EMPIRISME ET GEOMETRIE DE L'ESPACE

CHEZ LES ELEVES AYANT ENTRE 11 ET 18 ANS

G. AUDIBERT

Les observations que les élèves peuvent faire commandent leur démarche de résolution dans les problèmes de géométrie. D'où le rôle important que les vérifications et les contradictions, rencontrées entre leurs attentes et leurs constatations, peuvent jouer dans l'apprentissage. Cet article illustre cette démarche sur deux problèmes de géométrie dans l'espace, en présentant le déroulement du travail de recherche de quelques élèves.

Au cours de nos recherches(1) en Géométrie Euclidienne, nous observons et caractérisons un certain nombre de démarches de pensées qui nous semblent fondamentales dans l'apprentissage de la géométrie.

Nous présentons ces démarches principalement dans le champ de la géométrie de l'espace.

Nous parlons successivement de :

- Démarches expérimentales,
- Vérifications,
- Contradictions observées
- Empirisme et démonstration

(1) Ces recherches sont menées sous la responsabilité de l'auteur par un groupe de l'I.R.E.M. de Montpellier. Ce groupe était constitué en 1987-1988 de Mesdames Y. Bellecave , A. Chevalier et L. Dray , et de Messieurs A. Amsalem , G. Audibert , N. Bascou, F. Bonafé , R. Brunet , H. Jabot ; A. Lerouge , T. Murgier , J. Naudeillo ; B. Pelouzet.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2(1989) (p. 65-88) IREM de Strasbourg

Empirisme et géométrie de l'espace
chez les élèves ayant entre 11 et 18 ans

1. DEMARCHE EXPERIMENTALE

Au cours de la résolution d'un problème, un sujet peut avoir une démarche expérimentale. La démarche expérimentale (D.E.) est caractérisée par l'énonciation d'une hypothèse, suivie d'une observation accompagnée ou non d'une réalisation nouvelle, et se terminant par une prise de décision portant sur la valeur de vérité de l'hypothèse.

Nous avions constaté l'existence de démarches expérimentales à propos de deux expérimentations de Géométrie Euclidienne plane, portant sur les problèmes CRI et QAT et analysés respectivement par G. Audibert (1982) et A. Chevalier (1984). Nous avions même affirmé qu'un tiers des élèves observés au cours de ces deux expérimentations utilisaient une démarche expérimentale. Une autre conclusion fut la suivante : dans chaque classe des élèves pratiquent la démarche expérimentale.

Examinons maintenant à propos de la D.E. deux autres expérimentations portant sur les problèmes FIL et SEC.

Le problème FIL a été proposé à 69 élèves, répartis comme suit : 9 élèves de 6ème, 10 de 5ème, 10 de 4ème, 10 de 3ème, 10 de 2nde, 12 de 1ère, et 8 de terminale.

Les élèves étaient en situation de recherche individuelle du problème. L'énoncé du problème FIL est le suivant :

Une salle de classe a pour dimension 7m de long, 5m de large et 3m de haut. Un fil est tendu verticalement du plafond au sol. Une balle de revolver traverse la salle. Elle part d'un des coins du plafond et aboutit à la base d'un mur en son milieu. La balle se déplace en ligne droite à partir de ce coin et coupe le fil à 1,5m au-dessus du sol. A quelle distance de chaque mur le fil était-il placé ?

Pour présenter la solution de ce problème, nous pouvons séparer la salle de classe en deux, de telle sorte que la trajectoire soit la diagonale d'une de ces demi-salles. Alors le fil est au milieu de la demi-salle.

Examinons le travail de l'élève appelé MAR.

Cet élève âgé de 18 ans est en classe de première. MAR a dessiné au début de sa recherche un rectangle ABCD représentant une vue dessus ainsi que deux segments AI et AJ représentant deux trajectoires possibles pour la balle. La figure 1 ci-dessous reproduit son dessin :

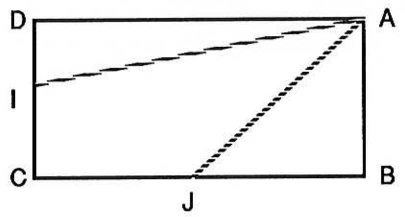


Figure 1

Il annonce à la onzième minute, en parlant du fil : *il sera placé au centre*". Puis il s'aperçoit que les trajectoires AI et AJ ne passent pas par le centre du rectangle. Et en montrant le centre du rectangle il dit *"c'est pas possible"*.

Nous avons là un exemple type de ce que nous appelons une démarche expérimentale, avec l'énonciation d'une hypothèse "le fil du centre", une observation portant sur la figure 1 et une décision "c'est pas possible".

Lors de l'analyse du problème FIL (cf. G. Audibert 1985) nous avons indiqué, avec le tableau 2, pour chaque classe le nombre d'élèves qui ont au cours de leur recherche utilisé au moins une fois une démarche expérimentale telle que nous l'avons définie.

Classe	6ème	5ème	4ème	3ème	2nde	1ère	Term	Total
Nombre d'élèves ayant utilisé au moins 1 fois la démarche expérimentale	3	3	3	4	3	3	2	21
Nombre total d'élèves	9	10	10	10	10	12	8	69

Tableau 2

Ce tableau montre que la démarche expérimentale est pratiquée dans toutes nos classes ;

elles apparaît pour environ 30 % des élèves.

Le problème SEC a été proposé au mois d'octobre à 82 élèves répartis comme suit : 1 élèves de 6ème, 9 élèves de 5ème, 11 de 4ème, 11 de 3ème, 13 de 2nde, 13 de 1ère, 11 de Terminale C ou D, 13 de première année de Deug. A. Cette expérience a été partiellement analysée par A. Chevalier (1988).
Les élèves ont tout d'abord été invités à une observation réalisée devant eux et ainsi commentée :

"On coupe une pomme de terre en deux morceaux (de tailles inégales) au moyen d'un couteau. On applique une des deux surfaces plates obtenues sur un tampon encreur puis sur une feuille de papier posée sur la table. On obtient une tache".

