COMMENT UNE CLASSE DE QUATRIEME A PRIS CONSCIENCE DE CE QU'EST UNE DEMARCHE DE DEMONSTRATION

M-A EGRET et R. DUVAL

Specific tasks about proof were given, after a research work on proof problems in geometry. Several steps in becoming aware of cognitive operations required to do proofs were observed.
Production of representation about deep structure and proof discourse emphasize the important evolution of 13-14 old students.

Dès la classe de quatrième, une des questions posées dans les exercices proposés aux élèves est: " démontrer que...". De nombreux élèves tenteront, en vain, de répondre à cette question et finiront par trouver les exercices de géométrie difficiles et inintéressants. Mais l'apprentissage de la démonstration qu'ils reçoivent en collège leur permet-il de prendre conscience de ce qu'est une démarche de démonstration ?
Amenés à réfléchir à l'activité de démonstration, à la demande du groupe Intelligence Artificielle de l'IREM de Strasbourg, nous avons fait une expérience avec des élèves de quatrième que nous relatons ci-dessous.
Cette expérience a reposé sur les quatre principes de l'article précédent (R. Duval et M.A Egret) que nous rappelons:

1. Représenter la structure sous-jacente à une organisation déductive des énoncés.
2. Articuler la représentation de la structure sous-jacente et l'expression dans le langage naturel
3. Séparer strictement les tâches propres à une démarche de démonstration et celles liées à une situation de résolution de problèmes.
4. Ne donner aux représentations de la structure profonde qu'une fonction d'objet transitionnel.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p.41-64)) IREM de Strasbourg

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Nous avons ainsi dégagé différents seuils que les élèves doivent franchir pour produire un texte dans lequel se reflète l'organisation profonde de la démonstration. Nous proposons de présenter ces seuils en les illustrant par des textes d'élèves.

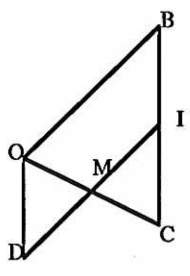
Nous proposons aussi de cerner l'évolution de la classe au travers de quelques textes d'élèves et d'un tableau de résultats pour répondre à la question suivante : un tel enseignement a-t-il permis de supprimer l'incompréhension ou le désintérêt ?

I Description de l 'expérience.

L'expérience concernant l'organisation déductive a eu lieu pendant l'année 87-88 dans une classe de 4° de collège. Elle s'est déroulée pendant une dizaine de séances bihebdomadaires durant le 2° trimestre. Au cours de cette période, les élèves ont été sollicités pour résoudre une dizaine d'exercices nécessitant des démonstrations(1). La classe, de niveau relativement homogène, c'est-à-dire sans élève en réelle difficulté scolaire, comprenait 27 élèves.

L'expérience proprement dite a commencé à la suite d'un exercice qui exigeait la justification théorique d'un résultat. Dans cet exercice, nous avions repris une proposition de lieu géométrique sur lequel les élèves avaient travaillé auparavant et nous avons formulé l'énoncé suivant :

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC]?



Après un temps de recherche individuelle, une mise en commun des idées trouvées fut faite : il fut proposé de remarquer que OICD était un parallélogramme. Les élèves ayant rédigé au brouillon leur réponse, deux formulations d'élèves avaient ensuite été sélectionnées et écrites au tableau:

(1) *Les numéros des exercices présentés dans la suite du texte correspondent à l'ordre chronologique .*

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Elève **MB** : "OICD est un *parallélogramme parce que* ses *diagonales* [OC] et [ID] *se coupent en leur milieu*".

Elève **SM**: "*Si* M est le milieu de [ID] et *si* OICD est un *parallélogramme alors* M est le milieu de [OC] *parce que les diagonales* d'un parallélogramme *se coupent en leur milieu* ".

C'est alors que nous nous sommes heurtés à l'impossibilité de faire prendre conscience aux élèves de la différence de sens de ces deux phrases. Ceux-ci ne retenaient que la présence, dans le même ordre, des propositions et d'expressions semblables: "OICD est un paralllélogramme", "parce que ...diagonales ...se coupent en leur milieu". Et c'est en vain que nous cherchions à attirer leur attention sur le "si " et à discuter de sa signification. Devant l'échec de toute explication, nous leur avons proposé de représenter ces deux phrases sous forme d'étiquettes reliées par des flèches: ce fut leur première rencontre avec une représentation par réseau. *La réaction des élèves fut alors étonnante : pour la première phrase, la moitié proposait un sens de flèche correct, les 2/3 de l'autre moitié se trompaient de sens, les autres proposaient de mettre une flèche dans les deux sens!* Pour la deuxième phrase (plus complexe), aucun élève n'arriva à proposer un réseau correct et l'élève **SM** elle-même nous dit: " je me rends compte que je n'avais pas compris ce que j'avais écrit". Après les explications, nous avons demandé aux élèves de rédiger la solution de l'exercice : à ce moment -là (début janvier 88), seuls *deux* élèves fournirent une rédaction où la structure profonde de la démonstration était déjà en place avant même le travail sur les représentations de la démonstration, par exemple:

CG : " *1 DIBO est un parallélogramme* donc : - *(DO) // (IB) // (BC)* (car *C, I et B sont alignés*)

- *DO = IB =CI* (car *I est le milieu de [CB]*)

2 Si *(DO) // (CI) et*

si *DO = CI alors DOIC est un parallélogramme* (voir *propriété n° 2 du parallélogramme)*

3 Donc *DOIC est un parallélogramme* (voir *1 et 2*) *et ses diagonales se coupent en leur milieu* (voir *théorème n°1*) . Or *ses diagonales sont PRECISEMENT [OC] et [ID] qui se coupent en leur milieu.* Voilà la réponse à la question .

propriété n°2 : si un quadrilatère a deux côtés opposés égaux et parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

théorème n°1: les diagonales d'un paralléogramme se coupent en leur milieu".

Et *tous les* autres élèves furent au moins convaincus que les deux phrases proposées ne pouvaient pas avoir le même sens.

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

C'est après cette séance que nous avons adopté explicitement et systématiquement la procédure suivante pour tous les exercices de démonstration cherchés en classe :

1) Phase heuristique:
   - recherche de la solution ou de son idée.
   - synthèse des "idées de solution". Les élèves ont donc, à la fin de cette phase, une "idée" d'une figure extraite qui permet de trouver le (ou les) théorème (s) à appliquer.

