'intention exagérée d'équiper ces définitions "locales" avec des interprétations trop universelles et "globales".

L'analyse historique montre que la circularité dans les définitions du concept de probabilité est par principe inévitable. Une définition doit toujours contenir a priori quelques aspects du concept qu'on veut au fond dériver de la définition formelle. En dernière analyse, même la caractérisation axiomatique des probabilités ne constitue pas une définition sans circularité - elle exclut le problème de la fondation du concept en se bornant aux aspects techniques de la description mathématique implicite et elle laisse ouvertes les interprétations possibles des axiomes (cf. Kolmogorov 1933).

Il n'est pas fécond de considérer la circularité dans les définitions de probabilité comme un défaut, mais au contraire, il faut la considérer comme une forme "d'auto-référence conceptuelle". Cela veut dire, par exemple, que le concept fondamental nouveau de probabilité ne peut pas être totalement réduit à d'autres concepts mathématiques. Ce concept contient des déterminations effectivement nouvelles et spécifiques aux probabilités ; leur portée conceptuelle n'est pas fixée par la définition formelle, mais elle doit évoluer pas à pas pendant que

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

les définitions des concepts fondamentaux de la théorie sont modifiées et réorganisées.

L'**auto-référence** est une caractéristique fondamentale indiquant l'impossibilité de déduire linéairement le savoir théorique à partir des concepts de base, ce savoir ayant le statut d'un système complexe.

Le **théorème de Bernoulli** est un exemple remarquable pour démontrer cette auto-référence conceptuelle. Dans une perspective historique, ce théorème représente la première tentative élémentaire de modéliser mathématiquement la relation entre fréquence relative et probabilité mathématique (resp. entre la situation empirique et sa description mathématique). Le théorème de Bernoulli peut être exprimé à l'aide de la notion moderne suivante :

Soit h_n la fréquence relative de 0 en n épreuves indépendantes répétées d'une expérience de deux résultats (0 = succès, 1 = échec) ayant les probabilités p et $q = 1 - p$. Le théorème de Bernoulli dit que la différence entre probabilité et fréquence relative tend vers 0 et la "probabilité" de cet événement a pour limite 1 lorsque n tend vers l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall n_0, \exists n \geq n_0, P(|h_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \eta.$$

"On y trouve trois quantités variables : d'abord *l'exactitude* de l'affirmation considérée, mesurée par ε , puis la *validité* de cette affirmation, mesurée par η , et enfin le *nombre* des essais faits, donné par n . Ces trois paramètres dépendent les uns des autres, on peut fixer deux des paramètres et essayer d'estimer le troisième". (Steinbring 1980, p. 131). La "forme rédactionnelle" du théorème de Bernoulli, selon laquelle la fréquence relative tend vers la probabilité lorsque le nombre d'essais tend vers l'infini, cette connexion étant elle-même soumise à une "nouvelle" probabilité assez grande, est une autre forme de circularité dans la définition du concept et dans celle de la complémentarité entre situation empirique et modélisation mathématique. (Pour l'analyse didactique cf. v. Harten & Steinbring 1984 chap. 2.3 et Biehler & Steinbring 1982).

Le concept de la probabilité est soumis au "principe d'auto-référence" pour sa fondation conceptuelle et aussi pour son application à des situations externes. La signification de la probabilité ne peut pas être enfermée dans une définition mathématique formelle. Tout déve-

La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.

loppement de ce concept de probabilité doit commencer par des interprétations relativement immédiates et préliminaires des probabilités, lesquelles contiennent dès le commencement le rapport fondamental entre situation d'application et modélisation mathématique, et ne se réduisent pas simplement aux aspects formels et aux techniques. Au cours de ce développement, des aspects significatifs divers des probabilités sont élaborés pas à pas d'une façon toujours plus précise et plus compréhensive : cette élaboration est commandée par des "mécanismes de rétroaction" et par des "auto-applications", elle fait appel à un répertoire croissant de techniques d'analyse et de descriptions mathématiques. Un tel développement est comparable à l'évolution des structures significatives dans les systèmes non-linéaires et complexes, l'évolution y étant produite et stabilisée par des mécanismes de rétroaction.

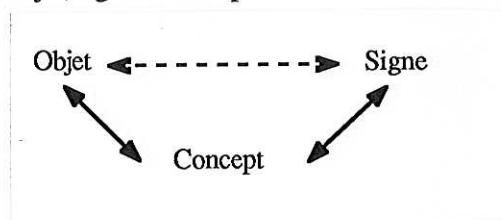
Un autre exemple important de la stochastique pour éclairer le *renversement du problème de la justification* du savoir théorique : c'est le concept de hasard et d'indépendance stochastique (Steinbring 1986). Le concept de hasard ou de suite de variables aléatoires ne saurait être un concept de base au sens qu'il fournirait une fondation fixe et immuable sur laquelle l'édifice de la théorie serait érigé. Toutes les tentatives pour donner une définition précise du concept de hasard (resp. du concept de suite de variables aléatoires, développé par exemple à l'aide de la théorie de l'information) ont abouti au résultat que ce concept ne pouvait pas être compris a priori d'une manière nette et formelle. Il n'y a que des descriptions relatives du hasard, cela veut dire, qu'il est seulement possible de décider suivant le niveau du développement de la théorie, si une suite de variables aléatoires est vraiment aléatoire ou non. On a besoin de tests statistiques élaborés par la théorie pour analyser la suite des variables aléatoires. Alors la fondation du concept d'aléas ou de hasard dépend du niveau du développement de la théorie des probabilités ; on ne saurait définir a priori la signification du concept de hasard dans sa complexité.

