Annales de Didactique et de Sciences Cognitives

Publication des travaux du séminaire de Didactique des Mathématiques de Strasbourg

Responsable de la publication : R. DUVAL

I.R.E.M.

F. 67084 STRASBOURG Cedex

Volume 2

TABLE DES MATIERES

ASPECTS MULTIDIMENSIONNELS DU RAISONNEMENT EN GEOMETRIE

F. PLUVINAGE

Geometrical practice involves as many abilities in performing various tasks as properly mathematics knowledges. The growth of these abilities depends on appropriate activities. We intent to determine a hierarchy of geometrical situations parallel to or independent of the teaching of mathematics concepts. We examine as an example an evaluation directed to 180 fourteen-years students about the suggested taxinomy.

This study was partially supported by a government grant under the title "Suivi Scientifique des Collèges" The author worked in an IREM group including MMme. C. HINDELANG, M. KEYLING, D. MAURETTE, M. ORTLIEB and MM. C.MATHERN, J.C. RAUSCHER.

1. L'INSERTION DU RAISONNEMENT DANS LA SCOLARITE.

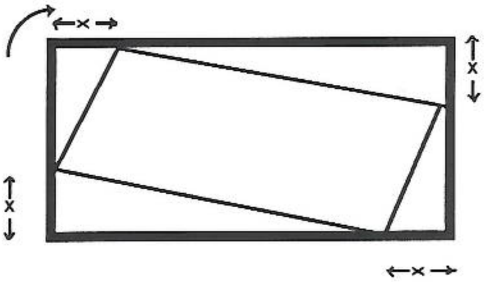
1.1 Le point de vue traditionnel

Certes, le raisonnement ne se réduit pas au raisonnement formel et il convient de mettre les élèves dès leur plus jeune âge dans des situations qui les conduisent à diverses formes de raisonnement, comme l'utilisation de la négation ou le passage au complémentaire, ou encore des comparaisons indirectes de grandeurs, ou ... Mais pour ce qui est du raisonnement dit formel, c'est-à-dire constitué d'une démarche allant d'hypothèses à des conclusions, chaque étape étant une déduction conforme aux règles de déduction, le point de vue traditionnel est celui d'une introduction subite, vers l'âge de 13 ans, et son acquisition est prévue comme fondée sur l'imitation de raisonnements-modèles présentés par les professeurs aux élèves.

Pour que l'imitation puisse être obtenue, il faut, toujours selon le point de vue traditionnel, que la démarche à imiter ne soit pas trop longue. Ainsi faut-il que les premières situations présentées pour le raisonnement soient simples. Par exemple, démontrer qu'un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle est acceptable, alors que démontrer qu'un triangle isocèle qui a un angle de 60° est équilatéral est peut-être déjà un peu trop compliqué, puisqu'il faut distinguer deux cas pour le raisonnement.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 2 (1989) (p.5-24) IREM de Strasbourg*

Cependant, l'observation des élèves fait alors apparaître une difficulté didactique : beaucoup d'élèves ne voient dans la démarche de raisonnement formel, en particulier dans la démonstration, qu'une pratique imposée plus ou moins gratuitement par les professeurs, mais sans utilité réelle. Par exemple, nous avions présenté la figure ci-contre, obtenue à partir d'un rectangle de dimensions données avec pour x une valeur donnée.



Nous n'avions pas explicitement demandé que soit faite la démonstration de la nature *(un parallélogramme)* du quadrilatère obtenu dans le rectangle. *Aucun* des élèves en fin de collège *(âge : ~ 15 ans)* interrogés sur cet exercice n'a éprouvé le besoin de faire une démonstration, ce qui n'a entraîné aucune gêne à parler "du parallélogramme".

On module alors usuellement le critère de simplicité des raisonnements à imiter par l'adjonction d'un critère de "non évidence". Autrement dit, "on ne doit pas démontrer des évidences". Reste alors à trouver des situations pour lesquelles un raisonnement simple conduit à des résultats non évidents, en admettant que l'on dispose effectivement d'une possibilité de savoir ce qui est et ce qui n'est pas évident. C'est difficile, didactiquement.

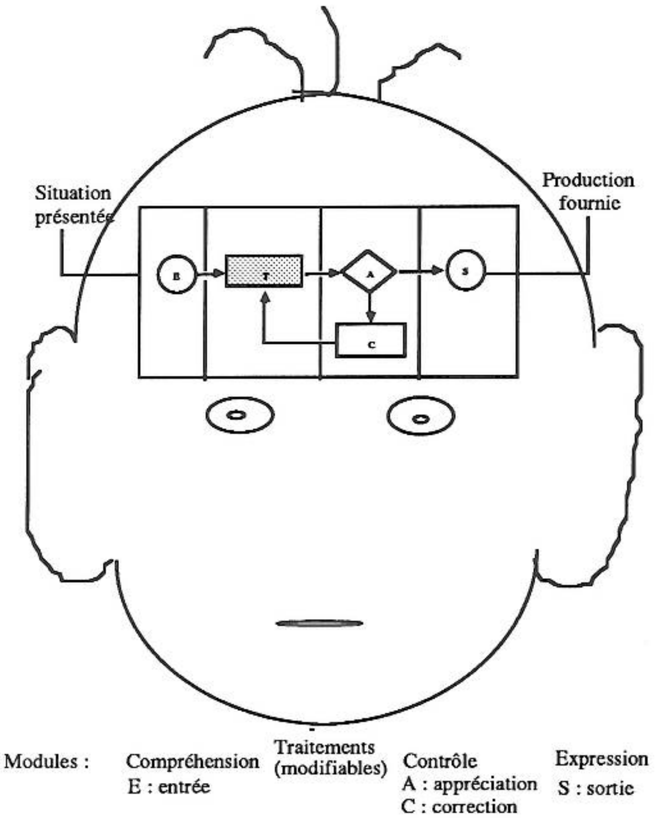
1.2 Quelques éléments récents

Dans sa thèse, Nicolas Balacheff examine les démarches de *preuve*. Pour lui, l'aspect social de la question est important : qui s'agit-il de convaincre, et pour quoi ? Il va donc dans ses expériences organiser des situations dans lesquelles le besoin de prouver devrait être présent. Par ailleurs, il estime que le niveau d'incertitude dans lequel un individu peut être par rapport à un résultat joue un rôle : si un résultat apparaît trop peu sûr, on ne tentera pas de l'établir, s'il apparaît au contraire trop sûr, on le tiendra pour acquis sans besoin de le prouver. Il y a donc un décalage, du caractère d'évidence vers celui de niveau du doute éprouvé par rapport à un résultat.

Dans le préambule des actuels programmes scolaires français de mathématiques pour le collège, parus en 1985, le mot démonstration a tout simplement disparu. Etant l'auteur de la rédaction initiale proposée pour ce préambule et à peine retouchée par la suite, nous pouvons facilement justifier cette disparition. Pour l'anecdote tout d'abord, nous pouvons signaler la bibliographie de Ramanujan, écrite par Hardy *(coauteur avec Littlewood de travaux célèbres)* ; il est signalé que ce grand mathématicien indien n'a véritablement appris l'existence de la démonstration qu'en allant en Angleterre à l'âge de 26 ans, bien après avoir accompli des travaux mathématiques importants. Mais il est vrai que sa direction de recherche l'amenait à établir des formules sommatoires... Remarquons aussi que l'on ne dit jamais de quelqu'un qu'il démontre bien ou mal, alors qu'il est courant de dire de quelqu'un qu'il raisonne bien ou mal. Dans ces conditions, est-il raisonnable de vouloir tenter de faire *apprendre* la démonstration ? De notre point de vue, non, et d'ailleurs les résultats qu'a exposés N. Balacheff sont dans l'ensemble plutôt négatifs : la démonstration pourrait y sembler réservée, dans son accomplissement, à une petite minorité d'élèves.

Notre point de vue est donc radicalement différent : c'est le *raisonnement* qui mérite d'être poursuivi comme l'un des objectifs de la géométrie, en lui appliquant les mêmes techniques d'approches didactiques que pour d'autres thèmes. Précisons donc les techniques d'approche didactique. D'une part elles se composent des aspects touchant à la gestion de l'enseignement, avec différentes phases *(différentes dialectiques selon Guy Brousseau)* . D'autre part, elles mettent en jeu les possibilités d'apprentissage individuel.

Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie



Nous avons représenté le schéma que nous proposons comme minimal pour tout apprentissage de type mathématique par un individu : après sa compréhension de l'énoncé ou de la tâche assignée, l'individu procède à des traitements pour lui, qu'il va accepter ou refuser au vu de ce qui en résulte, et reprendre en les corrigeant s'il les refuse ; une fois satisfaction suffisante obtenue, il exprimera sous forme communicable à autrui ce qu'il a trouvé.

Enfin, pour ce qui est des *analyses* des phénomènes déclenchés par des séquences d'enseignement, la didactique propose systématiquement une triple confrontation :

- des *contenus* mathématiques,
- des *tâches* effectives proposées,
- des *productions* des élèves.

Dire confrontations, c'est dire que l'examen de chacun des trois volets du triptyque ci-dessus doit être effectué indépendamment des deux autres. Si, par exemple, les productions des élèves ne sont pas envisagées comme tout corpus de données que l'on cherche à analyser, mais sont examinées seulement sur la base de leur adéquation *(en juste ou faux)* aux critères mathématiques régissant les contenus en jeu, toute idée de confrontation aux contenus mathématiques est d'emblée interdite.

Pour que l'analyse des productions soit suffisamment riche, la productivité des élèves doit être satisfaisante. C'est pourquoi, nous exigeons des activités que nous leur proposons qu'elles satisfassent aux quatre critères suivants *(pour lesquels nous signalons la contribution de notre collègue J.C. Sidler, auteur d'un traité de géométrie projective en préparation aux éditions Masson, Paris) :*

1. *Démarrage*	Les consignes doivent permettre que la quasi totalité des élèves se lancent sans problème dans l'activité.
2. *Poursuite*	Le développement de l'activité doit s'avérer intéressant, soit par la curiosité soulevée, soit par l'aspect esthétique des productions qui s'ébauchent, soit pour d'autres raisons ...
3. *Naissance de conjectures*	Des questions réelles doivent surgir du déroulement de l'activité.
4. *Résolution des conjectures*	Les principales conjectures apparues doivent pouvoir être résolues, moyennant apport éventuel d'information, par recours aux outils mathématiques qui constituent l'objectif de l'apprentissage.

Pratiquement, c'est de la confrontation entre l'analyse des contenus mathématiques et celle des tâches que nous pouvons savoir a priori, pour une activité proposée, si elle satisfait ou non aux quatre critères ci-dessus. Si un seul n'est pas vérifié, l'activité envisagée est d'emblée rejetée : elle ne permettrait pas le déroulement complet d'un processus d'enseignement en elle-même.

1.3 Progression

Nous souhaitons entreprendre une démarche d'enseignement du raisonnement en géométrie élémentaire qui constitue une progression pour la totalité des quatre années sur lesquelles s'étend la scolarité du collège.
Pour déterminer cette progression, nous nous appuyons sur l'analyse des tâches proposées, et non pas seulement sur les contenus mathématiques. En effet, il nous est apparu que l'on

distingue des élèves du début et de la fin du collège, sur la base de leurs productions, moins parce que les uns ignorent des concepts connus des autres que parce que les uns n'ont pas recours à des pratiques courantes pour les autres. Par exemple, on ne pourrait pas dire qu'un élève du début du collège ignore la notion de symétrie *(axiale ou centrale)* alors qu'un élève de fin de collège la connaît ; au contraire, nos observations antérieures nous permettaient de bien discriminer ces deux élèves d'après l'utilisation de lettres pour désigner des points : le premier les utilisait quand elles étaient présentes sur une figure à étudier, mais ne les introduisait pas spontanément, alors que le second recourait systématiquement à cette pratique pour toute figure un peu riche *(e. g. un cercle et deux droites).*
Dans le principe de progression, l'utilisation d'un même thème à des niveaux de traitement différents est donc envisagée. C'est l'analyse des tâches qui introduit assez précisément dans les considérations sur les traitements. En géométrie, on procède à des *tracés* et on rédige[(1)] des *textes*. Ces textes peuvent se cantonner à l'emploi de la langue naturelle ou avoir recours au symbolisme mathématique. De plus, il est possible de distinguer plusieurs niveaux de production de tracés ou de textes, selon leurs destinataires : depuis les productions que l'on fait uniquement pour soi-même jusqu'à celles qui sont destinées à un large public, en passant par celles que le professeur a demandées ; on passe ainsi du brouillon aux productions de qualité professionnelle.

Si l'on considère les *entrées* et les *sorties* qui, avec sa gestion, déterminent une situation, on pourra immédiatement distinguer quatre couples d'entrée-sortie à partir des deux éléments texte et tracé. De plus, des enchaînements sont possibles, comme celui du couple tracé-texte suivi du couple texte-tracé dans une situation de transmission de figures *(jeu de messages).*

Voici alors quelques *jalons* de la progression envisagée :

- identification, représentation, désignation d'objets géométriques,
- exploration des contraintes d'une situation géométrique,
- reconnaissance du jeu mutuel de contraintes *(indépendance, incompatibilité, inclusion),*
- distinction entre le contenu et le statut d'une assertion dans un texte,
- démarches "officielles" de raisonnement, en particulier la démonstration.

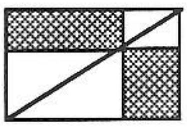
Note :

Bien entendu, les descripteurs de ces jalons sont à usage des professeurs, non des élèves.

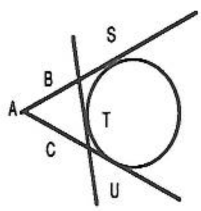
*(1) La production orale joue un rôle important dans la communauté mathématique et la vie de la classe,mais elle ne constitue pas une **référence** usuelle*

Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie

Jalons d'une progression	Exemples d'activités associées	Activités parallèles
Identification, représentation et désignation d'objets géométriques	Constructions par points ou enveloppes, transformation "carré"	Démonstration "sans hypothèses"
Identification des contraintes d'une situation géométrique	Figures téléphonées, programmes de construction	
Appréhension du jeu mutuel des contraintes : indépendance vs. exclusion ou inclusion	Figures muettes, figures douteuses	
Distinction entre contenu et statut d'une phrase dans un texte	Rédaction d'énoncés (pour des situations données)	Heuristique Générale : Sous-figures, Enrichissement
Présentation de démonstration : hypothèses, substitutions, conclusions	Réseaux (cf. Duval-Egret)	Transformations



Euclide



"Au revoir les enfants"

2. SUIVI SCIENTIFIQUE

2.1 Description du dispositif

Le dispositif expérimental a pu être enclenché comme une composante d'une expérience de *pédagogie différenciée* proposée pour plusieurs disciplines par notre collègue Louis Legrand. Notre objectif d'un enseignement reposant sur l'idée d'évolution de compétences variées chez les élèves était parfaitement en accord avec les hypothèses retenues par notre collègue, qui nous avait donc donné carte blanche pour l'organisation de l'expérience en mathématiques.

Une première année préparatoire a été organisée pour trois classes de sixième*(première année du collège, élèves d'environ 11 ans)* dans un collège. Elle a été suivie d'une deuxième année reprise au même niveau et dans le même collège, concluant cette expérience de pédagogie différenciée.

Par la suite, il nous a paru intéressant de poursuivre l'expérience, mais en l'élargissant quelque peu : d'une part nous nous sommes insérés dans le dispositif intitulé "suivi scientifique", institué à la demande de la Commission Permanente de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques *(COPREM, actuellement : GREM)* pour examiner les incidences de la mise en place de nouveaux programmes du collège, d'autre part, nous avons procédé à la mise en œuvre dans trois établissements scolaires différemment situés *(centre ville, banlieue résidentielle, banlieue populaire)*. Les deux collèges ajoutés au premier permettent de disposer d'une population d'élèves statistiquement représentative.

Le fonctionnement est arrêté au cours de séances de travail regroupant les professeurs concernés. Ces séances sont consacrées à la mise au point des activités, à l'exposé des impressions et des observations recueillies, à l'étude *(de l'élaboration à l'analyse des résultats)* des évaluations mises en œuvre.

En 1987-88, le suivi scientifique a concerné la classe de quatrième *(troisième année du collège, élèves d'environ 13 ans en début d'année)*. Nos observations ne peuvent être complètes actuellement que pour les deux premières années du collège et partielles pour la troisième année. En particulier, nous ne disposons pas encore pour cette troisième année des références de compétences atteintes, par rapport à celle de la population ambiante. Nous attachons quelque importance à ces comparaisons, car nous nous situons avec le raisonnement en géométrie, dans un domaine où les résultats traditionnels sont à améliorer.

2.2 Articulation entre les activités proposées et les compétences des élèves

Récapitulatif préparé par J.C. Rauscher (début 1988).

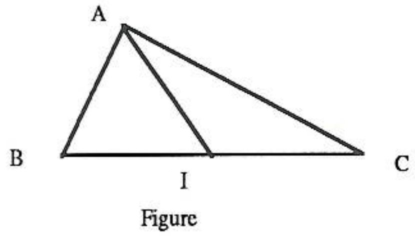
	ACTIVITES PRINCIPALES	COMPETENCES OBSERVEES
6ème	1 Tracé -Tracé : construction points par points 2 Tracé - Texte - tracé : transmission de messages 3 Texte - Tracé : réalisation d'un programme	a) Très bonne technique de tracé (soin et autonomie) → Bonne homogénéité de la population. b) Production d'un texte avec le langage • naturel → Assez bonne homogénéité • symbolique → Hétérogénéité des productions. c) Compréhension d'un texte de programme ou d'une figure codée. → Assez bonne homogénéité.
5ème	Reprise des activités de 6ème + initiation à l'argumentation (Textes argumentés)	Perfectionnement de b) et c) + d) Production de texte argumenté → production très hétérogène encore.
4ème	Reprise des activités précédentes avec systématisation de l'initiation à la production de textes argumentés : - Textes à trous - Textes dans le désordre - Figures à coder - Choisir des propositions pour construire un raisonnement.	

Quelques commentaires méritent d'être faits. Les activités retenues doivent évidemment satisfaire aux critères précédemment énoncés *(cf. fin de 1.2.)*.
Le mot "conjecture" est évidemment à situer au niveau des élèves. Considérons par exemple la transmission de figures par des messages. Pour les élèves concernés, le recours à des éléments auxiliaires non explicitement représentés correspond à une démarche dans laquelle une conjecture *(à leur niveau)* peut être vue : une description est simplifiée par la référence à

des figures-types qui permettent des expressions synthétiques non ambigües, même si une partie seulement de telles figures se trouve représentée. Il s'agit donc ici d'une conjecture quant à l'économie relative de plusieurs possibilités de description. D'autre part, les activités ne constituent nullement des exercices d'entraînement aux évaluations. Celles-ci sont d'ailleurs programmées non en fin d'activité, sauf à titre d'évaluation formative, mais après le déroulement d'autres séquences d'enseignement *("décontextualisation" avec éléments généraux de cours, exercices indépendants de l'activité antérieure)*, postérieures à la pratique de l'activité correspondante.

Le nombre des exercices "non classiques" s'est en définitive avéré important. Il ne s'agissait nullement d'une volonté délibérée d'innovation, mais il y a là une conséquence normale de la prise en compte d'une certaine hiérarchie de tâches. Par exemple, il est apparu que le tracé d'une figure à la lecture d'un énoncé ne conduit pas à la mise en jeu d'effets mutuels de contraintes les unes sur les autres. Un exercice satisfaisant de ce point de vue est celui qui demande de placer des lettres sur une figure, conformément à un programme donné de construction de cette figure *(suggestion de notre collaborateur C. Moritz)*. Autre exemple : la distinction entre le contenu et le statut d'une proposition n'est pas soulevée par les exercices usuels. Un exercice satisfaisant de ce point de vue consiste à présenter une figure accompagnée d'une liste de constatations et à demander, après avoir proposé un programme de construction pour ce type de figure, de rédiger un énoncé mathématique.

Exemple : A vos hypothèses ... prêts ... raisonnez !



Figure

Liste de propriétés vérifiées par la figure →

1 B,I et C sont alignés
2 I est le milieu de BC
3 ABI est un triangle isocèle
4 ICA est un triangle isocèle
5 ABI est un triangle équilatéral
6 $\widehat{B} = 60°$
7 $\widehat{BAI} = 60°$
8 $\widehat{BAC} = 90°$
9 $\widehat{BCA} = 30°$
10 $\widehat{AIC} = 120°$

1° Au vu de la figure et de la liste de propriétés indiquée, écrire un programme de construction en indiquant celles des propriétés utilisées.

2° Faire un énoncé mathématique à partir du programme obtenu en 1°

L'exemple de la page précédente montre une situation très simple qui conduit déjà à une richesse de productions très suffisante dans une classe : il se dégage quatre programmes de construction essentiellement différents, accompagnés de l'une ou l'autre variante *(le triangle rectangle avec le milieu de son hypoténuse, les triangles isocèles côte à côte, le triangle équilatéral "prolongé", le segment BC suivi du placement de A).*

Dans un premier temps, une surprise s'est manifestée, reflétant un doute sur la possibilité de construire des énoncés. Mais au bout d'un certain temps, dû au souci de vérification et de soin *(il ne faudrait sans doute pas mettre de pression sur les élèves à ce moment là, sous peine de dénaturer l'activité)*, des énoncés tout à fait acceptables apparaissent. Nous noterons cependant que la *difficulté* n'a pas été recherchée par les élèves que nous avons vus. Ce sont plutôt des considérations sur la *longueur* des textes produits qui se sont spontanément exprimées *(les plus courts étant jugés les meilleurs).*

Pour permettre le *contrôle* des raisonnements produits, nous entreprenons une mise en œuvre de *représentations* des démarches, conformément à la suggestion de Raymond Duval. Mais, comme il s'agit de la phase actuelle de la recherche, il est trop tôt pour en décrire les conséquences sur les compétences acquises par les élèves.

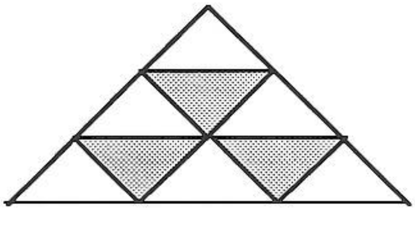
3 NOTES SUR DES PRODUCTIONS D'ELEVES

3.1 Reproduction ou production ?

Entre dessin et texte, l'idée de modèle n'a pas du tout la même nature. Une figure modèle est destinée à une reproduction dont la fidélité est vérifiable. Un texte modèle est destiné à donner lieu au contraire à des variations, à partir d'un certain nombre d'éléments de base. La conformité correspond alors à l'observation d'un certain nombre de règles respectées par le texte modèle. Hors les mathématiques, un exemple simple est celui des formules de politesse de lettres modèles. En mathématiques, on trouve bon nombre de manuels qui présentent des démonstrations modèles. L'apprentissage institué comprend deux volets : le volet des définitions et résultats mathématiques et le volet de la métalangue *("hypothèses", "déductions", "conclusions", ...)*, avec un poids préférentiel au premier. Mais le constat d'inefficacité qui ressort des différentes enquêtes effectuées *(moins de 25 % de réussites dès que l'on s'écarte de la restitution de schémas stéréotypés de démonstrations élémentaires)* jette le doute sur la possibilité même de parvenir à des résultats d'ensemble satisfaisants. Plus récemment N. Balacheff *(dans sa thèse)* a poursuivi, en s'inspirant notamment d'idées de Lakatos, le point de vue selon lequel la présentation traditionnelle de la démonstration est didactiquement mal orientée. Selon lui, il convient de créer en milieu scolaire les conditions du fonctionnement de la preuve dans la communauté scientifique. Les résultats obtenus sont certes intéressants, mais nous avons noté qu'ils ne mettent pas en évidence une appropriation de la démonstration par la majorité des élèves concernés. Autrement dit, l'option de susciter plutôt la production que la reproduction ne nous paraît pas décisive pour l'enseignement. Comme nous l'avons dit, notre approche est moins globale : nous considérons l'acquisition de la démonstration comme résultant d'une multiplicité d'appropriations différentes et, après la recherche dont l'article de R.Duval et M.A.Egret rend compte (dans ce même numéro), d'une prise de conscience de la progression par substitution d'énoncés. De plus la capacité visée correspond au raisonnement avec ses diverses phases *(conjecturale, heuristique, rédactionnelle)*. D'où la sollicitation de la production aussi bien que de la reproduction, avec un parti pris de mise en œuvre simultanée, aussi souvent que possible, du registre figural et du registre discursif. Ceci afin de favoriser la fonction de contrôle.

Nous présentons un sujet qui a été proposé en fin de la classe de quatrième comme évaluation. Les résultats auxquels il a donné lieu sont déjà prometteurs, bien que, comme déjà dit *(fin du § 2)*, il convienne d'attendre la fin de l'année scolaire suivante pour recueillir des observations significatives sur l'acquisition du raisonnement. La description du sujet proposé met en évidence sur cette évaluation la sollicitation à la fois de la production et de la reproduction.