2) Phase d'organisation déductive :
   - élaboration individuelle (facultative) d'un réseau organisant les hypothèses et les théorèmes utilisés. Quelques exemples de réseau construits par des élèves sont joints en annexe 2 (p. 63)
   - rédaction d'un texte.

Durant les premières séances, un temps aussi important fut accordé à la recherche de la solution qu'à l'élaboration individuelle d'un réseau. Il faut noter que nous n'avons pas vu des élèves proposer des réseaux pendant la première phase, comme au cours de la deuxième phase.
Pour les exercices cherchés "en temps limité" (comme l'exercice 5), les élèves pouvaient accéder à leurs documents où étaient écrits les différents théorèmes connus et des heuristiques rencontrées dans les exercices traités jusqu'alors.

La représentation par réseau étant un moyen personnel d'appropriation de l'organisation déductive, nous n'avons pas dès le départ proposé un "réseau-type". Un dialogue entre l'enseignant qui faisait des remarques sur le réseau proposé et chaque élève, s'est installé. C'est ainsi que nous avons pu observer différentes représentations (du "nuage" à "l'organigramme"). Bien sûr, nous avons proposé à l'ensemble de la classe les idées intéressantes relevées dans des réseaux particuliers.
La représentation par réseau s'est révélée alors un outil de contrôle extrêmement efficace, pour les élèves comme pour nous, de la compréhension des démonstrations proposées. Chacun, élève comme enseignant, peut voir immédiatement les erreurs concernant le fonctionnement d'une démonstration: absence de règles de substitution, flèche reliant deux énoncés de même statut, flèches aboutissant aux hypothèses données dans l'énoncé du problème, énoncé-résultat n'étant pas le point terminal du réseau.

II Les différents seuils de prise de conscience de la structure profonde de la démonstration .

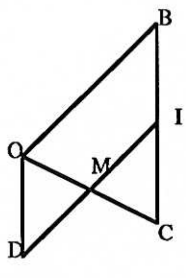
Au fur et à mesure de l'expérimentation, nous avons vu les élèves passer par différents seuils reflétant leur prise de conscience progressive de la structure propre à l'organisation déductive des énoncés. Il faut remarquer que les cinq premiers seuils ne sont pas franchis par les élèves dans le même ordre ni, bien sûr, à la même vitesse.

Premier seuil : Trouver *toutes* les conditions qu'il est nécessaire de prendre en compte pour pouvoir appliquer correctement une règle de substitution.
En effet, il est apparu que la plupart des élèves ayant à leur disposition le bon théorème, n'étaient pas en mesure de l'appliquer correctement. Il y a une difficulté réelle à bien discerner le statut des conditions dans l'énoncé même du théorème.

La difficulté que représente le franchissement de ce seuil est constatée, dans les textes ou réseaux proposés, de trois manières différentes :

a) **la conclusion sert d'hypothèse :**
rappelons la réponse de MB dans l'exercice 1:

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point
tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le
milieu de [OC]?



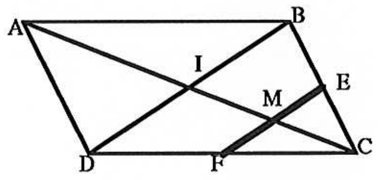
MB : *"OICD est un parallélogramme parce que ses diagonales [OC] et [ID] se coupent en leur milieu M".*

b) Une seule condition est proposée alors que la règle de substitution en demande deux :

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

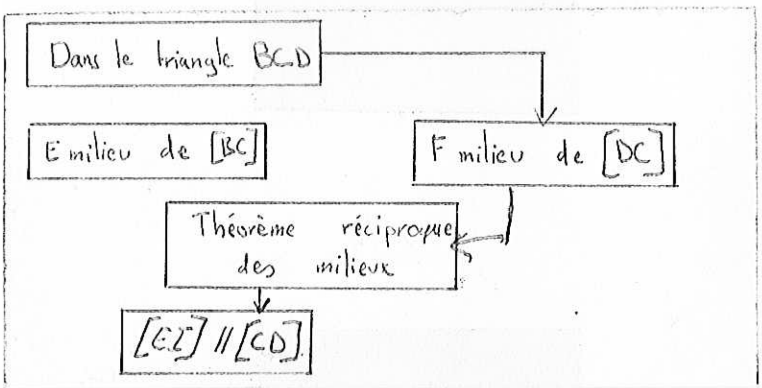
Voici une partie de la réponse proposée pour l'exercice suivant :

Exercice 5:
ABCD est un parallélogramme.
I est le point d'intersection des diagonales, E est le milieu de [CB]et F celui de [CD].
Les droites (AC) et (EF) se coupent en M. Montrer que M est le milieu de [EF].



Il n'y a pas eu de mise en commun dans cet exercice cherché en temps limité.

LS : *"Dans le triangle BCD, E est le milieu de [BC]*, donc *d'après le théorème des milieux (EI) // (CD)"*



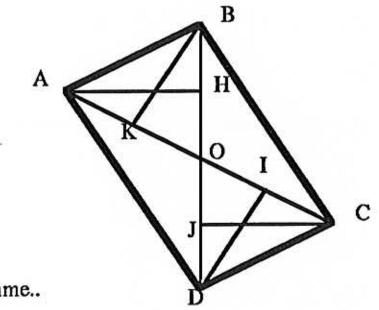
Ici, l'élève oublie la deuxième condition "I milieu de [BD]" qui n'était pas directement exprimée dans l'énoncé (on précisait que I est le centre de ABCD).

c) Le théorème utilisé comme règle de substitution est confondu avec le théorème réciproque et ceci parce que les conditions d'entrée du théorème ne sont pas bien vues.

