PROCEDURES DIFFERENTIELLES DANS LA MISE EN EQUATION DE PROBLEMES

M. ARTIGUE

In mathematics as well as in physics, differential procedures are mainly used in two different modes in university courses for beginners. Refering to the results obtained in an interdisciplinary research on this subject, we show that traditional teaching does not make explicit these modes and describe some noxious consequences of this fact on conceptions developed by students. Then we present an experiment carried out with first year students in order to overcome these difficulties and we analyse their problem solving strategies.

Les travaux rapportés ici s'inscrivent dans une recherche sur la notion de différentielle au niveau des premières années universitaires, menée dans le cadre du GRECO "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques" du CNRS. Trois équipes ont participé à cette recherche : deux équipes de didactique des mathématiques (équipe DIDIREM de l'université Paris 7 et équipe de didactique des mathématiques et de l'informatique de l'université de Grenoble I) et une équipe de didactique de la physique (le LDPES de l'Université Paris 7).

La recherche dont l'objectif était de comprendre le fonctionnement de l'enseignement dans ce domaine en mathématiques et en physique au niveau envisagé et d'élaborer des stratégies d'enseignement visant à optimiser ce fonctionnement, s'est développé dans trois directions :

- l'analyse de l'évolution du statut de la notion de différentielle au sein des mathématiques et, rapportée à celle-ci, l'analyse de l'évolution de l'enseignement dans ce domaine, en mathématiques et en physique,

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p.173-190) IREM de Strasbourg

- l'analyse des conceptions développées par les étudiants et leur mise en relation avec les pratiques de l'enseignement usuel et les conceptions des enseignants eux-mêmes,

- l'élaboration, l'expérimentation et l'évaluation d'ingéniries didactiques dans ce domaine.

Nous ne détaillerons pas ici les différents travaux menés dans ces différentes directions, ni les résultats obtenus (le lecteur intéressé pourra se référer à [1] ou [2], nous essayerons plutôt de montrer comment ils nous permettent de comprendre le pourquoi des stratégies mises en œuvre par les étudiants dans les mises en équation de problèmes au moyen de procédures différentielles et d'envisager des moyens de remédier aux difficultés constatées.

I DIFFERENTS REGISTRES D'UTILISATION DE L'OUTIL DIFFERENTIEL

L'outil différentiel est utilisé, au début des études supérieures, en mathématiques et en physique, essentiellement comme outil d'approximation locale :

- soit en restant au niveau purement local dans l'étude locale des fonctions d'une ou plusieurs variables et des variétés associées : courbes, surfaces ..., la recherches d'extremums, les calculs d'incertitudes,

- soit pour permettre le passage du local au global dans la mise en équation de problèmes non linéaires aboutissant à des équations différentielles ou à des intégrales.

Les résultats obtenus par questionnaires ou entretiens individuels montrent clairement que les étudiants ne repèrent pas ces différences et confondent même dans un flou uniforme les approximations intervenant nécessairement dans la modélisation des phénomènes physiques d'une part, et la linéarisation locale liée à la mise en œuvre des procédures différentielles, d'autre part.

Donnons-en quelques exemples :

Procédures différentielles dans la mise
en équation de problèmes

Le calcul de la pression atmosphèrique :

Nous avons soumis à des étudiants de première année (93) le début classique d'un calcul de pression atmosphérique, par découpage en tranches et bilan des forces s'exerçant sur une tranche cylindrique de section S et d'épaisseur dz, jusqu'à l'expression différentielle :

$$dp = - \rho g dz.$$

p désignant la pression fonction de l'altitude z, ρ la masse volumique de l'air et g l'accélération de la pesanteur à l'altitude z considérée.

Interrogés sur la nécessité de considérer la hauteur dz comme petite, ces étudiants répondent massivement oui (90 %). Mais à peine 10 % se révèlent capables de justifier correctement cette nécessité, la réponse la plus fréquente étant la suivante :
dz doit être petit parce que la pression dépend de l'altitude.

Et intérrogés ensuite sur ce qu'il advient si l'on remplace l'air par de l'eau (donc si la masse volumique devient constante), ils répondent tout aussi massivement que bien sûr, là encore dz doit être considéré petit.

Le calcul de la pression sur un barrage :

Nous avons soumis à 100 étudiants de fin de première année un questionnaire bâti à partir du calcul classique par découpage en tranches de la force s'exerçant sur un barrage. Le calcul était présenté intégralement et l'on demandait ensuite aux étudiants s'ils pensaient que le résultat obtenu :

$$F = \int_0^h \text{pression }(z).d(\text{surface}(z))$$

était exact.