Ils ont alors été mis, pendant près d'une heure, en situation individuelle de recherche du problème dont l'énoncé est le suivant :
"On a un cube en bois de 10 cm de côté. On le partage en deux morceaux d'un coup de scie. Le coupe de scie passe par les trois points A,B et C indiqués sur le dessin du cube ci-joint. Le point A est à 3 cm d'un sommet. Le point B est à 8 cm su même sommet. Le point C est à 8 cm du même sommet. On applique une des deux surfaces obtenues sur un tampon encreur et on l'imprime sur une feuille. On demande de dessiner exactement le contour de la tache obtenue".

Un dessin leur était donné, il est représenté à l'échelle 1/2 par la figure 3. La maquette en carton d'un cube de 10 cm d'arête leur était fourni. La réalisation de cette maquette avait été volontairement approximative. Lorsque l'élève estimait avoir résolu le problème, l'expérimentateur fournissait un deuxième dessin, réprésenté à l'échelle 1/2 par la figure 4, et disait : "l'énoncé qui est écrit au tableau reste valable : voilà une nouvelle feuille. Peux-tu chercher ?".
La tache qui doit être dessinée est un triangle isocèle de dimension $\sqrt{128}$, $\sqrt{73}$,$\sqrt{73}$, c'est-à-dire environ 11,3 cm, 8,5 cm, et 8,5 cm, dans les deux cas bien évidemment.

(Voir page suivante les figures 3 et 4).

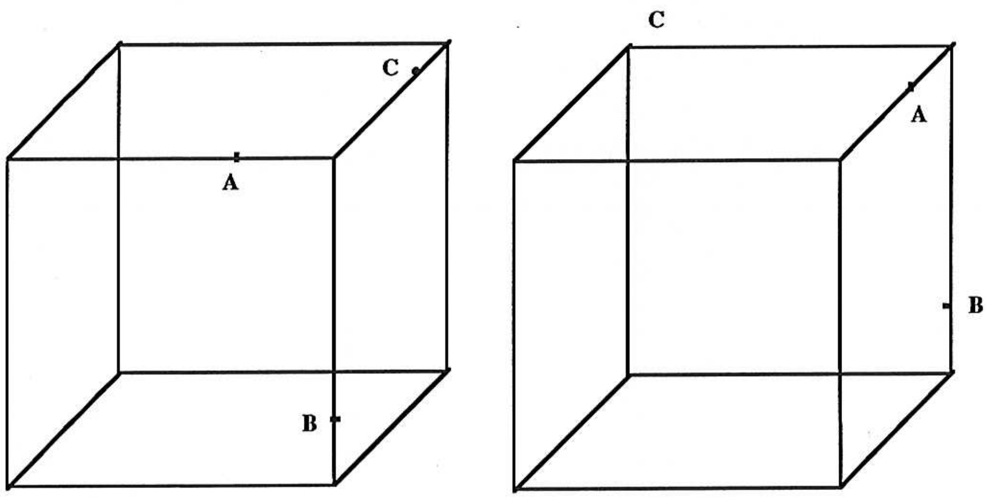


Figure 3 Figure 4

Examinons le travail de l'élève appelé BRU. Cet élève est en classe de quatrième ; il est âgé de 12 ans et 9 mois.

Au bout d'une dizaine de minutes de recherches il mesure sur le dessin (figure 3) AB puis BC puis AC.

BRU - *Là ça fait huit et demi* (il parle de AB) *; là ça fait six et demi* (il parle de AC) *; mais il faut tenir compte de l'inclinaison. Si c'était divisé par deux ça serait trei ze.*

BRU veut dire que, le rapport de réduction sur les fuyantes étant de 1/2, il se peut que le segment dessiné AC ait une longueur égale à la moitié de la longueur réelle. Il a donc une hypothèse : AC sur le dessin est la moitié de la longueur réelle du segment. Il prend alors en main le cube en carton et reporte au double décimètre les points A,B et C très correctement. Il construit sur la maquette les segments AB, AC et BC avec la règle. Il mesure le segment AC sur la maquette : il mesure le segment AC sur le dessin (figure 3). Nous avons là une observation accompagnée de réalisations nouvelles.

BRU - *C'est pas divisé par deux.*

Il constate que le rapport des mesures n'est pas 2. Il rejette son hypothèse ; c'est la décision concluant cette démarche expérimentale. Nous pouvons conclure à propos du problème SEC que la démarche expérimentale est pratiquée dans toutes nos classes ; elle apparaît chez environ 25 % des élèves.

Le nombre des élèves utilisant la D.E. est certainement supérieur, toutefois le triplet constitué par l'hypothèse, l'observation et la décision est dans bien des cas mal explicité, aussi ne peut-on pas en conclure de façon catégorique dans ces cas l'existence d'une D.E.

Nous étudions dans le paragraphe suivant les vérifications qu'on aurait pu classer parmi les démarches expérimentales mais que nous avons classé séparément.

2. VERIFICATIONS

Considérons la procédure suivante :
L'élève dessine une figure. Il mesure ensuite sur cette figure des distances et des angles ; mais ces mesures n'ont pas été utilisées pour la réalisation de la figure. Il compare ces mesures à des valeurs attendues.

Nous disons alors que l'élève procède à une vérification. A. Chevalier (1984) a pu constater à propos du problème QAT que dans 90% des cas, l'élève effectue une vérification avant de conclure que la construction qu'il a réalisé est conforme ou non à son anticipation.

Le problème SEC, présenté dans le précédent paragraphe, doit amener l'élève à construire un triangle ; il entraîne ainsi de nombreuses procédures de vérifications.

Examinons, à propos du problème SEC, le travail de l'élève appelé DOR. Cette élève est en classe de troisième ; elle est âgée de 14 ans et 1 mois. Observant le dessin qui lui a été fourni (figure 3), elle réalise un nouveau dessin que reproduit à l'échelle 1/2 la figure 5. Elle trace une droite parallèle au bord latéral de la feuille, place les points 0 et b avec 0b = 8cm, trace ensuite le segment a0 perpendiculaire à 0b avec a0 = 3cm.