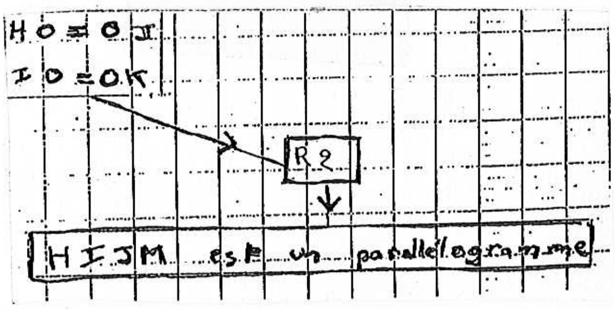
Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

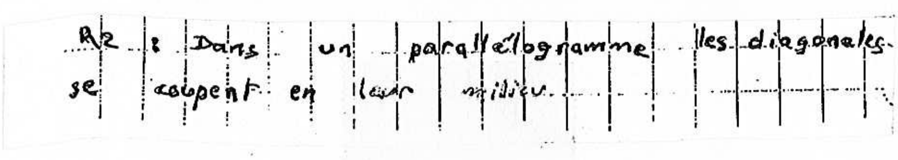
Voici une partie de la réponse proposée à l'exercice 6 :

Exercice 6:
ABCD est un parallélogramme de centre O.
H,I,J,K sont les points d'intersec tion des droites (BD), (AC), (BD) et (AC) et des perpendiculaires menées par A,B,C,D à (BD), (AC), (BD) et (AC).
Montrer que HIJK est un parallélogramme..



MB *"Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu,* donc si *IO=OK et* si *HO=OJ* alors *HJ et IK se coupent en leur milieu O,* donc *HIJK est un parallélogramme."*





Cette confusion est très fréquente pour ce théorème.

Deuxième seuil : Comprendre la structure ternaire de L'A.T.S. (Arc Transitif de Substitution).

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Un travail préliminaire a été fait au premier trimestre- application correcte d'un théorème- dans une situation particulière donnée dont, à titre d'exemples, voici deux énoncés :

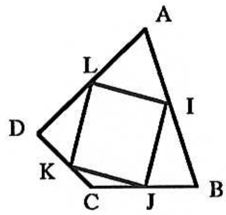
Enoncé: ABCD est un quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux et parallèles. Nature de ABCD?

Enoncé: ABCD est un parallélogramme. Que doit-on savoir en plus pour que ABCD soit un rectangle ?

Mais, dans les premiers textes de démonstration demandés au deuxième trimestre, il est apparu que les théorèmes étaient invoqués sans fonctionner comme règles de substitution ; tous les élèves sauf deux ne les reliaient pas aux hypothèses ou aux données déjà obtenues:

Voici une rédaction proposée pour l'exercice suivant :

Exercice 2:
ABCD est un quadrilatère.
I,J,K,L sont les milieux de AB, BC, CD, et DA.
Démontrer que IJKL est un parallélogramme.



le résultat de la mise en commun a été : "utiliser le théorème des milieux dans deux figures extraites par exemple les triangles ADB et DBC".

GL2 : "Par *le théorème des milieux,* on sait que si *on prend les milieux de deux côtés d'un triangle et qu'on relie ces deux milieux, la droite tracée sera* alors *parallèle au troisième côté. Ce théorème est* applicable car si *on trace AC ou BD, le quadirlatère ABCD sera* alors *divisé en deux triangles (si on trace AC on aura ces deux triangles ABC et ADC). Dans le deuxième cas : ABC et BDC)* donc *IJKL est un parallélogramme."*

On remarquera que ce texte ne mentionne pas les données (I, J, K, L sont les milieux de [AB], [BC], [CD], [DA]) qui permettent de recourir au théorème des milieux dans ce problème. Cette difficulté est perçue immédiatement dans une représentation par réseau puisque des données nécessaires à l'application de ce théorème ne partent aucune flèche vers ce théorème. Certains élèves qui n'ont pas encore franchi ce seuil construisent alors un réseau linéaire qui reflète l'ordre de surface d'un texte de démonstration (cf.annexe 2 p. 64 a).

Troisième seuil : Comprendre que le statut des énoncés est indépendant de leur contenu.

En particulier, il y a la découverte du sens et du rôle d'une hypothèse en mathématique. Ce résultat est d'autant plus intéressant que durant le premier trimestre, nous avions fait un travail pour attirer l'attention des élèves sur ce qu'est une hypothèse en mathématique et sur l'importance de commencer par bien les dégager. Les premières élaborations de réseau ont montré que pour beaucoup ce travail avait été inefficace. Mais après quelques séances, au cours du second trimestre, presque tous découvrirent ce qu'est une hypothèse en même temps que le statut propre des autres énoncés. Non seulement, il n'y eut plus de flèches conduisant à une hypothèse mais nous avons vu apparaître des réseaux en couleur avec une légende qui indiquait la couleur des différents statuts des énoncés (hypothèses, théorèmes, conclusions). Un *quatrième* statut a alors été mis en place par les élèves eux - mêmes: le statut de figure extraite ou *"ce que je vois"* . Il s'agissait de donner un statut aux énoncés de la forme : "je me place dans le triangle BCD" (cf. annexe 2 page 63).

Quatrième seuil : Faire fonctionner plusieurs A.T.S. à la suite.

Nous avons remarqué, au cours de ce travail, la difficulté qu'ont les élèves à respecter la structure ternaire de l'unité de base de la démonstration s'ils doivent l'utiliser plusieurs fois au cours d'une démonstration. Très souvent, le premier arc transitif est complet (conditions, règle de substitution, conclusion) , puis les autres arcs deviennent incomplets.

CLG7: "... on sait que *JL est parallèle à BC.* Donc *JK est parallèle à JL qui est parallèle à BC"*.

Ici, le "donc" introduit le dernier pas mais aucune mention n'est faite des données à partir duquel il est effectué.

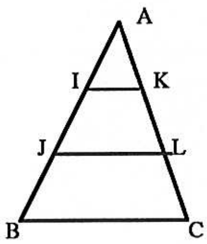
Cinquième seuil : Prise en charge par l'élève de son propre discours.

Ainsi, dans les textes rédigés par les élèves nous trouvons des indicateurs (cf.article précédent) marquant le triple statut des énoncés composant un A.T.S.

Cette organisation ternaire des propositions est :

a) soit exprimée en une seule phrase :

Exercice 7:
ABC est un triangle.
Sur [AB], on place les points I et J tels que: AI=IJ=JB.
Sur [AC], on place les points K et L tels que: AK=KL=LC.
Montrer que les droites (IK), (JL) et (BC) sont parallèles.