Les résultats obtenus se répartissent comme suit :
- une petite moitié des étudiants estime le résultat exact,
- un tiers environ répartit ses réponses entre l'affirmation nette : "l'intégrale aura une valeur approchée" ou des expressions plus ambigües comme : "l'intégrale sera exacte si on a sa valeur limite ou le résultat sera exact si dz est suffisamment petit.

Mais aucun étudiant ne fait intervenir, comme l'on aurait pu s'y attendre, l'approximation liée à la modélisation du phénomène physique. Le caractère approché du résultat, quand il est perçu, est automatiquement raccroché à la procédure intégrale elle-même.

Les résultats des questionnaires où l'on s'adresse plus directement aux éudiants vont dans le même sens :

- interrogés en physique sur ce qui rend nécessaire l'emploi des différentielles, 100 étudiants de DEUG citent des domaines comme la thermodynamique où les différentielles sont fréquemment utilisées mais s'avèrent dans leur grande majorité incapables de dépasser ce stade.

- interrogés en mathématiques sur ce qui leur semble important à propos de la notion de différentielle, 10 étudiants de troisième année sur 85 seulement mentionnent l'idée d'approximation locale. Et, ayant dans la question suivante à déterminer si la fonction de R^2 dans R définie par

$$f(x,y) = 2x + 4y + y^3\left[\sqrt{1 - \cos x} + y\right]$$

est différentiable en (0,0), 87 % se jettent dans le calcul des dérivées partielles (malgré les difficultés liées à la nullité du radical en (0,0)), pour montrer que la fonction est C^1, sans reconnaître dans l'expression fournie une partie linéaire correspondant justement à la différentielle suivie d'un reste.

L'enseignement et ces différents registres :

En fait, l'enseignement de DEUG ne semble pas chercher à prendre en compte les difficultés liées à l'existence de ces différents registres et à la nécessité de les distinguer :

- en mathématiques, l'enseignement évite un certain nombre de difficultés en ne s'attaquant pas aux problèmes de modélisation. La différentielle a longtemps été réduite au rôle de simple outil de calcul formel. Mais, même actuellement, alors que l'idée d'approximation locale est au cœur de la définition qui en est donnée, le registre de l'approximation locale devient rapidement invisible dans la pratique. En effet, à l'algorithme de la période antérieure basée sur les propriétés d'invariance formelle de l'expression différentielle, a succédé une algorithmique algébrique basée sur la manipulation des dérivées partielles et matrices jacobiennes, légitimée par quelques puissants théorèmes. L'idée d'approximation est bien sûr au cœur des théorèmes clefs du calcul différentiel comme le théorème d'inversion locale ou celui des fonctions implicites, mais peut rester cachée aux étudiants qui, en général, ont juste à s'assurer qu'ils sont dans les conditions d'utilisation de ces théorèmes parce qu'ils ont affaire à des fonctions C^1, ce qui ne nécessite pas de manipulation explicite de l'idée d'approximation.

- En physique, la différentielle ne constitue pas un objet d'enseignement, c'est un outil. L'analyse des manuels et polycopiés de cours (cf. [1]) a montré que la présentation qui en est faite est marquée par la référence quasi-exclusive au registre du calcul d'incertitudes, son utilité y apparaissant liée, de façon floue, à l'idée de simplification des calculs. Les procédures différentielles de mise en équation sont, quant à elles, proposées comme des recettes. Au mieux note-t-on, dans certains ouvrages récents, l'explicitation d'une convention de calcul au premier ordre par rapport aux accroissements des variables.

En fait, on retire de l'analyse de l'enseignement dans les deux disciplines l'impression :

- qu'en mathématiques, l'enseignement même s'il ménage une place essentielle à l'idée d'approximation au niveau des définitions, écrase ce registre derrière des pratiques algorithmiques purement algébriques,
- qu'en physique, l'enseignement se limite à l'ambition d'obtenir des pratiques "correctes" et fait confiance à l'usage pour y parvenir,
- que, dans les deux cas, même si c'est pour des raisons différentes, il n'y a pas de travail explicite sur les différents registres dans lesquels intervient la notion de différentielle.

II L'ATELIER DE MISE EN EQUATION DE PROBLEMES

L'atelier de mise en équation de problème auquel nous consacrons la suite de cet article a été élaboré justement pour aborder explicitement avec les étudiants les problèmes d'identification et de distinction de ces différents registres.

En fait, son objectif était double :

- d'une part, du point de vue de la recherche, étudier les stratégies développées par les étudiants et ce qui les conditionne, les difficultés rencontrées, la façon dont elles sont éventuellement surmontées, analyser en quoi elles dépendent de facteurs propres à l'aspect différentiel ou de facteurs plus généraux comme le repérage des variables pertinentes et la prise en compte de l'aspect fonctionnel des grandeurs utilisées,

- d'autre part, d'un point de vue d'ingénierie didactique, tester l'efficacité d'une situation didactique visant à mettre en évidence la diversité des registres d'intervention des différentielles, pour permettre aux étudiants de gérer effectivement cette diversité en compréhension.