Même la théorie élémentaire des probabilités ne saurait être dérivée des concepts élémentaires de manière simplement linéaire - par exemple des concept de hasard et de probabilité. Il faut prendre la perspective inverse : la théorie représente un système complexe dans lequel se trouvent des relations implicitement définies entre concepts, entre moyens de représentation et d'activité, entre contextes d'interprétation et d'application, entre calculs et signes mathématiques etc... Ce ne sont pas les concepts élémentaires qui justifient la théorie des probabilités, au contraire, c'est le niveau actuel du développement de la théorie des probabilités qui fournit des justifications partielles des concepts élémentaires.

Il y a une autre façon de décrire le caractère systémique du savoir probabiliste. Que le savoir

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

stochastique soit un système complexe et ne soit pas linéairement dérivable des faits élémentaires, implique de le comprendre comme forme relationnelle ou comme "mécanisme de couplage" entre les aspects formels d'un calcul et les contextes d'interprétation pour tous les niveaux de développement de ce savoir. Cette forme relationnelle est caractérisée par le triangle épistémologique : objet, signe et concept.



Ce diagramme épistémologique représente des relations dans un système. La signification du savoir en question n'est pas dérivable de l'un ou l'autre nœud du diagramme, mais elle se constitue, à chaque instant du développement, comme une certaine forme d'équilibre, resp. d'interaction entre les éléments de ce système.

D'abord, ce triangle épistémologique sert à décrire d'une façon fondamentale le caractère systémique du savoir théorique et de sa signification ; dans le paragraphe suivant, on va essayer de démontrer comment ce triangle permet de développer aussi une méthode d'analyse de l'enseignement des mathématiques. Il s'agit d'une analyse des développements de la signification du savoir mathématique qui se produisent en classe dans les interactions entre maître et élèves.

III Le développement du savoir mathématique dans l'interaction en classe

La signification du savoir mathématique ne saurait être dérivée d'une manière purement logique et linéaire. La signification s'établit de façon relationnelle, elle est même une "forme relationnelle" reflétant le triangle épistémologique.

D'une part, ce triangle épistémologique est un instrument pour analyser la nature spécifique du savoir mathématique. D'autre part, il sert de fondement conceptuel pour développer un schéma d'observation de l'enseignement des mathématiques. Une hypothèse importante est que la distinction entre "objet" et "signe" représente une dimension centrale de l'épistémologie du savoir théorique. Cette distinction permet de décrire et d'analyser le développement

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

de la compréhension du savoir et de sa signification, et aussi les types et les "structures" de savoir utilisés dans le processus d'enseignement. La relation complémentaire entre "objet" et "signe" tient compte du caractère systémique et non-linéaire des processus d'enseignement. Elle permet de prendre une perspective plus différenciée sur le savoir dans l'interaction entre maître et élèves, et elle permet aussi, d'une manière simple et encore préliminaire, d'explorer et de rendre visible quelques structures de signification sous-jacentes à la "surface lisse" de l'enseignement mathématique.

Nous allons maintenant présenter le schéma d'analyse de l'enseignement et les diagrammes qui visualise le développement du savoir dans l'enseignement. Ils se situent dans le cadre d'une analyse exemplaire de quatre leçons sur les probabilités élémentaires. Il ne sera pas toujours possible d'expliquer en détail les méthodes de codage, celles de l'analyse des problèmes et de la visualisation graphique ; une description complète se trouve dans Bromme/Steinbring (1987&1988).

Le codage des cours

Deux enseignants des mathématiques (maîtres A et B) ont été choisis, dans une population de 26 professeurs, en fonction de différences significatives pour certaines variables relatives à leur style d'enseignement (Bromme/Steinbring 1987). Pour chacun des deux enseignants, on analyse la transcription de deux leçons sur l'introduction des probabilités (en 5ème). Selon le triangle épistémologique, les contributions des enseignants et des élèves sont codées comme suit : les contributions sont codées "objet" (abr. : O), lorsqu'elles ne contiennent que des rapports à la situation du problème ou de l'application, et elles sont codées "signe" (abr. : S) lorsqu'elles ne contiennent que des aspects de calcul ou du modèle mathématique. Enfin, les contributions sont interprétées comme appartenant au "niveau conceptuel", lorsqu'elles contiennent à la fois des aspects d'objet et de signe mis en relation (abr. : R). (Une quatrième catégorie comporte les contributions non-codifiables ; en plus, ces quatre catégories sont distinguées en "explication du maître", en "question du maître" et "contribution d'un élève", ce qui conduit à un total de douze catégories différentes. Par la suite, on ne considéra que les trois catégories centrales "objet" (O), "relation" (R) et "signe" (S).)