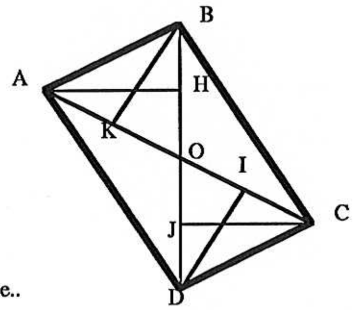
Le résultat de la mise en commun a été : "tracer la droite BK et remarquer que le point d'intersection de cette droite et de JL est le milieu de BK. Se placer alors dans le triangle BKC"

ALA7 : "Comme *AI = IJ = JB,* on sait que *I est le milieu de AJ et* comme *AK = KL = LC,* on sait alors *que K est le milieu de AL ;* on se place alors *dans le triangle AJL, et* par *le théorème des milieux,* on prouve que *IK est parallèle à JL.* On se place maintenant *dans le triangle BIK ; J est le milieu de BI* parce que *BJ = JI = IA ; on apppelle M le point sur JL où il coupe KB ;* comme *JL,* donc *JM* car *J, M et L sont alignés, est parallèle à IK (voir avant)* en utilisant *la réciproque du théorème des milieux,* on prouve donc que *M est le milieu de KB....*"

Il suffit de lire les trois premières lignes de ce texte pour voir la différence avec le texte GL2 donné plus haut, lequel invoquait simplement le théorème des milieux. GL2 correspondait au 2° exercice, ALA7 correspond au 7° exercice: un intervalle de deux mois les sépare.

b) soit exprimée en plusieurs phrases, lesquelles acquièrent alors l'autonomie d'un paragraphe :

Exercice 6:
ABCD est un parallélogramme de centre O.
H,I,J,K sont les points d'intersec tion des droites (BD), (AC), (BD) et (AC) et des perpendiculaires menées par A,B,C,D à (BD), (AC), (BD) et (AC).
Montrer que HIJK est un parallélogramme..



GL6 : " Si *j'arrive à démontrer que les diagonales du quadrilatère HIJK se coupent en leur milieu,* alors *HIJK sera un parallélogramme.*

Texte pour démontrer que HIJK est un parallélogramme :

- *Le segment [BK] est de même longueur que le segment [DI] . Ils sont* également *parallèles* car *lorsque deux droites sont perpendiculaires à une même droite elles sont parallèles entre elles. [DK] et [BI] étant perpendiculaires à [AC], [DK] est parallèle à [BI].* (première A.T.S.)
  Dans un quadrilatère, si *deux côtés sont parallèles et de même longueur,* alors *les deux autres côtés sont FORCEMENT parallèles et de même longueur. Ce quadrilatère est* alors *un parallélogramme. Je trace [DI] et [KB] qui sont parallèles et de même longueur.*
  Donc *BKDI est un parallélogramme* (deuxième A.T.S.). *La diagonale [IK] a O pour milieu.*
- *Le segment [AH] est de même longueur que le segment [JC] . Ils sont tous deux parallèles* car *lorsque deux droites sont perpendiculaires à une même droite elles sont parallèles entre elles. [AH] et [JC] étant perpendiculaires à [BD], [AH] est parallèle à [JC].* (troisième A.T.S.)
  Dans un quadrilatère, si *deux côtés sont parallèles et de même longueur ,* alors *les deux autres côtés sont FORCEMENT parallèles et de même longueur. Ce quadrilatère est* alors *un parallélogramme. Je trace [AJ] et [HC] qui sont parallèles et de même longueur.*
  Donc *AHCJ est un parallélogramme* (quatrième A.T.S.). *La diagonale [HJ] a O pour milieu.*

- Si *un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu* alors *ce quadrilatère est un parallélogramme.*
  [IK] et [HJ] se coupant en leur milieu O, le quadrilatère HIJK est un parallélogramme.
  (cinquième A.T.S.) "

Examinons de plus près le texte de GL : en une phrase, elle explique l'idée de la démonstration ; les conclusions partielles (soulignées dans son texte) qui vont lui permettre d'avoir les conditions nécessaires pour appliquer la règle de substitution annoncée sont présentées dans les deux premiers paragraphes. Elle fait corps avec son texte en s'impliquant personnellement "si j'arrive, je trace..." et en utilisant des adverbes comme "FORCEMENT" pour renforcer la conviction du lecteur (et la sienne) lorsqu'elle a utilisé une règle de substitution. Bien sûr, le texte est encore imparfait puisqu'on remarque l'absence de la règle de substitution qui lui permet d'obtenir les conclusions "O milieu de [IK] et de [KJ] ", mais quels progrès depuis son deuxième texte présenté plus haut (p. 48).

Ces remarques ont été faites à propos de tous les textes d'élèves qui avaient pu franchir ces différents seuils: nous relevons alors fréquemment dans les rédactions des phrases dans lesquelles le rédacteur s'implique personnellement dans son texte et utilise souvent des adverbes de modalité.

Pour appuyer cette affirmation, nous avons proposé aux élèves une tâche de "lecture" : il s'agissait d'écrire, à partir d'un réseau que nous avions nous-mêmes constitué et d'une figure, l'énoncé du problème et la démonstration. C'était la première fois que les élèves se trouvaient confrontés à un réseau complet qu'ils n'avaient pas eux-mêmes construit (cf. annexe 1 p. 61). Les 2/3 de la classe ont alors fourni un texte jugé satisfaisant pour lequel on peut faire les mêmes remarques que pour le texte GL6, dont le texte proposé par AE est un exemple :

AE: " a) *Vous tracez un triangle quelconque SRT. Tel que B est le milieu de ST et A milieu de SR. Et tel que M est le symétrique de T par rapport à A et N le symétrique de R par rapport à B. Démontrez que M, N, S sont alignés.*

b) Si *B est le milieu de [ST],* si *M = S A (T) et* si *MST triangle* en passant par *le théorème des milieux* alors *(MS) // (AB).*
Si *A est le milieu de [SR],* si *N = S B (R)* et si *SRN triangle* en passant par *le théorème des milieux* alors *(NS) // (AB .).*

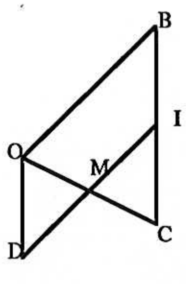
Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Et si *deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles* alors *(MS) // (NS)*. Et comme *(MS) et (NS) ont un point en commun,* donc *M , S, N sont alignés* puisque si *deux droites parallèles ayant un point en commun , elles sont confondues.*

Théorème des milieux : dans un triangle , si on prend le milieu de 2 côtés opposés et que l'on fait passer un segment entre ces deux milieux , alors il sera parallèle au 3° côté."

A titre de comparaison, voici le premier texte écrit par cette même élève pour le premier exercice:

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC]?



le résultat de la mise en commun a été:" remarquer que OICD est un parallélogramme".