Pour réaliser ce double objectif, deux séances avaient été prévues. La première séance dont nous rendons compte ici a été expérimentée dans trois groupes de travaux dirigés de DEUG SSM première année, en février. Les contraintes de temps n'ont pas permis d'expérimenter la seconde séance, nous privant de ce fait des éléments prévus pour l'évaluation de l'efficacité de la première séance.

II- 1 : Les textes proposés aux étudiants

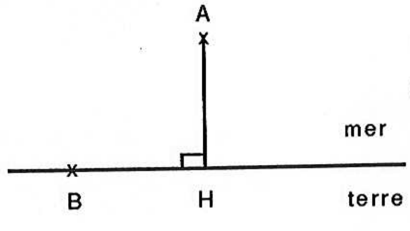
Pour cet atelier, quatre textes se rattachant à des registres distincts d'utilisation de l'outil différentiel avaient été choisis :

- registre du calcul approché (problème de la sphère dorée),
- registre de la recherche d'extremums (problème du nageur),
- registre du calcul intégral (problème de la coupe),
- registre de la mise en équation différentielle (problème de l'absorption).

Nous les reproduisons ci-après :

Le nageur :

Un baigneur situé en un point A de la mer désire atteindre un point B de la côte. La côte est rectiligne et la mer sans courant. Le trajet du baigneur peut être mixte (nage et marche). Sa vitesse de nage est de 2 km/h, sa vitesse de marche de 4 km/h .
Déterminer le trajet le plus rapide dans les deux cas suivants :



1) AH = 500m et HB = 400m

2) AH = 500m et HB = 200m

Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes

La sphère dorée :

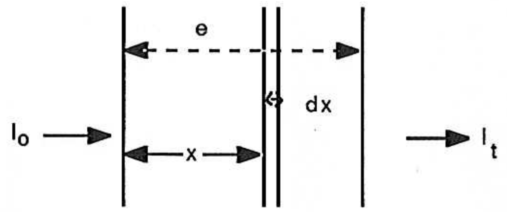
On veut dorer à l'or fin une sphère de rayon R. Sachant que l'épaisseur *e* de dorure est uniforme et très inférieure à la valeur de R, donner une valeur approchée de la quantité d'or nécessaire en fonction de R et de *e* (la masse volumique de l'or est de 19,3 g/cm).

L'absorption :

Soit Io l'intensité d'un faisceau de rayons X de section constante arrivant normalement à un échantillon métallique d'épaisseur *e*. L'intensité transmise est inférieure à l'intensité incidente Io. En effet, par suite d'interactions diverses, une partie de l'énergie est absorbée par l'échantillon. L'intensité absorbée par une tranche élémentaire dx, située à la profondeur x est proportionnelle à son épaisseur dx et à la valeur de l'intensité I en x, le coefficient de proportionnalité étant le coefficient d'absorption linéaire μ caractéristique du métal.

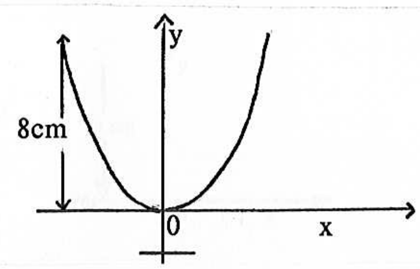
Donner la loi de variation de I en fonction de l'épaisseur de métal traversée et en déduire les épaisseurs e_{Al} et e_{Pb} d'aluminium et de plomb nécessaires que doit traverser un faisceau de rayons X pour que l'intensité incidente du faisceau soit réduite d'un facteur 100.

On donne $\mu_{Al} = 14\ cm^{-1}$ et $\mu_{Pb} = 1600\ cm^{-1}$.



La coupe :

On se propose de déterminer la quantité de vin contenue dans le verre ci-dessous en fonction de la hauteur h de liquide. On sait que la section du verre est parabolique et a pour équation $y = 2x^2$ dans le repère ci-dessous



II - 2 : L'organisation prévue pour le déroulement de l'atelier

Il était prévu d'organiser les étudiants en équipes au début de la séance, chaque équipe choisissant librement les problèmes qu'elle désirait traiter. On prévoyait une heure environ de recherche en équipes suivie d'une phase de synthèse où, problème après problème, on analyserait le travail des différentes équipes.