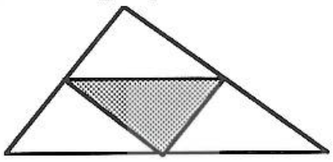
3.2 Un sujet pour une évaluation en cours d'apprentissage.



Le sujet retenu exploite la juxtaposition de neuf petits triangles isométriques pavant un grand triangle, comme illustré sur la figure ci-contre, présentée dans le sujet remis aux élèves.
On remarque que cette situation est affine : la forme des triangles ne joue pas de rôle.
Conformément à des observations antérieures, il convient donc de l'illustrer par *deux* figures perspectivement différentes. A défaut de cette double illustration, une partie des élèves

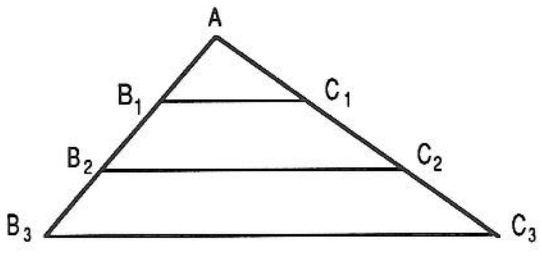
ajouteraient des hypothèses de manière à déterminer une figure unique à similitude près. Une querelle a pu opposer les partisans de la géométrie euclidienne à ceux de la géométrie affine; on voit qu'en fait le type de précautions que demande la présentation de situations affine est d'une simplicité qui tempère une telle querelle.

On remarque que la situation est l'une des plus simples qui étendent la situation standard



d'un triangle avec les milieux de ses côtés. Dans d'autres recherches, nous avons pu remarquer le caractère fondamental, pour des acquisitions mathématiques, du passage de 2 à 3.

Observons d'ailleurs que l'extension du théorème des milieux au cas de subdivisions en trois, comme illustré sur la figure ci-contre *(où B1 et B2 subdivisent AB3, et C1 et C2 subdivisent AC3)* utilise non seulement le théorème des milieux mais sa réciproque.



Une démonstration du parallélisme des droites BiCi (i = 1,2,3) demande un tracé auxiliaire *(le segment B3C1 par exemple)*, l'application du théorème des milieux au triangle AB2C2, celle du théorème réciproque au triangle B3B1C1 et enfin à nouveau celle du théorème des milieux au triangle B3C1C3. Il est clair que, sans préparation appropriée, cette démarche est trop subtile pour la quasi totalité des élèves de collège.

La simplicité visuelle de la figure choisie n'exclut donc pas sa richesse ni l'éventuelle complexité des démarches qui s'y rapportent. En fin de collège, elle donnerait lieu à une évaluation portant sur une démonstration. En cours d'apprentissage, le repérage auquel procéder vaut la peine d'être prévu plus varié, incluant des tâches de production de figures comme de textes.

Dans une figure, ce qui est le plus immédiatement prégnant est d'une part le contenu extérieur et d'autre part les unités de base *(ici les petits triangles, mis de plus en évidence par des variations de teinte à la manière des cases d'un échiquier)*. En partant du contour extérieur ou d'un triangle de base, on est amené à mettre en œuvre deux algorithmes différents de construction de la figure. L'évaluation a porté sur les deux constructions, avec leur tracé d'une part, leur description d'autre part.

En dernier lieu, l'évaluation a porté sur la recherche d'un énoncé de problème résultant de la situation présentée. Pour faciliter la correction, la situation a déjà été mise en place *(un triangle à côtés partagés en trois)* et seule une question reste à rédiger pour que l'on obtienne un énoncé complet de problème.

Le sujet est reproduit en annexe. Quelques explications ont été présentées ici en raison de la forme non traditionnelle de ce sujet.

3.3 Résultats de l'évaluation.

Le sujet présenté au paragraphe précédent a été soumis à 180 élèves de quatrième de trois établissements scolaires. Cette population comporte des élèves de tous niveaux ; en particulier, deux des huit classes interrogées correspondent à des groupes faibles. Sans aller jusqu'à pouvoir être qualifié de représentatif, l'échantillon interrogé fournit une image de la variété des comportements de réponse observables sur une telle évaluation.

Reproductions de figures

Plus des 2/3 de la population reproduit correctement la figure à partir des deux points de départ imposés. Mais ceci signifie qu'il reste encore en quatrième près de 1 élève sur 3 à éprouver une difficulté à ce niveau. Il était donc important que cette tâche soit proposée dans le sujet soumis aux élèves.

C'est la deuxième figure qui est, comme prévu, la plus facile, ainsi qu'il apparaît sur le tableau croisé ci-dessous.

Figure 2 / Figure 1	Figure imparfaite ou absente	Figure correcte	
Figure imparfaite ou absente	19	26	45
Figure correcte	12	123	135

Programmes de construction

L'implication "pour rédiger un programme de construction correct, il faut avoir effectué un tracé correct" est excellente si l'on est strict sur la définition de "programme correct". Mais il y a peu d'élèves qui fournissent, et de plus correctement, toutes les indications nécessaires. En admettant une définition plus large de la réussite, c'est à dire un programme correct à *une* omission éventuelle près, l'implication reste encore bonne, alors que la réussite large concerne plus du double des élèves obtenant la réussite stricte. Ci-après, les tableaux détaillent ces observations.

Figure 1 : Croisements tracé-programme (réussites stricte et large)

Prog. / Tracé	Echec	Réussite stricte	
E	40	5	45
R	108	27	135

Prog. / Tracé	Echec	Réussite large	
E	32	13	45
R	63	72	135

Figure 2 : Croisements tracé-programme (réussites stricte et large)

Prog. / Tracé	Echec	Réussite stricte	
E	29	2	31
R	102	47	149

Prog. / Tracé	Echec	Réussite large	
E	25	6	31
R	46	103	149

Soulignons que seuls 38 élèves pour la première construction et 25 élèves pour la seconde n'ont pas rédigé de programme ou n'ont produit qu'une rédaction très embryonnaire.

Un palier apparaît donc : *la grande majorité produit des enchaînements corrects, mais omet d'indiquer des précisions importantes*, alors même que celles-ci ont été prises en compte lors de la construction. Seul 1 élève sur 4 environ pour la construction qui apparaît la plus simple, et 1 élève sur 7 environ pour la construction la plus difficile, réussit à *"se voir faire la construction"*.
Dans ce phénomène, ce n'est pas la rigueur mathématique qui est en cause. En effet, nous avons relevé cet aspect lors de la correction, et il apparaît que le nombre d'élèves dont la production est mathématiquement correcte, tant du point de vue lexical que syntaxique, est supérieur aux effectifs de la réussite stricte pour le programme de construction :

52 élèves (soit 29%) s'expriment correctement pour la première construction
80 élèves (soit 44%) s'expriment correctement pour la deuxième contruction.

On voit que ces effectifs s'approchent, sans toutefois les atteindre, de ceux de la réussite large. Mais les gros "écarts de langage", comme de parler de "priorité" (sic) et "d'hypothèses" (re-sic) de triangles-pour dire "propriétés" et "grands côtés" (seuls les triangles rectangles ayant une hypoténuse), vont en général de pair avec d'autres défauts.

Production d'un énoncé. Dans la situation présentée, la production d'un énoncé qui prend en compte *l'ensemble des hypothèses* est le fait d'une *petite minorité* : moins de 11% des élèves interrogés. C'est précisément un résultat qui met en évidence l'intérêt pour l'enseignement de proposer une telle activité à ce niveau et en troisième : la petite population des élèves déjà capables d'une telle production peut faire "boule de neige". Car la difficulté qui apparaît ne consiste pas tellement dans le fait de rédiger un énoncé dans la situation proposée. En effet, près de 45% des élèves produisent un énoncé ne prenant en compte qu'une partie des hypothèses. Au total, il apparaît donc une production d'énoncé pour 55% de la population.

Cette évaluation seule ne suffit pas pour préciser l'obstacle qui se présente par rapport à la prise en compte de l'ensemble des hypothèses. Nous ne pouvons qu'avancer des conjectures, qui sont surtout les deux suivantes :

- attraction vers la figure connue d'un triangle avec les milieux de deux côtés et le segment (ou la droite) qui les joint ; cette figure est une sous-figure (présente en plusieurs exemplaires) non immédiatement perceptible dans la figure complète et l'on comprend que sa découverte puisse satisfaire bon nombre d'élèves.

- multiplicité des définitions du point O, qui constitue le point central de la figure complète : c'est le milieu de trois segments et le point de rencontre de trois droites ; il s'est avéré difficile pour les élèves, dans la deuxième construction, *d'éviter une surcharge des définitions de O*.

Autrement dit, même si aucune démonstration n'est demandée ici, la réussite exige, comme la plupart des démonstrations, d'être attentif à la distinction entre contenu et statut d'une assertion : *aucun élément ne peut se voir a priori attribuer deux définitions*. Après une définition, les assertions ultérieures portant sur le même objet ne peuvent plus avoir elles-mêmes le statut de définition. Une exploration plus fine demandera une classification des énoncés de géométrie selon la façon dont les assertions en jeu peuvent se voir affubler d'un statut. Par "assertions en jeu", il ne faut pas seulement entendre les hypothèses données dans l'énoncé où présentées sur une figure codée, mais également les propositions concernant des objets créés à la suite de l'énoncé.
Afin de nous assurer du caractère complet des observations précédentes, nous avons procédé à une analyse des correspondances. Celle-ci a nettement confirmé un phénomène de réussite à deux niveaux. Après les absences de réponse ou les réponses très peu cohérentes, le premier niveau est celui d'une *productivité demandant à être canalisée* ; c'est précisément une bonne situation d'enseignement, comparée à la situation évoquée traditionnellement d'élèves "secs" sur les problèmes de géométrie. Le deuxième niveau, encore peu atteint, correspond à la mise en place d'une maîtrise des différentes tâches constitutives d'une résolution de problème.

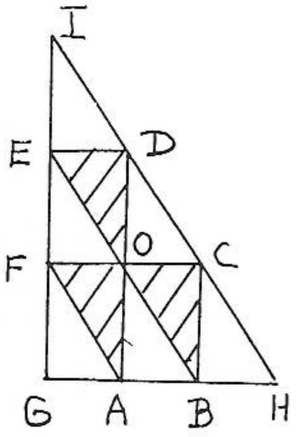
NOM : ....

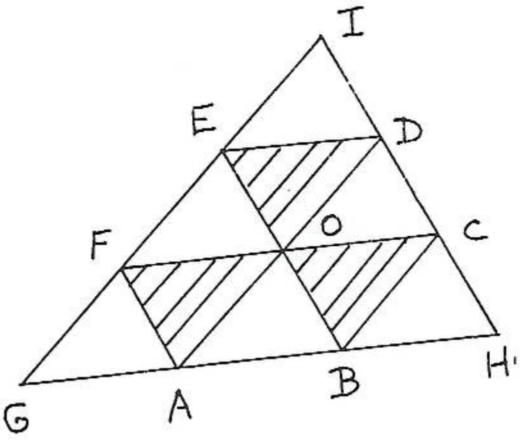
Prénom : ....

Classe : ....

LA MOULINETTE

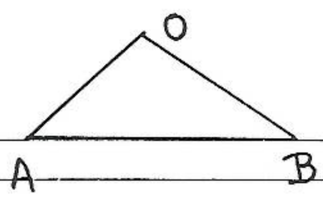
Observer les deux figures ci-dessous. Elles possèdent les mêmes propriétés.





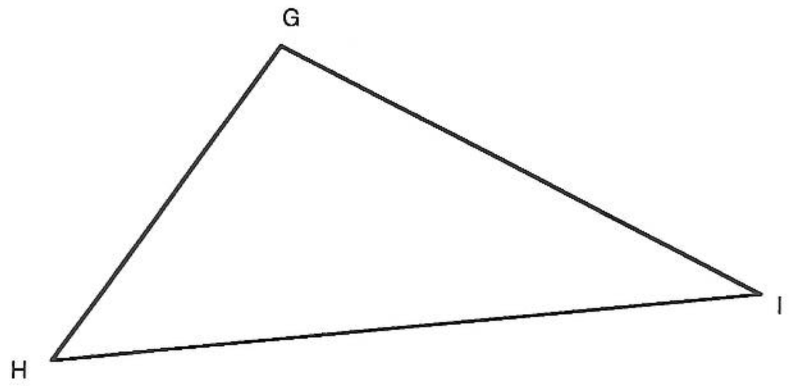
1 A partir des points O, A, B ci-dessous, construire une figure ayant les mêmes propriétés que les figures données en exemple et donner un programme de construction.

Programme de construction



Tests d'évaluation - Géométrie 4ème -

2 A partir des points G, H et I, construire ci-dessous une figure ayant les mêmes propriétés que les deux figures précédentes et donner son programme de construction.



Programme de construction

3 Compléter le texte suivant pour écrire un énoncé avec une ou plusieurs questions.
On partage chacun des côtés d'un triangle en trois.

A et B partagent GH de telle façon que GA = AB = BH
C et D partagent HI de telle façon que HC = CD = DI
E et F partagent IG de telle façon que IE = EF = FG

REFERENCES

N. BALACHEFF, 1988, *Une Etude des Processus de Preuve en Mathématique chez des Elèves de Collège* (Thèse), Université Joseph Fourier, Grenoble.

Bulletin Inter-IREM Premier Cycle, *Suivi Scientifique* 1985-86 (classe de sixième), 1986-87 (classe de cinquième), 1987-88 (classe de quatrième), CRDP de l'Académie de Lyon.

G.H. HARDY, 1985 (trad. française), *l'Apologie d'un Mathématicien*, Ed. Belin, Paris.

I. LAKATOS, 1976 (trad.française : 1985), *Preuve et réfutations*, Ed. Hermann, Paris.

Recherche sur la Pédagogie Différenciée dans les Collèges, 1985, Rapport d'Activité, Publication de l'U.E.R. des Sciences du Comportement, U.L.P. Strasbourg.

L'ORGANISATION DEDUCTIVE DU DISCOURS

Interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration

R. DUVAL et M.A. EGRET

To analyse how a demonstration works, we must distinguish surface structure and deep structure. The first one is similar to the surface structure of an argumentation. But its deep structure is quite different : it is based on a proposition substitution that takes into account the status and not the meaning of propositions.
This analysis offers new ways for teaching demonstration processes : specifically propose deductive organisation tasks on representations about the deep structure, regardless of problem-solving tasks, and ask for the description of this organisation in the ordinary language of students.

Les difficultés et l'ennui que beaucoup d'élèves éprouvent, en quatrième et au delà, pour comprendre ce qu'est une démonstration, ou pour "faire" et pour rédiger une démonstration, constituent l'une des barrières les plus connues et les plus résistantes contre laquelle bute l'enseignement des mathématiques. Pour permettre à une majorité d'élèves de la franchir, deux voies sont principalement explorées. La première consiste à mettre l'accent sur le développement des capacités de raisonnement : on insiste sur l'apprentissage de certaines procédures, sur le "maniement" de certains connecteurs logiques comme l'implication..., ou, au contraire, on favorise le développement de démarches plus naturelles de pensée, comme l'argumentation, qui surgissent spontanément dans des phases de discussion ou de recherche sur des problèmes ouverts. La seconde consiste à mettre l'accent sur la découverte du jeu mutuel des contraintes qui apparaissent à propos d'une figure géométrique (F.Pluvinage, art.précédent). Mais ces deux approches laissent entier le problème de l'accès des élèves à la démonstration. La démonstration relève, en effet, d'une activité cognitive spécifique et son "apprentissage" n'est ni lié à une situation d'interaction sociale, ni subordonné à la découverte d'un jeu de contraintes internes à un objet. Les différences entre la démonstration d'une part, et, d'autre part, l'argumentation, ou les contraintes découvertes dans la construction des figures géométriques, sont plus importantes que les ressemblances.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p.25-40) IREM de Strasbourg

L'organisation déductive du discours

L'activité cognitive correspondant à une démonstration présente deux caractéristiques spécifiques par rapport à toute autre forme de fonctionnement du raisonnement (induction,argumentation, interprétation,...). D'une part elle articule les énoncés *en fonction du statut qui leur est reconnu* et non en fonction de leur sens. D'autre part *elle progresse par substitutions d'énoncés* et non par enchaînements d'énoncés . Ces deux caractéristiques déterminent la structure profonde de la démonstration. Elles sont en grande partie masquées par l'expression ou par la présentation discursives qui en sont généralement faites. D'une part les marques de statut des énoncés se réduisent le plus souvent à l'emploi d'un connecteur ou même au seul ordre des énoncés. D'autre part la démonstration présentée apparaît comme un texte où tous les énoncés se tiennent sans pour autant présenter la congruence sémantique ordinairement exigée dans une argumentation. Le fonctionnement d'un texte de démonstration se trouve donc assimilé au fonctionnement de n'importe quel autre texte, bien que ses règles de production et que l'attitude de lecture qu'il requiert soient toutes différentes .

On voit tout de suite, en se plaçant dans cette perspective, deux problèmes à résoudre pour faciliter l'accès à la démonstration:

— comment faire prendre conscience de l'écart entre statut et sens d'un énoncé?

— comment faire prendre conscience que la démontration repose sur une opération de substitution plus proche d'une démarche de calcul que de la démarche d'argumentation en interaction sociale?

La solution la plus immédiate consiste à proposer une représentation non-discursive de la structure profonde d'une démonstration, comme, par exemple, une représentation par réseau. Différentes expériences ont d'ailleurs déjà été tentées en ce sens. Mais cela ne saurait être considéré comme suffisant.

En premier lieu, une démonstration intervient souvent comme solution d'un problème, ce qui lie très étroitement les aspects heuristiques et les aspects d'organisation déductive : les seconds se trouvent alors subordonnés aux premiers. Mais comme les aspects heuristiques et les les aspects d'organisation relèvent de tâches cognitivement différentes, une représentation non-discursive ne peut pas être utilisée simultanément, pour ces deux tâches, dans une situation d'initiation à la démonstration.

En second lieu, une représentation non discursive reste étrangère au fonctionnement de l'expression spontanée en langage naturel, laquelle demeure le registre de référence pour une interprétation et une intégration personnelles des connaissances traitées : il reste donc un risque sérieux que, placés devant une représentation non-discursive, les élèves ne prennent pas réellement conscience de ce qui leur est montré. Il ne faut donc pas négliger la structure rédactionnelle de surface au profit d'une représentation de la structure profonde, mais, au contraire, les faire interargir.

Pour être vraiment pertinent le recours à une représentation non-discursive exige que l'on respecte les deux contraintes suivantes:

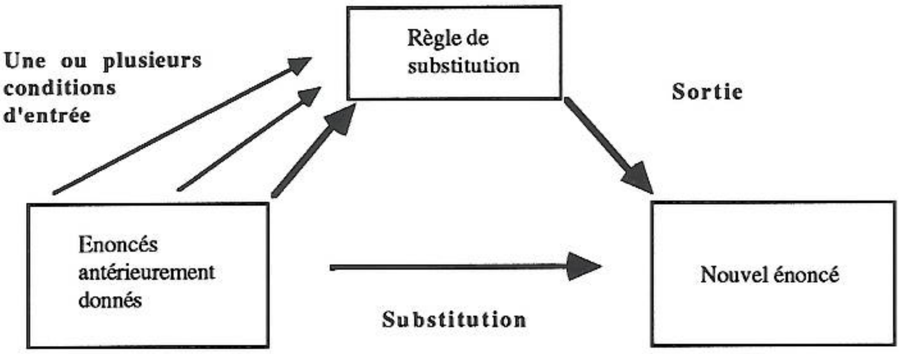
— *dissocier* les tâches heuristiques et les tâches d'organisation déductive
— *articuler* le registre de la représentation et celui de l'expression individuelle dans le langage naturel.

Un enseignement qui serait explicitement centré sur les deux caractérisitiques cognitives de la démonstration et qui respecterait les deux contraintes indiquées permettrait-il de supprimer rapidement l'incompréhension ou le désinterêt que les démonstrations provoquent chez la grande majorité des élèves? Nous en avons tenté l'essai dans une classe de quatrième durant un trimestre. Cette expérience ainsi que la modification spectaculaire de la production des élèves sont présentées dans l'article suivant. Nous proposons ici de revenir sur l'approche cognitive de l'activité de démonstration que nous venons d'esquisser. Et nous la présenterons sous la forme de quatre principes commandant l'organisation d'un enseignement dont l'objectif serait de faire entrer la majorité des élèves dans une démarche de démonstration.

I.Représenter la structure sous-jacente à une organisation déductive des énoncés.

Dans une organisation déductive la suite des énoncés est produite par substitution d'un nouvel énoncé à un énoncé antérieurement donné (comme hypothèse ou comme résultat d'une substitution déjà effectuée). Cette substitution s'effectue explicitement en vertu d'un énoncé normatif (une définition, un axiome, ou un théorème) qui fonctionne comme règle permettant cette substitution.
Cette opération permet de définir l'unité fonctionnelle de toute organisation déductive : l'arc transitif de substitution (A.T.S.). Elle correspond soit à une démonstration de longueur minimale soit à un "pas" dans une démonstration constituée par une suite de substitutions récurrentes.

L'organisation déductive du discours



Ce schéma, qui représente le fonctionnement d'un A.T.S., met en évidence deux choses qui sont essentielles pour comprendre ce qu'est une démonstration, et que la majorité des élèves ne parvient pas à discerner.
La première est le nombre de conditions à prendre en compte pour appliquer correctement une règle de substitution : le nombre de conditions varie selon les théorèmes. Généralement dans un premier temps les élèves ont tendance à n'en retenir qu'une seule. De même, ils éprouvent beaucoup de difficultés à distinguer un théorème et sa réciproque, les formulations apparaissant symétriques l'une de l'autre. *Or un théorème et sa réciproque n'ont pas toujours le même nombre de conditions d'entrée pour fonctionner comme règle de substitution* : par exemple le théorème des milieux comporte deux conditions d'entrée et sa réciproque trois (Deledicq 83 p.146).

La seconde est la structure ternaire et non pas binaire de l'A.T.S. L'unité de base de toute organisation déductive comporte *trois énoncés, chacun ayant un statut différent*. Rédactionnellement on peut omettre l'énoncé de la règle de substitution et s'en tenir à une formulation de type "si...alors.."(Deledicq p.226, 228). Mais dans un apprentissage,il importe que la place fonctionnelle de la règle de substitution soit explicitement marquée. Et cela pour une raison simple. Dans l'organisation déductive d'un discours, *les énoncés s'articulent en raison de leur statut et ce statut est indépendant de leur contenu.* D'une situation proposée à une autre, le statut d'un énoncé peut changer : dans l'une il peut apparaître comme hypothèse et dans l'autre comme proposition à démontrer, alors que le contenu de l'affirmation reste le même.

Expliciter la structure ternaire de l'opération de substitution, par delà la forme du "si..alors.." peut grandement faciliter le déplacement de l'attention du contenu de l'énoncé vers son statut dans la situation-problème qui est proposée. La distinction entre le statut et le sens d'un énoncé ne peut être comprise que dans l'appréhension globale d'une organisation, dont l'A.T.S. représente l'unité fonctionnelle. Un étiquetage d'énoncés pris isolément ne permet pas de vraiment en prendre conscience. Il est vain, comme l'expérience ne cesse de le montrer, de faire écrire séparément les hypothèses et la proposition à démontrer pour que les rôles respectifs des énoncés ainsi codés cessent d'être confondus par les élèves.

Démontrer consiste donc, d'un point de vue cognitif, à tranformer un énoncé donné au départ (ou plusieurs) en un énoncé-résultat par une ou plusieurs substitutions. Lorsque plusieurs substitutions sont nécessaires, certaines doivent parfois être effectuées "en parrallèle" et d'autres successivement. La structure profonde de la démonstration s'apparente à celle d'un calcul : les différences entre une organisation déductive du discours et l'argumentation propre à la pensée naturelle apparaissent clairement au niveau de leus structures profondes. Ces différences sont celles qui opposent un traitement d'informations interne à un système et une confrontation de points de vue qui ne sont pas toujours compatibles entre eux. Mais, en surface, ces différences sont souvent atténuées ou cachées, du moins pour un non-mathématicien. En effet, les pas successifs d'une démonstration n'y apparaissent pas semblables aux étapes d'un calcul : ils s'y articulent, au contraire, comme des énoncés de n'importe quel discours argumentatif, avec les connecteurs "logiques" du raisonnement de la pensée naturelle.

Remarques sur les differences de fonctionnement entre demonstration et argumentation.