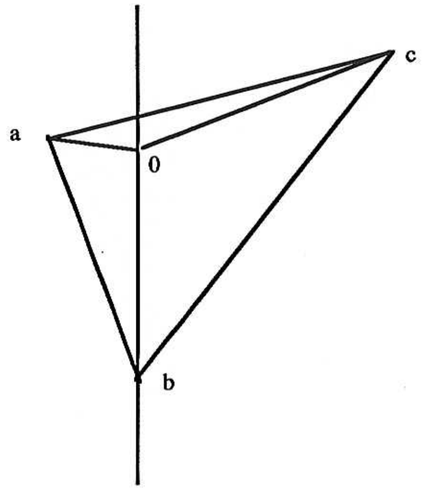


Figure 5

Elle mesure ensuite différents éléments de la figure 5 qu'elle compare aux mesures correspondantes de la figure 3.
Elle mesure notamment l'angle $\widehat{a0c}$ qu'elle compare à l'angle correspondant à la figure 3.

DOR - Ca fait 150°   ouf ! c'est juste !

Nous avons là une procédure de vérification.

Soulignons qu'une vérification est très proche d'une démarche expérimentale. L'élève fait d'abord une hypothèse, même si cette hypothèse n'est pas explicite : mon dessin sera identique à une figure dont les dimensions sont connues. Son observation consiste ensuite à mesurer certains éléments du dessin qu'elle réalise. Elle prend enfin une décision : accepter ou refuser son dessin. C'est ainsi que DOR prolonge sa déclaration précédente en ajoutant :

DOR - C'est la coïncidence, sinon j'aurais effacé et refait le dessin.

Dans la D.E. comme dans la vérification, l'observation est un moment déterminant. L'élève compare ses observations et les contraintes qu'il s'impose ou que lui impose le problème, regarde si elles ne sont pas contradictoires. Il fait un grand usage d'une notion que nous allons maintenant examiner et que nous appelons : contradiction observée.

3 CONTRADICTIONS OBSERVEES (CO)

Nous avons longuement étudié cette notion à propos de la géométrie euclidienne plane (cf. G. Audibert 1982 et A. Chevalier 1984). Nous sommes en présence d'une contradiction observée (CO) quand l'élève exprime le rejet d'une réalisation parce qu'elle ne satisfait pas certaines contraintes qu'il veut respecter. Les deux démarches expérimentales présentées dans notre premier paragraphe s'appuient sur des C.O.

La quasi-unanimité des élèves utilisent des processus débouchant sur des C.O. - C.Morin (1986), lors de l'analyse d'une expérimentation portant sur un problème lié à la proportionnalité arrive aux mêmes conclusions. Nous devons toutefois distinguer les contradictions logiques (CL), définies par l'expérimentateur ou le professeur, des CO observées par l'élève. Donnons deux exemples extraits de l'expérimentation portant sur le problème SEC (cf. paragraphe 1) et permettant de comprendre la distinction entre CO et CL.

L'élève que nous appelons VIR, est en classe de troisième ; elle est âgé de quatorze ans et sept mois. Au cours de sa recherche l'élève mesure sur le dessin (cf. figure 3) les segments représentant les arêtes du cube. Certains mesurent 10 cm, d'autres 5 cm. Elle est très surprise.

VIR - *Normalement là, c'est 10 cm puisque c'est un carré et là ils ont fait 5 cm !*

Elle poursuit :

VIR - *Je vais dessiner à partir de ce cube (la maquette en carton) et pas à partir de ça (le dessin en perspective).*

Ce rejet explicite du dessin caractérise une CO.

Mais de notre point de vue la perspective cavalière n'est pas une représentation logiquement contradictoire. Il n'y a donc pas de CL. Pourtant en ajoutant à la perspective cavalière une contrainte telle que "le dessin doit conserver les longueurs", alors nous avons une CL. En définitive le processus suivi par l'élève aboutit à une CO, et alors l'expérimentateur peut analyser la situation en faisant ou en ne faisant pas intervenir une CL.

Dans un deuxième exemple la CL a été programmée a priori par l'expérimentateur, mais n'a donné lieu à aucune CO. Il s'agit dans ce cas de la recherche de PAT, qui est en classe de troisième et qui a quatorze ans et 5 mois. Au bout d'une demi-heure de travail PAT a trouvé, comme dessins des deux sections demandées, deux triangles identiques aux triangles ABC des deux dessins en perspective cavalière (figure 3 et 4) ; ses deux sections sont donc différentes. Ce qui est logiquement contradictoire avec les données du problème, puisque ces sections différentes doivent être les mêmes. L'expérimentateur essaie d'obtenir une CO de la part de l'élève fondée sur cette CL. Il n'obtient pas cette CO ; pour l'élève les triangles sont pareils, ils n'ont "pas la même forme, mais le même volume"(sic).

L'expérimentateur insiste.

***Expérimentateur** - Y a quelque chose qui colle pas.*

Mais PAT l'interroge peu convaincu.

***PAR** - Et je dois trouver ce qui colle pas ?*

Ajoutons encore que, d'une manière générale, la recherche et l'analyse des CO permettent de mieux comprendre les démarches de nos élèves. Le travail mené en collaboration avec F. Bonafé et publié par Hermès en 1987 illustre cette dernière affirmation.