Il était prévu que l'enseignant interviendrait peu dans la phase de recherche, si ce n'est en cas de blocage complet d'une équipe. Mais après un premier problème choisi librement, il pouvait conseiller à une équipe donnée un problème non encore choisi, si le cas se présentait. Il devait animer la phase de synthèse, en veillant à faire expliciter et analyser les difficultés rencontrées puis conclure conformément aux objectifs de la séance.
L'atelier s'est à peu près déroulé comme prévu dans les trois groupes comportant respectivement 19, 19 et 20 étudiants, si ce n'est que la phase de recherche ayant, dans les trois groupes, été plus longue que prévu, la phase d'institutionnalisation suivant la synthèse a été, elle, quasiment inexistante.

Il faut souligner que les étudiants ont été souvent gênés au début par le statut de cette activité qui rompait avec les activités usuelles. Plusieurs ont demandé pourquoi on se mettait à faire de la physique dans les TD de mathématiques et ont manifesté quelques réticences à s'y engager. Une mise au point de l'enseignant a été nécessaire. Ensuite, l'intérêt a été soutenu.

II - 3 : Les résultats de cette expérimentation

Nous présenterons brièvement dans ce paragraphe, problème par problème, les traits les plus saillants de l'expérimentation, dans le cadre de la problématique précédemment explicitée.

Tous les problèmes ont été traités, mais tous n'ont pas rencontré le même succès comme en témoignent les couples suivants qui donnent, pour chacun d'eux, le nombre d'équipes qui l'ont abordé et le nombre d'équipes qui l'ont traité en premier :

le nageur (7,4) --- la sphère (6,2) -- l'absorption (4,2) -- la coupe (7,6).

Ces couples opposent le problème de la coupe à celui de l'absorption. Le problème de la coupe, situé à la fin de la fiche, attire visiblement les étudiants. On peut penser que c'est en grande partie parce qu'ils y reconnaisent d'emblée un problème d'intégration et qu'ils sont justement en train de commencer l'intégrale de Riemann . C'est en quelque sorte le moins hors-contrat des problèmes proposés. Quant au problème de l'absorption, il les rebute déjà par la longueur de son texte. De plus, il est très connoté "physique" donc particulièrement hors-contrat dans une séance de mathématiques.

Le nageur :

Aucune des équipes n'a rencontré de difficulté pour démarrer la résolution. L'extrait suivant du bilan du groupe I, témoigne bien de la stratégie généralement mise en œuvre :

"On s'est dit au début qu'il y avait plusieurs possibilités, par exemple aller tout droit ou aller d'abord dans l'eau et puis marcher sur la terre. Bon, la vitesse dans l'eau est plus petite que la vitesse sur la terre, donc on s'est dit : pourquoi il nagerait pas d'abord jusqu'en O (point introduit par eux entre B et H) *et ensuite il ferait le reste à pied. Alors, on s'est dit : cet angle* (angle ABH) *c'est l'angle α, on connaît AB, on connaît AH, donc on connaît α, il est de l'ordre de 50° à peu près. Bon, on sait ici qu'on a un angle droit doc 90° ; alors en fait si le nageur fait un trajet comme ça, il va former un angle β* (angle AOH), *et cet angle est compris entre α et 90°, donc β il va de 90° à α, donc il diminue, donc en fait il faut trouver le temps, il faut trouver une relation entre le temps et α, et β, je veux dire, et si on trouve β, on aura le temps minimum [...]. En fait, si on trouve le temps, on cherche l'angle pour le temps minimum, après c'est de l'algèbre."*

L'enseignant :

- *"Comment vous faites pour chercher l'angle correspondant à un temps minimum ?"*
- *"Quand on a la relation t égale fonction de β, on sait que lorsque la dérivée s'annule, t est minimum, donc on prendra la dérivée de t par rapport à β."*

La variable choisie est, suivant les équipes, un angle ou l'abscisse du point O. On ne note donc pas de difficulté dans la mise en place du cadre fonctionnel nécessaire à la résolution et le traitement différentiel, usuel, est en fait qualifié d'algébrique. Mais il faut souligner que cette partie "algébrique" de la résolution leur prend beaucoup de temps : sur les quatre équipes qui démarrent par ce problème, une seule en aborde un autre.

De plus, l'automatisme : "minimum=zéro de la dérivée" rend difficile dans tous les groupes l'interprétation des résultats obtenus dans la seconde situation proposée. En effet, avec les notations introduites, on obtient pour la fonction $t(\beta)$:

$$t(\beta) = AH/V_n \sin\beta + BH/V_m - AH/V_m tg\beta$$

V_m désignant la vitesse de marche et V_n celle de nage.
La dérivée s'annule pour $\cos\beta = V_n/V_m$ c'est-à-dire ici pour $\cos\beta = 1/2$. Pour AH = 500m et HB = 200m, l'angle α étant supérieur à 60°, ceci correspond à un point O extérieur au segment [B,H].