Le codage est fondé sur une analyse didactique et épistémologique des problèmes mathématiques traités dans les leçons, analyse qui a mené à distinguer entre le niveau de l'objet et le niveau du modèle dans le contenu mathématique de la leçon étudiée. Deux observateurs ex-

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

ternes établirent séparément le codage technique des niveaux des contributions mathématiques. Dans ce but, les transcriptions des leçons furent segmentées en éléments de deux minutes ; elles furent aussi subdivisées en unités sémantiques. Chaque unité sémantique fut codée selon le schéma établi préalablement. A l'aide d'un programme d'ordinateur, les listes de codage furent traduites en un diagramme graphique montrant le développement du savoir (voir, par exemple, diagramme A1). Chaque trait noir représente une contribution (du maître ou d'un élève) de type O, S ou R. Les traits noirs tracés sur les trois niveaux indiquent la présentation des problèmes mathématiques au cours de la leçon. (Pour une présentation plus détaillée, par exemple concernant la fiabilité du codage et la représentation graphique de toutes les douze catégories, voir Bromme/Steinbring 1987).

Le contenu des cours et leur déroulement

Le thème mathématique général des quatre leçons considérées était une introduction du concept "d'arbre probabiliste" comme moyen de représentation et d'activité ainsi qu'une première application. On a commencé par une situation de jeu, simple et accessible aux enfants : un petit garçon quitte la maison et peut aller par des chemins différents pour arriver à un certain terrain de jeu (football, jeu, piscine). A chaque carrefour, le garçon hésite entre plusieurs itinéraires possibles : pour décider il jette une pièce de monnaie, continuant à gauche ou à droite selon le résultat pile ou face. Devant cette situation, présentée avec le dessin des chemins, des carrefours et des terrains de jeu, la tâche des élèves consiste à développer un diagramme en arbre à deux degrés comme diagramme de décision. Le rapport entre le diagramme des chemins réels et le diagramme en arbre, ou diagramme de décision, est un bel exemple de la complémentarité de l'objectivité (au sens d'être lié d'une certaine manière à un "objet") et de la représentativité (au sens d'être le représentant de quelque chose extérieur) dans le savoir mathématique. L'établissement d'un rapport adéquat entre diagramme des chemins et diagramme de décision est aussi un problème didactique assez sérieux pour la compréhension des élèves.

Dans l'enseignement du maître A, le diagramme en arbre est introduit et étudié en premier lieu "de manière expérimentale", à savoir par plusieurs jeux et simulations de cette situation et en rassemblant et explorant des données statistiques obtenues. Dans les leçons du maître B, l'apprentissage du diagramme en arbre est tout d'abord favorisé par les notions terminologiques de chemins et de carrefours ainsi que par l'établissement d'un diagramme "schématique" de la situation réelle (dans laquelle la probabilité cherchée peut être déterminée par dénombrement).

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

Pour permettre une première interprétation des représentations graphiques du développement du savoir mathématique au cours de l'enseignement, nous allons maintenant donner brièvement les principales caractéristiques de chacune des quatre leçons.

Description brève du contenu de la leçon A1 (représentation graphique n° A1)

Le concept du diagramme en arbre est introduit au cours de la leçon A1 à l'aide d'un problème. (Les itinéraires de Bruno aux terrains de jeu). Après la présentation du problème et la discussion des possibilités de faire une simulation expérimentale de la situation (intervalles 1-7), les élèves commencent à travailler individuellement (intervalles 8-15), et la leçon s'achève sur l'exploration et sur une première interprétation des résultats expérimentaux (intervalles 15-19).

Description brève du contenu de la leçon A2 (représentation graphique n° A2)

Pour continuer le thème de la leçon dernière, un problème similaire est posé mais avec une généralisation du diagramme en arbre à trois degrés. Les élèves sont appelés à noter toutes les combinaisons possibles (intervalles 1-3). A la suite d'une phase de travail individuel (intervalles 4-14), les résultats sont discutés et interprétés selon leur caractère mathématique (intervalles 14-21).

Description brève du contenu de la leçon B1 (représentation graphique n° B1)

La leçon B1 commence avec le traitement et la discussion de trois problèmes élémentaires concernant les probabilités classiques (intervalles 2-11) ; puis un nouveau problème (les terrains de jeu de Bruno) introduit le diagramme en arbre. On peut observer que les élèves ont des difficultés graves à comprendre la distinction entre diagramme des chemins et diagramme de décision (intervalles 11-18). A l'aide d'une nouvelle tâche (concernant un diagramme en arbre à trois degrés) les élèves sont appelés à pratiquer le dessin exact et l'inscription correcte d'un diagramme en arbre (intervalles 18-22).