4 EMPIRISME ET DEMONSTRATION

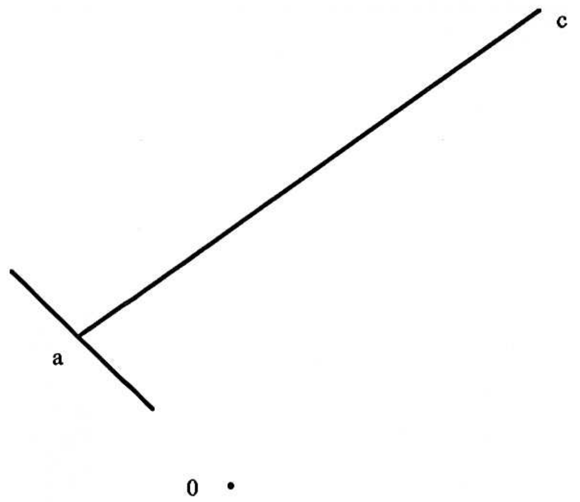
J. Naudeillo a rendu compte du travail d'un élève cherchant le problème SEC que nous avons présenté dans le 1er paragraphe (cf. Groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie 1984). Nous allons analyser le travail de cet élève que nous appelons STE, qui est âgé de treize ans et un mois, car il est à la fois clair, significatif et représentatif. Nous examinons ensuite des résultats plus globaux portant sur les problèmes FIL et SEC.

a - Les minutes 1' 5' 7' 8' 9' 10' 12' 14' 16' 18' 19' 22' désignent approximativement le temps écoulé entre le début de la recherche et le moment que nous décrivons.

1' - L'élève trace à la règle sur le dessin qui lui a été donné (figure 3) les côtés du triangle ABC. Puis il prend en main le cube en carton. Il observe alternativement, en faisant des aller-retours, le dessin (figure 3) et la maquette (cube en carton). Il se sert du pouce et de l'index pour comparer la distance de A au sommet sur le dessin et sur la maquette. Il relit l'énoncé en comparant maquette et carton.

Le travail de cet élève commence donc par une période d'observation portant sur les éléments matériels à sa disposition : dessin et maquette.

5' - STE demande une équerre ; cette équerre graduée lui servira aussi de double décimètre. Sur une feuille blanche il place deux points 0 et c à 8 cm l'un de l'autre. Puis, avec l'équerre, sur la perpendiculaire à 0c, il trace un petit segment et un point a situé à 3 cm de 0. Il trace enfin le segment ac. Il place les lettres a et c sur son dessin. Il a ainsi réalisé la figure 6.



STE vient donc d'obtenir en vraie grandeur le côté AC de la section cherchée.

Figure 6

7' - L'élève place alors un côté de son équerre le long de a0 sur la figure 6, le point c et l'équerre étant de part et d'autre de a0. Il a l'intention de construire un angle droit a0b avec un point b situé à 8 cm de 0. Mais le point b sort des limites de sa feuille de dessin. Il abandonne donc cette construction qui devait lui permettre de reconstituer la face du cube portant le segment AB en vraie grandeur.

L'élève ne se rend pas compte que la perspective cavalière qui est à sa disposition (figure 3) lui fourni en vraie grandeur la face portant AB. Il ne se rend pas compte, non plus, que la figure 6 lui fournit aussi la vraie grandeur du côté AB, égal à AC. STE est très actif ; il travaille avec soin, rapidement, manipulant sans aucune hésitation les instruments.

8' - *STE - Je vais recommencer pareil que la figure 6.*

Il trace alors un segment horizontal a0 de 3 cm. Il trace ensuite, un moyen de l'équerre un petit segment orthogonal à a0 et place sur ce segment le point b situé à 8 cm de 0. Il écrit les lettres a et c sur son dessin. Il a ainsi réalisé la figure 7.

9' - L'élève mesure alors ab sur la figure 7.

STE - Alors ça fait 8,5 cm.

Il note ce nombre à côté du segment ab sur la figure 7 ; puis mesure ac sur la fi gure 6 et marque 8,5 à côté de ce segment tout en commentant.

STE - ... pareil, oui.

L'expérimentateur ne sait pas si l'élève vient juste de constater l'égalité AB = AC ou s'il fait une vérification de cette égalité. Dans les deux cas, l'observation joue un rôle important et aucun raisonnement n'a été explicité au préalable.

10' - *STE - Et puis, je vais faire c maintenant.*

Il commence alors la figure 8. Il trace un segment 0c de 8 cm, puis à l'équerre un morceau de perpendiculaire sur lequel il place le point b. N'étant pas satisfait de sa mesure, il déplace légèrement ce dernier point et obtient b' à 8 cm de 0. Il mesure cb' trouve 11,5 cm et note ce dernier résultat à côté de b'c sur la figure 8. Il essaie de dessiner avec une précision de l'ordre du millimètre. Son triangle a la même inclinaison que la figure 3.