Quelques équipes, n'étant pas revenues à la situation physique, ne remarquent pas la difficulté. Les autres refusent la valeur obtenue par le calcul qui oblige le nageur à rebrousser chemin et proposent, sans être vraiment sûrs d'eux, le trajet AB. Aucune équipe ne parvient à résoudre seule cette contradiction apparente. Même, lorsque collectivement l'enseignant leur aura fait séparer, dans l'expression de la fonction temps, les cas : O entre H et B, puis O au-delà de B, leur aura fait calculer les deux expressions correspondantes et étudier leur sens de variation, ils resteront perplexes devant ce minimum qui n'est pas associé au zéro d'une dérivée.

La sphère :

Ce problème est jugé facile par toutes les équipes qui l'ont abordé. La stratégie généralement utilisée a consisté à exprimer le volume exact de la tranche puis :
- soit développer l'expression obtenue et ne conserver que le premier terme,
- soit écrire directement un développement limité à l'ordre un.

L'extrait suivant de l'enregistrement d'une équipe nous semble significatif de ce comportement très majoritaire :
"On va calculer le volume entre les deux sphères puis on fera un développement limité. Pas de problème, on sait faire."

Quelques élèves se demandent pourquoi, après avoir calculé le volume exact, il faudrait faire un développement limité. Dans ce cas, les explications fournies par les autres sont toujours données en référence au texte et aux procédures d'appel qu'il contient. Cet autre extrait en est un exemple typique :
-*"Comment t'as fait, toi ?"*
- *"J'ai fait la différence des volumes puis le développement limité."*
- *"Oh ! Tu as fait comme en physique un développement limité ! Moi, j'avais fait le truc exact, pas d'approximation."*
- *"Oui, mais ils te disent : "e très petit devant R" et "valeur approchée", alors j'ai simplifié."*

- *"Oui, t'as raison c'est sans doute ça qu'il faut faire."*

Un autre de l'équipe en riant :

- *"Ah oui ! Si on a dans un texte un "e très petit devant R" ça veut dire : faites un développement limité."*

Dans une équipe, les étudiants ont procédé différemment, intégrant (comme ils disent) la surface de la sphère entre R et R+e pour calculer le volume de la tranche. Lors de la phase collective, l'enseignant veut faire remarquer qu'à la base du calcul de l'intégrale, il y a justement l'utilisation de l'approximation obtenue à la fin. Il aura beaucoup de mal à se faire comprendre, les étudiants voyant dans l'expression sous l'intégrale le produit de la surface : πr^2 par le marqueur de la variable d'intégration : dr et se refusant à l'interpréter comme une approximation du volume d'une tranche de sphère.

L'absorption :

Sur les quatre équipes ayant abordé ce problème, deux le traitent rapidement, écrivant :

$$dI = -\mu I dx$$

et intégrant ensuite en logarithmes après avoir divisé les deux membres par I.
Les deux autres équipes ont rencontré de grosses difficulté.

Premier groupe :

Les étudiants repèrent très vite la phase clef de l'énoncé et essaient de la traduire par une relation.

Après avoir écrit : $I_{dx} = \mu I_x$,

ils passent dans le registre linéaire qu'ils justifient ainsi : *"L'intensité absorbée par chaque tranche dx, c'est la même puisque le métal est homogène ; et puis on nous parle du coefficient d'absorption linéaire, donc I(x) en fonction de x, c'est une droite décroissante qui partde Io et arrive à It."*
Ceci permet une interprétation satisfaisante à leurs yeux de μ : c'est la pente de la droite et elle ne dépend bien que du métal considéré, non de l'épaisseur traversée.
Malgré les réticences d'un étudiant, gêné qu'il y ait des dx dans le texte et qu'on n'ait pas besoin d'intégrer pour résoudre le problème, ils s'arrêtent à cette solution.

L'observateur la déstabilise cependant assez aisément en attirant leur attention sur la proportionnalité de l'absorption à l'intensité en x affirmée dans le texte. La remise en cause de la solution proposée et l'information fournie sont aussitôt récupérées par l'étudiant à l'origine de l'interprétation linéaire :

E1 : - "Mais alors, ça ne peut pas être une droite !"
E2 : - "Plus ça va, moins ça absorbe."
E1 : - "Ca va être comme ça (il trace une courbe décroissante), c'est du log ou une exponentielle."
E3 : - "Il doit y avoir une équation différentielle."
E4 : -"Oui, tu sais, comme quand ça frotte, dI/I et puis ça fera du log."

Ils essaient ensuite, sans se référer au texte, de procéder par analogie avec le cas évoqué du frottement et après trois essais infructueux arrivent à la bonne écriture différentielle qu'ils intègrent, comme prévu, en logarithmes.