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

Description brève du contenu de la leçon B2 (représentation graphique n°B2)

Le problème présenté dans la dernière leçon est donné à nouveau. La difficulté centrale - comme auparavant - est de concevoir le diagramme des chemins concrets comme un diagramme de décision, c'est-à-dire comme un moyen de représenter une situation réelle, et d'éviter d'identifier le diagramme en arbre à cette situation directement (par exemple de détecter directement au diagramme l'école, la maison ou les chemins) (intervalles 1-14). La deuxième partie de cette leçon est consacrée à produire un diagramme à trois degrés pour décrire les combinaisons possibles de trois feux rouges avec les trois possibilités "rouge", "orange" et "vert". La leçon se termine sur une phase de travail individuel (intervalles 14-23).

Pour comparer les graphiques des quatre leçons produits par l'ordinateurs sans avoir trop de détails qui masqueraient la configuration d'ensemble, une forme de représentation est retenue qui ne distingue pas d'abord les contributions du maître et celles des élèves. En outre, les contributions non codifiables sont négligées. Cela permet une description phénoménologique des représentations graphiques du développement du savoir. Une première question se pose : comment la différence entre les deux enseignements se traduit-elle dans les différentes représentations graphiques ainsi obtenues ?

Les différences entre les maîtres A et B sont apparaissent nettement sur les représentations graphiques [A1, A2, B1, B2]. Au cours des deux leçons du maître A, le niveau de "relation" montre une importance presque égale comparé à celui des deux autres niveaux ; chez le maître B, par contre, ce niveau "relation" a une importance moindre. Cette impression visuelle résulte du plus grand nombre des contributions et de leur distribution plus importante au niveau intermédiaire dans l'enseignement du maître A. Chez le maître B, par contre, ce niveau est effectivement moins atteint que les autres (les pourcentages le montrent : 28 % resp. 37 % des contributions dans l'enseignement du maître A, et seulement 14 % des contributions chez le maître B se trouvent au niveau "relation"). En outre, on peut voir comment les contributions au niveau "relationnel" augmentent dans le temps chez le maître A. Surtout dans la première leçon, il est évident que les contributions se déplacent graduellement vers le niveau "relation" ; dans la deuxième leçon, une proportion assez élevée des interactions au niveau "relation" est déjà obtenue plus tôt.

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

La représentation graphique des leçons du maître B, par contre, donne l'impression qu'une stabilisation réelle du niveau "relation" n'est jamais vraiment atteinte. La première leçon (B1) est d'abord dominée par le niveau "calcul" resp. le niveau "modèle" (S), tandis que le niveau "empirique" ou "objectif" semble devenir plus fréquent dans la deuxième partie. Au cours de la deuxième leçon (B2), on observe des oscillations du niveau "objectif" au niveau "signe", et à l'inverse, sans que le niveau "relation" soit intégré d'une façon systématique.

Représentations graphiques

Il ne faut pas concevoir ces représentations graphiques comme des images ou des "copies" incomplètes de la complexité de l'enseignement réel - comme, par exemple, un regard superficiel sur nos diagrammes graphiques pourrait le suggérer. Les représentations graphiques et les diagrammes visuels fournissent des cadres géométriques pour rendre visible et analyser des *relations* possibles jusqu'alors cachées dans les données discrètes. On ne saurait trop souligner leur caractère théorique et exploratoires dans une perspective épistémologique.

- 1° Les représentations graphiques possèdent des fonctions autonomes qui sont généralement irremplaçables dans le processus de connaissance.
- 2° Les représentations graphiques sont de véritables moyens de connaissance et n'appartiennent pas seulement à la sphère de la communication ou à celle de la pédagogie.
- 3° Les représentations sont des moyens exploratoires... Ils permettent des opérations formelles qui sont relativement indépendantes de leurs rapports référentiels... et qui contribuent à l'examen de faits partiellement inconnus. (Biehler 1985, p. 70).

Cette interprétation théorique et exploratoire des diagrammes graphiques va de soi pour analyser des données *statistiques*. Pour les données statistiques, il faut tenir compte du fait que l'ensemble des données présentées ne représente qu'une multitude d'ensembles "similaires" des données. Ce phénomène statistique, selon lequel les structures générales, encore sous-jacentes, deviennent visibles tendanciuellement dans le cas particulier d'un ensemble concret des données, se traduit dans l'utilisation des diagrammes graphiques comme concept théorique et exploratoire.

Les graphiques présentés ici pour coder et visualiser le développement du savoir dans l'en-

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

seignement des mathématiques permettent de prendre des perspectives exploratoires et variables sur des aspects divers ; par exemple sur :

- les structures visuelles “globales” du savoir au déroulement d'enseignement.
- les structures graphiques “locales” produites par les interactions en classe
- la séparation des données en groupe différents afin de produire des structures graphiques contrastées.