Dans une argumentation les énoncés ne se remplacent pas successivement jusqu'au moment où l'on obtient l'énoncé résultat, comme dans un calcul, *ils s'ajoutent les uns aux autres* comme dans un texte. En effet, dans le cadre d'une argumentation, les arguments ne fonctionnent pas comme des règles de substitution mais comme des explicitations de relations de causalité, de similitude ou d'opposition entre les différents énoncés (Toulmine,1979). Cela signifie d'ailleurs que les énoncés ne s'ordonnent pas d'abord en fonction de leur statut, préalablement reconnu et accepté, mais en fonction de leur contenu : une démarche argumentative ne peut se permettre d'enfreindre la loi de congruence sémantique sans risquer d'apparaître incohérente et donc de se ruiner.
En outre, une argumentation prend en compte l'existence de deux plans de discours, l'un relatif à des opinions admises et l'autre relatif à un état de choses pour lequel on peut procéder à des affirmations vraies. La distinction classique entre le "de dicto" et le "de re" est

fondamentale pour comprendre le fonctionnement d'une argumentation ainsi que la variété des types de contradictions qui peuvent y survenir (Grize, 1983). Dans une démonstration il ne peut y avoir qu'un seul plan de discours.
Enfin l'organisation déductive du discours suppose une clôture du champ des énoncés autorisés; au contraire une argumentation, parce qu'elle repose sur la possiblité d'introduire dans la discussion un point de vue différent que celui jusqu'alors accepté, exclut une telle clôture. Le fonctionnement d'un connecteur typique de l'argumentation,"mais", est, à cet égard, révélateur (Ducrot, 1980). Organisation déductive et argumentation constituent donc deux types de fonctionnement opposés du discours. Le passage de l'argumentation, qui est est la forme la plus naturelle de raisonnement, à la démonstration exige donc un changement d'attitude intellectuelle complet.

II. Articuler la représentation de la structure sous-jacente et l'expression-dans le langage naturel

Le recours à des organigrammes ou à des réseaux s'est imposé pour représenter la structure profonde d'une démonstration (Truong,1972; Anderson,1982,1987; Reynes,1981;-Gaud,1984,...). Et plus généralement les travaux faits dans le cadre de l'intelligence artificielle ont imposé la représentation en réseau comme un outil pour toute représentation des connaissances et par suite pour tous les modèles de compréhension du discours (Quillian 1969, Rumelhart 1972, 1975.). Les réseaux mettent en relief les relations qui lient entre eux les énoncés ainsi que le sens de ces relations. Celles-ci deviennent accessibles indépendamment de la compréhension des termes désignant l'implication, l'équivalence ou tout autre connecteur logique. En outre, par l'apppréhension synoptique qu'ils donnent de l'organisation déductive, les réseaux permettent de détourner l'attention du contenu des énoncés vers leur statut.
Il serait vain de croire cependant qu'il suffise de recourir à une représentation par réseau pour aplanir toutes les difficultés que la démarche de démonstration soulève chez les élèves-Il existe de multiples représentations possibles. Pour être pertinente par rapport à la structure profonde de la démonstration, une représentation doit respecter le caractère ternaire de l'A.T.S. Or si l'on regarde les modèles de représentation actuellement proposés aux élèves cela semble loin d'être toujours le cas : la représentation y semble encore commandée par le caractère binaire du "si...alors..." (Deledicq p.228, Gaud p.23). De plus nous verrons qu'une telle représentation ternaire doit être construite par l'élève. Mais plus fondamentalement on ne peut s'en tenir au seul plan d'une représentation non-discursive, fût-elle pertinente, si l'on veut faire entrer les élèves dans une démarche de démonstration.

L'organisation déductive du discours

L'expression dans le langage naturel reste le lieu où s'accomplit en définitive toute prise de conscience. L'activité d'expression joue un rôle central dans l'appropriation et l'objectivation du sens par chaque individu. Piaget l'avait d'ailleurs déjà remarqué lorsqu'il s'appuyait sur le fait que le langage est " l'indice de la prise de conscience" pour décrire la logique propre à l'enfant (Piaget,1967, p.79).
Nous avons pu observer une transformation complète des textes produits par les élèves en même temps qu'ils prenaient conscience de l'organisation déductive des énoncés et de son fonctionnement. Un des changements les plus spectaculaires a été l'apparition simultanée, chez presque tous, d'expressions marquant le statut propre de chaque énoncé et de constructions qui tentaient souvent d'exprimer les trois éléments constituant un pas de déduction. Ces constructions revenaient à exprimer soit en une seule phrase le passage des hypothèses (ou de conclusions antérieures) à la conclusion par un énoncé normatif, soit en plusieurs phrases mais en les regroupant alors en un seul paragraphe. Ce qui fut non moins surprenant fut *le recours spontané à un emploi varié d'expressions d'attitudes propositionnelles pour souligner la différence de statut entre les énoncés articulés*. Et il y eut en outre une proportion importante de ce qu'on a appelé "la prise en charge de l'énoncé par le locuteur".
Voici, à titre d'exemple, quelques unes des expressions employées dans leurs textes de démonstrations. Des textes complets sont présentés dans l'article suivant.

- Je sais que ... et comme ...
- En sachant que ...
- Puisque ...
- Or (réenclenchement de conclusions déjà obtenues) ...
- Si ...

- par le théorème ...
- en utilisant ...
- grâce au théorème ...
- car ...
- si ...

- Donc je peux dire ...
- on apprend que ...
- alors j'en conclus que ...
- je déduis que ...
- Donc ...
- Alors ...

L'organisation déductive du discours

La prise de conscience de ce qu'est une démonstration et son expression ne se font pas à partir d'un emploi correct des connecteurs logiques mais dans l'explicitation d'attitudes propositionnelles.

Cette observation est essentielle. En effet, les attitudes propositionnelles ne réfèrent pas directement au contenu des énoncés mais au statut que ces énoncés ont pour le locuteur ou à celui qu'ils prennent dans le discours engagé. Les attitudes propositionnelles indiquent le mode particulier de certitude attaché à un énoncé, ou l'opération discursive remplie par un énoncé. La compréhension de ce qu'est une démonstration repose d'abord sur l'attention portée à la différence de mode de certitude qui existe entre les différents énoncés ainsi qu'à l'opération discursive accomplie par chaque type d'énoncé.

Ainsi une élève, dans le même texte, marque l'énoncé:

— d'une hypothèse par l'expression " *On sait que ....puisqu'ils nous le disent*"

— des conclusions intermédiaires par les expressions "*Je suis sûre que..*", "*Maintenant je sais que..*"

— la prise en compte des conditions d'application d'un théorème en soulignant qu'il en manque momentanément une par l'expression " On sait que...*mais il nous faut un autre* milieu".

L'expression caractérisant l'hypothèse est particulièrement remarquable. Elle traduit une neutralisation du sens que le terme hypothèse a dans l'esprit des élèves: pour eux ce terme évoque quelque chose que l'on suppose être vrai , ou même qui "doit" être vrai, et que l'on va chercher à confirmer. C'est donc dans la perspective d'une démarche expérimentale, ou dans celle d'une conjecture, que ce terme est entendu. Plus généralement faire une hypothèse revient, d'une certaine façon, à anticiper un résultat. Il est alors difficile, pour les élèves, de comprendre que la démonstration puisse avoir un autre but que celui de vérifier des hypothèses. L'expression "puisqu'ils nous le disent" traduit bien l'accès à un autre sens du terme "hypothèse": celui d'une information qui est donnée et qui a simplement à être utilisée localement, sans qu'elle ait à jouer un rôle de thème organisateur de toute la démonstration.

C'est seulement dans le langage naturel que le jeu des attitudes propositionnelles peut être pleinement manifesté et maîtrisé. Dès lors tout entraînement à l'emploi correct de "mots ou d'expressions mathématiques", à celui du "si...alors..;" (Deledicq, p.224) ne peut d'aucune manière préparer les élèves à entrer dans une démarche de démonstration : il ne peut que conduire à un emploi imitatif de ces expressions indépendamment du statut des énoncés articulés.

Si nous revenons maintenant au cadre particulier des situations géométriques, dans lequel des démonstrations sont ordinairement demandées ou proposées aux élèves de quatrième, il faut reconnaître que les figures géométriques ne peuvent avoir aucun rôle intuitif pour accéder à une démarche de démonstration. Les représentations qui peuvent remplir ce rôle sont des représentations par réseau développées à partir d'A.T.S. Ce que nous avons appelé "l'appréhension discursive des figures" ne peut se faire qu'à travers des représentations de ce type (Duval,1988b). Reste alors le problème du rôle heuristique des figures et celui de l'argumentation qui peut être observée dans une phase de recherche. Cela nous conduit au troisième principe.

III. Séparer strictement les tâches propres à une démarche de démonstration et celles liées à une situation de "problem-solving".

Les tâches spécifiques à une démarche de démonstration sont des tâches d'*organisation*.. Elles supposent que l'on dispose *explicitement de tout le corpus des énoncés* nécessaires pour la démonstration, c'est-à-dire que l'on dispose non seulement des énoncés de départ et de l'énoncé-résultat mais aussi des règles de substitution à utiliser. A aucun moment, dans une tâche d'organisation déductive on ne doit avoir à chercher lequel des théorèmes déjà appris pourrait servir. Toutes les pièces doivent, en quelque sorte, être déjà sur la table, sans aucune hésitation possible.

Or très souvent, sinon presque toujours, au lieu de proposer, pour elle-même, une tâche d'organisation déductive, on la propose *"mélangée" à une tâche de problem-solving* : les élèves doivent trouver ou "voir" la (les) règle(s) de substitution qui donnent les conclusions intermédiaires entre les hypothèses et l'énoncé-résultat. Et on fait comme si la découverte de l'idée de la solution entraînait la compréhension de la démonstration, celle-ci se ramenant alors à une question de rédaction ou de présentation.
Cette subordination de la tâche d'organisation à celle de problem-solving est commune aux deux attitudes didactiques suivantes:

— celle qui consiste, pour introduire les démonstrations, à ne prendre que des situations dans lesquelles la démonstration devient nécessaire, parce que *le résultat n'est pas évident par lui-même*. Par un tel choix, on peut montrer que la démonstration est un moyen pour découvrir des résultats imprévisibles autrement ; mais on ne montre pas en quoi consiste une démarche de démonstration. Cette attitude didactique conduit à l'opinion que Thom exprimait brutalement après les premières tentatives de réforme de l'enseignement secondaire :" Reste que, de toute manière, le problème de géométrie exige beaucoup de temps, d'efforts, une réflexion soutenue, des capacités combinatoires dont peu d'élèves sont capables. Peut-être la géométrie euclidienne est-elle,comme la version latine, un de ces exercices nobles et désuets, réservés à une élite, et incompatibles avec un enseignement de masse" (Thom 1972, p.228).

— celle qui consiste à privilégier la découverte pas à pas des chaînons manquants entre les deux "bouts" de la démonstration, hypothèses et énoncé-résultat. Cette attitude semble s'imposer dès que l'on introduit des représentations par réseau ou dès que l'on veut faire apprendre une méthode. Ainsi, pour Anderson, qui recourt à une représentation par "réseaux logiques", "une bonne approximation" de la tâche de démonstration " est de trouver une chaîne d'inférences légitimes depuis les données posées jusqu'à la conclusions" (Anderson 87, p.112). Les hypothèses et l'énoncé-but étant respectivement placés en haut et en bas de l'écran, il s'agit de les relier progressivement par des "forward deductions" et des "backward deductions" . La démonstration se trouve ainsi ramenée à une tâche heuristique, *l'organisation des énoncés étant automatiquement réalisée par le dispositif informatique*, ou plus généralement par le graphe adopté pour représenter la structure.

Dans ces deux approches, la démarche de démonstration ne se trouve envisagée en fait que sous l'aspect heuristique. Dans un cas on fait comme si l'idée de la démonstration ayant été trouvée, sa rédaction allait de soi ou était secondaire. Dans le second on fait comme si le fait d'avoir produit les chaînons manquants dans un cadre déjà organisé équivalait à une compréhension globale de la spécificité de la démarche exécutée. En particulier le problème de l'interprétation des flèches du réseau et celui de la distinction entre le statut et le contenu d'un énoncé y sont ignorés. Bref, la phase d'organisation déductive des énoncés se trouve soit sous-estimée soit éliminée. *Or d'un point de vue cognitif les tâches d'organisation déductive et les tâches heuristiques ne sont pas de même nature.*
Les premières portent sur un corpus d'énoncés déjà rassemblés et consistent à les ordonner en fonction de leur statut par un jeu de substitutions qui fasse apparaître l'assertion de l'énoncé résultat dès qu'on inscrit les hypothèses de départ. Le premier travail d'axiomatisation connu semble s'être développé d'une façon analogue : il a consisté en une organisation globale de démonstrations déjà faites, en dégageant les propositions les plus fréquement utilisées dans les démonstrations locales et en leur conférant un statut de principe (Heath,1956, p.114-116).

Les tâches heuristiques portent au contraire sur un problème. La découverte de sa solution peut d'ailleurs exiger soit un changement de registre soit le rattachement à une classe de problèmes ou à un pattern. Si on s'en tient au seul cadre de la géométrie euclidienne, la différence entre les deux types de tâche apparaît avec le rôle des figures: elles font très souvent écran à l'organisation déductive des énoncés alors qu'elles constituent une aide heuristique indéniable. Car les propriétés qui peuvent être discernées sur une figure n'ont pas de statut déterminé; et ce qui est demandé comme résultat à démontrer y est visible, donc évident, de par l'existence même de la figure.

Il est d'ailleurs significatif qu'au terme d'un chapitre tout entier consacré à la démonstration et aux activités pouvant y préparer, les auteurs d'un manuel par ailleurs remarquable concluent : "le plus difficile reste à faire : "déduire" c'est-à-dire écrire une suite de phrases avec pour point de départ des hypothèses; pour point d'arrivée ce qui est à démontrer; et où chaque phrase est une conséquence de la précédente" (Deledicq p.232). L'embarras des auteurs se comprend aisement quand on s'aperçoit qu'ils n'ont pas pris soin de distinguer les tâches heuristiques et les tâches d'organisation.

IV. Ne donner aux représentations de la structure profonde qu'une fonction d'objet transitionnel.

Le grand risque dans toute intervention didactique est une multiplication des apprentissages intermédiaires qui fasse perdre de vue ce pour quoi ils sont instaurés. Le risque, ici, serait de subordonner la découverte de la démarche démonstrative à l'apprentissage d'un certain type de réseau. Les représentations ne peuvent être introduites qu'à titre d' "objets transitionnels". Rappelons deux des caractériques de cette notion introduite par Winnicott (1971, p.11-14)
Un objet transitionnel est un objet qui est intermédiaire entre la réalité interne propre à un individu et le milieu extérieur; cet objet, qui permet le passage à l'objectivité, est soumis à un désinvestissement progressif au fur et à mesure que l'individu accède à l' autonomie.

Pour que les représentations par réseau puissent remplir cette fonction d'"objet transitionnel", dans le passage d'une pratique spontanée de discours et de l'argumentation à une démarche de démonstration, plusieurs conditions doivent être respectées dans l'introduction des représentations.

1). Les réseaux doivent être conçus et élaborés par les élèves eux-mêmes. C'est dans cette construction que les élèves se trouvent réellement confrontés aux exigences et au fonctionnement d'une organistion déductive. *Cette tâche de construction exige, en particulier, que les élèves considèrent les énoncés en fonction de leur statut* : placer, dans un réseau, les hypothèses au point de départ et l'énoncé but à l'arrivée est loin d'être une opération d'emblée évidente pour beaucoup.

2). Les réseaux sont pour chacun un moyen d'objectiver et de contrôler soit ce qu'il comprend soit le discours qu'il produit. Par exemple, une hypothèse se trouve-t-elle placée à l'arrivée d'une flèche ? L'observation a montré que les élèves, dans leurs premiers essais, ne respectaient pas tous cette règle de construction qui leur avait été donnée et que ce fut là le moyen de réaliser ce que signifiait concrètement "hypothèse" dans une organisation déductive (Egret 1989).

3). Les réseaux doivent être considérés comme une production "privée", non sujette à une évaluation quelconque. Leur élaboration n'est que le "brouillon" d'un texte de démonstration à écrire. Elle reste l'objet d'un investissement dont chaque élève reste le seul maître.

CONCLUSION

Considérer la démonstration comme un mode de fonctionnement cognitif autonome et non pas comme le genre littéraire des mathématiques conduit à une toute autre approche didactique que celles qui sont actuellement proposées.

L'"apprentissage" de la démonstration consiste d'abord en une prise de conscience d'un fonctionnement de discours différent de celui qui est spontanément pratiqué par la pensée naturelle. En particulier *ce que le mathématicien appelle "déduction" est,* d'un point de vue cognitif, *une substitution d'énoncés* effectuée d'abord en fonction de leur statut. La compréhension opératoire des définitions et des théorèmes suppose que ceux-ci soient vus comme des règles de substitution. Le schéma A.T.S. en représente la structure profonde. La "déduction" est une forme de calcul dont l'organisation n'est pas directement automatisable. Et de ce fait un "enchaînement de déductions" n'est pas soumis au principe de congruence sémantique. Nous sommes donc loin du fonctionnement normal du raisonnement dans le langage naturel. L'"apprentissage" de la démonstration est la prise de conscience de cet écart.

Cela veut dire deux choses. D'une part cet "apprentissage" ne dépend ni de la multiplication d'exercices ni de l'acquisition de certaines procédures logiques considérées comme élémentaires. Depuis certains travaux célèbres de Piaget, on a trop souvent associé, voire confondu, trois processus: le maniement explicite de l'implication matérielle (en oubliant l'implication formelle, l'implication stricte,...), l'accés à "la pensée formelle", et la prise de conscience de ce qu'est une démonstration. En fait d'un point de vue cognitif cette prise de conscience renvoie à des structures différentes et plus riches que celles que Piaget a décrites pour le stade de la "pensée formelle". En outre le maniement explicite de l'implication matérielle présuppose la prise de conscience du fonctionnement de la démonstration comme calcul, il ne peut y conduire, comme on a pu s'en rendre compte dans les différentes tentatives faites ces vingt dernières années.
D'autre part une approche dans laquelle la démarche de démonstration serait trop décomposée ne peut favoriser cette prise de conscience. C'est peut-être le risque de certaines recherches actuelles inspirées de l'Intelligence Artificielle que de méconnaître l'aspect global nécessaire à une prise de conscience. La distinction entre statut et contenu d'un énoncé ne peut avoir de sens que dans une organisation globale.

La prise de conscience de ce qu'est une démonstration ne peut se faire que dans l'articulation de deux registres, dont l'un est l'utilisation que chaque élève fait du langage naturel. La prise de conscience naît de l'interaction qui se produit entre la représentation non-discursive produite et le discours exprimé. Une telle interaction ne peut se produire, ou ne peut avoir la même portée, si représentation et expression sont proposées, entièrement constituées par un autre. D'ailleurs, pour nous limiter au registre des représentations on pourrait montrer que les élèves ne voient dans un schéma, dans un arbre, dans un diagramme, que ce qu'ils sont en mesure de reconstruire effectivement. Présenter des démonstrations sous forme de graphes ne représente qu'un aide très limitée par rapport à une présentation discursive.

La prise de conscience de ce qu'est une démonstration ne peut être liée à un contenu mathématique particulier. Savoir comment fonctionne une démonstration et "savoir démontrer qu'un quadrilatère non croisé est un parallélogramme (ou un rectangle,...)" (Deledicq p. 138) relèvent de compétences hétérogènes. *"Savoir démontrer que ..." renvoie exclusivement à l'aspect heuristique* : les auteurs qui insistent sur ce "savoir démontrer que.." proposent chaque fois plusieurs solutions pour démontrer que... D'ailleurs d'anciens manuels de géométrie utilisaient déjà très systématiquement cette méthode de présentation, toute centrée sur l'heurisitique (Chauvel 1963). Naturellement un tel savoir n'est pas transférable puisqu'il faut expliciter autant de listes différentes de solutions qu'il y a de propositions différentes à démontrer. Les jeunes élèves risquent donc de se trouver devant une accumulation factuelle de connaissances qui peuvent être déduites de différentes manières, sans qu'ils puissent comprendre ce que cela signifie réellement. Savoir comment fonctionne une démonstration renvoie à l'organisation déductive d'un corpus d'énoncés : on reconnaît très rapidement si une suite d'énoncés a ou non la structure d'une démonstration, quelle que soit la présentation choisie et on est alors en mesure d'en contrôler le déroulement.

Un mathématicien pourra être irrité par cette insistance mise sur la tâche d'organisation déductive et par l'indépendance qui lui est ainsi reconnue. Dans une démonstration l'heuristique reste l'aspect le plus important et le plus difficile; et si l'on n'a pas une idée de la solution, le tâche d'organisation déductive devient impossible. Cela n'impose-t-il pas que l'on mette d'abord l'accent sur les tâches de problem-solving ? Sans vouloir traiter ici la question d'un curriculum acheminant à la découverte de la démonstration, contentons nous de rappeler deux observations. La première est que, dans l'enseignement, on insiste déjà beaucoup sur l'aspect heuristique des démonstrations. La seconde est que les élèves assimilent et développent plus rapidement et plus finement des stratégies heuristiques lorsqu'ils ont pris conscience de la façon dont fonctionne une démonstration. Tout se passe comme si les élèves qui ont appris à maîtriser le jeu de l'organisation déductive disposaient d'un cadre pour interpréter correctement, pour généraliser des procédures rencontrées et pour contrôler les solutions obtenues.
Il reste maintenant la seule question importante : quelles sont les réactions et les productions des élèves d'une classe de quatrième dans un enseignement qui a été organisé selon ces quatre principes cognitifs?

REFERENCES

Anderson J.R., 1982, Acquisition of Cognitive Skill, in *Psychological Review*, 89,4, p.369-406.

Anderson J.R., Franklin Boyle C.,..., 1987, Cognitive principles in the design of computer tutors, in Morris P.(Ed.), Modelling Cognition, John Wiley § Sons Ltd.

Chauvel J.,1963, *Méthodes de résolution des problèmes de géométrie*, Robert, Lyon.

Deledicq A., Lassave C.,Missenand C.et D., 1983, *Mathématiques 4ème*, CEDIC.

Ducrot O., 1980, Analyses Pragmatiques, in *Communications*, 32, p.11-60,1980.

Duval R., 1988, Ecarts sémantiques et Cohérence mathématique, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, p.7-25.

Duval R., 1988, Approche cognitive des problèmes de géométrie, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, p.57-74.

Egret M.A., & Duval R., 1989, Faire entrer toute une classe de quatrième dans une démarche de démonstration, in *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, 2, p.41-63

Gaud D.,Guichard J.P., 1984, Apprentissage de la démonstration in *Petit x* ,4, 5-25.

Grize J.B., & Piéraut-le Bonniec G., 1983, *La Contradiction*, P.U.F. Paris.

Heath T.L. (Ed.Trad.), 1956, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol.I,Doner, New-York.

Piaget J., 1967, *Le Jugement et le raisonnement chez l'enfant*, Delachaux-Nestlé, Neuchâtel.

Pluvinage F.,1989, Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie, in *Annales de Didactique et De Sciences Cognitives*, 2, p.5-24

Quillian M.R., 1969, Semantic Memory, in Minsky (Ed.) Semantic Information Processing.

Reynes F., 1981, Langage,synonymie et démonstration, in *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, 331, p.835-851.

Rumelhart D.E., Lindsay P.H., Norman D.A.,1972, A process model for Long Term Memory, in Tulving&Donaldson (Eds.) *Organisation of Memory*, Academic Press, New-York.

Rumelhart D.E., 1975, Notes on a schema for stories, in Bobrow&Collins (Eds.) *Representation and Understanding : studies in Cognitives Sciences.*, Academic Press, New--York.

Thom R., 1972, Les Mathématiques "Modernes": une erreur pédagogique et philosophique, *L'Age de la Science*, III,3, p.225-242.

Toulmin S.E., 1958, *The uses of Arguments*, Cambridge university Press.

Toulmin S.E., Rieke R., & Janik A., 1979, *An Introduction to Reasoning*, MacMillan, New-Yok.

Truong-Cong-Nghe., 1972, *Sur quelques théorèmes importants pour les variétés différentielles infinies*, Diplôme ,Université de Saigon.

Winnicott D.W., 1971, *Jeu et Réalité* (tr. C.Monod et J.B.Pontalis), Gallimard, Paris, 1975.

COMMENT UNE CLASSE DE QUATRIEME A PRIS CONSCIENCE DE CE QU'EST UNE DEMARCHE DE DEMONSTRATION

M-A EGRET et R. DUVAL

Specific tasks about proof were given, after a research work on proof problems in geometry. Several steps in becoming aware of cognitive operations required to do proofs were observed.
Production of representation about deep structure and proof discourse emphasize the important evolution of 13-14 old students.