Deuxième groupe

Dans ce groupe aussi, les étudiants repèrent vite la phrase clef de l'énoncé et essaient de la traduire par une relation.
Un étudiant (E1) propose : $I_{dx} = \mu dx I_x$.
Cette expression est critiquée par un autre et une discussion s'engage :

E2 : - "Mais il faut tenir compte de la profondeur parce que plus x va augmenter, moins ça va absorber."
E1 : - "Oui mais alors dx va changer lui aussi, ça marche."
E2 : - "Ah non, dx, il change pas lui !"
E3 : - "C'est proportionnel alors : It - Io = Io (e - x) dx".
E1 : - "Et μ, tu l'écris où dans ton truc ?"
E3 : - "Je l'ai pas encore fait mais je vais le mettre."
E4 : - "Y a sûrement une histoire d'intégrale là-dessous."
E2 : - "De toutes façons, dès que tu vois dx..."
E4 : - "Et puis tu as It - Io, ça ressemble entre quelque chose pris entre O et t."

Plusieurs propositions sont faites ensuite :
$I_t = I_o - \mu dx I_o x$, $I_x = \mu I_o dx$, $I_x = \mu I_x \cdot x + C$,

mais aucune ne les satisfait vraiment. Les étudiants finissent par revenir à la première formulation et cherchent à l'intégrer, mais ils ne savent comment faire. Il y a blocage. Interrogés par l'observateur sur les fonctions qu'ils veulent retenir pour la résolution et les variables dont elles dépendent, ils arrivent, aidés, à repérer l'incohérence fonctionnelle des écritures indicielles : I_x, I_{dx} et à les transformer en écritures fonctionnelles : I(x), I(x +dx). Ils finissent par aboutir à la formulation :

$$I(x + dx) = I(x)\left(1 - \mu dx\right)$$

qu'ils interprètent comme une relation de récurrence : on avance à chaque fois de dx, implicitement supposé constant :

- *"Y a qu'à partir de Io et avancer de dx à chaque fois."*
- *"Oui, et puis on fera la somme de tous les morceaux. Ah, c'est là qu'elle intervient l'intégrale !*

Mais ils continuent à patauger, ne voyant ni comment résoudre cette récurrence, ni quelle intégrale écrire. Et quand finalement ils arrivent à l'intégrale :

$$\int_0^e I(x)\, dx$$

c'est pour se retrouver une fois de plus coincés puisque I est justement la fonction inconnue.

L'observateur intervient alors pour expliquer ce qui différencie cette situation d'une simple situation d'intégration et orienter vers le point de vue "équation différentielle", qui leur permettra enfin d'achever la résolution.

La coupe :

Les observations montrent des comportements assez proches dans deux des groupes, comportements distincts de ceux observés dans le troisième où l'atelier se déroule une semaine plus tard, après deux séances de travaux dirigés d'intégration.
Dans les premiers cités, le lien avec l'intégrale est immédiat et il se fait très majoritairement de la façon suivante : les étudiants calculent l'aire plane correspondant à la section de la coupe dans le premier quadrant du plan xOy puis, sachant que la coupe est obtenue par rotation de cette section, ils essaient de trouver un moyen mathématique de rendre compte de cette rotation. Une équipe se ramène au calcul, déjà fait en physique, du volume du cylindre par multiplication de l'aire de la section plane par πR. Le choix de l'analogue de R pour la section parabolique les gêne, ils se mettent d'accord sur R_{max} mais ne se sentent pas très sûrs d'eux. L'enseignant leur propose à titre de vérification de suivre la même démarche pour calculer le volume de la sphère qu'ils connaissent déjà. Ils multiplient comme on pouvait s'y attendre l'aire de la section plane par πR, R étant le rayon de la sphère et n'obtien-

nent pas le résultat attendu. Ils suivront, à partir de là un itinéraire comparable à celui des autres équipes.

Dans ces équipes, il y a blocage puis, plus ou moins rapidement et spontanément, changement de point de vue et considération de sections horizontales de la coupe. L'aire d'une telle section est égale à πx^2 et il suffit, disent-ils, de sommer ces surfaces. Qui dit sommation dit intégrale et les étudiants passent sans hésitation de l'expression de l'aire à l'intégrale :

$$I = \int_0^{xh} x^2 \, dx$$

dx jouant ici simplement le rôle de marqueur de la variable d'intégration.

Le résultat obtenu les laisse cependant perplexes puisqu'ils n'ont pas à tenir compte de la forme de la coupe.

L'intervention de l'enseignant est alors nécessaire. Mais il suffit qu'il demande si c'est vraiment des surfaces qu'on empile, pour provoquer le déclic : pour calculer un volume on empile des volumes et la hauteur sera dy, ça y est, on a récupéré y, donc la forme de la coupe. Le problème est résolu.