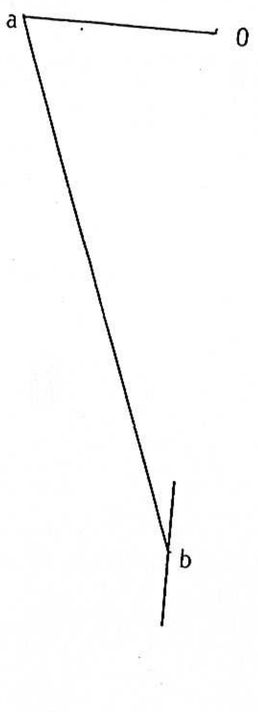


Figure 7

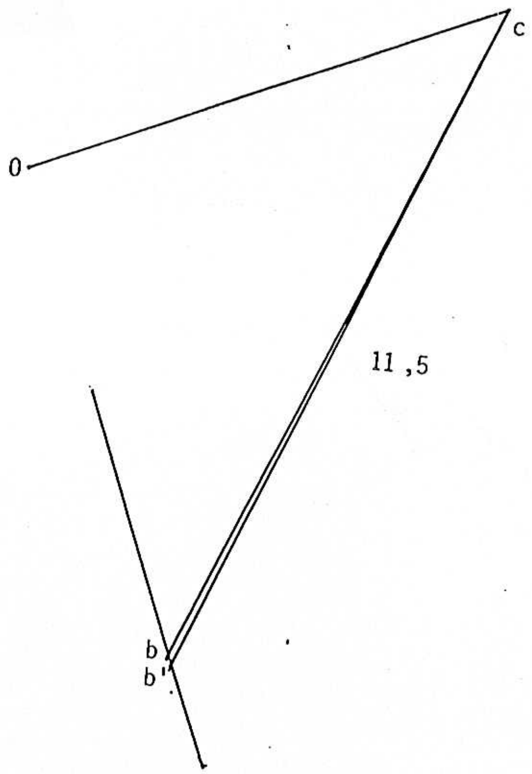


Figure 8

12' - *STE - Maintenant je vais essayer de les rassembler.*

Il construit alors la section ABC en vraie grandeur. Pour cela il trace d'abord le segment AB de 8,5 cm. Puis en utilisant le compas avec successivement des ouvertures de 11,5 cm et de 8,5 cm, il trace deux arcs de cercles qui se coupent en C. La figure 9 reproduit son dessin à l'échelle 1/2. Son segment AB a sur la figure 9 la même inclinaison que sur la figure 3. Il affirme alors, avec raison, avoir obtenu la section cherchée.

Remarquons toutefois que le tracé du triangle ABC nécessite deux écartements de compas 11,5 puis 8,5, alors qu'un seul suffit (8,5) si on commence par tracer le segment AC.

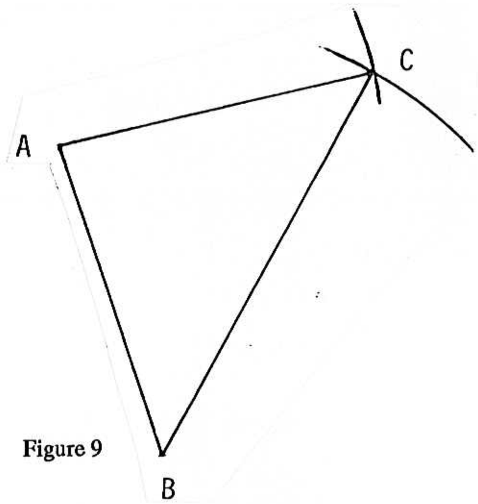


Figure 9

14' - L'expérimentateur lui propose alors la deuxième perspective cavalière (figure 4) en lui rappelant qu'il s'agit du même énoncé. L'élève garde à sa disposition ses réalisations précédentes.

- *STE* - *Bon je vais recommencer.*

Il trace le triangle ABC sur la feuille distribuée (figure 4). Sur une feuille blanche il dessine le segment a'0' de 3 cm ; puis place le point b' à 8 cm de 0', la droite b',0' étant perpendiculaire à a'0'. Il obtient ainsi a'b' un premier côté de la section cherchée. Cela lui donne la figure 10.

Il réalise donc une construction parfaitement inutile puisque cette longueur a'b' est déjà bien déterminée grâce aux figures 3,5 ou 7. L'élève agit donc sans grande économie.

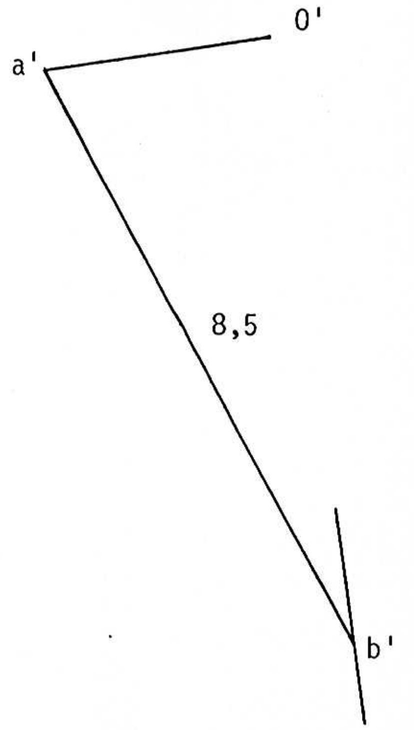


Figure 10

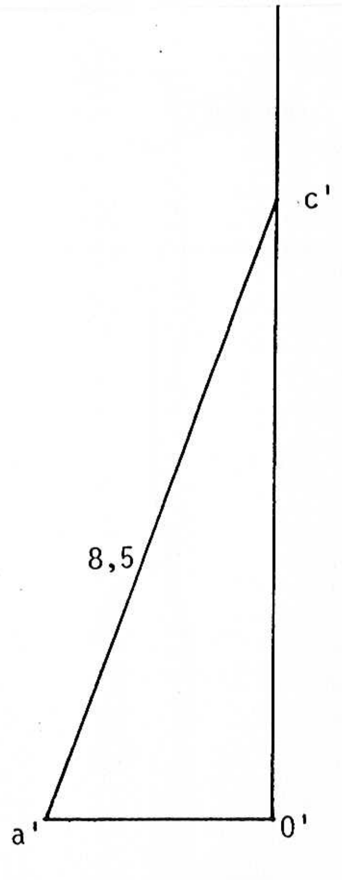


Figure 11

16' - ***STE** - Maintenant je vais tracer AC.*

Il trace le segment a'O' de 3 cm, puis sur la perpendiculaire à a'O' il place le point c' à 8 cm de O'. Il trace enfin le segment a'c' et il désigne ses extrémités au moyen des lettres A et C. Il a ainsi obtenu la figure 11. Il note 8,5 à côté des segments a'b' et a'c' des figures 10 et 11, désignant ainsi les mesures de ces segments.

***Expérimentateur** - Tu as mesuré en même temps ? Je n'ai pas bien vu.*

***STE** - Non, je n'ai pas mesuré, c'est pas la peine.*

> ***Expérimentateur*** *- Précise-moi, je n'ai pas bien vu, tu as mis 8,5 sans mesurer.*
>
> ***STE*** *- Parce que j'ai déjà mesuré, c'est là (il montre son travail correspondant à la figure 3) ; c'est les mêmes mesures.*

Aux minutes 14' et 16' il a recommencé des dessins inutiles. Un raisonnement préalable lui aurait évité ce travail ; il ne l'a pas fait. Pourtant, après ces deux dessins (figures 10 et 11) il ne mesure plus. Il se rend compte que le premier problème lui fournit ces mesures. Les observables, surabondants en toute logique, sont nécessaires à l'élève. Mais, on voit aussi petit à petit arriver des raisonnements (implicites), une économie d'actions. Est-ce une démonstration qui s'ébauche ?