Dès la classe de quatrième, une des questions posées dans les exercices proposés aux élèves est: " démontrer que...". De nombreux élèves tenteront, en vain, de répondre à cette question et finiront par trouver les exercices de géométrie difficiles et inintéressants. Mais l'apprentissage de la démonstration qu'ils reçoivent en collège leur permet-il de prendre conscience de ce qu'est une démarche de démonstration ?
Amenés à réfléchir à l'activité de démonstration, à la demande du groupe Intelligence Artificielle de l'IREM de Strasbourg, nous avons fait une expérience avec des élèves de quatrième que nous relatons ci-dessous.
Cette expérience a reposé sur les quatre principes de l'article précédent (R. Duval et M.A Egret) que nous rappelons:

1. Représenter la structure sous-jacente à une organisation déductive des énoncés.
2. Articuler la représentation de la structure sous-jacente et l'expression dans le langage naturel
3. Séparer strictement les tâches propres à une démarche de démonstration et celles liées à une situation de résolution de problèmes.
4. Ne donner aux représentations de la structure profonde qu'une fonction d'objet transitionnel.

---

2 (1989) (p.41-64)) IREM de Strasbourg

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Nous avons ainsi dégagé différents seuils que les élèves doivent franchir pour produire un texte dans lequel se reflète l'organisation profonde de la démonstration. Nous proposons de présenter ces seuils en les illustrant par des textes d'élèves.

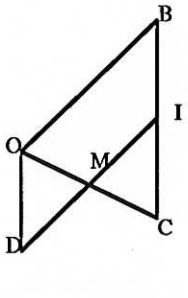
Nous proposons aussi de cerner l'évolution de la classe au travers de quelques textes d'élèves et d'un tableau de résultats pour répondre à la question suivante : un tel enseignement a-t-il permis de supprimer l'incompréhension ou le désintérêt ?

I Description de l 'expérience.

L'expérience concernant l'organisation déductive a eu lieu pendant l'année 87-88 dans une classe de 4° de collège. Elle s'est déroulée pendant une dizaine de séances bihebdomadaires durant le 2° trimestre. Au cours de cette période, les élèves ont été sollicités pour résoudre une dizaine d'exercices nécessitant des démonstrations[1]. La classe, de niveau relativement homogène, c'est-à-dire sans élève en réelle difficulté scolaire, comprenait 27 élèves.

L'expérience proprement dite a commencé à la suite d'un exercice qui exigeait la justification théorique d'un résultat. Dans cet exercice, nous avions repris une proposition de lieu géométrique sur lequel les élèves avaient travaillé auparavant et nous avons formulé l'énoncé suivant :

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC]?



Après un temps de recherche individuelle, une mise en commun des idées trouvées fut faite : il fut proposé de remarquer que OICD était un parallélogramme. Les élèves ayant rédigé au brouillon leur réponse, deux formulations d'élèves avaient ensuite été sélectionnées et écrites au tableau:

(1) *Les numéros des exercices présentés dans la suite du texte correspondent à l'ordre chronologique.*

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Elève **MB** : "OICD est un *parallélogramme parce que* ses *diagonales* [OC] et [ID] *se coupent en leur milieu*".

Elève **SM**: "*Si* M est le milieu de [ID] et *si* OICD est un *parallélogramme alors* M est le milieu de [OC] *parce que les diagonales* d'un parallélogramme *se coupent en leur milieu* " .

C'est alors que nous nous sommes heurtés à l'impossibilité de faire prendre conscience aux élèves de la différence de sens de ces deux phrases. Ceux-ci ne retenaient que la présence, dans le même ordre, des propositions et d'expressions semblables: "OICD est un paralllélogramme", "parce que ...diagonales ...se coupent en leur milieu". Et c'est en vain que nous cherchions à attirer leur attention sur le "si " et à discuter de sa signification. Devant l'échec de toute explication, nous leur avons proposé de représenter ces deux phrases sous forme d'étiquettes reliées par des flèches: ce fut leur première rencontre avec une représentation par réseau. *La réaction des élèves fut alors étonnante : pour la première phrase, la moitié proposait un sens de flèche correct, les 2/3 de l'autre moitié se trompaient de sens, les autres proposaient de mettre une flèche dans les deux sens!* Pour la deuxième phrase (plus complexe), aucun élève n'arriva à proposer un réseau correct et l'élève **SM** elle-même nous dit: " je me rends compte que je n'avais pas compris ce que j'avais écrit". Après les explications, nous avons demandé aux élèves de rédiger la solution de l'exercice : à ce moment -là (début janvier 88), seuls *deux* élèves fournirent une rédaction où la structure profonde de la démonstration était déjà en place avant même le travail sur les représentations de la démonstration, par exemple:

CG : " *1 DIBO est un parallélogramme* donc : - *(DO) // (IB) // (BC)* (car *C, I et B sont alignés)*
- *DO = IB =CI* (car *I est le milieu de [CB])*

2 Si *(DO) // (CI) et*
si *DO = CI alors DOIC est un parallélogramme* (voir *propriété n° 2 du parallélogramme)*

3 Donc *DOIC est un parallélogramme* (voir *1 et 2) et ses diagonales se coupent en leur milieu* (voir *théorème n°1)* . Or *ses diagonales sont PRECISEMENT [OC] et [ID] qui se coupent en leur milieu.* Voilà la réponse à la question .

propriété n°2 : si un quadrilatère a deux côtés opposés égaux et parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

théorème n°1: les diagonales d'un paralléogramme se coupent en leur milieu".

Et *tous les* autres élèves furent au moins convaincus que les deux phrases proposées ne pouvaient pas avoir le même sens.

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

C'est après cette séance que nous avons adopté explicitement et systématiquement la procédure suivante pour tous les exercices de démonstration cherchés en classe :

1) Phase heuristique:
   - recherche de la solution ou de son idée.
   - synthèse des "idées de solution". Les élèves ont donc, à la fin de cette phase, une "idée" d'une figure extraite qui permet de trouver le (ou les) théorème (s) à appliquer.

2) Phase d'organisation déductive :
   - élaboration individuelle (facultative) d'un réseau organisant les hypothèses et les théorèmes utilisés. Quelques exemples de réseau construits par des élèves sont joints en annexe 2 (p. 63)
   - rédaction d'un texte.

Durant les premières séances, un temps aussi important fut accordé à la recherche de la solution qu'à l'élaboration individuelle d'un réseau. Il faut noter que nous n'avons pas vu des élèves proposer des réseaux pendant la première phase, comme au cours de la deuxième phase.
Pour les exercices cherchés "en temps limité" (comme l'exercice 5), les élèves pouvaient accéder à leurs documents où étaient écrits les différents théorèmes connus et des heuristiques rencontrées dans les exercices traités jusqu'alors.

La représentation par réseau étant un moyen personnel d'appropriation de l'organisation déductive, nous n'avons pas dès le départ proposé un "réseau-type". Un dialogue entre l'enseignant qui faisait des remarques sur le réseau proposé et chaque élève, s'est installé. C'est ainsi que nous avons pu observer différentes représentations (du "nuage" à "l'organigramme"). Bien sûr, nous avons proposé à l'ensemble de la classe les idées intéressantes relevées dans des réseaux particuliers.
La représentation par réseau s'est révélée alors un outil de contrôle extrêmement efficace, pour les élèves comme pour nous, de la compréhension des démonstrations proposées. Chacun, élève comme enseignant, peut voir immédiatement les erreurs concernant le fonctionnement d'une démonstration: absence de règles de substitution, flèche reliant deux énoncés de même statut, flèches aboutissant aux hypothèses données dans l'énoncé du problème, énoncé-résultat n'étant pas le point terminal du réseau.

II Les différents seuils de prise de conscience de la structure profonde de la démonstration .

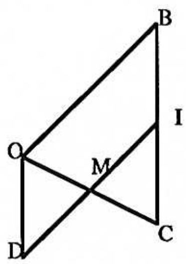
Au fur et à mesure de l'expérimentation, nous avons vu les élèves passer par différents seuils reflétant leur prise de conscience progressive de la structure propre à l'organisation déductive des énoncés. Il faut remarquer que les cinq premiers seuils ne sont pas franchis par les élèves dans le même ordre ni, bien sûr, à la même vitesse.

Premier seuil : Trouver *toutes* les conditions qu'il est nécessaire de prendre en compte pour pouvoir appliquer correctement une règle de substitution.
En effet, il est apparu que la plupart des élèves ayant à leur disposition le bon théorème, n'étaient pas en mesure de l'appliquer correctement. Il y a une difficulté réelle à bien discerner le statut des conditions dans l'énoncé même du théorème.

La difficulté que représente le franchissement de ce seuil est constatée, dans les textes ou réseaux proposés, de trois manières différentes :

a) **la conclusion sert d'hypothèse :**
rappelons la réponse de MB dans l'exercice 1:

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point
tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le
milieu de [OC]?



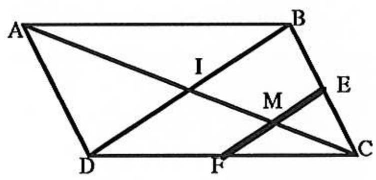
MB : *"OICD est un parallélogramme parce que ses diagonales [OC] et [ID] se coupent en leur milieu M".*

b) Une seule condition est proposée alors que la règle de substitution en demande deux :

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

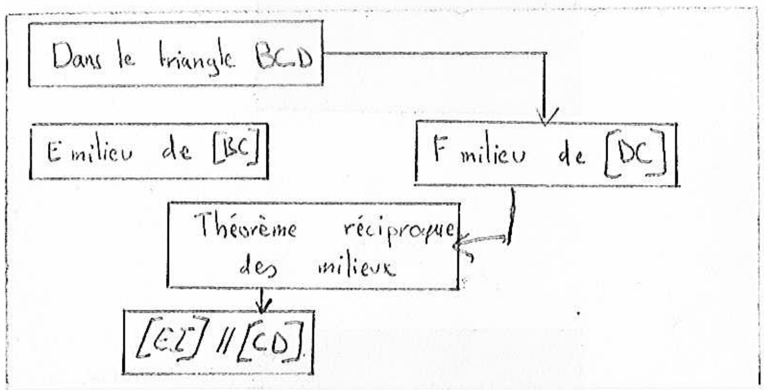
Voici une partie de la réponse proposée pour l'exercice suivant :

Exercice 5:
ABCD est un parallélogramme.
I est le point d'intersection des diagonales, E est le milieu de [CB]et F celui de [CD].
Les droites (AC) et (EF) se coupent en M. Montrer que M est le milieu de [EF].



Il n'y a pas eu de mise en commun dans cet exercice cherché en temps limité.

LS : *"Dans le triangle BCD, E est le milieu de [BC],* donc *d'après le théorème des milieux (EI) // (CD)"*



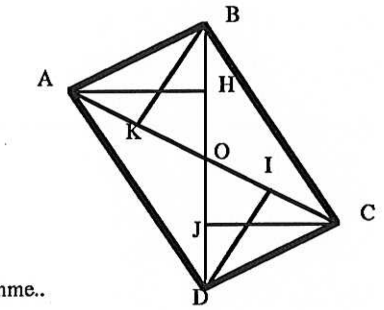
Ici, l'élève oublie la deuxième condition "I milieu de [BD]" qui n'était pas directement exprimée dans l'énoncé (on précisait que I est le centre de ABCD).

c) Le théorème utilisé comme règle de substitution est confondu avec le théorème réciproque et ceci parce que les conditions d'entrée du théorème ne sont pas bien vues.

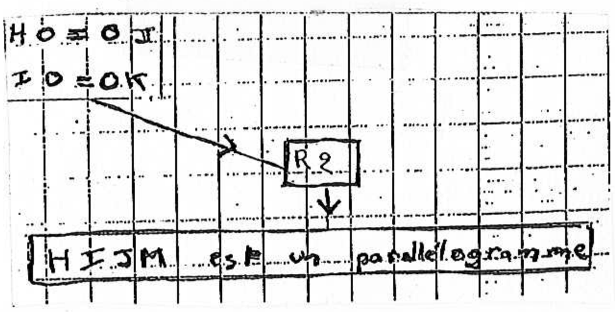
Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

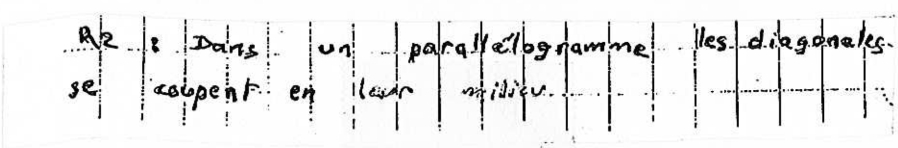
Voici une partie de la réponse proposée à l'exercice 6 :

Exercice 6:
ABCD est un parallélogramme de centre O.
H,I,J,K sont les points d'intersec tion des droites (BD), (AC), (BD) et (AC) et des perpendiculaires menées par A,B,C,D à (BD), (AC), (BD) et (AC).
Montrer que HIJK est un parallélogramme..



MB *"Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu,* donc si *IO=OK et* si *HO=OJ* alors *HJ et IK se coupent en leur milieu O,* donc *HIJK est un parallélogramme."*


HO = OJ
IO = OK
R2
HIJM est un parallélogramme


R2 : Dans un parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu.

Cette confusion est très fréquente pour ce théorème.

Deuxième seuil : Comprendre la structure ternaire de L'A.T.S. (Arc Transitif de Substitution).

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Un travail préliminaire a été fait au premier trimestre- application correcte d'un théorème- dans une situation particulière donnée dont, à titre d'exemples, voici deux énoncés :

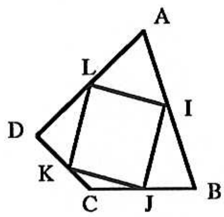
Enoncé: ABCD est un quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux et parallèles. Nature de ABCD?

Enoncé: ABCD est un parallélogramme. Que doit-on savoir en plus pour que ABCD soit un rectangle ?

Mais, dans les premiers textes de démonstration demandés au deuxième trimestre, il est apparu que les théorèmes étaient invoqués sans fonctionner comme règles de substitution ; tous les élèves sauf deux ne les reliaient pas aux hypothèses ou aux données déjà obtenues:

Voici une rédaction proposée pour l'exercice suivant :

Exercice 2:
ABCD est un quadrilatère.
I,J,K,L sont les milieux de AB, BC, CD, et DA.
Démontrer que IJKL est un parallélogramme.



le résultat de la mise en commun a été : "utiliser le théorème des milieux dans deux figures extraites par exemple les triangles ADB et DBC".

GL2 : "Par *le théorème des milieux,* on sait que si *on prend les milieux de deux côtés d'un triangle et qu'on relie ces deux milieux, la droite tracée sera* alors *parallèle au troisième côté. Ce théorème est* applicable car si *on trace AC ou BD, le quadirlatère ABCD sera* alors *divisé en deux triangles (si on trace AC on aura ces deux triangles ABC et ADC). Dans le deuxième cas : ABC et BDC)* donc *IJKL est un parallélogramme."*

On remarquera que ce texte ne mentionne pas les données (I, J, K, L sont les milieux de [AB], [BC], [CD], [DA]) qui permettent de recourir au théorème des milieux dans ce problème. Cette difficulté est perçue immédiatement dans une représentation par réseau puisque des données nécessaires à l'application de ce théorème ne partent aucune flèche vers ce théorème. Certains élèves qui n'ont pas encore franchi ce seuil construisent alors un réseau linéaire qui reflète l'ordre de surface d'un texte de démonstration (cf.annexe 2 p. 64 a).

Troisième seuil : Comprendre que le statut des énoncés est indépendant de leur contenu.

En particulier, il y a la découverte du sens et du rôle d'une hypothèse en mathématique. Ce résultat est d'autant plus intéressant que durant le premier trimestre, nous avions fait un travail pour attirer l'attention des élèves sur ce qu'est une hypothèse en mathématique et sur l'importance de commencer par bien les dégager. Les premières élaborations de réseau ont montré que pour beaucoup ce travail avait été inefficace. Mais après quelques séances, au cours du second trimestre, presque tous découvrirent ce qu'est une hypothèse en même temps que le statut propre des autres énoncés. Non seulement, il n'y eut plus de flèches conduisant à une hypothèse mais nous avons vu apparaître des réseaux en couleur avec une légende qui indiquait la couleur des différents statuts des énoncés (hypothèses, théorèmes, conclusions). Un *quatrième* statut a alors été mis en place par les élèves eux - mêmes: le statut de figure extraite ou *"ce que je vois"* . Il s'agissait de donner un statut aux énoncés de la forme : "je me place dans le triangle BCD" (cf. annexe 2 page 63).

Quatrième seuil : Faire fonctionner plusieurs A.T.S. à la suite.

Nous avons remarqué, au cours de ce travail, la difficulté qu'ont les élèves à respecter la structure ternaire de l'unité de base de la démonstration s'ils doivent l'utiliser plusieurs fois au cours d'une démonstration. Très souvent, le premier arc transitif est complet (conditions, règle de substitution, conclusion) , puis les autres arcs deviennent incomplets.

CLG7: "... on sait que *JL est parallèle à BC.* Donc *JK est parallèle à JL qui est parallèle à BC".*

Ici, le "donc" introduit le dernier pas mais aucune mention n'est faite des données à partir duquel il est effectué.

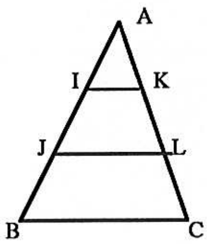
Cinquième seuil : Prise en charge par l'élève de son propre discours.

Ainsi, dans les textes rédigés par les élèves nous trouvons des indicateurs (cf.article précédent) marquant le triple statut des énoncés composant un A.T.S.

Cette organisation ternaire des propositions est :

a) soit exprimée en une seule phrase :

Exercice 7:
ABC est un triangle.
Sur [AB], on place les points I et J tels que: AI=IJ=JB.
Sur [AC], on place les points K et L tels que: AK=KL=LC.
Montrer que les droites (IK), (JL) et (BC) sont parallèles.



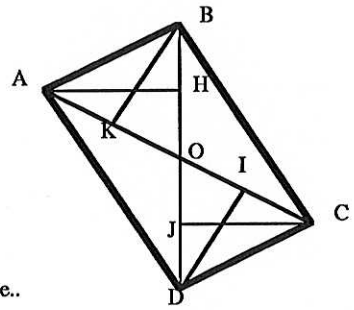
Le résultat de la mise en commun a été : "tracer la droite BK et remarquer que le point d'intersection de cette droite et de JL est le milieu de BK. Se placer alors dans le triangle BKC"

ALA7 : "Comme $AI = IJ = JB$, on sait que *I est le milieu de AJ et* comme $AK = KL = LC$, on sait alors *que K est le milieu de AL ;* on se place alors *dans le triangle AJL, et* par *le théorème des milieux,* on prouve que *IK est parallèle à JL.* On se place maintenant *dans le triangle BIK ; J est le milieu de BI* parce que $BJ = JI = IA$ *; on apppelle M le point sur JL où il coupe KB ;* comme *JL,* donc *JM* car *J, M et L sont alignés, est parallèle à IK (voir avant)* en utilisant *la réciproque du théorème des milieux,* on prouve donc que *M est le milieu de KB....*"

Il suffit de lire les trois premières lignes de ce texte pour voir la différence avec le texte GL2 donné plus haut, lequel invoquait simplement le théorème des milieux. GL2 correspondait au 2° exercice, ALA7 correspond au 7° exercice: un intervalle de deux mois les sépare.

b) soit exprimée en plusieurs phrases, lesquelles acquièrent alors l'autonomie d'un paragraphe :

Exercice 6:
ABCD est un parallélogramme de centre O.
H,I,J,K sont les points d'intersection des droites (BD), (AC), (BD) et (AC) et des perpendiculaires menées par A,B,C,D à (BD), (AC), (BD) et (AC).
Montrer que HIJK est un parallélogramme..



GL6 : " Si *j'arrive à démontrer que les diagonales du quadrilatère HIJK se coupent en leur milieu,* alors *HIJK sera un parallélogramme.*

Texte pour démontrer que HIJK est un parallélogramme :

- *Le segment [BK] est de même longueur que le segment [DI] . Ils sont* également *parallèles* car *lorsque deux droites sont perpendiculaires à une même droite elles sont parallèles entre elles. [DK] et [BI] étant perpendiculaires à [AC], [DK] est parallèle à [BI].* (première A.T.S.)

  Dans un quadrilatère, si *deux côtés sont parallèles et de même longueur,* alors *les deux autres côtés sont FORCEMENT parallèles et de même longueur. Ce quadrilatère est* alors *un parallélogramme. Je trace [DI] et [KB] qui sont parallèles et de même longueur.*

  Donc *BKDI est un parallélogramme* (deuxième A.T.S.). *La diagonale [IK] a 0 pour milieu.*

- *Le segment [AH] est de même longueur que le segment [JC] . Ils sont tous deux parallèles* car *lorsque deux droites sont perpendiculaires à une même droite elles sont parallèles entre elles. [AH] et [JC] étant perpendiculaires à [BD], [AH] est parallèle à [JC].* (troisième A.T.S.)

  Dans un quadrilatère, si *deux côtés sont parallèles et de même longueur ,* alors *les deux autres côtés sont FORCEMENT parallèles et de même longueur. Ce quadrilatère est* alors *un parallélogramme. Je trace [AJ] et [HC] qui sont parallèles et de même longueur.*

  Donc *AHCJ est un parallélogramme* (quatrième A.T.S.). *La diagonale [HJ] a O pour milieu.*

- Si *un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu* alors *ce quadrilatère est un parallélogramme.*
  [IK] et [HJ] se coupant en leur milieu O, le quadrilatère HIJK est un parallélogramme.
  (cinquième A.T.S.) "

Examinons de plus près le texte de GL : en une phrase, elle explique l'idée de la démonstration ; les conclusions partielles (soulignées dans son texte) qui vont lui permettre d'avoir les conditions nécessaires pour appliquer la règle de substitution annoncée sont présentées dans les deux premiers paragraphes. Elle fait corps avec son texte en s'impliquant personnellement "si j'arrive, je trace..." et en utilisant des adverbes comme "FORCEMENT" pour renforcer la conviction du lecteur (et la sienne) lorsqu'elle a utilisé une règle de substitution. Bien sûr, le texte est encore imparfait puisqu'on remarque l'absence de la règle de substitution qui lui permet d'obtenir les conclusions "O milieu de [IK] et de [KJ] ", mais quels progrès depuis son deuxième texte présenté plus haut (p. 48).

Ces remarques ont été faites à propos de tous les textes d'élèves qui avaient pu franchir ces différents seuils: nous relevons alors fréquemment dans les rédactions des phrases dans lesquelles le rédacteur s'implique personnellement dans son texte et utilise souvent des adverbes de modalité.

Pour appuyer cette affirmation, nous avons proposé aux élèves une tâche de "lecture" : il s'agissait d'écrire, à partir d'un réseau que nous avions nous-mêmes constitué et d'une figure, l'énoncé du problème et la démonstration. C'était la première fois que les élèves se trouvaient confrontés à un réseau complet qu'ils n'avaient pas eux-mêmes construit (cf. annexe 1 p. 61). Les 2/3 de la classe ont alors fourni un texte jugé satisfaisant pour lequel on peut faire les mêmes remarques que pour le texte GL6, dont le texte proposé par AE est un exemple :

AE: " a) *Vous tracez un triangle quelconque SRT. Tel que B est le milieu de ST et A milieu de SR. Et tel que M est le symétrique de T par rapport à A et N le symétrique de R par rapport à B. Démontrez que M, N, S sont alignés.*

b) Si *B est le milieu de [ST],* si *M = S A (T) et* si *MST triangle* en passant par *le théorème des milieux* alors *(MS) // (AB).*
Si *A est le milieu de [SR],* si *N = S B (R)* et si *SRN triangle* en passant par *le théorème des milieux* alors *(NS) // (AB .).*

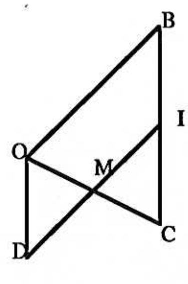
Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Et si *deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles* alors *(MS) // (NS)*. Et comme *(MS) et (NS) ont un point en commun,* donc *M , S, N sont alignés* puisque si *deux droites parallèles ayant un point en commun , elles sont confondues.*

Théorème des milieux : dans un triangle , si on prend le milieu de 2 côtés opposés et que l'on fait passer un segment entre ces deux milieux , alors il sera parallèle au 3° côté."

A titre de comparaison, voici le premier texte écrit par cette même élève pour le premier exercice:

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC]?



le résultat de la mise en commun a été:" remarquer que OICD est un parallélogramme".

AE1: "Si *ODCI est un parallélogramme,* alors *ses diagonales se coupent en leur milieu.*

Explications :

ODCI est un parallélogramme car :

IB = et // DO

IB = CI. Ces deux segments sont confondus, donc *CI = et // DO*

Conclusion:

M est le milieu de [DI] et de [OC] ."