AE1: "Si *ODCI est un parallélogramme,* alors *ses diagonales se coupent en leur milieu.*

<u>*Explications :*</u>

ODCI est un parallélogramme car :

IB = et // DO

IB = CI. Ces deux segments sont confondus, donc *CI = et // DO*

<u>*Conclusion:*</u>

M est le milieu de [DI] et de [OC] ."

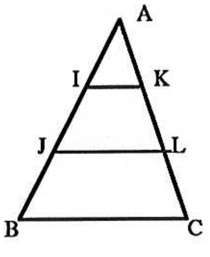
Un sixième seuil:

Avec l'aide de la représentation par réseau, les élèves franchissent les cinq seuils décrits et contrôlent la production de leurs textes en "comprenant ce qu'ils disent".
On remarque alors que la prise de conscience de ce qu'est une démonstration passe par un *sixième* seuil qui est celui de la *rapidité d'écriture des textes* . Pendant la recherche de l'exercice 7, au 3° trimestre, nous avons vu jaillir, après la mise en commun, des textes écrits presque au fil de la plume.

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Voici le texte proposé par l'élève GL dont nous avons déja vu deux rédactions:

Exercice 7:
ABC est un triangle.
Sur [AB], on place les points I et J tels que: AI=IJ=JB.
Sur [AC], on place les points K et L tels que: AK=KL=LC.
Montrer que les droites (IK), (JL) et (BC) sont parallèles.



le résultat de la mise en commun a été: "tracer la droite BK et remarquer que le point d'intersection de cette droite et de JL est le milieu de BK. Se placer alors dans le triangle BKC"

GL7: *"Pour démontrer que IF est parallèle à JL,* on se place *dans le triangle AJL,* on sait que *K est le milieu de AL* et que *I est le milieu de AJ* donc, par *le théorème des milieux,* on en conclut que *IF est parallèle à JL.*
Pour démontrer que BC est parallèle à JL, on se place *dans le triangle BIK,* on sait que *J est le milieu de BI* et que *IK est parallèle à JL* alors *la droite qui passe par J et qui est parallèle à IK coupe KB en son milieu X.*
On se place *dans le triangle BKC , L est le milieu de KC, X est le milieu de BK,* par *le théorème des milieux, XL est parallèle à BC.*
IF et BC étant parallèles à JL, elles sont parallèles entre elles."

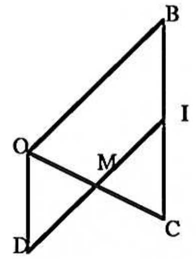
Comme nous félicitions GL d'avoir écrit aussi rapidement une telle rédaction, encore imparfaite cependant, elle s'est exclamée: "MAIS C'EST FACILE !". Ce n'est pas une exclamation souvent formulée en fin de quatrième à propos des démonstrations de géométrie.

Rappelons que ces différents seuils, excepté le sixième, ne sont pas franchis dans un ordre chronologique. Une évolution parallèle se produit chez les élèves sur la compréhension de la structure profonde de la démonstration et sur l'écriture des textes.

III Evolution des élèves.

Pour montrer de façon plus précise et plus globale l'évolution individuelle de chaque élève et l'évolution de la classe, nous avons choisi deux élèves ALE et RH, que nous n'avons pas encore cités jusqu'à présent et nous reproduisons deux de leurs textes: l'un écrit au début de l'expérience et l'autre, soit au milieu (exercice 5), soit vers la fin (exercice 7). Il n'y a alors que dix ou quinze heures d'enseignement qui séparent ces deux textes.Pour les textes des 2/3 des élèves, nous pouvons observer des évolutions semblables.

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC]?



le résultat de la mise en commun a été:" remarquer que OICD est un parallélogramme".

ALE1:

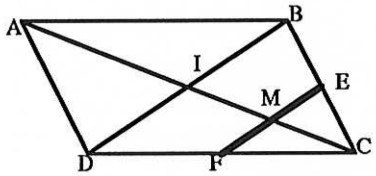
DO = IB	*DO // IB*
IB = CI	*CI // IB*
DO = CI	*DO // CI*
CD // IO	*CD = IO*

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu I. DOIC parallélogramme donc *elles se coupent en leur milieu.*

Ici, ALE n'a pas pris conscience du statut des énoncés, ni du fonctionnement de l'A.T.S.

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Exercice 5:
ABCD est un parallélogramme.
I est le point d'intersection des diagonales, E est le milieu de [CB]et F celui de [CD].
Les droites (AC) et (EF) se coupent en M. Montrer que M est le milieu de [EF].



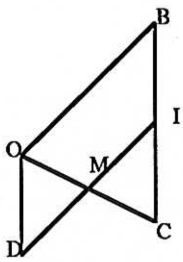
Il n'y a pas eu de mise en commun dans cet exercice cherché en temps limité.

ALE5 : *Pour trouver qu'un point est le milieu de deux segments cela peut être les diagonales d'un parallélogramme. IL SUFFIT QUE JE PROUVE que IE // FC et IF // CE.*
Il suffit d'appliquer *le théorème des milieux dans le triangle DBC.* On sait que *E est le milieu de BC MAIS IL NOUS FAUT UN AUTRE MILIEU . Ce sera I milieu de DB* puisque *I est l'intersection des diagonales d'un parallélogramme et qu'elles se coupent en leur milieu.* Donc *on peut appliquer le théorème des milieux. Dans le triangle DBC, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui passe par le milieu du côté opposé, cette droite est parallèle au troisième côté. JE SUIS SURE QUE IE // FC.*
MAINTENANT JE FAIS le théorème des milieux pour que IF // EC. On sait que *I est le milieu de DB (voir plus haut) dans le triangle DBC.* On sait que *F est le milieu de CD PUISQUE ILS NOUS LE DISENT.* Alors *la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui va au milieu du côté opposé, cette droite est parallèle au 3° côté.* Donc maintenant je sais que *IF // EC et IE // FC donc c'est un parallélogramme.* Et puisque *les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu* alors *M est le milieu de [EF].*

Dans cet exercice (en temps limité), ALE fait un effort extraordinaire pour nous expliquer qu'elle a compris ce qu'était une démonstration. Elle nous décrit son cheminement en n'hésitant pas à procéder par conditions suffisantes et à appuyer ses conclusions de verbes ou adverbes qui soulignent sa conviction (cf. article précédent).

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC]?



le résultat de la mise en commun a été:" remarquer que OICD est un parallélogramme".