18' - L'élève réalise alors la construction de b'c' au moyen de la figure 12 (à l'échelle 1/2). Il écrit 11'5 à côté de b'c'. Puis vérifie que le segment b'c' mesure bien 11'5 cm.

Il attribue donc au segment b'c' une mesure de 11,5 cm par simple déduction ; le raisonnement est là, toujours implicite. Pourtant il vérifie ; les observables ne sont donc pas négligés.

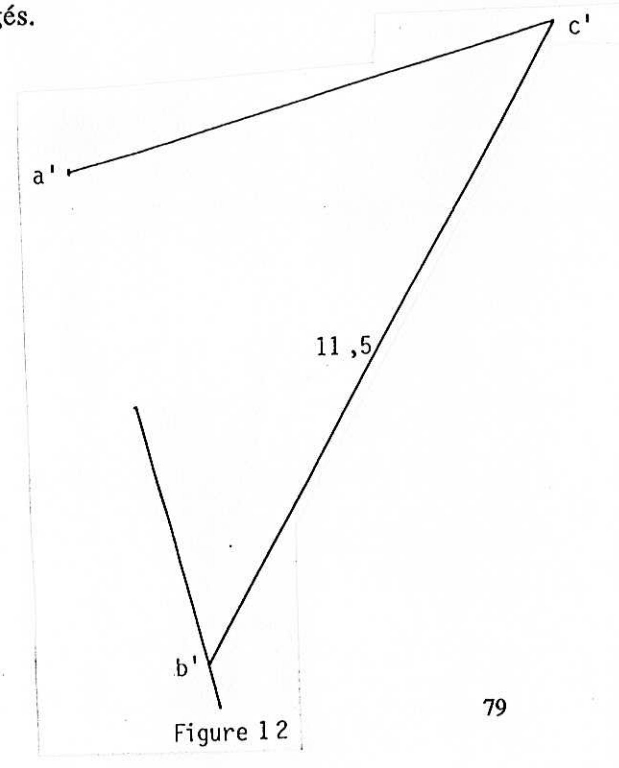


Figure 12

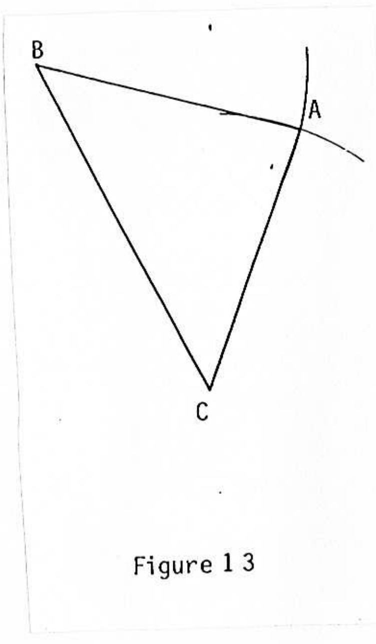


Figure 13

19' - L'élève construit au compas la section ABC en vraie grandeur. Pour cela, il trace d'abord le segment BC de 11,5 cm. Puis avec une seule ouverture de 8,5 cm et en deux coups de compas il obtient le point A. La figure 13 reproduit son travail à l'échelle 1/2. Il a terminé avec succès.

Il a donc un tracé plus économique si on le compare à celui de la minute 12'

22' - L'expérimentateur lui demande de rassembler les deux résultats. L'élève trie les feuilles en commentant.

> ***STE*** *- Alors ça c'est le premier et ça c'est le second.*
>
> ***Expérimentateur*** *- Tu n'as pas de commentaire à faire sur les deux problèmes ?*

Aucune remarque de la part de l'élève. Manifestement le rapprochement entre les deux situations n'a pas été fait. L'expérimentateur décide d'insister.

> ***Expérimentateur*** *- Tu m'as dit en faisant tes tracés dans le deuxième cas que ce n'était pas la peine de mesurer ; ça m'intrigue.*
>
> ***STE*** *- Parce que j'avais mesuré dans le premier exercice et c'étaient les mêmes mesures.*

L'expérimentateur rapproche les deux feuilles distribuées et soudain :

> ***STE*** *- Hé, c'est le même, c'est le même.*
>
> ***Expérimentateur*** *- Comment ?*
>
> ***STE*** *- C'est le même exercice, mais sur un autre point ; au lieu d'être celui-là (il parle du sommet du cube associé aux trois points ABC dans le cas de la figure 3) c'est sur celui là (il parle de l'autre sommet correspondant à la figure 4).*
>
> ***Expérimentateur*** *- Tu me dis que c'est le même exercice, essaie de préciser.*

***STE** - Ben, il faut faire la même chose, mais seulement, c'est pas sur le même coin que le dessin est fait..*
***Expérimentateur** - Tu as quand même fait deux tracés.*

***STE** - Oui, parce que je ne m'en étais pas rendu compte.*

***Expérimentateur** - Mais alors qu'est ce que tu peux dire, finalement parce que tu as deux tracés.*

***STE** - Ben c'est le même triangle.*

Il prend alors les deux feuilles (figures 9 et 13) et par transparence à la lumière du jour, il superpose ses deux triangles.