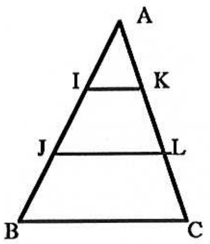
Un sixième seuil:

Avec l'aide de la représentation par réseau, les élèves franchissent les cinq seuils décrits et contrôlent la production de leurs textes en "comprenant ce qu'ils disent".
On remarque alors que la prise de conscience de ce qu'est une démonstration passe par un *sixième* seuil qui est celui de la *rapidité d'écriture des textes* . Pendant la recherche de l'exercice 7, au 3° trimestre, nous avons vu jaillir, après la mise en commun, des textes écrits presque au fil de la plume.

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Voici le texte proposé par l'élève GL dont nous avons déja vu deux rédactions:

Exercice 7:
ABC est un triangle.
Sur [AB], on place les points I et J tels que: AI=IJ=JB.
Sur [AC], on place les points K et L tels que: AK=KL=LC.
Montrer que les droites (IK), (JL) et (BC) sont parallèles.



le résultat de la mise en commun a été: "tracer la droite BK et remarquer que le point d'intersection de cette droite et de JL est le milieu de BK. Se placer alors dans le triangle BKC"

GL7: *"Pour démontrer que IF est parallèle à JL,* on se place *dans le triangle AJL,* on sait que *K est le milieu de AL* et que *I est le milieu de AJ* donc, par *le théorème des milieux,* on en conclut que *IF est parallèle à JL.*
Pour démontrer que BC est parallèle à JL, on se place *dans le triangle BIK,* on sait que *J est le milieu de BI* et que *IK est parallèle à JL* alors *la droite qui passe par J et qui est parallèle à IK coupe KB en son milieu X.*
On se place *dans le triangle BKC , L est le milieu de KC, X est le milieu de BK,* par *le théorème des milieux, XL est parallèle à BC.*
IF et BC étant parallèles à JL, elles sont parallèles entre elles."

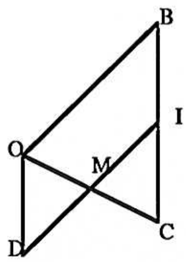
Comme nous félicitions GL d'avoir écrit aussi rapidement une telle rédaction, encore imparfaite cependant, elle s'est exclamée: "MAIS C'EST FACILE !". Ce n'est pas une exclamation souvent formulée en fin de quatrième à propos des démonstrations de géométrie.

Rappelons que ces différents seuils, excepté le sixième, ne sont pas franchis dans un ordre chronologique. Une évolution parallèle se produit chez les élèves sur la compréhension de la structure profonde de la démonstration et sur l'écriture des textes.

III Evolution des élèves.

Pour montrer de façon plus précise et plus globale l'évolution individuelle de chaque élève et l'évolution de la classe, nous avons choisi deux élèves ALE et RH, que nous n'avons pas encore cités jusqu'à présent et nous reproduisons deux de leurs textes: l'un écrit au début de l'expérience et l'autre, soit au milieu (exercice 5), soit vers la fin (exercice 7). Il n'y a alors que dix ou quinze heures d'enseignement qui séparent ces deux textes.Pour les textes des 2/3 des élèves, nous pouvons observer des évolutions semblables.

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC]?



le résultat de la mise en commun a été:" remarquer que OICD est un parallélogramme".

ALE1:

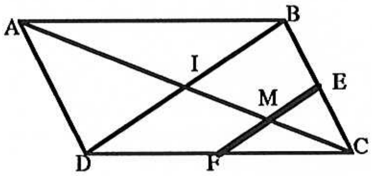
DO = IB	*DO // IB*
IB = CI	*CI // IB*
DO = CI	*DO // CI*
CD // IO	*CD = IO*

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu I. DOIC parallélogramme donc *elles se coupent en leur milieu.*

Ici, ALE n'a pas pris conscience du statut des énoncés, ni du fonctionnement de l'A.T.S.

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Exercice 5:
ABCD est un parallélogramme.
I est le point d'intersection des diagonales, E est le milieu de [CB]et F celui de [CD].
Les droites (AC) et (EF) se coupent en M. Montrer que M est le milieu de [EF].



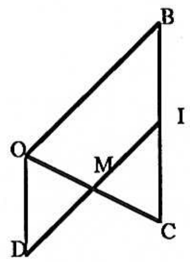
Il n'y a pas eu de mise en commun dans cet exercice cherché en temps limité.

ALE5 : *Pour trouver qu'un point est le milieu de deux segments cela peut être les diagonales d'un parallélogramme. IL SUFFIT QUE JE PROUVE que IE // FC et IF // CE.*
Il suffit d'appliquer *le théorème des milieux dans le triangle DBC.* On sait que *E est le milieu de BC MAIS IL NOUS FAUT UN AUTRE MILIEU . Ce sera I milieu de DB* puisque *I est l'intersection des diagonales d'un parallélogramme et qu'elles se coupent en leur milieu.* Donc *on peut appliquer le théorème des milieux. Dans le triangle DBC, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui passe par le milieu du côté opposé, cette droite est parallèle au troisième côté. JE SUIS SURE QUE IE // FC.*
MAINTENANT JE FAIS le théorème des milieux pour que IF // EC. On sait que *I est le milieu de DB (voir plus haut) dans le triangle DBC.* On sait que *F est le milieu de CD PUISQUE ILS NOUS LE DISENT.* Alors *la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui va au milieu du côté opposé, cette droite est parallèle au 3° côté.* Donc maintenant je sais que *IF // EC et IE // FC donc c'est un parallélogramme.* Et puisque *les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu* alors *M est le milieu de [EF].*

Dans cet exercice (en temps limité), ALE fait un effort extraordinaire pour nous expliquer qu'elle a compris ce qu'était une démonstration. Elle nous décrit son cheminement en n'hésitant pas à procéder par conditions suffisantes et à appuyer ses conclusions de verbes ou adverbes qui soulignent sa conviction (cf. article précédent).

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC]?



le résultat de la mise en commun a été:" remarquer que OICD est un parallélogramme".

RH 1 : *AVEC DESSIN: les droites CO et DI se coupent en leur milieu* donc *CIDO est un parallélogramme.*

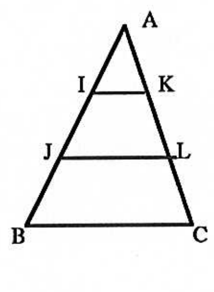
SANS DESSIN: [CI] et [IB] forment un même segment [CB] donc *[CI] même longueur que [DO]*, sachant que *IDOB forme un parallélogramme;*

donc *[CI] // [DO]*

donc *OICD est un parallélogramme.*

Ici RH a bien l'idée de la déduction: "donc, sachant que" mais aucune règle de substitution n'est invoquée. La prise de conscience du statut des énoncés n 'est pas faite: il ne voit pas les mêmes hypothèses avec ou sans "dessin".

Exercice 7:
ABC est un triangle.
Sur [AB], on place les points I et J tels que: AI=IJ=JB.
Sur [AC], on place les points K et L tels que: AK=KL=LC.
Montrer que les droites (IK), (JL) et (BC) sont parallèles.



Le résultat de la mise en commun a été: "tracer la droite BK et remarquer que le point d'intersection de cette droite et de JL est le milieu de BK. Se placer alors dans le triangle BKC"

RH7: - On sait que *AI = IJ* donc *I milieu de AJ* .

On sait que *AK = KL* donc *K milieu de AL.*

En sachant *ceci* et que *AJL triangle* , alors avec *le théorème des milieux* , j'en conclus que *IK // JL.*

- On sait que *BJ=JI* donc *J milieu de BI.*
  En sachant *ceci* et que *BKI triangle* , que *IK//JL* et que Z *est le point d'intersection de JL et de BK* , j'en conclus avec *le théorème réciproque des milieux que Z milieu de BK.*
- En sachant que *BKL triangle* , que Z *sur JL*, que Z *milieu de BK et* que *L milieu de KC* , j'en conclus avec *le théorème des milieux que JL // BC.*
- En sachant que *JL//BC* et que *IK // JL* , alors je conclus que *IK //JL //BC.*

Ici RH a manifestement pris conscience de ce qu'est une démonstration: les paragraphes indiquent chaque A.T.S., les conditions nécessaires pour le dernier pas (ici des conclusions intermédiaires) sont reprises dans la dernière phrase comme hypothèses; seule la dernière règle de substitution n'est pas invoquée (transitivité du parallélisme).

Nous avons demandé aux élèves qu'ils nous "prêtent" leur classeur afin de pouvoir examiner leurs réseaux et en analyser les caractéristiques. Voici, à travers le tableau suivant, le profil de l'évolution de la classe. Pour établir ce tableau, nous avons pris un exercice en temps limité, au cours duquel il n'y a pas eu de mise en commun au terme de la phase heuristique, contrairement aux autres séances. Du fait de cette absence de mise en commun des idées de solution, les élèves qui n'avaient rien trouvé se sont trouvés démunis pour la phase d'organisation. D'où l'apparition dans le tableau de la ligne "blocage" au niveau de l'heuristique. Mais la plupart des élèves, quand il y avait mise en commun, produisaient des réseaux linéaires avec A.T.S. La difficulté pour ces élèves n'est plus la démarche de démonstration mais la découverte de l'idée. Ces élèves savent ce qu'est une démonstration mais n'ont pas d'idée pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment. Nous préférons dans le cadre de cet article présenter un tableau contenant aussi les résultats pour un exercice fait dans les conditions ordinaires d'un devoir noté, et non pas dans celles d'une expérience indépendante d'une évaluation scolaire.

Les énoncés des problèmes 5 et 6 ont déjà été rencontrés (p. 56 et p.51). Voici l'énoncé du problème 3 :

"le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Les points I et J sont les milieux de [DC] et [AB]. Les points P et Q sont les points d'intersection des droites (AI)et (CJ) avec la droite (BD). Montrer que les segments [DP], [PQ] et [QB] ont même longueur".

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

	problème 3	problème 5	problème 6
réseau maîtrisé	3	11	15
réseau linéaire avec A.T.S.	7		4
réseau linéaire organisation de surface	7	5	3
réseau par blocs	2		
blocage au niveau de l'heuristique		10	2
réseau ininter-prétable	5		
rien (absence)	3	1	3

Il est important de noter qu'aucun élève n'a baissé de catégorie. Nous pouvons affirmer que les 2/3 des élèves de cette classe étaient capables en fin d'année de produire des textes montrant qu'ils avaient compris ce qu'était une démonstration, et les rédactions fournies pour l'exercice 7 nous le confirment. Quant aux élèves qui n' avaient pas encore le sens de l'organisation déductive, non découragés, ils ont réclamé de faire deux heures supplémentaires pour "pouvoir eux aussi comprendre "! Nous avons revu ces élèves cette année en troisième et nous pensons pouvoir encore permettre le franchissement des différents seuils à quelques-uns.

CONCLUSION

D'un point de vue mathématique, les textes obtenus sont loin de satisfaire les règles d'économie habituellement respectées pour la présentation des démonstrations. Ces textes présentent beaucoup d'expressions objectivement inutiles pour la démonstration. Mais, c'est là justement leur grand intérêt: ils manifestent le plaisir que les élèves ont eu d'entrer dans une démarche de démonstration. Ces textes montrent que la découverte de la "rigueur" d'une démonstration appelle, au lieu de l'exclure, la liberté de l'expression personnelle. L'économie d'écriture est venue ensuite pour certains. Par exemple, **CA** se contente de noter :

"on refait la même opération pour..."

Nous avons, bien sûr, essayé d'éviter que ces élèves ne soient bloqués pendant la phase heuristique: pour cela, durant le premier trimestre, nous leur avions fourni les figures prototypes associées aux théorèmes proposées par le groupe I.A. de l'IREM de Strasbourg (D.Guin) et, durant le deuxième trimestre les élèves ont relevé des listes de procédures simples rencontrées au cours d'exercices pour démontrer certaines propriétés. Nous avons alors constaté que cette aide n'était pas suffisante pour les élèves qui n'avaient pas franchi les cinq premiers seuils décrits plus haut. Ainsi, dans l'exercice 5, l'élève **EF** fait un catalogue de tout ce qu'elle a pu déduire jusqu'à présent sans parvenir à une conclusion.

Dès le premier exercice de géométrie, ces mêmes élèves, maintenant en troisième, ont eu la réaction immédiate suivante: chercher tout le corpus d'énoncés permettant de faire la démonstration. Et dès la deuxième séance, ils ont réclamé plus d'exercices et des exercices plus difficiles. Peut-être faut-il chercher l'explication de cette demande un peu inhabituelle dans la remarque de **EO**: "Je ne sais pas pourquoi mais j'aime bien la géométrie, ce n'est pas comme l'algèbre."

REFERENCES

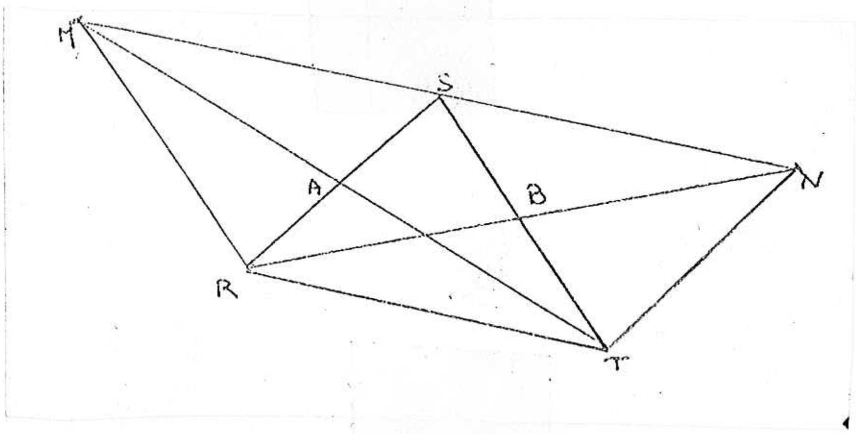
DUVAL R. et EGRET M.A : *L'organisation déductive du discours : Interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives Vol. 2 p. 25 - IREM de Strasbourg

GUIN D. : *Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives Vol. 2 p. 89 - IREM de Strasbourg

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Annexe 1

Epreuve de contrôle : une tâche de lecture.

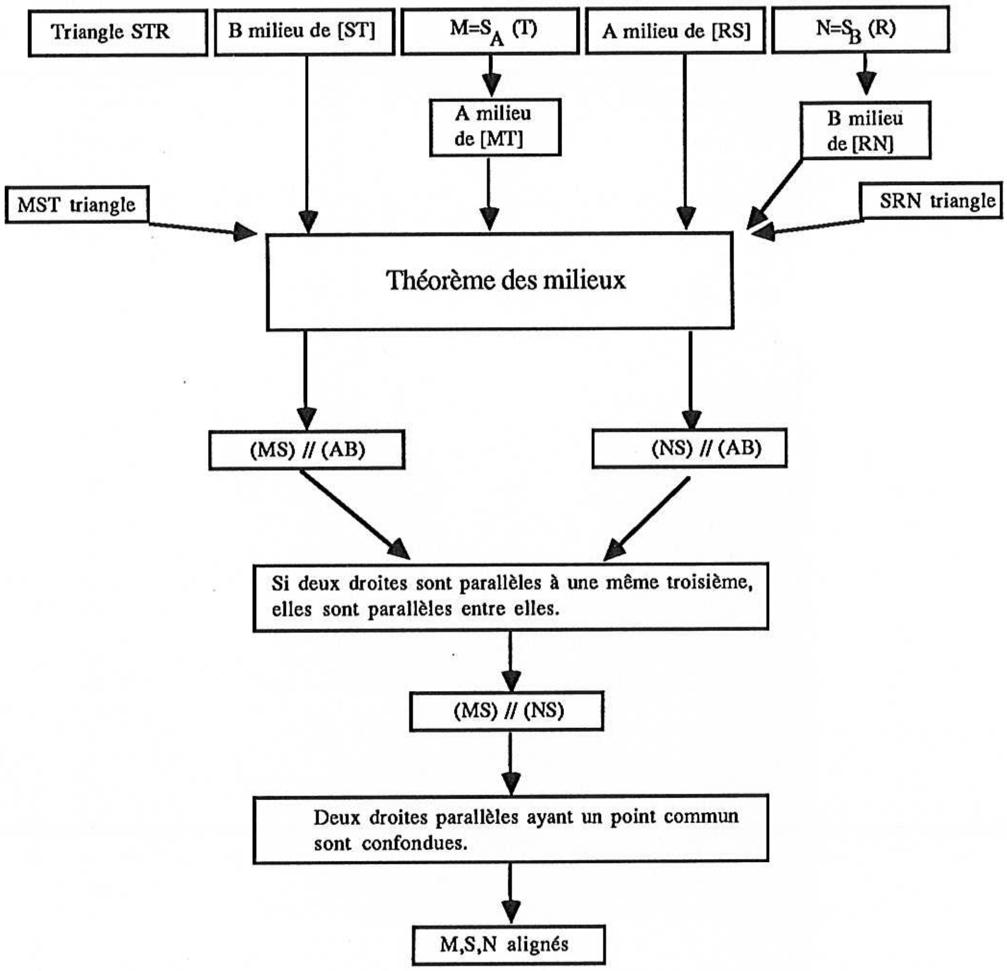


a) **Proposer un énoncé du problème** dont la démonstration est présentée sous forme du réseau proposé sur la page suivante.

b) **Rédiger** ensuite la **démonstration** du problème

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Voici le réseau à partir duquel les élèves avaient à reconstituer l'énoncé du problème et le texte de la démonstration correspondant :

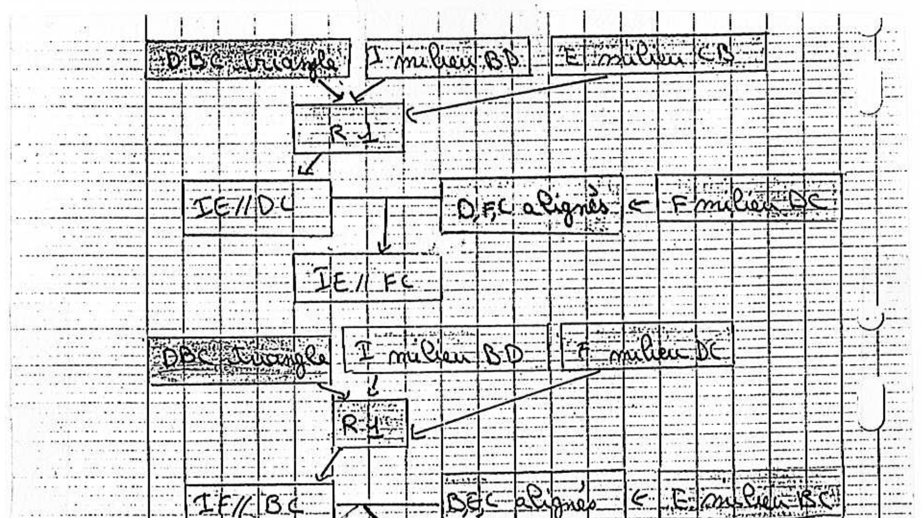


Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

Annexe 2

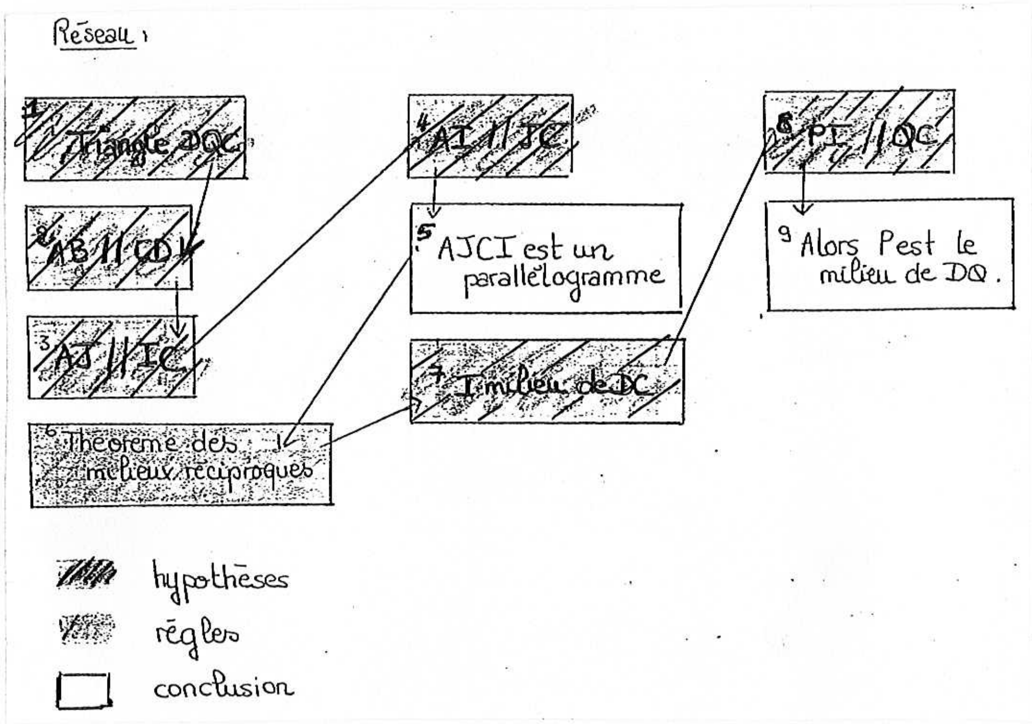
Quelques exemples de réseau construits par les élèves:

Exercice 5 (cf. p 56)



Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration

Exercice 3 - page 58

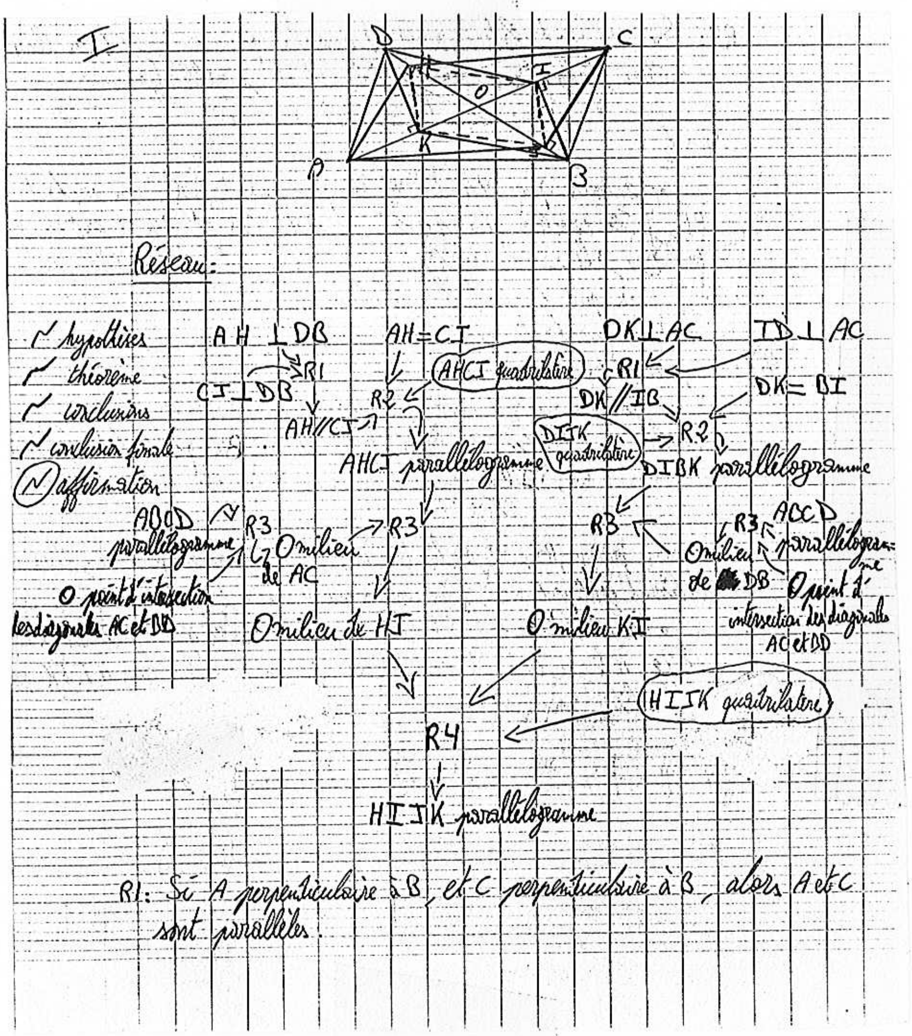


Organisation linéaire de la structure de surface d'une démonstration.
Ce réseau est équivalent au texte suivant :

Je prends	le triangle DQC
On a	AB // CD
On a aussi	AJ // IC
et	AI // JC
Donc	AJCI est un parallélogramme
D'après	le théorème des milieux réciproques,
si on a	I milieu de DC
et	PI // QC
Alors	P est milieu de DQ.

Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration

Exercice 6 page 51



EMPIRISME ET GEOMETRIE DE L'ESPACE

CHEZ LES ELEVES AYANT ENTRE 11 ET 18 ANS

G. AUDIBERT

Les observations que les élèves peuvent faire commandent leur démarche de résolution dans les problèmes de géométrie. D'où le rôle important que les vérifications et les contradictions, rencontrées entre leurs attentes et leurs constatations, peuvent jouer dans l'apprentissage. Cet article illustre cette démarche sur deux problèmes de géométrie dans l'espace, en présentant le déroulement du travail de recherche de quelques élèves.

Au cours de nos recherches[(1)] en Géométrie Euclidienne, nous observons et caractérisons un certain nombre de démarches de pensées qui nous semblent fondamentales dans l'apprentissage de la géométrie.

Nous présentons ces démarches principalement dans le champ de la géométrie de l'espace.

Nous parlons successivement de :

- Démarches expérimentales,
- Vérifications,
- Contradictions observées
- Empirisme et démonstration

(1) Ces recherches sont menées sous la responsabilité de l'auteur par un groupe de l'I.R.E.M. de Montpellier. Ce groupe était constitué en 1987-1988 de Mesdames Y. Bellecave , A. Chevalier et L. Dray , et de Messieurs A. Amsalem , G. Audibert , N. Bascou, F. Bonafé , R. Brunet , H. Jabot ; A. Lerouge , T. Murgier , J. Naudeillo ; B. Pelouzet.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2(1989) (p. 65-88) IREM de Strasbourg

**Empirisme et géométrie de l'espace
chez les élèves ayant entre 11 et 18 ans**

1. DEMARCHE EXPERIMENTALE

Au cours de la résolution d'un problème, un sujet peut avoir une démarche expérimentale. La démarche expérimentale (D.E.) est caractérisée par l'énonciation d'une hypothèse, suivie d'une observation accompagnée ou non d'une réalisation nouvelle, et se terminant par une prise de décision portant sur la valeur de vérité de l'hypothèse.

Nous avions constaté l'existence de démarches expérimentales à propos de deux expérimentations de Géométrie Euclidienne plane, portant sur les problèmes CRI et QAT et analysés respectivement par G. Audibert (1982) et A. Chevalier (1984). Nous avions même affirmé qu'un tiers des élèves observés au cours de ces deux expérimentations utilisaient une démarche expérimentale. Une autre conclusion fut la suivante : dans chaque classe des élèves pratiquent la démarche expérimentale.

Examinons maintenant à propos de la D.E. deux autres expérimentations portant sur les problèmes FIL et SEC.

Le problème FIL a été proposé à 69 élèves, répartis comme suit : 9 élèves de 6ème, 10 de 5ème, 10 de 4ème, 10 de 3ème, 10 de 2nde, 12 de 1ère, et 8 de terminale.

Les élèves étaient en situation de recherche individuelle du problème. L'énoncé du problème FIL est le suivant :

Une salle de classe a pour dimension 7m de long, 5m de large et 3m de haut. Un fil est tendu verticalement du plafond au sol. Une balle de revolver traverse la salle. Elle part d'un des coins du plafond et aboutit à la base d'un mur en son milieu. La balle se déplace en ligne droite à partir de ce coin et coupe le fil à 1,5m au-dessus du sol. A quelle distance de chaque mur le fil était-il placé ?

Pour présenter la solution de ce problème, nous pouvons séparer la salle de classe en deux, de telle sorte que la trajectoire soit la diagonale d'une de ces demi-salles. Alors le fil est au milieu de la demi-salle.

Examinons le travail de l'élève appelé MAR.

Cet élève âgé de 18 ans est en classe de première. MAR a dessiné au début de sa recherche un rectangle ABCD représentant une vue dessus ainsi que deux segments AI et AJ représentant deux trajectoires possibles pour la balle. La figure 1 ci-dessous reproduit son dessin :

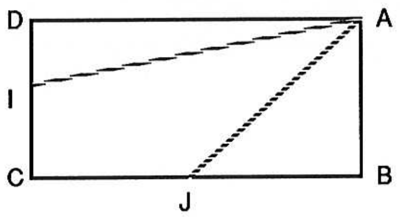


Figure 1

Il annonce à la onzième minute, en parlant du fil : *il sera placé au centre*". Puis il s'aperçoit que les trajectoires AI et AJ ne passent pas par le centre du rectangle. Et en montrant le centre du rectangle il dit *"c'est pas possible"*.

Nous avons là un exemple type de ce que nous appelons une démarche expérimentale, avec l'énonciation d'une hypothèse "le fil du centre", une observation portant sur la figure 1 et une décision "c'est pas possible".

Lors de l'analyse du problème FIL (cf. G. Audibert 1985) nous avons indiqué, avec le tableau 2, pour chaque classe le nombre d'élèves qui ont au cours de leur recherche utilisé au moins une fois une démarche expérimentale telle que nous l'avons définie.

Classe	6ème	5ème	4ème	3ème	2nde	1ère	Term	Total
Nombre d'élèves ayant utilisé au moins 1 fois la démarche expérimentale	3	3	3	4	3	3	2	21
Nombre total d'élèves	9	10	10	10	10	12	8	69

Tableau 2

Ce tableau montre que la démarche expérimentale est pratiquée dans toutes nos classes ;

elles apparaît pour environ 30 % des élèves.

Le problème SEC a été proposé au mois d'octobre à 82 élèves répartis comme suit : 1 élèves de 6ème, 9 élèves de 5ème, 11 de 4ème, 11 de 3ème, 13 de 2nde, 13 de 1ère, 11 de Terminale C ou D, 13 de première année de Deug. A. Cette expérience a été partiellement analysée par A. Chevalier (1988).
Les élèves ont tout d'abord été invités à une observation réalisée devant eux et ainsi commentée :

"On coupe une pomme de terre en deux morceaux (de tailles inégales) au moyen d'un couteau. On applique une des deux surfaces plates obtenues sur un tampon encreur puis sur une feuille de papier posée sur la table. On obtient une tache".

Ils ont alors été mis, pendant près d'une heure, en situation individuelle de recherche du problème dont l'énoncé est le suivant :
"On a un cube en bois de 10 cm de côté. On le partage en deux morceaux d'un coup de scie. Le coupe de scie passe par les trois points A,B et C indiqués sur le dessin du cube ci-joint. Le point A est à 3 cm d'un sommet. Le point B est à 8 cm su même sommet. Le point C est à 8 cm du même sommet. On applique une des deux surfaces obtenues sur un tampon encreur et on l'imprime sur une feuille. On demande de dessiner exactement le contour de la tache obtenue".

Un dessin leur était donné, il est représenté à l'échelle 1/2 par la figure 3. La maquette en carton d'un cube de 10 cm d'arête leur était fourni. La réalisation de cette maquette avait été volontairement approximative. Lorsque l'élève estimait avoir résolu le problème, l'expérimentateur fournissait un deuxième dessin, réprésenté à l'échelle 1/2 par la figure 4, et disait : "l'énoncé qui est écrit au tableau reste valable : voilà une nouvelle feuille. Peux-tu chercher ?".
La tache qui doit être dessinée est un triangle isocèle de dimension $\sqrt{128}$, $\sqrt{73}$,$\sqrt{73}$, c'est-à-dire environ 11,3 cm, 8,5 cm, et 8,5 cm, dans les deux cas bien évidemment.

(Voir page suivante les figures 3 et 4).

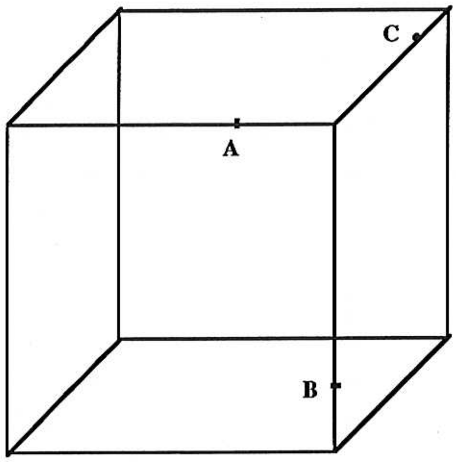


Figure 3

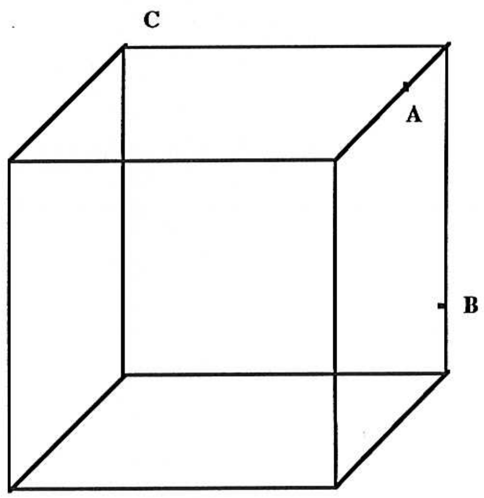


Figure 4

Examinons le travail de l'élève appelé BRU. Cet élève est en classe de quatrième ; il est âgé de 12 ans et 9 mois.

Au bout d'une dizaine de minutes de recherches il mesure sur le dessin (figure 3) AB puis BC puis AC.

BRU - *Là ça fait huit et demi* (il parle de AB) *; là ça fait six et demi* (il parle de AC) *; mais il faut tenir compte de l'inclinaison. Si c'était divisé par deux ça serait trei ze.*

BRU veut dire que, le rapport de réduction sur les fuyantes étant de 1/2, il se peut que le segment dessiné AC ait une longueur égale à la moitié de la longueur réelle. Il a donc une hypothèse : AC sur le dessin est la moitié de la longueur réelle du segment. Il prend alors en main le cube en carton et reporte au double décimètre les points A,B et C très correctement. Il construit sur la maquette les segments AB, AC et BC avec la règle. Il mesure le segment AC sur la maquette : il mesure le segment AC sur le dessin (figure 3). Nous avons là une observation accompagnée de réalisations nouvelles.

BRU - *C'est pas divisé par deux.*

Il constate que le rapport des mesures n'est pas 2. Il rejette son hypothèse ; c'est la décision concluant cette démarche expérimentale. Nous pouvons conclure à propos du problème SEC que la démarche expérimentale est pratiquée dans toutes nos classes ; elle apparaît chez environ 25 % des élèves.

Le nombre des élèves utilisant la D.E. est certainement supérieur, toutefois le triplet constitué par l'hypothèse, l'observation et la décision est dans bien des cas mal explicité, aussi ne peut-on pas en conclure de façon catégorique dans ces cas l'existence d'une D.E.

Nous étudions dans le paragraphe suivant les vérifications qu'on aurait pu classer parmi les démarches expérimentales mais que nous avons classé séparément.

2. VERIFICATIONS

Considérons la procédure suivante :
L'élève dessine une figure. Il mesure ensuite sur cette figure des distances et des angles ; mais ces mesures n'ont pas été utilisées pour la réalisation de la figure. Il compare ces mesures à des valeurs attendues.

Nous disons alors que l'élève procède à une vérification. A. Chevalier (1984) a pu constater à propos du problème QAT que dans 90% des cas, l'élève effectue une vérification avant de conclure que la construction qu'il a réalisé est conforme ou non à son anticipation.

Le problème SEC, présenté dans le précédent paragraphe, doit amener l'élève à construire un triangle ; il entraîne ainsi de nombreuses procédures de vérifications.

Examinons, à propos du problème SEC, le travail de l'élève appelé DOR. Cette élève est en classe de troisième ; elle est âgée de 14 ans et 1 mois. Observant le dessin qui lui a été fourni (figure 3), elle réalise un nouveau dessin que reproduit à l'échelle 1/2 la figure 5. Elle trace une droite parallèle au bord latéral de la feuille, place les points 0 et b avec 0b = 8cm, trace ensuite le segment a0 perpendiculaire à 0b avec a0 = 3cm.

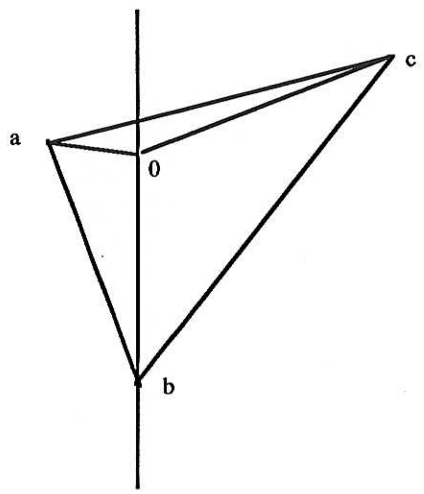


Figure 5

Elle mesure ensuite différents éléments de la figure 5 qu'elle compare aux mesures correspondantes de la figure 3.
Elle mesure notamment l'angle $\widehat{a0c}$ qu'elle compare à l'angle correspondant à la figure 3.

DOR - Ca fait 150° ouf ! c'est juste !

Nous avons là une procédure de vérification.

Soulignons qu'une vérification est très proche d'une démarche expérimentale. L'élève fait d'abord une hypothèse, même si cette hypothèse n'est pas explicite : mon dessin sera identique à une figure dont les dimensions sont connues. Son observation consiste ensuite à mesurer certains éléments du dessin qu'elle réalise. Elle prend enfin une décision : accepter ou refuser son dessin. C'est ainsi que DOR prolonge sa déclaration précédente en ajoutant :

DOR - C'est la coïncidence, sinon j'aurais effacé et refait le dessin.

Dans la D.E. comme dans la vérification, l'observation est un moment déterminant. L'élève compare ses observations et les contraintes qu'il s'impose ou que lui impose le problème, regarde si elles ne sont pas contradictoires. Il fait un grand usage d'une notion que nous allons maintenant examiner et que nous appelons : contradiction observée.

3 CONTRADICTIONS OBSERVEES (CO)

Nous avons longuement étudié cette notion à propos de la géométrie euclidienne plane (cf. G. Audibert 1982 et A. Chevalier 1984). Nous sommes en présence d'une contradiction observée (CO) quand l'élève exprime le rejet d'une réalisation parce qu'elle ne satisfait pas certaines contraintes qu'il veut respecter. Les deux démarches expérimentales présentées dans notre premier paragraphe s'appuient sur des C.O.

La quasi-unanimité des élèves utilisent des processus débouchant sur des C.O. - C.Morin (1986), lors de l'analyse d'une expérimentation portant sur un problème lié à la proportionnalité arrive aux mêmes conclusions. Nous devons toutefois distinguer les contradictions logiques (CL), définies par l'expérimentateur ou le professeur, des CO observées par l'élève. Donnons deux exemples extraits de l'expérimentation portant sur le problème SEC (cf. paragraphe 1) et permettant de comprendre la distinction entre CO et CL.

L'élève que nous appelons VIR, est en classe de troisième ; elle est âgé de quatorze ans et sept mois. Au cours de sa recherche l'élève mesure sur le dessin (cf. figure 3) les segments représentant les arêtes du cube. Certains mesurent 10 cm, d'autres 5 cm. Elle est très surprise.

VIR - *Normalement là, c'est 10 cm puisque c'est un carré et là ils ont fait 5 cm !*

Elle poursuit :

VIR - *Je vais dessiner à partir de ce cube (la maquette en carton) et pas à partir de ça (le dessin en perspective).*

Ce rejet explicite du dessin caractérise une CO.

Mais de notre point de vue la perspective cavalière n'est pas une représentation logiquement contradictoire. Il n'y a donc pas de CL. Pourtant en ajoutant à la perspective cavalière une contrainte telle que "le dessin doit conserver les longueurs", alors nous avons une CL. En définitive le processus suivi par l'élève aboutit à une CO, et alors l'expérimentateur peut analyser la situation en faisant ou en ne faisant pas intervenir une CL.

Dans un deuxième exemple la CL a été programmée a priori par l'expérimentateur, mais n'a donné lieu à aucune CO. Il s'agit dans ce cas de la recherche de PAT, qui est en classe de troisième et qui a quatorze ans et 5 mois. Au bout d'une demi-heure de travail PAT a trouvé, comme dessins des deux sections demandées, deux triangles identiques aux triangles ABC des deux dessins en perspective cavalière (figure 3 et 4) ; ses deux sections sont donc différentes. Ce qui est logiquement contradictoire avec les données du problème, puisque ces sections différentes doivent être les mêmes. L'expérimentateur essaie d'obtenir une CO de la part de l'élève fondée sur cette CL. Il n'obtient pas cette CO ; pour l'élève les triangles sont pareils, ils n'ont "pas la même forme, mais le même volume"(sic).

L'expérimentateur insiste.

Expérimentateur *- Y a quelque chose qui colle pas.*

Mais PAT l'interroge peu convaincu.

PAR - *Et je dois trouver ce qui colle pas ?*

Ajoutons encore que, d'une manière générale, la recherche et l'analyse des CO permettent de mieux comprendre les démarches de nos élèves. Le travail mené en collaboration avec F. Bonafé et publié par Hermès en 1987 illustre cette dernière affirmation.

4 EMPIRISME ET DEMONSTRATION

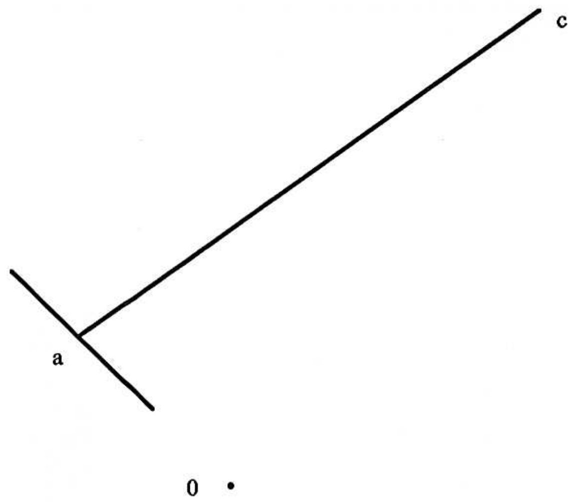
J. Naudeillo a rendu compte du travail d'un élève cherchant le problème SEC que nous avons présenté dans le 1er paragraphe (cf. Groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie 1984). Nous allons analyser le travail de cet élève que nous appelons STE, qui est âgé de treize ans et un mois, car il est à la fois clair, significatif et représentatif. Nous examinons ensuite des résultats plus globaux portant sur les problèmes FIL et SEC.

a - Les minutes 1' 5' 7' 8' 9' 10' 12' 14' 16' 18' 19' 22' désignent approximativement le temps écoulé entre le début de la recherche et le moment que nous décrivons.

1' - L'élève trace à la règle sur le dessin qui lui a été donné (figure 3) les côtés du triangle ABC. Puis il prend en main le cube en carton. Il observe alternativement, en faisant des aller-retours, le dessin (figure 3) et la maquette (cube en carton). Il se sert du pouce et de l'index pour comparer la distance de A au sommet sur le dessin et sur la maquette. Il relit l'énoncé en comparant maquette et carton.

Le travail de cet élève commence donc par une période d'observation portant sur les éléments matériels à sa disposition : dessin et maquette.

5' - STE demande une équerre ; cette équerre graduée lui servira aussi de double dé cimètre. Sur une feuille blanche il place deux points 0 et c à 8 cm l'un de l'autre. Puis, avec l'équerre, sur la perpendiculaire à 0c, il trace un petit segment et un point a situé à 3 cm de 0. Il trace enfin le segment ac. Il place les lettres a et c sur son dessin. Il a ainsi réalisé la figure 6.



STE vient donc d'obtenir en vraie grandeur le côté AC de la section cherchée.

Figure 6

7' - L'élève place alors un côté de son équerre le long de a0 sur la figure 6, le point c et l'équerre étant de part et d'autre de a0. Il a l'intention de construire un angle droit a0b avec un point b situé à 8 cm de 0. Mais le point b sort des limites de sa feuille de dessin. Il abandonne donc cette construction qui devait lui permettre de reconstituer la face du cube portant le segment AB en vraie grandeur.

L'élève ne se rend pas compte que la perspective cavalière qui est à sa disposition (figure 3) lui fourni en vraie grandeur la face portant AB. Il ne se rend pas compte, non plus, que la figure 6 lui fournit aussi la vraie grandeur du côté AB, égal à AC. STE est très actif ; il travaille avec soin, rapidement, manipulant sans aucune hésitation les instruments.

8' - *STE - Je vais recommencer pareil que la figure 6.*

Il trace alors un segment horizontal a0 de 3 cm. Il trace ensuite, un moyen de l'équerre un petit segment orthogonal à a0 et place sur ce segment le point b situé à 8 cm de 0. Il écrit les lettres a et c sur son dessin. Il a ainsi réalisé la figure 7.

9' - L'élève mesure alors ab sur la figure 7.

STE - Alors ça fait 8,5 cm.

Il note ce nombre à côté du segment ab sur la figure 7 ; puis mesure ac sur la fi gure 6 et marque 8,5 à côté de ce segment tout en commentant.

STE - ... pareil, oui.

L'expérimentateur ne sait pas si l'élève vient juste de constater l'égalité AB = AC ou s'il fait une vérification de cette égalité. Dans les deux cas, l'observation joue un rôle important et aucun raisonnement n'a été explicité au préalable.

10' - *STE - Et puis, je vais faire c maintenant.*

Il commence alors la figure 8. Il trace un segment 0c de 8 cm, puis à l'équerre un morceau de perpendiculaire sur lequel il place le point b. N'étant pas satisfait de sa mesure, il déplace légèrement ce dernier point et obtient b' à 8 cm de 0. Il mesure cb' trouve 11,5 cm et note ce dernier résultat à côté de b'c sur la figure 8. Il essaie de dessiner avec une précision de l'ordre du millimètre. Son triangle a la même inclinaison que la figure 3.

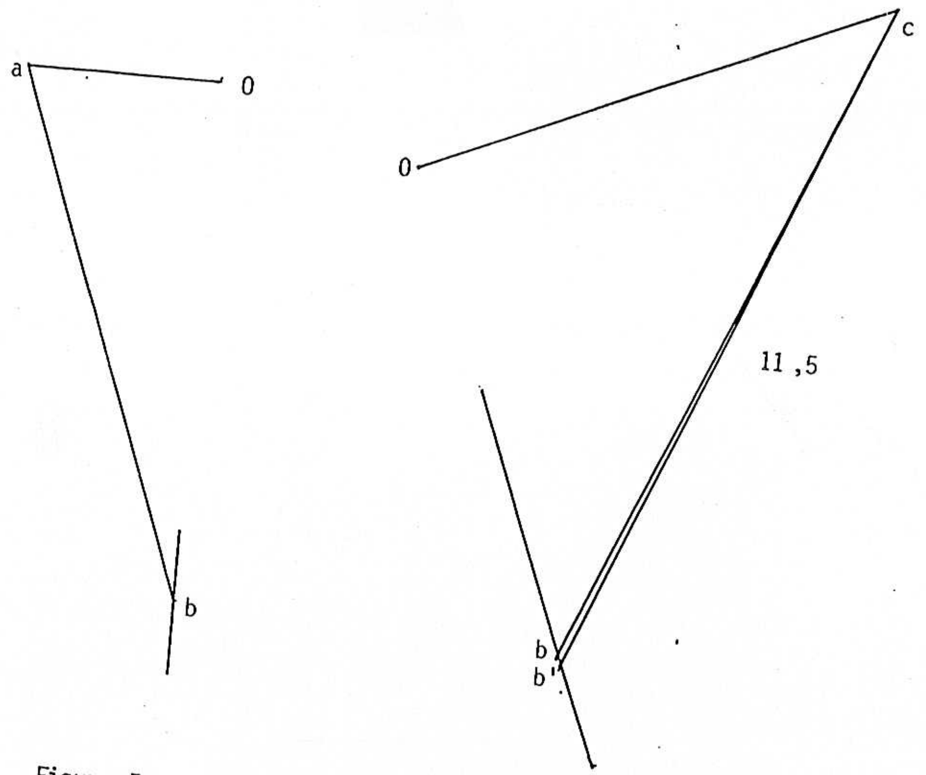


Figure 7

Figure 8

12' - *STE - Maintenant je vais essayer de les rassembler.*

Il construit alors la section ABC en vraie grandeur. Pour cela il trace d'abord le segment AB de 8,5 cm. Puis en utilisant le compas avec successivement des ouvertures de 11,5 cm et de 8,5 cm, il trace deux arcs de cercles qui se coupent en C. La figure 9 reproduit son dessin à l'échelle 1/2. Son segment AB a sur la figure 9 la même inclinaison que sur la figure 3. Il affirme alors, avec raison, avoir obtenu la section cherchée.

Remarquons toutefois que le tracé du triangle ABC nécessite deux écartements de compas 11,5 puis 8,5, alors qu'un seul suffit (8,5) si on commence par tracer le segment AC.