RH 1 : *AVEC DESSIN: les droites CO et DI se coupent en leur milieu* donc *CIDO est un parallélogramme.*

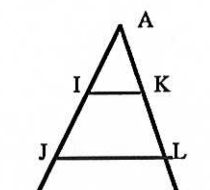
SANS DESSIN: [CI] et [IB] forment un même segment [CB] donc *[CI] même longueur que [DO]*, sachant que *IDOB forme un parallélogramme;*

donc *[CI] // [DO]*

donc *OICD est un parallélogramme.*

Ici RH a bien l'idée de la déduction: "donc, sachant que" mais aucune règle de substitution n'est invoquée. La prise de conscience du statut des énoncés n 'est pas faite: il ne voit pas les mêmes hypothèses avec ou sans "dessin".

Exercice 7:
ABC est un triangle.
Sur [AB], on place les points I et J tels que: AI=IJ=JB.
Sur [AC], on place les points K et L tels que: AK=KL=LC.
Montrer que les droites (IK), (JL) et (BC) sont parallèles.



Le résultat de la mise en commun a été: "tracer la droite BK et remarquer que le point d'intersection de cette droite et de JL est le milieu de BK. Se placer alors dans le triangle BKC"

RH7: - On sait que *AI = IJ* donc *I milieu de AJ* .

On sait que *AK = KL* donc *K milieu de AL.*

En sachant *ceci* et que *AJL triangle* , alors avec *le théorème des milieux* , j'en conclus que *IK // JL.*

- On sait que *BJ=JI* donc *J milieu de BI.*
  En sachant *ceci* et que *BKI triangle*, que *IK//JL* et que Z *est le point d'intersection de JL et de BK*, j'en conclus avec *le théorème réciproque des milieux que Z milieu de BK.*
- En sachant que *BKL triangle*, que Z *sur JL*, que Z *milieu de BK et* que *L milieu de KC*, j'en conclus avec *le théorème des milieux que JL // BC.*
- En sachant que *JL//BC* et que *IK // JL*, alors je conclus que *IK //JL //BC.*

Ici RH a manifestement pris conscience de ce qu'est une démonstration: les paragraphes indiquent chaque A.T.S., les conditions nécessaires pour le dernier pas (ici des conclusions intermédiaires) sont reprises dans la dernière phrase comme hypothèses; seule la dernière règle de substitution n'est pas invoquée (transitivité du parallélisme).

Nous avons demandé aux élèves qu'ils nous "prêtent" leur classeur afin de pouvoir examiner leurs réseaux et en analyser les caractéristiques. Voici, à travers le tableau suivant, le profil de l'évolution de la classe. Pour établir ce tableau, nous avons pris un exercice en temps limité, au cours duquel il n'y a pas eu de mise en commun au terme de la phase heuristique, contrairement aux autres séances. Du fait de cette absence de mise en commun des idées de solution, les élèves qui n'avaient rien trouvé se sont trouvés démunis pour la phase d'organisation. D'où l'apparition dans le tableau de la ligne "blocage" au niveau de l'heuristique. Mais la plupart des élèves, quand il y avait mise en commun, produisaient des réseaux linéaires avec A.T.S. La difficulté pour ces élèves n'est plus la démarche de démonstration mais la découverte de l'idée. Ces élèves savent ce qu'est une démonstration mais n'ont pas d'idée pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment. Nous préférons dans le cadre de cet article présenter un tableau contenant aussi les résultats pour un exercice fait dans les conditions ordinaires d'un devoir noté, et non pas dans celles d'une expérience indépendante d'une évaluation scolaire.

Les énoncés des problèmes 5 et 6 ont déjà été rencontrés (p. 56 et p.51). Voici l'énoncé du problème 3 :

"le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Les points I et J sont les milieux de [DC] et [AB]. Les points P et Q sont les points d'intersection des droites (AI)et (CJ) avec la droite (BD). Montrer que les segments [DP], [PQ] et [QB] ont même longueur".

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

	problème 3	problème 5	problème 6
réseau maîtrisé	3	11	15
réseau linéaire avec A.T.S.	7		4
réseau linéaire organisation de surface	7	5	3
réseau par blocs	2		
blocage au niveau de l'heuristique		10	2
réseau ininter-prétable	5		
rien (absence)	3	1	3

Il est important de noter qu'aucun élève n'a baissé de catégorie. Nous pouvons affirmer que les 2/3 des élèves de cette classe étaient capables en fin d'année de produire des textes montrant qu'ils avaient compris ce qu'était une démonstration, et les rédactions fournies pour l'exercice 7 nous le confirment. Quant aux élèves qui n' avaient pas encore le sens de l'organisation déductive, non découragés, ils ont réclamé de faire deux heures supplémentaires pour "pouvoir eux aussi comprendre "! Nous avons revu ces élèves cette année en troisième et nous pensons pouvoir encore permettre le franchissement des différents seuils à quelques-uns.

CONCLUSION

D'un point de vue mathématique, les textes obtenus sont loin de satisfaire les règles d'économie habituellement respectées pour la présentation des démonstrations. Ces textes présentent beaucoup d'expressions objectivement inutiles pour la démonstration. Mais, c'est là justement leur grand intérêt: ils manifestent le plaisir que les élèves ont eu d'entrer dans une démarche de démonstration. Ces textes montrent que la découverte de la "rigueur" d'une démonstration appelle, au lieu de l'exclure, la liberté de l'expression personnelle. L'économie d'écriture est venue ensuite pour certains. Par exemple, **CA** se contente de noter :

"on refait la même opération pour..."

Nous avons, bien sûr, essayé d'éviter que ces élèves ne soient bloqués pendant la phase heuristique: pour cela, durant le premier trimestre, nous leur avions fourni les figures prototypes associées aux théorèmes proposées par le groupe I.A. de l'IREM de Strasbourg (D.Guin) et, durant le deuxième trimestre les élèves ont relevé des listes de procédures simples rencontrées au cours d'exercices pour démontrer certaines propriétés. Nous avons alors constaté que cette aide n'était pas suffisante pour les élèves qui n'avaient pas franchi les cinq premiers seuils décrits plus haut. Ainsi, dans l'exercice 5, l'élève **EF** fait un catalogue de tout ce qu'elle a pu déduire jusqu'à présent sans parvenir à une conclusion.