Selon l'idée que les processus d'enseignement sont des phénomènes non-linéaires complexes soumis aux mécanismes de rétroaction, il ne faut concevoir les visualisations graphiques en premier lieu comme des diagrammes temporels - même s'ils montrent aussi des développements séquentiels (par exemple les étapes bien connues de l'enseignement, la phase d'introduction ou de discussion des devoirs, la phase de travail et, enfin, la phase de réflexion). Pour notre propos, il est plus intéressant d'identifier certaines structures visuelles et certaines formes stabilisées du savoir résultant des interactions ou des rétroactions entre tous les participants dans le processus de l'enseignement. Les visualisations graphiques présentées sont produites empiriquement et contiennent donc des “impuretés empiriques”. Les structures du savoir ne sont observables qu'à l'aide de la méthode de codage, non pas “directement” comme des simples phénomènes non-linéaires dans les sciences naturelles.

Une bonne méthode pour montrer des structures graphiques produites par les interactions entre maître et élèves est de séparer les contributions en deux groupes, celles du maître et resp. celles des élèves.

Séparation des données

Une opération importante sur les diagrammes consiste à séparer les contributions des élèves de celles du maître afin d'obtenir deux structures visuelles du développement du savoir mathématique à partir d'une seule leçon. Les secondes leçons des maîtres A et B sont “séparées” et leurs représentations graphiques sont discutées (voir les diagrammes dans l'annexe, A2, B2, A2M, A2E, B2M et B2E).

Les graphiques séparés pour la leçon du maître A (A2M et A2E) montrent une correspondance relativement évidente entre les structures graphiques du savoir chez les élèves et chez le maître, impression qui est renforcée par la comparaison des diagrammes séparés avec le diagramme non-séparé [A2]. Après séparation des contributions dans l'enseignement du maître B, par contre, on peut observer une différence remarquable entre les deux diagram-

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

mes séparés [B2M et B2E]. Le diagramme montrant les contributions des élèves confirme la structure du diagramme non-séparé. **Ce sont les élèves qui déterminent en principe la structure épistémologique du savoir dans l'interaction, et non pas le maître.** Les oscillations visibles sont le résultat des contributions des élèves.

Mathématique et enseignement comme phénomènes non-linéaires

Les visualisations graphiques du développement du savoir fournissent une certaine structure d'ensemble de l'enseignement des mathématiques. Elles permettent l'exploration des relations conceptuelles encore cachées dans les phénomènes empiriques. Elles offrent une perspective globale assez "rapide" sur la structure d'une leçon mathématique en ce qui concerne le développement du savoir, perspective conceptuelle qui modélise des phénomènes autrement très compliqués. Il ne s'agit pas de réduire ou de "négliger" la réalité par le recours aux graphiques, mais tout concept théorique doit élaborer certaines relations importantes en face de la complexité des faits réels. Le point décisif est que les graphiques, comme tous les concepts théoriques permettent de reconstruire des *relations* nouvelles dans la situation examinée, afin de faciliter la compréhension conceptuelle.

Le savoir mathématique et son enseignement ne consistent donc pas en phénomènes simplement linéaires, maîtrisables par la seule connaissance des "conditions initiales". Il s'agit des phénomènes non-linéaires soumis à des mécanismes d'interaction avec des événements nouveaux et imprévisibles qui surviennent dans leur déroulement. Ces phénomènes forment certains ordres et s'auto-organisent assez spontanément. Dans cette perspective, il devient plus important de comprendre d'abord les mécanismes d'actions internes et les structures du savoir mathématique qui se développent assez spontanément dans l'interaction en classe, que de vouloir directement agir sur eux et que de chercher à améliorer la pratique de l'enseignement en variant les "conditions initiales" d'un processus imaginé "linéaire".

Le codage et la visualisation graphique de la structure épistémologique du savoir mathématique intervenant dans le processus de l'enseignement - à l'aide du triangle épistémologique - sont une première tentative pour décrire et pour analyser, empiriquement et de façon exemplaire, les "phénomènes d'auto-organisation" sous jacents à la surface visible de l'enseignement des mathématiques.

La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.

REFERENCES

BAUERFELD H. (1978)

Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht - Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung, in : Bauerfeld H. (ed) : Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht, Hannover, 158-170.

BIEHLER R. (1985)

Graphische Darstellungen, in : math. did. 8, 57-81.

BIEHLER R./ STEINBRING H. (1982)

Bernoullis Théorem : Eine "Erklärung" für das empirische Gesetz der grossen Zahlen ? In : Steiner H.G. (ed.) : Mathematik - Philosophie - Bildung. IDM - Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht. Köln : Aulis, 296-334.

BROMME R./STEINBRING H. (1987)

Die epistemologische Struktur mathematischen Wissens im Unterrichtsprozess. Eine empirische Analyse von vier Unterrichtsstunden in der Sekundarstufe. Occasional Paper no. 90, Bielefeld.

BROMME R. /STEINBRING H. (1988)

Interactive Development of Subjects Matter within Instruction in the Classroom, Manuscript, Bielefeld.

BROUSSEAU G. (1985)

Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques, In : RDM, vol. 7, no. 2, 33-115.