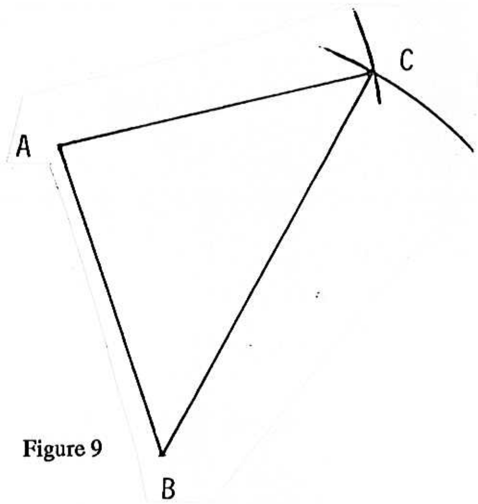


Figure 9

14' - L'expérimentateur lui propose alors la deuxième perspective cavalière (figure 4) en lui rappelant qu'il s'agit du même énoncé. L'élève garde à sa disposition ses réalisations précédentes.

- *STE* - *Bon je vais recommencer.*

Il trace le triangle ABC sur la feuille distribuée (figure 4). Sur une feuille blanche il dessine le segment a'0' de 3 cm ; puis place le point b' à 8 cm de 0', la droite b',0' étant perpendiculaire à a'0'. Il obtient ainsi a'b' un premier côté de la section cherchée. Cela lui donne la figure 10.

Il réalise donc une construction parfaitement inutile puisque cette longueur a'b' est déjà bien déterminée grâce aux figures 3,5 ou 7. L'élève agit donc sans grande économie.

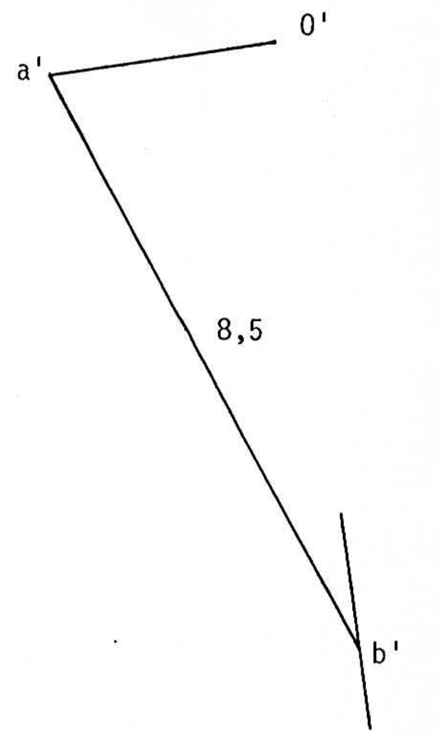


Figure 10

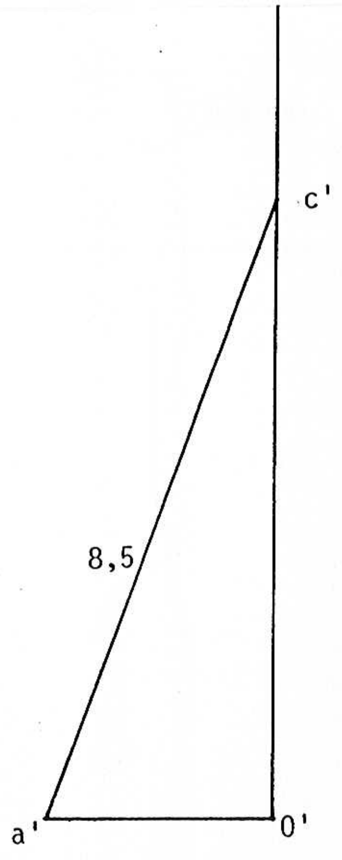


Figure 11

16' - ***STE** - Maintenant je vais tracer AC.*

Il trace le segment a'0' de 3 cm, puis sur la perpendiculaire à a'0' il place le point c' à 8 cm de 0'. Il trace enfin le segment a'c' et il désigne ses extrémités au moyen des lettres A et C. Il a ainsi obtenu la figure 11. Il note 8,5 à côté des segments a'b' et a'c' des figures 10 et 11, désignant ainsi les mesures de ces segments.

***Expérimentateur** - Tu as mesuré en même temps ? Je n'ai pas bien vu.*

***STE** - Non, je n'ai pas mesuré, c'est pas la peine.*

Expérimentateur - Précise-moi, je n'ai pas bien vu, tu as mis 8,5 sans mesurer.

STE - Parce que j'ai déjà mesuré, c'est là (il montre son travail correspondant à la figure 3) ; c'est les mêmes mesures.

Aux minutes 14' et 16' il a recommencé des dessins inutiles. Un raisonnement préalable lui aurait évité ce travail ; il ne l'a pas fait. Pourtant, après ces deux dessins (figures 10 et 11) il ne mesure plus. Il se rend compte que le premier problème lui fournit ces mesures. Les observables, surabondants en toute logique, sont nécessaires à l'élève. Mais, on voit aussi petit à petit arriver des raisonnements (implicites), une économie d'actions. Est-ce une démonstration qui s'ébauche ?

18' - L'élève réalise alors la construction de b'c' au moyen de la figure 12 (à l'échelle 1/2). Il écrit 11'5 à côté de b'c'. Puis vérifie que le segment b'c' mesure bien 11'5 cm.

Il attribue donc au segment b'c' une mesure de 11,5 cm par simple déduction ; le raisonnement est là, toujours implicite. Pourtant il vérifie ; les observables ne sont donc pas négligés.

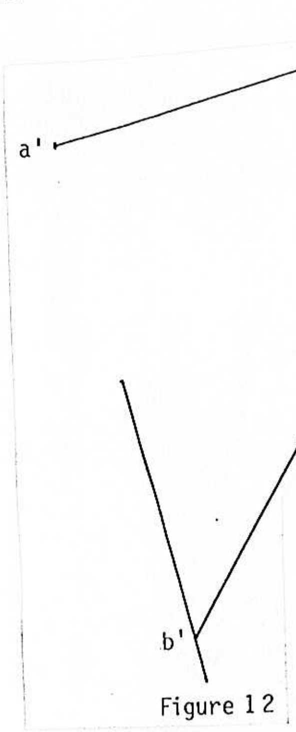


Figure 12

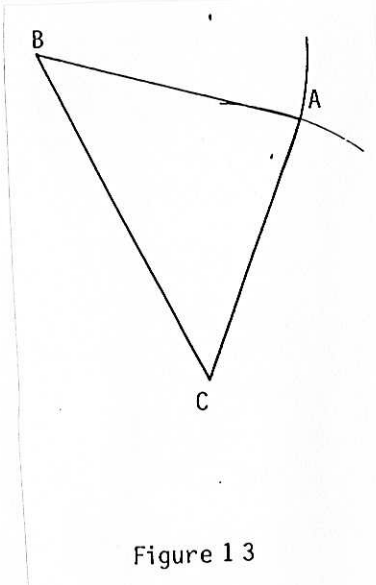


Figure 13

19' - L'élève construit au compas la section ABC en vraie grandeur. Pour cela, il trace d'abord le segment BC de 11,5 cm. Puis avec une seule ouverture de 8,5 cm et en deux coups de compas il obtient le point A. La figure 13 reproduit son travail à l'échelle 1/2. Il a terminé avec succès.

Il a donc un tracé plus économique si on le compare à celui de la minute 12'

22' - L'expérimentateur lui demande de rassembler les deux résultats. L'élève trie les feuilles en commentant.

> ***STE** - Alors ça c'est le premier et ça c'est le second.*
>
> ***Expérimentateur** - Tu n'as pas de commentaire à faire sur les deux problèmes ?*

Aucune remarque de la part de l'élève. Manifestement le rapprochement entre les deux situations n'a pas été fait. L'expérimentateur décide d'insister.

> ***Expérimentateur** - Tu m'as dit en faisant tes tracés dans le deuxième cas que ce n'était pas la peine de mesurer ; ça m'intrigue.*
>
> ***STE** - Parce que j'avais mesuré dans le premier exercice et c'étaient les mêmes mesures.*

L'expérimentateur rapproche les deux feuilles distribuées et soudain :

> ***STE** - Hé, c'est le même, c'est le même.*
>
> ***Expérimentateur** - Comment ?*
>
> ***STE** - C'est le même exercice, mais sur un autre point ; au lieu d'être celui-là (il parle du sommet du cube associé aux trois points ABC dans le cas de la figure 3) c'est sur celui là (il parle de l'autre sommet correspondant à la figure 4).*
>
> ***Expérimentateur** - Tu me dis que c'est le même exercice, essaie de préciser.*

STE - *Ben, il faut faire la même chose, mais seulement, c'est pas sur le même coin que le dessin est fait..*
Expérimentateur - *Tu as quand même fait deux tracés.*

STE - *Oui, parce que je ne m'en étais pas rendu compte.*

Expérimentateur - *Mais alors qu'est ce que tu peux dire, finalement parce que tu as deux tracés.*

STE - *Ben c'est le même triangle.*

Il prend alors les deux feuilles (figures 9 et 13) et par transparence à la lumière du jour, il superpose ses deux triangles.

L'ensemble du travail de STE met en évidence l'importance des observables . Il dessine, il mesure, il observe tout au long de sa recherche ; dans les dernières secondes il vérifie encore par transparence, malgré ses certitudes, l'égalité des deux triangles (figure 9 et 13). Les premiers raisonnements (implicites) permettant une économie d'action n'apparaissent nettement qu'à la minute 16' (il ne mesure plus). A la minute 19' son tracé est plus économique, à la minute 22' poussé par l'expérimentateur, il reconnait par déduction l'égalité des deux sections. La dernière discussion (minute 22') montre combien déductions et raisonnements sont lents à se mettre en place. En fin de parcours, nous avons les éléments d'une démonstration puisque les deux sections sont reconnues comme identiques et puisque les côtés sont déterminés en vraie grandeur. Pourtant aucune démonstration n'est explicitée.

Les travaux d'élèves que nous avons examinés, comme celui de STE, nous font penser que l'apprentissage de la démontration doit donner une grande place aux observables et peut s'appuyer sur l'intérêt du raisonnement permettant des économies d'actions.

b - Nous allons examiner les élèves qui réussissent à résoudre le problème SEC. Il y en a 37 sur un total de 82 élèves.

Nous disons qu'un élève a réussi s'il obtient, comme section dans le cas du premier dessin en perspective fourni (figure 3), un triangle solution correcte avec une bonne approximation (moins 3 mm d'erreur pour un côté). Nous distinguons quatre procédures de réussite désignées sommairement par les mots : Maquette, Faces, Pythagore, Trigonométrie. Dans la procédure-maquette, pour obtenir les côtés du triangle, l'élève a pris des mesures directement sur la maquette. Dans la procédure-faces pour obtenir les côtés du triangle, l'élève a effectué des mesures sur les faces du cube dessinées en vraie grandeur. Dans la procédure-Pythagore pour obtenir les côtés du triangle, l'élève les a calculé en utilisant le théorème de Pythagore. Dans la procédure-trigonométrie pour obtenir les côtés du triangle, l'élève a développé des calculs trigonométriques.

Le tableau 14 donne pour chaque classe, en colonne, le nombre d'élèves ayant réussi et la procédure avec laquelle il a réussi.

SEC	5	4	3	2	1	T	D
MAQUETTE	1	3		3	3		
FACES	1	2	2		1		
PYTHAGORE					3	5	8
TRIGONOMETRIE						1	3
TOTAL	2/10	5/11	2/11	3/13	7/13	6/11	11/13
%	20	45	20	25	55	55	85
	25 %				65 %		

Tableau 14

Il ressort de ce tableau que les réussites au problème SEC en 5ème, 4ème, 3ème, 2nde sont obtenues uniquement par des mesures directes sur la maquette ou sur les dessins des faces en vraie grandeur.

Les réussites en terminale et Deug sont obtenues uniquement par des calculs.

Les performances de notre classe de quatrième ne sont pas très différentes de celles de terminales.

La prégnance des observables (mesure directe) est encore forte jusqu'à notre classe de première.

Dans notre enseignement des mathématiques quelle attitude devons nous avoir face à cette dichotomie entre mesure et calcul, et quelle importance devons nous donner aux observables de l'élève ?

c - Nous allons maintenant examiner les élèves qui réussissent à résoudre le problème FIL. Il y en a 31 sur un total de 69 élèves. Examinons tout d'abord les travaux de deux élèves appelés respectivement CIR (élève de quatrième âgé de 14 ans et 4 mois) et PAS (élève de seconde âgé de 16 ans et 2 mois). CIR réalise avec des instruments de dessin la figure 15. C'est une vue de dessus de la salle de classe.

Il a placé le fil au milieu I de la trajectoire. Il mesure au double décimètre les distances de I aux quatre côtés du rectangle et explicite sa réponse : 2,5 m, 2,5 m, 1,7 m, 5,3 m.

Nous disons que CIR a trouvé la solution du problème approximativement au moyen de mesures au double décimètre effectuées sur un dessin utilisant ses instruments de dessins.

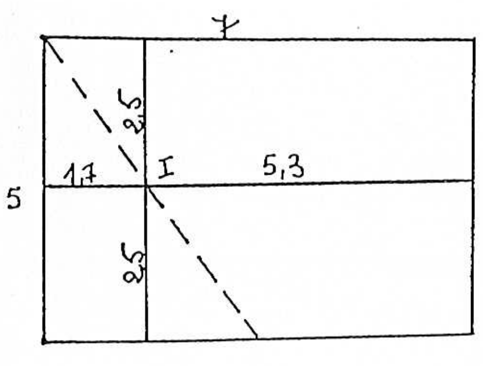


Figure 15

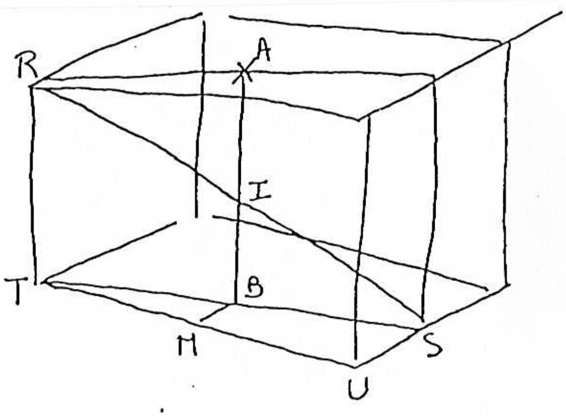


Figure 16

PAS réalise une perspective "axonométrique" que reproduit la figure 16. Il explique que le fil AB passe par le milieu I de la trajectoire RS ; donc B est au milieu de TS ; B se projette en M milieu de TU et BM est la moitié du SU. Donc la distance du fil au premier mur est égal à BM = 2,5/2 = 1,25 m ; pour le mur opposé, il obtient 1,25 + 2,50 = 3,75 m. La distance aux deux murs est donc pour lui de 3,50 m.

Nous disons que PAS a trouvé la solution exacte du problème au moyen d'un raisonnement accompagnant un dessin et non en lisant une mesure effectuée au double décimètre.

Nous pouvons nettement distinguer parmi les 31 élèves qui ont trouvé la solution ceux qui comme CIR ont mesuré et ceux qui comme PAS ont raisonné.

Nous distinguons donc deux procédures de réussite :

- la bonne réponse est obtenue par des mesures
- la bonne réponse est obtenue par un raisonnement et non par des mesures.

Le tableau 17 donne pour chaque classe, en colonne, le nombre d'élèves ayant réussi et la procédure avec laquelle il a réussi.

FIL	6	5	4	3	2	1	T
Par des mesures	2	2	2	2	0	0	0
Par raisonnement et non par mesure	3	2	1	3	6	3	4
TOTAL	5/9	4/10	3/10	5/10	7/10	3/12	4/8
%	55	40	30	50	70	25	50
		45%				45%	

Tableau 17

Un élève n'a pas été classé dans ce tableau car il a obtenu une solution au moyen d'un calcul approché.
Il ressort de ce tableau que les élèves qui ont résolu le problème FIL se partagent nettement en deux catégories distinctes. Ceux qui obtiennent la réponse en effectuant des mesures et ceux qui raisonnent sans mesurer. Nos élèves du second cycle n'utilisent que le raisonne-

ment pour donner une réponse. Il semble que l'abandon dans le second cycle de la procédure-mesure empêche une amélioration du score par rapport au premier cycle (le pourcentage de réussite reste 45 %).

Aussi retrouvons-nous une question analogue à celle concluant l'analyse de la réussite dans le problème SEC. Dans notre enseignement des mathématiques quelle attitude devons-nous avoir face à cette dichotomie entre mesure et raisonnement, et quelle importance devons-nous donner aux observables de l'élève ?

CONCLUSION

Nous prenons comme définition d'un *observable* celle de J. Piaget (1975) : "un observable est ce que l'expérience permet de constater par une lecture immédiate des faits donnés eux-mêmes".

Les démarches expérimentales, les vérifications et les contradictions observées sont des processus faisant appel de façon prépondérante à des observables de l'élève.

Dans son étude des processus de preuve N. Balacheff (1988) introduit quatre type de preuve : empirisme naïf, l'expérience cruciale, l'exemple générique, l'expérience mentale. Il y est question de vérification, d'expérimentation, d'objet, d'action. Les observables des élèves y jouent donc un rôle indéniable.

Les observables prépondérant dans les démarches de pensée de nos élèves n'ont pourtant pas un statut très clair dans notre enseignement. La démarche expérimentale par exemple n'est quasiment jamais présentée à nos élèves.

La principale difficulté de la géométrie de l'espace provient à notre avis du manque d'observables fiables. Pour y pallier nous estimons indispensable l'apprentissage d'un dessin technique. Différentes études faites à ce jour nous amènent à penser *que la perspective cavalière* est nécessaire à la maîtrise de l'espace dans le cadre d'un enseignement de masse (cf. G. Audibert, B. Keita 1988).

Empirisme et géométrie de l'espace
chez les élèves ayant entre 11 et 18 ans

Une technique de dessin, comme la perspective cavalière permet un apprentissage de la géométrie de l'espace où observation active et raisonnement déductif vont interagir de façon fructueuse. Le dessin ne pouvant pas être en correspondance bijective avec l'objet, le raisonnement devient nécessaire. La démonstration est motivée par la recherche d'une économie d'action. Elle n'est plus un simple artifice magistral mais une nécessité. Nous devons toutefois respecter la laborieuse élaboration de la démonstration à partir des observables ; notre paragraphe 4, Empirisme et démonstration, a mis en évidence le rôle des observables dans la lente élaboration du raisonnement.

Le dosage entre observation et raisonnement peut varier comme le montrent les trois problèmes I, II et II énoncés ci-après.

I Trois sommets d'un cube constituent un triangle. Quelle est la nature de ce triangle, est-il rectangle, isocèle, équilatéral ou autre ?

II En quels points d'une diagonale du cube se projettent orthogonalement tous les sommets de ce même cube ?

III Peut-on couper un cube par un plan de telle sorte que cette section soit un pentagone régulier ?

La place du raisonnement progresse d'un problème au suivant. On peut répondre partiellement au problème I, accessible à des élèves de cinquième, par la lecture directe du dessin. Le problème II accessible à des élèves de seconde, nécessite observables et raisonnements. Le raisonnement pourra seul justifier la solution du problème III que nous réservons aux élèves de terminale.

REFERENCES

AUDIBERT G. 1982 -
Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane, volumes 1 et 2, nouvelle édition : publication de l'APMEP 1984 n° 56 (831 pages).

AUDIBERT G. 1985 -
Représentation de l'espace et empirisme dans le problème FIL. Publication IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier (79 pages).

AUDIBERT G. - BONAFE F. 1987 -
Apprentissage de la perspective cavalière dans Rabardel P. , Weill-Fassina A. *Le dessin technique. Apprentissage, utilisation, évolution.* Paris-Londres-Lausanne, Hermes, pages 139 à 147.

AUDIBERT G. - KEITA B. 1988
La perspective cavalière et la représentation de l'espace. Dans *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques.* Actes du colloque de Sèvres Mai 1987. Editions La Pensée Sauvage - Grenoble.

BALACHEFF N. - 1988
Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège. Thèse de doctorat es Sciences. Université J. Fourier Institut National Polytechnique. Grenoble.

CHEVALIER A. - 1984
Le problème QAT : symétrie, vérification, algorithme de construction, la pratique de l'élève. Edition IREM-USTL - Place E. Bataillon Montpellier (442 pages).

Groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie - 1984
Intégrale des protocoles du problème SEC (à consulter sur place à l'IREM de Montpellier Place E. Bataillon - 963 pages).

MORIN C. - 1986
Etude du comportement d'élèves du second degré devant un problème lié à la proportionnalité. IREM - USTL, Place E. Bataillon Montpellier (78 pages).

PIAGET J. - 1975
L'équilibration des structures cognitives, problème central du développement - Paris - PUF.

Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie

D. GUIN avec la collaboration du groupe IREM Intelligence Artificielle de Strasbourg

La réalisation d'un logiciel d'aide à la démonstration en géométrie nécessite à notre avis une modélisation de la compréhension d'un énoncé et de l'activité de démonstration . Les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie sont actuellement élaborés à partir d'une analyse préalable insuffisante sur les plans cognitif et didactique de l'activité de démonstration géométrique : c'est , dans la plupart des cas , le fonctionnement du système informatique (et non le fonctionnement humain) qui détermine la modélisation de l'activité . Nous présentons ici quelques éléments d'analyse cognitive et didactique nécessaires à la modélisation de cette activité. Ces réflexions conduisent naturellement à l' ébauche d'un cahier des charges pour un logiciel d'aide à la démonstration en géométrie .

Introduction

Jusqu'à ces dernières années , les logiciels d'aide à l'enseignement s'étaient essentiellement développés dans le domaine algébrique plus proche du calcul automatique que la géométrie . Avec l'apparition de langages informatiques tels que PROLOG et de systèmes experts de démonstration automatique de théorèmes (D.Pastre) , de nombreux chercheurs se sont lancés dans l'élaboration de logiciels d'aide à la démonstration en géométrie à un niveau élémentaire . Ces nouveaux outils , en permettant une implémentation informatique , faisaient naître l'espoir de débloquer , grâce à l'ordinateur , la situation actuelle : la démonstration en géométrie au niveau 4ème est une activité intellectuelle qui présente de grosses difficultés pour les élèves .

Nous avons participé à cette recherche en réalisant une simulation des processus de lecture et compréhension d'un énoncé de géométrie (D.Guin , F.Rousselot) . Il s'agissait , dans un premier temps , de réaliser la simulation en ce qui concerne l'expert ou l'élève idéal . Cette phase de compréhension de l'énoncé nécessite une modélisation de l'organisation des connaissances qui nous paraissait indispensable pour la réalisation d'un tel logiciel . Nous avons abordé ensuite la modélisation de l'activité de démonstration (toujours pour l'expert) et

---

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p. 89-109) IREM de Strasbourg

nous avons été amenés à expliciter les démarches faisant appel à des "évidences" ou des "réflexes" (qui ne le sont pas pour les élèves) .

Ces modélisations nécessitent d'exprimer précisément les modèles de fonctionnement de l'activité et de les mettre en oeuvre pour simuler le comportement : c'est le rôle de la *psychologie cognitive* . Nous avons du constater que les recherches dans ce domaine étaient insuffisantes en ce qui concerne l'activité de démonstration en géométrie . C'est pourquoi nous avons sollicité l'aide de R.Duval pour pouvoir atteindre notre objectif : les deux articles de ce volume (R. Duval et M.A Egret *loc.cit.*) en sont la preuve concrète .

Les résultats mis en évidence par cette analyse cognitive nous ont obligés à remettre en question notre manière d'enseigner : ils nous permettaient de construire des situations pouvant rendre l'activité de démonstration plus accessible par les élèves . Nous présenterons succintement dans les deux premiers paragraphes nos réflexions sur ce sujet.

Nous ferons ensuite dans le troisième paragraphe un rapide survol des logiciels d'aide à la démonstration en géométrie . Nous essaierons de dégager dans quelle mesure ils prennent en compte une modélisation de la compréhension d'un énoncé et de l'activité de démonstration , et quels sont leurs choix didactiques .

Nous terminerons par une ébauche de cahier des charges d'un logiciel prenant en compte les résultats mis en évidence dans les deux premiers paragraphes .

I Expliciter l'activité de démonstration : quelques éléments d'analyse cognitive

Nous présenterons succintement quelques résultats de nos réflexions , pour une lecture plus détaillée , il est possible de consulter différents articles (Groupe Intelligence Artificielle , R.Duval et M.A Egret *loc.cit.*). Un résultat essentiel de R. Duval porte sur la distinction dans l'activité de démonstration entre l'*organisation déductive des énoncés* et la *découverte de la solution* ou de son idée *(tâche heuristique).*

a) organisation déductive

Nous laisserons de côté l'organisation déductive qui est l'objet de l'article précité , en rappelant que cette activité ne débute , pour R. Duval , qu'à partir du moment où l'on dispose de *tout le corpus d'énoncés (théorèmes à appliquer)* nécessaires à la démonstration. Puisque nous ne nous intéressons pas ici à la mise en forme en langage naturel , il s'agit alors :

- d' *organiser* ces énoncés dans un certain ordre ,
- de *contrôler pas à pas les substitutions* correspondant à l'application d'un théorème (A.T.S.) .