Dès le premier exercice de géométrie, ces mêmes élèves, maintenant en troisième, ont eu la réaction immédiate suivante: chercher tout le corpus d'énoncés permettant de faire la démonstration. Et dès la deuxième séance, ils ont réclamé plus d'exercices et des exercices plus difficiles. Peut-être faut-il chercher l'explication de cette demande un peu inhabituelle dans la remarque de **EO**: "Je ne sais pas pourquoi mais j'aime bien la géométrie, ce n'est pas comme l'algèbre."

REFERENCES

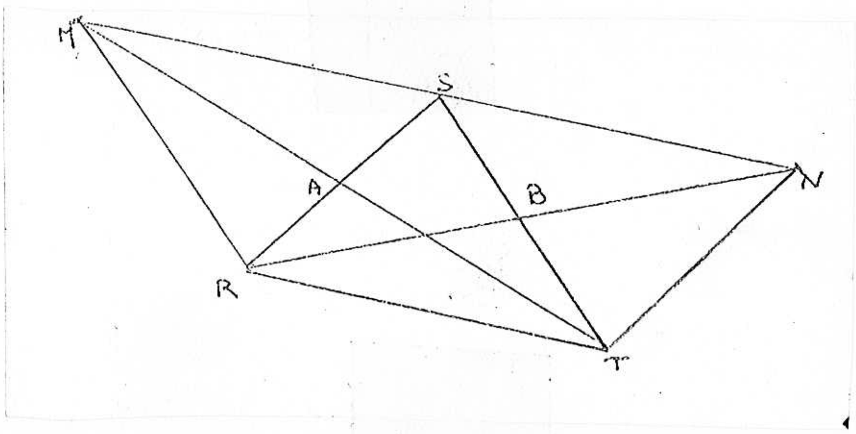
DUVAL R. et EGRET M.A : *L'organisation déductive du discours : Interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives Vol. 2 p. 25 - IREM de Strasbourg

GUIN D. : *Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives Vol. 2 p. 89 - IREM de Strasbourg

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Annexe 1

Epreuve de contrôle : une tâche de lecture.

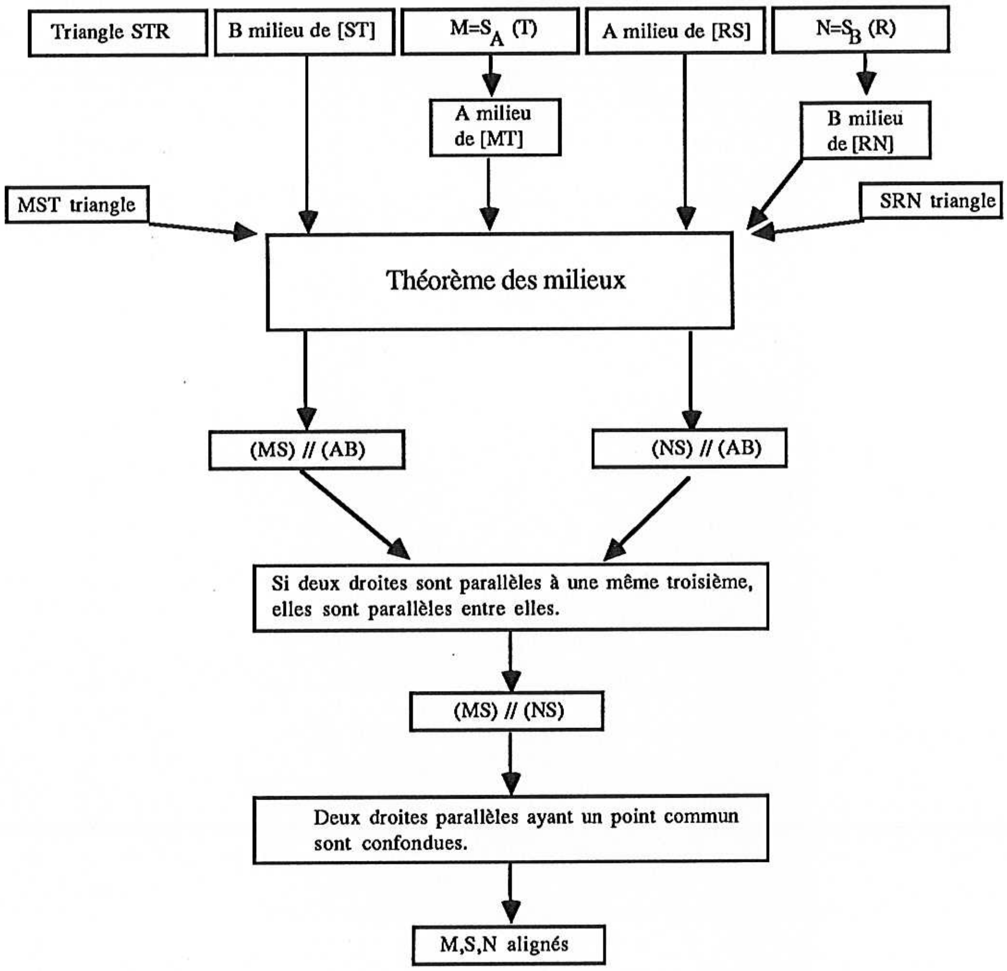


a) **Proposer un énoncé du problème** dont la démonstration est présentée sous forme du réseau proposé sur la page suivante.

b) **Rédiger** ensuite la **démonstration** du problème

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Voici le réseau à partir duquel les élèves avaient à reconstituer l'énoncé du problème et le texte de la démonstration correspondant :