BROWN, S.I. (1985)

Problem-solving and teacher education : The humanism twist models and muddles. In : Morris, R. (Ed.) Studies in Mathematics Education. The Education of Secondary School Teachers of Mathematics. Unesco. Vol. 4, 3-28.

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

CHEVALLARD Y. (1985)

La Transposition didactique, La Pensée Sauvage, Grenoble.

COONEY T. (1985)

A Beginning Teacher's View of Problem Solving, In : Journal for Research in Mathematics Education, vol. 16, no 5, 324-336.

V. HARTEN G./STEINBRING H. (1984)

Stochastik in der Sekundarstufe I, Köln, Aulis.

JAHNKE H.N. (1978)

Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem. Materialien und Studien Bd. 10, IDM Bielefeld.

KOLMOGOROV A.N. (1933)

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin.

SCHUSTER H.G. (1984)

Deterministic Chaos - An Introduction, Physik-Verlag, Weinheim.

STEINBRING H. (1980)

Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs - Das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht, Materialien und Studien Bd. 18, IDM Bielefeld.

STEINBRING H. (1984)

Mathematical Concepts in Didactical Situations as Complex Systems : The Case of Probability, In : Steiner H.G., Balacheff N. u.a. : Theory of Mathematics Education (TME), ICME 5 - Topic Area and Miniconference : Adelaide, Austria, August 24-30, 1984, Occasional Paper no. 54, IDM Bielefeld, 56-88.

STEINBRING H. (1986)

L'indépendance stochastique - Un exemple de renversement du contenu intuitif d'un concept et de sa définition mathématique formelle, in : RDM, vol. 7, no. 3, 5-50.

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

STEINBRING H. (1988a)

Nature du savoir mathématique dans la pratique de l'enseignant, In : Laborde C. (ed.) Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 307-316.

STEINBRING H. (1988)

The Theoretical Nature of Probability and how to Cope with it in the Classroom, Occasional Paper, no. 99, IDM Bielefeld.

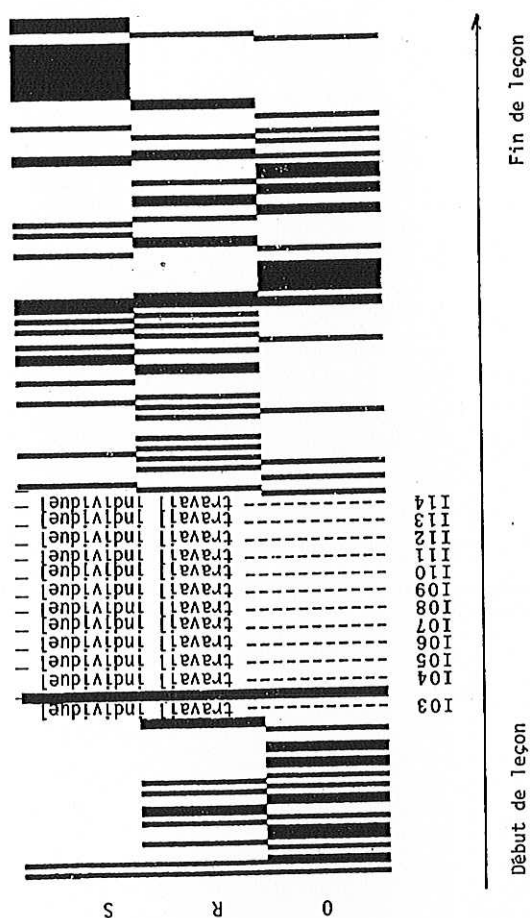
VOIGT J. (1984)

Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht-Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim, Beltz.

**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

Représentation graphique n° A 2

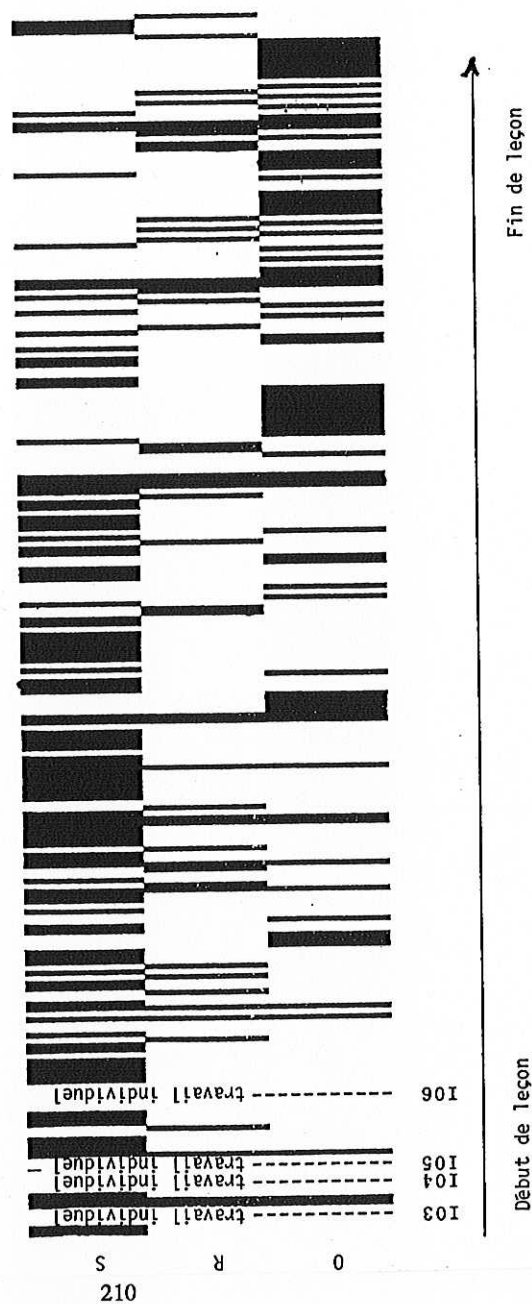
Vue globale sur la représentation graphique de l'enseignement
du maître A; leçon 2.