L'ensemble du travail de STE met en évidence l'importance des observables . Il dessine, il mesure, il observe tout au long de sa recherche ; dans les dernières secondes il vérifie encore par transparence, malgré ses certitudes, l'égalité des deux triangles (figure 9 et 13). Les premiers raisonnements (implicites) permettant une économie d'action n'apparaissent nettement qu'à la minute 16' (il ne mesure plus). A la minute 19' son tracé est plus économique, à la minute 22' poussé par l'expérimentateur, il reconnait par déduction l'égalité des deux sections. La dernière discussion (minute 22') montre combien déductions et raisonnements sont lents à se mettre en place. En fin de parcours, nous avons les éléments d'une démonstration puisque les deux sections sont reconnues comme identiques et puisque les côtés sont déterminés en vraie grandeur. Pourtant aucune démonstration n'est explicitée.

Les travaux d'élèves que nous avons examinés, comme celui de STE, nous font penser que l'apprentissage de la démontration doit donner une grande place aux observables et peut s'appuyer sur l'intérêt du raisonnement permettant des économies d'actions.

b - Nous allons examiner les élèves qui réussissent à résoudre le problème SEC. Il y en a 37 sur un total de 82 élèves.

Nous disons qu'un élève a réussi s'il obtient, comme section dans le cas du premier dessin en perspective fourni (figure 3), un triangle solution correcte avec une bonne approximation (moins 3 mm d'erreur pour un côté). Nous distinguons quatre procédures de réussite désignées sommairement par les mots : Maquette, Faces, Pythagore, Trigonométrie. Dans la procédure-maquette, pour obtenir les côtés du triangle, l'élève a pris des mesures directement sur la maquette. Dans la procédure-faces pour obtenir les côtés du triangle, l'élève a effectué des mesures sur les faces du cube dessinées en vraie grandeur. Dans la procédure-Pythagore pour obtenir les côtés du triangle, l'élève les a calculé en utilisant le théorème de Pythagore. Dans la procédure-trigonométrie pour obtenir les côtés du triangle, l'élève a développé des calculs trigonométriques.

Le tableau 14 donne pour chaque classe, en colonne, le nombre d'élèves ayant réussi et la procédure avec laquelle il a réussi.

SEC	5	4	3	2	1	T	D
MAQUETTE	1	3		3	3		
FACES	1	2	2		1		
PYTHAGORE					3	5	8
TRIGONOMETRIE						1	3
TOTAL	2/10	5/11	2/11	3/13	7/13	6/11	11/13
%	20	45	20	25	55	55	85
	25 %				65 %		

Tableau 14

Il ressort de ce tableau que les réussites au problème SEC en 5ème, 4ème, 3ème, 2nde sont obtenues uniquement par des mesures directes sur la maquette ou sur les dessins des faces en vraie grandeur.

Les réussites en terminale et Deug sont obtenues uniquement par des calculs.

Les performances de notre classe de quatrième ne sont pas très différentes de celles de terminales.

La prégnance des observables (mesure directe) est encore forte jusqu'à notre classe de première.

Dans notre enseignement des mathématiques quelle attitude devons nous avoir face à cette dichotomie entre mesure et calcul, et quelle importance devons nous donner aux observables de l'élève ?

c - Nous allons maintenant examiner les élèves qui réussissent à résoudre le problème FIL. Il y en a 31 sur un total de 69 élèves. Examinons tout d'abord les travaux de deux élèves appelés respectivement CIR (élève de quatrième âgé de 14 ans et 4 mois) et PAS (élève de seconde âgé de 16 ans et 2 mois). CIR réalise avec des instruments de dessin la figure 15. C'est une vue de dessus de la salle de classe.

Il a placé le fil au milieu I de la trajectoire. Il mesure au double décimètre les distances de I aux quatre côtés du rectangle et explicite sa réponse : 2,5 m, 2,5 m, 1,7 m, 5,3 m.

Nous disons que CIR a trouvé la solution du problème approximativement au moyen de mesures au double décimètre effectuées sur un dessin utilisant ses instruments de dessins.

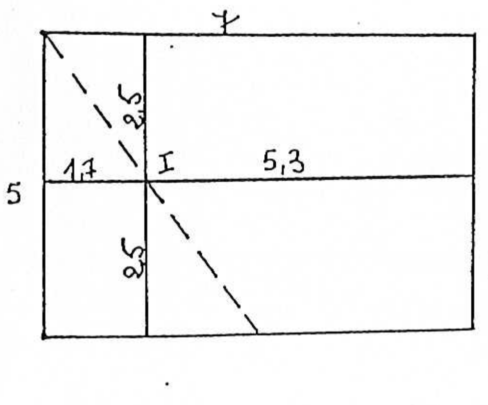


Figure 15

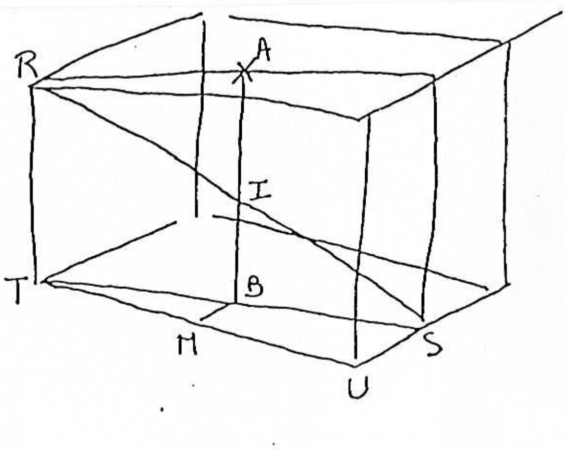


Figure 16

PAS réalise une perspective "axonométrique" que reproduit la figure 16. Il explique que le fil AB passe par le milieu I de la trajectoire RS ; donc B est au milieu de TS ; B se projette en M milieu de TU et BM est la moitié du SU. Donc la distance du fil au premier mur est égal à BM = 2,5/2 = 1,25 m ; pour le mur opposé, il obtient 1,25 + 2,50 = 3,75 m. La distance aux deux murs est donc pour lui de 3,50 m.

Nous disons que PAS a trouvé la solution exacte du problème au moyen d'un raisonnement accompagnant un dessin et non en lisant une mesure effectuée au double décimètre.