Dans le dernier groupe cité, la situation est différente. Les étudiants ont déjà calculé en mathématiques des intégrales par encadrement et appliqué la méthode au calcul du volume de la sphère. Sur les trois équipes qui abordent le problème, deux procèdent de même, encadrant le volume $V(x+\Delta x) - V(x)$ par celui de deux cylindres droits puis divisant par Δx et faisant tendre Δx vers 0 pour obtenir la dérivée de la fonction :

$$x \to V(x)$$

cette dérivée étant intégrée ensuite pour trouver le volume.

Lors du bilan final, un étudiant présente très clairement ce calcul au tableau ; mais après avoir obtenu, par passage à la limite, l'encadrement :

$$\pi x^2 f'(x) \leq V'(x) \leq \pi x^2 f'(x)$$

qui fournit la valeur de V'(x), il ajoute :

"Donc on voit que l'encadrement, que les choses qu'on avait négligées étaient vraiment négligeables et que V'('x) est bien égal à ..."

alors que justement rien n'a été négligé dans cette méthode. Preuve que la situation était moins limpide, même dans ce cas, qu'elle pouvait le paraître au premier abord.

$\pi x^2 dy$ .La dernière équipe a coupé en tranches élémentaires d'épaisseur dy, évalué le volume de chaque tranche par : $\pi x^2 dy$, puis intégré cette expression pour calculer le volume global. Lors du bilan, elle présente sa méthode en insistant sur le fait qu'elle est bien plus rapide que celle des encadrements, tout en conduisant au même résultat.

CONCLUSION

Cette expérimentation, de type étude de cas, met clairement en évidence, nous semble-t-il, un certain nombre de faits concernant aussi bien les difficultés liées à l'utilisation de l'outil différentiel au début des études universitaires, que les stratégies développées par les étudiants, face à l'enseignement qui leur est dispensé, pour les surmonter. Nous voudrions pour conclure souligner quelques points qui nous semblent particulièrement importants.

1 - Les difficultés rencontrées par les étudiants sont apparues ici situées dans les registres propres au calcul différentiel et intégral plutôt que dans un registre fonctionnel général. Dans le problèmes du nageur, l'identification du cadre fonctionnel ne pose de problème à aucune des équipes. Ceci n'implique pas que ce cadre fonctionnel soit bien maîtrisé lorsqu'il doit être utilisé dans des contextes moins familiers que la recherche d'un extremum. Dans la résolution du problème de l'absorption, on voit apparaître des notations indiciaires que l'on pourrait qualifier de pré-fonctionnelles. En effet, elles permettent de prendre en compte une certaine idée de dépendance mais ne sont pas systématiquement soumises aux contraintes du registre fonctionnel. Elles peuvent de ce fait créer un blocage à un niveau ne permettant pas la résolution, les étudiants étant persuadés avoir rendu compte dans leur formulation des données et hypothèses de l'énoncé.

2 - Dans les difficultés observées ici, on retrouve bon nombre de difficultés mises en évidence dans l'analyse des réponses aux différents questionnaires envisagés dans l'ensemble de la recherche, par exemple :

- les difficultés liées au statut des éléments différentiels : globalement, la recherche a mis en évidence deux conceptions dominantes opposées : matérialité pure ou statut purement formel et l'obstacle qu'elles constituent l'une et l'autre à la mise en place d'une vision fonctionnelle souvent nécessaire à la résolution. On retrouve ces conceptions ici et l'on peut également mesurer certains de leurs effets pernicieux : la vision exclusive de dx comme petite quantité constante conduit une équipe à se perdre dans une itération discrète dans le problème de l'absorption, la vision exclusive de dx comme simple marqueur de la variable d'intégration conduit plusieurs équipes à commettre la même erreur dans la résolution du problème de la coupe. Soulignons que cette vision est alors soutenue par celle du volume comme empilement de surfaces, dans une perspective comparable à celle des indivisibles de Cavalieri.

- le poids du modèle linéaire et la non-distinction entre linéarité locale et globale ; ces difficultés apparaissent ici de façon manifeste dans le problème de l'absorbtion où l'on voit le modèle linéaire global appelé par divers indicateurs linguistiques comme : "proportionnel", "coefficient d'absorption linéaire".