La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.

Représentation graphique n° B 1

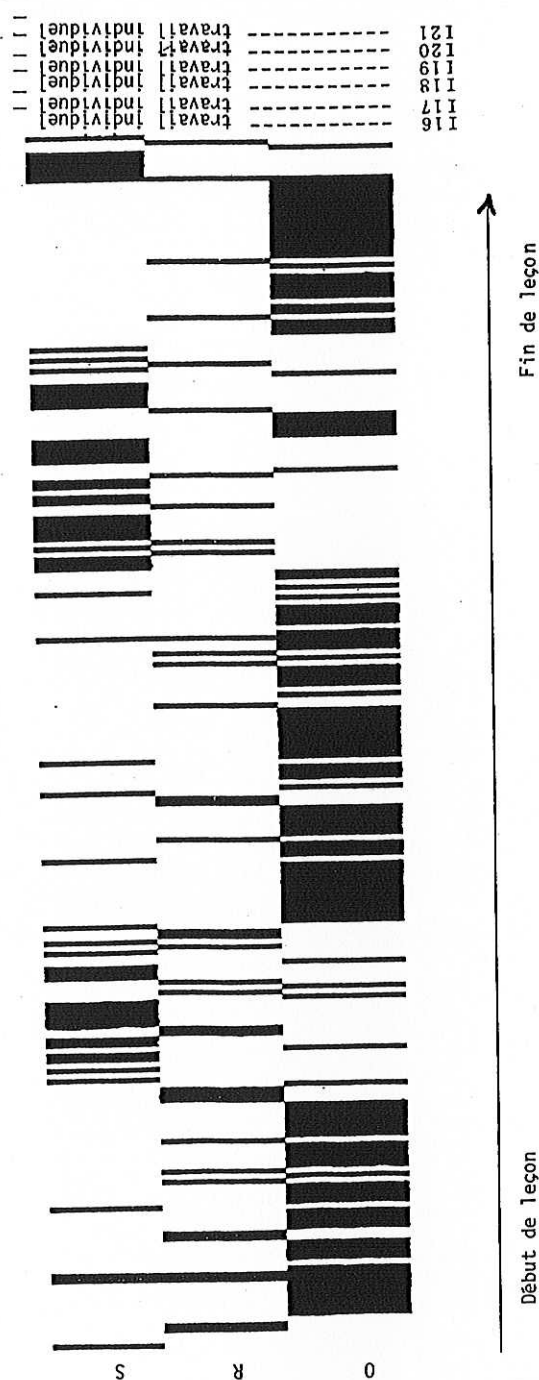
Vue globale sur la représentation graphique de l'enseignement du
maître B; leçon 1.



La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.

Représentation graphique n° B 2

Vue globale sur la représentation graphique l'enseignement du
maître B; leçon 2.

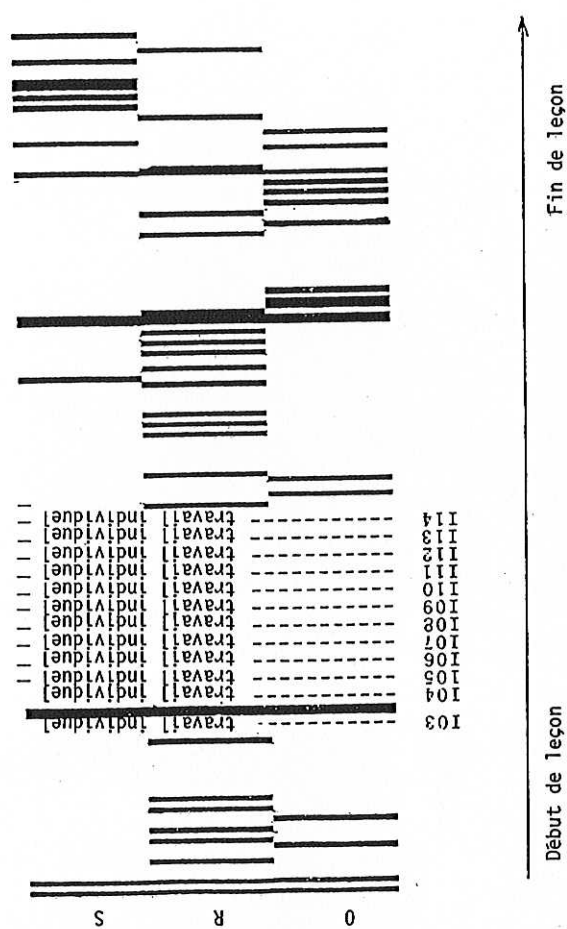


**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

Représentation graphique n° A2M

Graphique séparé des contributions du maître et des élèves.