Nous pouvons nettement distinguer parmi les 31 élèves qui ont trouvé la solution ceux qui comme CIR ont mesuré et ceux qui comme PAS ont raisonné.

Nous distinguons donc deux procédures de réussite :

- la bonne réponse est obtenue par des mesures
- la bonne réponse est obtenue par un raisonnement et non par des mesures.

Le tableau 17 donne pour chaque classe, en colonne, le nombre d'élèves ayant réussi et la procédure avec laquelle il a réussi.

FIL	6	5	4	3	2	1	T
Par des mesures	2	2	2	2	0	0	0
Par raisonnement et non par mesure	3	2	1	3	6	3	4
TOTAL	5/9	4/10	3/10	5/10	7/10	3/12	4/8
%	55	40	30	50	70	25	50
	45%				45%		

Tableau 17

Un élève n'a pas été classé dans ce tableau car il a obtenu une solution au moyen d'un calcul approché.

Il ressort de ce tableau que les élèves qui ont résolu le problème FIL se partagent nettement en deux catégories distinctes. Ceux qui obtiennent la réponse en effectuant des mesures et ceux qui raisonnent sans mesurer. Nos élèves du second cycle n'utilisent que le raisonnement pour donner une réponse. Il semble que l'abandon dans le second cycle de la procédure-mesure empêche une amélioration du score par rapport au premier cycle (le pourcentage de réussite reste 45 %).

Aussi retrouvons-nous une question analogue à celle concluant l'analyse de la réussite dans le problème SEC. Dans notre enseignement des mathématiques quelle attitude devons-nous avoir face à cette dichotomie entre mesure et raisonnement, et quelle importance devons-nous donner aux observables de l'élève ?

CONCLUSION

Nous prenons comme définition d'un *observable* celle de J. Piaget (1975) : "un observable est ce que l'expérience permet de constater par une lecture immédiate des faits donnés eux-mêmes".

Les démarches expérimentales, les vérifications et les contradictions observées sont des processus faisant appel de façon prépondérante à des observables de l'élève.

Dans son étude des processus de preuve N. Balacheff (1988) introduit quatre type de preuve : empirisme naïf, l'expérience cruciale, l'exemple générique, l'expérience mentale. Il y est question de vérification, d'expérimentation, d'objet, d'action. Les observables des élèves y jouent donc un rôle indéniable.

Les observables prépondérant dans les démarches de pensée de nos élèves n'ont pourtant pas un statut très clair dans notre enseignement. La démarche expérimentale par exemple n'est quasiment jamais présentée à nos élèves.

La principale difficulté de la géométrie de l'espace provient à notre avis du manque d'observables fiables. Pour y pallier nous estimons indispensable l'apprentissage d'un dessin technique. Différentes études faites à ce jour nous amènent à penser *que la perspective cavalière* est nécessaire à la maîtrise de l'espace dans le cadre d'un enseignement de masse (cf. G. Audibert, B. Keita 1988).

Empirisme et géométrie de l'espace
chez les élèves ayant entre 11 et 18 ans

Une technique de dessin, comme la perspective cavalière permet un apprentissage de la géométrie de l'espace où observation active et raisonnement déductif vont interagir de façon fructueuse. Le dessin ne pouvant pas être en correspondance bijective avec l'objet, le raisonnement devient nécessaire. La démonstration est motivée par la recherche d'une économie d'action. Elle n'est plus un simple artifice magistral mais une nécessité. Nous devons toutefois respecter la laborieuse élaboration de la démonstration à partir des observables ; notre paragraphe 4, Empirisme et démonstration, a mis en évidence le rôle des observables dans la lente élaboration du raisonnement.

Le dosage entre observation et raisonnement peut varier comme le montrent les trois problèmes I, II et II énoncés ci-après.

I Trois sommets d'un cube constituent un triangle. Quelle est la nature de ce triangle, est-il rectangle, isocèle, équilatéral ou autre ?

II En quels points d'une diagonale du cube se projettent orthogonalement tous les sommets de ce même cube ?

III Peut-on couper un cube par un plan de telle sorte que cette section soit un pentagone régulier ?

La place du raisonnement progresse d'un problème au suivant. On peut répondre partiellement au problème I, accessible à des élèves de cinquième, par la lecture directe du dessin. Le problème II accessible à des élèves de seconde, nécessite observables et raisonnements. Le raisonnement pourra seul justifier la solution du problème III que nous réservons aux élèves de terminale.

REFERENCES

AUDIBERT G. 1982 -
Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane, volumes 1 et 2, nouvelle édition : publication de l'APMEP 1984 n° 56 (831 pages).

AUDIBERT G. 1985 -
Représentation de l'espace et empirisme dans le problème FIL. Publication IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier (79 pages).

AUDIBERT G. - BONAFE F. 1987 -
Apprentissage de la perspective cavalière dans Rabardel P. , Weill-Fassina A. *Le dessin technique. Apprentissage, utilisation, évolution.* Paris-Londres-Lausanne, Hermes, pages 139 à 147.

AUDIBERT G. - KEITA B. 1988
La perspective cavalière et la représentation de l'espace. Dans *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques.* Actes du colloque de Sèvres Mai 1987. Editions La Pensée Sauvage - Grenoble.

BALACHEFF N. - 1988
Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège. Thèse de doctorat es Sciences. Université J. Fourier Institut National Polytechnique. Grenoble.

CHEVALIER A. - 1984
Le problème QAT : symétrie, vérification, algorithme de construction, la pratique de l'élève. Edition IREM-USTL - Place E. Bataillon Montpellier (442 pages).

Groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie - 1984
Intégrale des protocoles du problème SEC (à consulter sur place à l'IREM de Montpellier Place E. Bataillon - 963 pages).

MORIN C. - 1986
Etude du comportement d'élèves du second degré devant un problème lié à la proportionnalité. IREM - USTL, Place E. Bataillon Montpellier (78 pages).

PIAGET J. - 1975
L'équilibration des structures cognitives, problème central du développement - Paris - PUF.