3 - D'autres, non apparentes dans les réponses aux questionnaires vu l'éventail des questions posées, mais prévisibles compte-tenu de l'analyse du paragraphe 1, se manifestent ici : la présentation du problème de l'absorption, par exemple, en termes d'empilement de contributions élémentaires, tend à faire assimiler ce problème à un simple problème d'intégration alors que, les contributions élémentaires étant interdépendantes, ce n'est le cas que si l'on s'intéresse aux contributions relatives. De ce fait, l'objet "équation différentielle", qui est au cœur du problème, reste masqué et soit les étudiants, embrayent mécaniquement sur dI/I = ... et l'intégration par les logarithmes, par analogie avec des situations déjà rencontrées, soit ils restent bloqués.

4 - Au delà du repérage de ces difficultés, ces séances nous permettent de mieux identifier les stratégies des étudiants et nous aident à comprendre ce qui les détermine.

L'observation montre par exemple que, dès que la résolution ne leur paraît pas évidente, les étudiants se jettent prioritairement dans la recherche d'indices formels au niveau du texte du problème proposé. Ces mêmes indices sont également utilisés à titre de contrôle ou comme moyen d'emporter l'adhésion des autres dans les discussions, sans qu'un contrôle interne au problème soit nécessairement invoqué : on a déchiffré le rebus, on a découvert ce que l'enseignant attendait de nous, donc on a raison. On voit ici fonctionner un certain nombre de telles associations : la mention "e très petit devant R" appelle un développement limité, la présence d'éléments différentiels ou de tranches élémentaires appelle un calcul d'intégrales, les termes "proportionnel", "linéaire", "homogène" appellent le modèle linéaire.

D'autres associations paraissent de nature moins étroitement formelle comme celle qui fonctionne dans le problème du nageur : un problème de minimum se résoud en cherchant le zéro de la dérivée d'une fonction, ou les associations "sommation-intégrale" rencontrées dans le problème de l'absorption, ou encore l'analogie avec le problème du frottement subodorée à partir d'un tracé de courbe ressemblant à une exponentielle décroissante mais, bien que de nature plus conceptuelle, elles restent souvent sommaires et ne se situent pas dans le cadre d'une identification claire des différents registres d'utilisation de l'outil différentiel.

Si l'on se place, non plus seulement au niveau cognitif, mais sur le plan du fonctionnement du système d'enseignement, on ne peut manquer de voir dans les attitudes des étudiants et les stratégies qu'ils développent, l'effet d'une adaptation efficace des étudiants à ce système, basée sur une connaissance, implicite au moins, de certaines des lois qui le régissent. Ainsi la résolution de ces problèmes de mise en équation, choisis volontairement classaiques, peut être efficacement basée sur la stratégie suivante :

- repérage dans l'énoncé des termes clefs et indices,
- choix, en fonction de ce repérage, d'un algorithme de résolution,
- exécution de l'algorithme,

cette stratégie fonctionnant parce que les énoncés eux-mêmes sont surdéterminés par tout un système d'indices qui assure un niveau de réussite satisfaisant à qui sait intégrer la coutume didactique. Les étudiants observés ici sont encore des débutants, l'automatisme de certains branchements scolaires n'est pas encore parfait, mais on peut faire l'hypothème que confrontés aux mêmes problèmes, des étudiants de fin de DEUG obtiendrait des résultats très satisfaisants, et ceci sans que leurs conceptions des objets du calcul différentiel et intégral, comme des raisons de recourir à ces objets, aient foncièrement évolué.
Si nous voulons aller plus loin qu'une telle adaptation au scolaire et favoriser chez les étudiants la constitution d'une épistémologie plus satisfaisante, il est clair que nous devons modifier profondément les coutumes didactiques qui sont à l'origine de ces adaptations. C'est par exemple l'objet des travaux de l'équipe grenobloise déjà citée dont l'ingénierie didactique se fonde sur l'instauration d'une pratique de débat scientifique et, pour l'objet qui nous concerne plus spécifiquement ici, la mise en place d'ateliers de modélisation pluridisciplinaires (cf [3] et [4] par exemple).

REFERENCES

[1] : Alibert D., Artigue M., Courdille J.-M., Grenier D., Hallez M., Legrand M., Ménigaus J., Richard F., Viennot L. : *Le thème "différentielles" : un exemple de coopération maths-physique dans la recherche*, Actes du GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Sèvres, Mai 1987, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

[2] Artigue M. et al. : *Différentielles et procédures différentielles dans l'enseignement supérieur en mathématiques et en physique*, Rapport de recherche, Editions IREM Paris 7 (à paraître).

[3] Alibert D., Grenier D., Legrand M., Richard F. : *Introduction du débat scientifique dans un cours de première année de DEUG A à l'université de Grenoble I*, Rapport ATP "Transitions dans le système éducatif", 1986.

[4] Alibert D. : *Codidactic system in the course of mathematics : how to introduce it ?*, Actes du Congrès PME XII, Weszprem, Juillet 1988, Editeur Andrea Borbas, OOK Printing House, Weszprem.