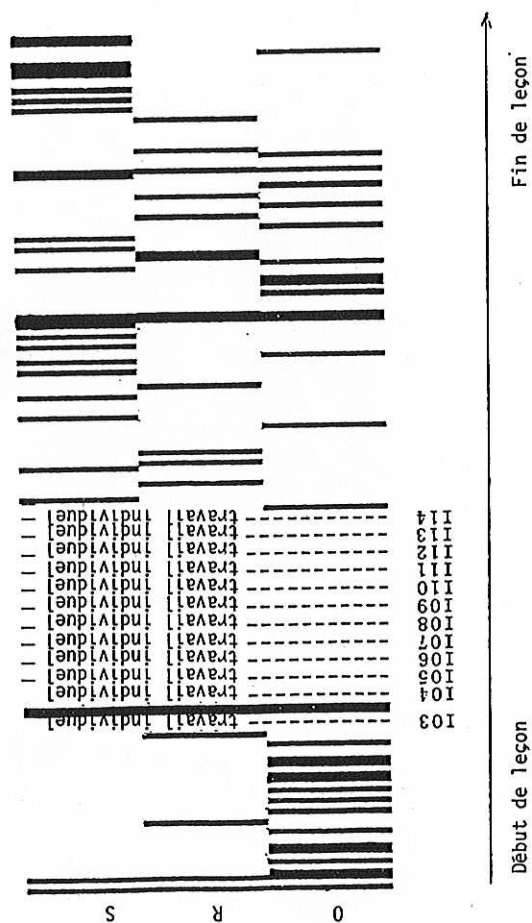
Contributions du maître A; leçon 2



La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.

Représentation graphique n° A2E

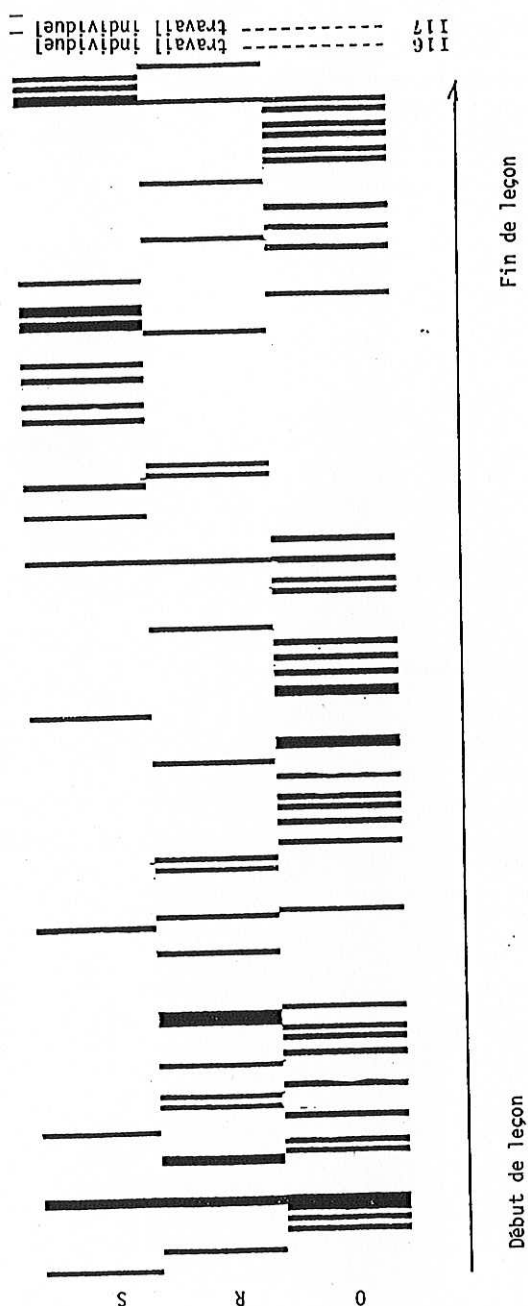
Graphique séparé des contributions du maître et des élèves;
contributions des élèves du maître A, leçon 2.



**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

Représentation graphique n° B 2 M

Graphique séparé des contributions du maître et des élèves;
contributions du maître B, leçon 2.



**La relation entre modélisations mathématiques
et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.**

Représentation graphique n° B 2 E

Graphique séparé des contributions du maître et des élèves;
contributions des élèves du maître B, leçon 2.