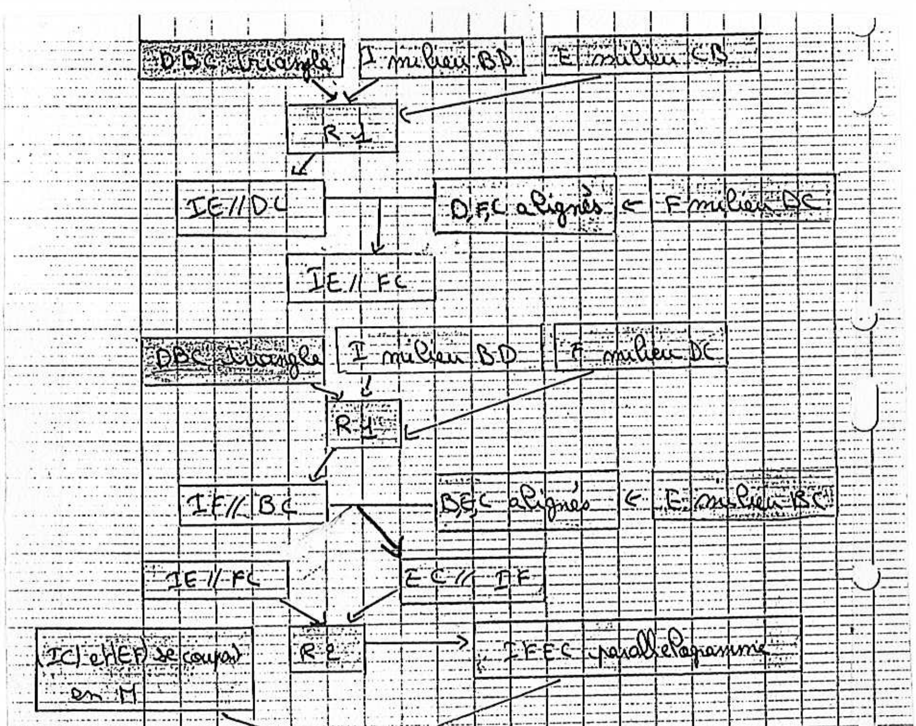


Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Annexe 2

Quelques exemples de réseau construits par les élèves:

Exercice 5 (cf. p 56)



R1 : La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au 3ème côté

R2 : Si un quadrilatère à ses côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme.

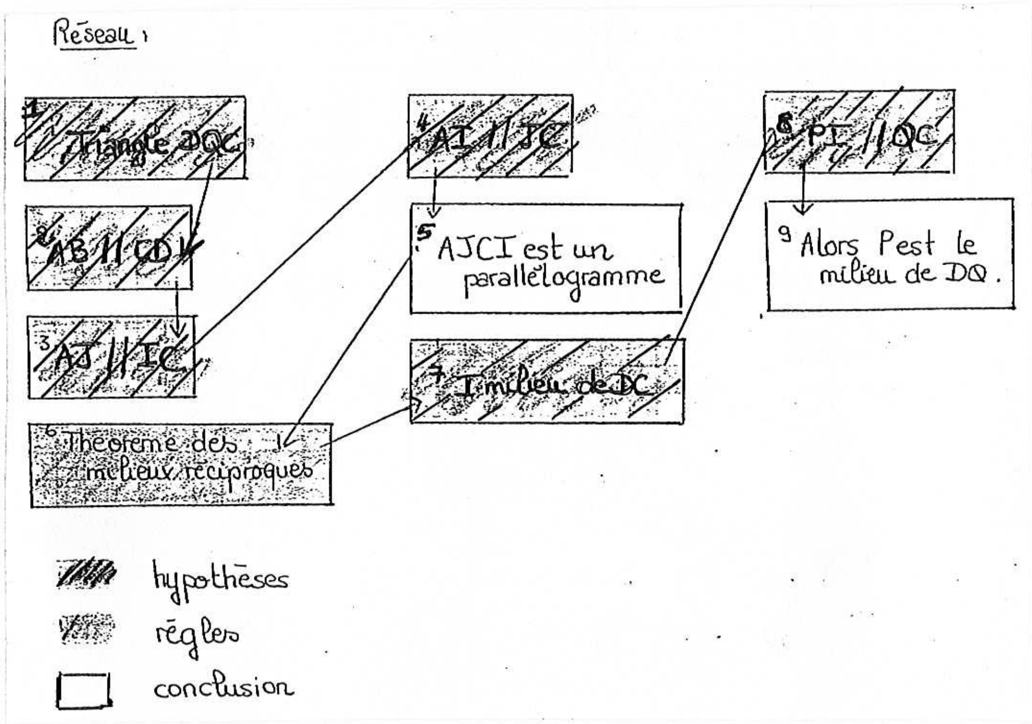
R3 : Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu

hypothèses règles conclusion

conclusions partielles figures vues sur le dessin

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration

Exercice 3 - page 58

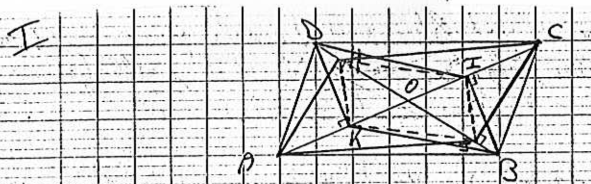


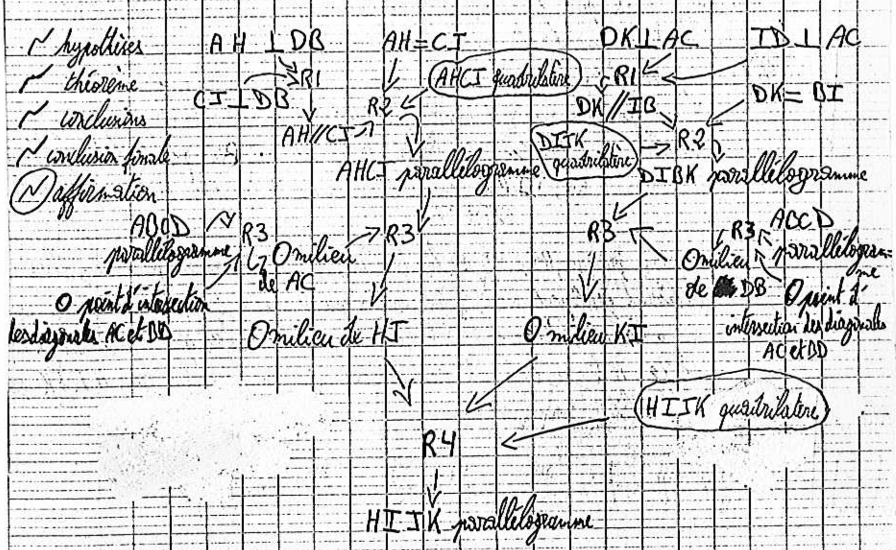
Organisation linéaire de la structure de surface d'une démonstration.
Ce réseau est équivalent au texte suivant :

Je prends	le triangle DQC
On a	AB // CD
On a aussi	AJ // IC
et	AI // JC
Donc	AJCI est un parallèlogramme
D'après	le théorème des milieux réciproques,
si on a	I milieu de DC
et	PI // QC
Alors	P est milieu de DQ.

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration

Exercice 6 page 51





R1: Si A perpendiculaire à B, et C perpendiculaire à B, alors A et C sont parallèles.