La première activité nécessite d'avoir compris les *règles du jeu* de la démonstration, les différents *statuts* des assertions de l'énoncé du problème . La deuxième activité demande d'avoir une connaissance *procédurale* (Groupe Intelligence Artificielle) et non seulement déclarative des théorèmes : il s'agit du premier seuil défini dans (M.A Egret et R. Duval *loc.cit.*) qui exige une connaissance *opératoire* des théorèmes . Nous verrons dans le paragraphe suivant comment on peut faciliter ces prises de conscience .

b) découverte de la solution

La résolution de problème présente des difficultés spécifiques dans le domaine de la géométrie , nous avons donc essayé d' *expliciter* notre démarche d' "expert". Il nous est apparu que nous utilisions , sans nécessairement les expliciter ,un certain nombre de règles pour *orienter* la recherche (en *éliminant a priori* une partie de la base de connaissances à la lumière des hypothèses) et effectuer le *choix* des connaissances à appliquer . Ces règles ne nous permettaient pas de trouver instantanément , mais de définir *un plan d'action* et d'aboutir à une solution éventuellement après plusieurs essais infructueux de tels plans . Celles-ci sont rarement enseignées , car elles ne sont en général même pas explicitées .

Définir un plan , c'est *imaginer* un chemin possible entre les hypothèses et la conclusion . Nous considérons donc que la découverte de la solution nécessite la recherche d'un plan (qui *n'aboutit pas forcément* à la solution contrairement à un algorithme) et que les heuristiques sont des aides à la recherche d'un plan , même si, pour l'expert , tout ce travail est implicite . G. Polya a déjà longuement développé cette idée (G.Polya) . Il nous faut donc expliciter notre fonctionnement pour résoudre un problème de géométrie : *élaboration* d'un plan permettant de s'engager dans une direction précise quitte à en changer s'il y a impasse . Nous avons déjà mis en évidence quelques éléments d'une *méthode* (Groupe Intelligence Artificielle) destinée à la gestion des heuristiques et explicitant une démarche efficace d'approche des problèmes dans le domaine spécifique de la géométrie élémentaire . Cette méthode devrait en particulier permettre d'élaborer un plan d'action en fonction du *contexte* et de décider l'abandon éventuel d'une voie initialement choisie .

Nous sommes conscients qu'il n'est pas simple de mettre en évidence des heuristiques efficaces et que beaucoup d'expériences dans ce domaine ont échoué . Alan Schoenfeld (A. Schoenfeld) explique ces échecs par le faible niveau d'explicitation de ces règles . Toutefois , il ne faut pas perdre de vue que l'accumulation d'heuristiques spécifiques reporte la difficulté au niveau de la mise en oeuvre de ces heuristiques . Mais si nous formulons de manière assez précise notre fonctionnement , nous pourrons réaliser un système informatique ayant une structure de contrôle basé sur cette modélisation . La réalisation informatique n'est pas une utopie , nous rappelons que D.B Lenat (R.Cuppens) a mis au point un système basé sur les *heuristiques* capable de redécouvrir des *concepts* mathématiques et de *conjecturer* des théorèmes .

II Comment rendre plus accessible cette activité : quelques éléments d'analyse didactique

Nous rappelons l'importance de l'activité de construction et exploration de figures en amont de toute activité de démonstration (F.Pluvinage , J.-C.Rauscher) . Ce travail doit être ensuite effectué en *liaison avec un énoncé* de manière à pouvoir mettre en évidence le statut des assertions : c'est ce que nous appelerons l'exploration de la figure .

L'enseignement de la géométrie est souvent trop déclaratif : on se contente souvent d'exposer les définitions , les théorèmes, et ensuite les démonstrations sans *justifier* le choix des théorèmes utilisés. La justification du choix apparaît très rarement dans le corrigé qui est, en général , la mise en forme de la démonstration . Ainsi , si nous arrivons à expliciter nos méthodes , nous pouvons formuler l'hypothèse que l'*enseignement des méthodes* apportera une aide sensible aux élèves (J.Rogalski) . Dans toutes les démonstrations proposées aux élèves , le *choix* d'une méthode devra être *expliqué* . L'exposition d'une méthode a priori dont on ne voit pas l'utilité ne motive pas : il s'agira d'aider l'élève à *découvrir progressivement* cette méthode .

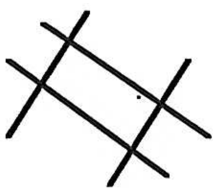
Considérons les deux aspects mis en évidence dans l'activité de démonstration : ils ne sont pas assez distingués dans l'enseignement . R.Duval estime que l'organisation déductive doit être maitrisée avant d'aborder la découverte de la solution : il nous semble clair qu'une activité de résolution de problème ne peut avoir lieu si les *règles du jeu* ne sont pas connues. L'assimilation d'une méthode de recherche n'est possible que si l'on a *pris conscience* de la manière dont fonctionne une démonstration .

Les travaux dans le cadre de l'intelligence artificielle ont imposé la représentation par réseau comme un outil pour la représentation des connaissances.Nous avons constaté que nous pouvons apporter une aide sensible aux élèves en leur proposant différentes *représentations* car elles leur permettent d'*organiser* leurs connaissances géométriques pour aborder l'un des aspects de l'activité de démonstration . Naturellement , ces représentations ne doivent pas être fournies a priori aux élèves , elles doivent être mises en évidence et élaborées avec eux au cours de situations choisies à cet effet .

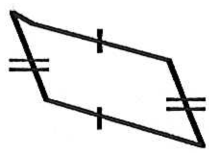
a) représentations

Pour un même objet géométrique , nous avons mis en évidence des représentations *non équivalentes* du point de vue cognitif (Groupe Intelligence Artificielle) . Par exemple, nous avons quatre figures prototypes pour le parallélogramme :

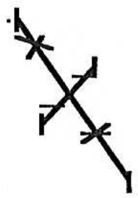
1)



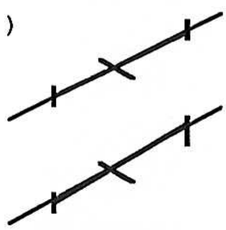
2)



3)

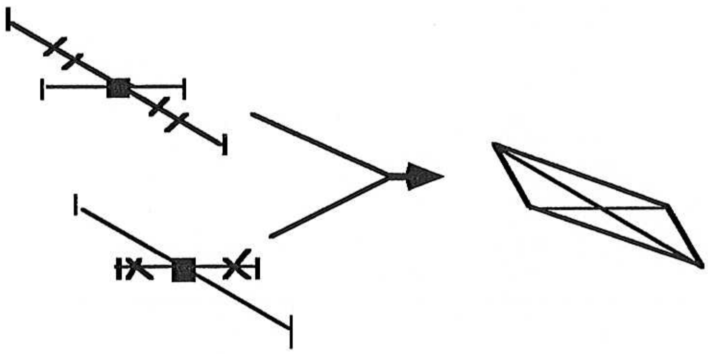


4)



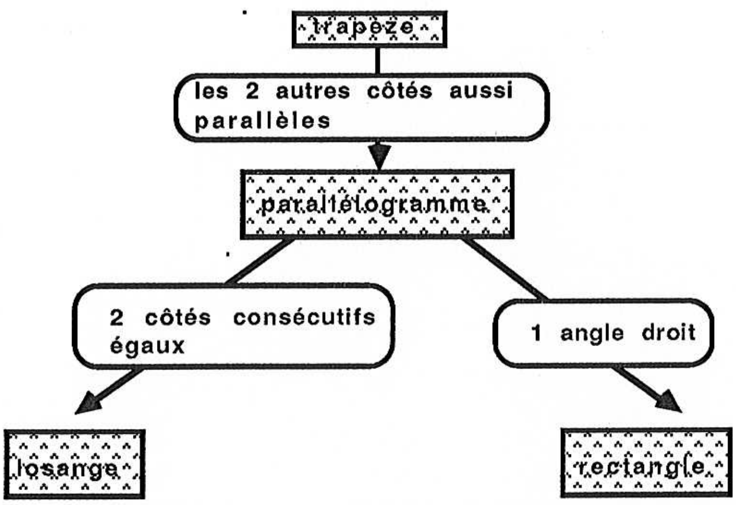
Ces figures prototypes sont déduites d'une représentation des théorèmes mettant en évidence l'aspect *procédural* des théorèmes . Cette représentation concrétisant la *distinction* entre les différentes hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème facilite l'application correcte du théorème (premier seuil dans l'organisation déductive).

exemple : Théorème (DIAGONALE 2) : Tout quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme .



Nous pouvons aussi mettre en évidence l'aspect *procédural* des définitions des objets géométriques grâce à la définition de réseaux sémantiques associés aux objets géométriques :

exemple :



b) organisation déductive

Nous ne reviendrons pas sur cette activité qui , nous l'avons vu , est grandement facilitée par l'utilisation de réseaux d'A.T.S (M.A Egret et R.Duval *loc.cit.*) .

c) découverte de la solution

Nous devons essayer de faire jouer un rôle plus actif à l'élève et l'aider à élaborer sa méthode par la résolution de problèmes judicieusement choisis . Il est possible de réfléchir au choix du groupement de plusieurs exercices pour dégager des configurations de base ou *figures prototypes* , puis des *heuristiques* (Groupe Intelligence Artificielle). Nous devons entraîner les élèves à *réorganiser* leurs connaissances en fonction du problème à résoudre .

exemple : Si le but en cours est de démontrer qu 'un point X est milieu d'un segment [YZ], l'élève doit savoir utiliser ses connaissances pour établir la liste suivante :

Essayer - l' identification d'une figure prototype diagonale 1 dont l'une des diagonales est [YZ] et le centre X .

- l' identification d'une figure prototype milieu 2 dans lequel il existe une parallèle à un autre côté que [YZ] passant par X et le milieu du troisième côté .

(L'*identification* d'une figure extraite ou prototype comprend deux étapes : *exhiber* la figure , puis vérifier qu'elle a le *statut* de figure extraite ou prototype)

L'*organisation* des connaissances joue un rôle fondamental dans l'activité de résolution de problèmes . Pour J.-M. Hoc , l'activité de résolution de problèmes est conçue comme le développement d'une interaction entre deux fonctions essentielles : la *compréhension* du problème et l'*élaboration* d'une solution (C. Bonnet et alii).L'intérêt de son " système de représentation et de traitement "(SRT) est qu'il réintègre explicitement la compréhension de la situation dans l'activité et lie les représentations et les traitements .La compréhension du problème se traduit par la construction d'une représentation du problème . C'est pourquoi , de même que la représentation sous forme de réseau est un outil de contrôle dans l'organisation déductive, nous émettons l'hypothèse que l'utilisation d'un *réseau associé à un plan* peut aussi jouer un rôle dans la découverte de la solution . Le réseau associé à un plan ou *réseau de planification* représentera des connaissances procédurales , ses noeuds seront des actions . L'utilisation de la représentation sous forme de réseau *associé à un plan* n'implique pas forcément une recherche *pas à pas* . Elle peut permettre une représentation du problème mettant en évidence une *décomposition en sous-problèmes* et débouchant sur un *plan d'action* (chaque sous-problème correspondant à un sous-réseau).Ainsi une telle représentation ne privilégie aucun type de recherche : elle peut se faire soit pas à pas en "marche avant" ou "marche arrière", soit par décomposition en sous-problèmes qui , à leur tour , peuvent être résolus "marche avant" ou "marche arrière".

Cette année , nous comptons expérimenter une telle démarche avec les élèves ayant participé à l'expérience décrite en (M.-A. Egret et R.Duval *loc.cit*) . Si , comme nous l'espérons , la représentation d'un plan sous forme de réseau s'avère un outil efficace dans la résolution de problème , nous pourrons envisager d'intégrer dans la réalisation informatique du système la possibilité d'*élaboration par l'élève* de ses *propres réseaux* (réseau associé au plan , réseau de démonstration) associés à un problème donné.

III Quelques logiciels d'aide à la démonstration en géométrie

a) logiciels de construction de figures

Voici un rapide aperçu des logiciels de construction de figures . Il est évident que c'est un module indispensable dans un logiciel d'aide à la démonstration en géométrie . Parmi ceux dont nous parlerons , Euclide et Géométrie plane sont les seuls disponibles sur un matériel Education Nationale , donc les seuls qui peuvent être testés auprès d'un grand nombre d'élèves . Il n'existe toujours pas à l'heure actuelle de matériel Education Nationale permettant la réalisation de logiciels ayant les possibilités de Cabri-géomètre ou Géophile .

- Euclide (J.C Allard)

Ce logiciel a le mérite de tourner sur Nanoréseau . C'est une extension du langage LOGO permettant la construction de figures géométriques. Il nécessite une alphabétisation informatique en LOGO . Si l'élève acquiert une compétence suffisante , il a ensuite un rôle plus actif (comme dans l'environnement LOGO) : il peut définir des *constructeurs de base* agissant sur les objets de base . Le logiciel comporte plusieurs modules : triangle , barycentre , transformations , comparaisons .Le module *triangle* contient les objets remarquables correspondants : hauteur , médiane , cercles inscrits , exinscrits , tangents, d'Euler , orthocentre etc ... Les *transformations géométriques* (symétries centrales et orthogonales , translations , rotations , homothéties , projections) sont disponibles sous forme de procédures, on peut les appliquer *globalement* à un objet grâce à la représentation sous forme de liste. Elles nécessitent l'écriture de procédures LOGO (de même que pour l'étude des lieux géométriques).Il est possible de consulter certaines relations (module comparaison) entre les objets qui peuvent s'écrire sous forme de prédicats (parallélisme , appartenance , orthogonalité) . Notons que l'effaçage partiel , bien utile dans ce domaine est difficile sur le nanoréseau .

- Géométrie plane (Pilat informatique éducative)

Ce logiciel a le mérite de tourner sur compatible PC . Il ne nécessite pas d'alphabétisation informatique . Les *transformations géométriques* suivantes sont disponibles uniquement point par point : translation , rotation , symétrie axiale, affinité, similitude, symétrie centrale, symétrie axiale , inversion . On peut en créer d'autres grâce à des options . Cependant son utilisation avec des élèves présente peu de souplesse : les noms des objets géométriques sont imposés par le programme , on ne peut créer un objet sans le tracer , il n'est possible d'étudier des lieux géométriques (grâce au mode répéter) que s'il s'agit de faire varier un seul point dans la figure . On peut consulter les données analytiques des objets qui ont été mémorisés (ils ne le sont pas systématiquement), les relations métriques entre les objets , les relations d'alignement,de parallélisme et d'orthogonalité .

- Cabri-géomètre (P.Bellemain)

Ce logiciel a été élaboré par une équipe d'informaticiens , de mathématiciens , de didacticiens et d'enseignants : c'est assez rare malheureusement . Il fonctionne actuellement sur Macintosh .Il possède donc les nouveaux standards de communication homme-machine en particulier les menus déroulants , et le multi-fenêtrage .Le but de ce logiciel est de conduire les élèves à élaborer des *conjectures* à propos des figures géométriques . Il permet d'aborder très vite avec les élèves l'*exploration* des constructions géométriques , puisqu'il ne nécessite aucun apprentissage de la programmation .Les déplacements géométriques sont possibles , c'est donc un outil mieux adapté que les logiciels précédents à *l'étude de lieux géométriques* . Cependant, pour le moment , il n'est pas possible de définir des constructeurs de base .L' effaçage d'une partie de la figure est très aisé .Cabri-géomètre comporte un *module pédagogique* permettant à l'enseignant de cacher des primitives .Il est prévu qu'à moyen terme ce logiciel dispose de plusieurs fenêtres (possibilité d'avoir simultanément la figure et des relations entre les objets) et *des transformations géométriques*.A plus long terme l'utilisateur aura la possibilité de définir de nouvelles primitives permettant de faire de nouvelles constructions .

- *Géophile (G. Braun)*

Ce logiciel fonctionne actuellement sur SM 90 sous Unix .C'est un outil performant pour la construction de figures . La création d'un langage-objet a permis de choisir une représentation des connaissances bien adaptée aux construction de figures : *le réseau de construction* (G.Braun). Ce langage permet la gestion des réseaux de constructions :

- création de réseaux (construction *descendante ou remontante* , ou combinaison des deux modes de constructions avec un *contrôle* de la complétude)
- manipulation (consultation des sommets , relations entre les sommets , expression d'un sommet en fonction d'autre sommets , sommets dont dépend un sommet, etc..., consultation globale du réseau , consultation par classe d'objets , suites définies à partir d'un réseau, définition de constructeurs de base)
- modification pour n'importe quel réseau
- gestion de l' affichage indépendante de la création du réseau .

Ce logiciel est donc particulièrement bien adapté à l'études de lieux et d'invariants géométriques . Par contre , le problème des transformations géométriques n'a pas été encore entièrement traité : mais la représentation des connaissances et le langage LISP devraient permettre de le résoudre de *manière globale* .L'outil informatique répondra alors aux exigences que l'on peut avoir dans l'enseignement des mathématiques en ce qui concerne la construction de figures.La communication homme-machine devra être améliorée avant une implantation sur un matériel Education Nationale : il faudra l'adapter à une utilisation par des élèves . L'idéal serait d'avoir une communication homme-machine aussi agréable que celle de Cabri-géomètre ...

b) logiciels d'apprentissage

Ces logiciels ont pour objectif d'apporter une aide à la démonstration en laissant de côté la mise en forme en langage naturel .

- Logiciel de Rennes (M.D.Fontaine , Régis Gras)

Ce logiciel est écrit en PROLOG sur MAC+ , il comporte deux modules . L'un porte sur l'*exploration de la figure* , l'autre sur la démonstration . Le premier module nous paraît intéressant , car l'exploration de la figure est un travail indispensable en amont de l'activité de démonstration.Mais , pour préparer efficacement à la démonstration , il doit être fait en *liaison* avec l'énoncé du problème de manière à pouvoir mettre en évidence les *statuts* des propriétés de la figure: ce module devrait inclure un sous-module *compréhension* de l'énoncé . De plus celà permettrait de mettre en évidence les figures *prototypes ou extraites* qui seraient ensuite une aide sensible à la découverte de la solution.

Le module démonstration ne nous a pas paru convaincant : parce qu'il exige une démarche pas à pas (sans doute imposée par le fonctionnement PROLOG ...), un bon élève et même un professeur qui connait parfaitement la solution de son problème peut perdre le fil de sa démonstration ! "La contrainte de la démonstration à un pas n'est pas aisément comprise et admise" observe R. Gras durant l'expérimentation . Nous pensons même qu'elle peut être un obstacle à la découverte de la solution , car elle ne permet pas de prendre en compte une idée ou un plan de solution .Quand aux élèves qui sont en difficulté , rien ne leur permet de comprendre les *règles du jeu* , *le sens* de l' activité de démonstration , de plus l'aide heuristique est faible . Par contre , il faut noter trois éléments intéressants : d'abord la possibilité de consulter un fichier "théorèmes ", ensuite la possibilité à tout moment d'avoir un *bilan* de son travail avec les propriétés conjecturées et celles démontrées , enfin l'accès à un travail par sous-problème (à un pas) avec obligation d'une restructuration des "mini-tâches " .

Signalons le système expert de Holland (G.Holland) qui est lui aussi écrit en Prolog et qui pour l'instant ne permet qu'une démarche pas à pas avec une possibilité d'aide uniquement en "marche arrière " .

- The Geometry Tutor (Anderson J. R. et alii)

Nous devons mentionner que malgré tous nos efforts (commandes réitérées), nous n'avons pu nous procurer ce logiciel . Nous savons qu'il a tourné sous forme de prototype, mais la version définitive ne semble pas disponible .

J.R.Anderson affirme , et nous le soutenons sans réserve, que le rôle le plus important de la psychologie cognitive dans l'apprentissage est de *fournir explicitement les modèles de fonctionnement de l'élève idéal et de l'élève standard*. Il insiste sur la distinction entre la connaissance *déclarative* et *procédurale* d'un théorème . Il met aussi en évidence les notions de *plan* et d'*heuristique* . Par bonheur , sa modélisation du fonctionnement de l'élève idéal , sa notion de plan , sa notion d'heuristique se trouvent être exactement celles du fontionnement de son système informatique : fonctionnement exclusif " *en marche avant* " ou " *en marche arrière*" pas à pas (c'est à dire une *seule inférence* "avant " ou " arrière "), plan et stratégies exclusivement liées à ce fonctionnement . Il en résulte qu'une *vision globale* de la démonstration , une notion de plan telle que nous l'avons défini , une méthode d'*identification* de figure prototype ne peuvent être pris en compte dans ce logiciel .

De plus, l' étude pour l'élève idéal des *représentations des connaissances* et de la phase de *compréhension de l'énoncé* par une modélisation de l'organisation des connaissances est inexistante. Celà se traduit dans la réalisation du logiciel par une représentation de l'énoncé sous forme de propositions où les *statuts* d'hypothèse et de conclusion sont déjà *différenciés* , alors que, comme nous l'avons vu précédemment , l'analyse didactique montre qu'une difficulté essentielle pour aborder l'activité de démonstration est la *reconnaissance* de ces statuts par l'élève . Enfin , le domaine des connaissances géométriques étudié le plus précisément est celui des *cas d'égalité des triangles* , ce qui paraît assez restrictif en ce qui concerne la démarche démonstrative .

Dans ce logiciel , l'élève n'a pas la tâche d'*organisation des connaissances* puisque le problème lui est donné sous une forme prédigérée . Il doit s'en tenir à une progression pas à pas , ce qui privilégie une vision très locale de la démonstration , sans pouvoir faire de prévisions à plus long terme . Notons , à ce propos , que J.R.Anderson estime qu'il ne faut laisser à l'élève comme chemins possibles de démonstration que ceux qui aboutissent : c'est une attitude peu propice à développer l'*heuristique* . Enfin la solution de l'expert de la démonstration est présentée en deux colonnes :

- la première est une suite d'assertions : *AD = AB , M est le milieu de CD etc ...*

- la seconde a pour titre "raisons" , elle veut être une justification de la démonstration. Elle donne soit le *statut* de l'assertion , soit le *théorème* appliqué . En fait, c'est une justification du réseau de la démonstration : elle rend compte de l'*organisation déductive* , mais ne donne aucune justification sur le *choix* d'un théorème qui relève de la *découverte* de la solution . Il y a donc une fois encore confusion entre les tâches d'organisation déductive et les tâches heuristiques . Il est peu problable qu'un tel logiciel facilite le développement des aptitudes *heuristiques* des élèves .

- Conception d'une base de connaissances (Chouraki E., Inghilterra C.)

Le but de ce travail est à long terme une réalisation d'un système expert d'enseignement pour l'apprentissage de la démonstration en géométrie (niveau 4$^{\text{ème}}$) possédant les fonctions suivantes :

" - créer ou modifier les connaissances géométriques et la banque d'exercices,

- saisir et agencer une progression pédagogique de l'apprentissage ,

- résoudre tout exercice qu'il propose ou que l'utilisateur lui propose , dans le cadre de ces capacités ,

- justifier la trace de sa résolution ,

- suivre le chemin démonstratif de l'élève et le guider en cas d'erreur , de blocage ou d'appel d'aide , et enfin ,

- évaluer et mémoriser les acquisitions de l'apprenant pour mieux définir son profil scolaire et modifier ou adapter sa progression pédagogique " .

Nous ne pouvons être qu'en parfait accord avec un tel programme ! L'article cité porte sur la définition de la base de connaissances qui contiendra la *description* des objets géométriques et les *méthodes* nécessaires à la résolution de la classe de problèmes visée . Ici encore , il est apparent qu'on est parti d'un *choix de représentation informatique* (représentation orientée objet) qui paraît bien adapté au domaine de la géométrie : on y retrouve les notions d'objet générique , d'héritage des propriétés . Mais ce choix en vue d'une implantation informatique est-il *cohérent* avec notre fonctionnement ? la question n'est pas abordée .

Dans la partie résolution de problèmes , la notion de *contexte d'application* d'un groupe de règles paraît intéressante : elle est vue comme l'ensemble des prémisses communes qui se factorisent dans le groupe (par exemple , pour montrer qu'une droite (X) est perpendiculaire à (Y) , il y a sept contextes de base , dans le contexte du cercle , il y a deux règles) , et nous avons retrouvé cette notion de *contexte* dans l'analyse cognitive qui est nécessaire pour préciser les heuristiques .

Une récente discussion avec un membre de cette équipe met en évidence les difficultés rencontrées actuellement pour continuer ce projet : il est sans doute prématuré , compte-tenu des analyses cognitives et didactiques dont nous disposons pour le moment , d'envisager la réalisation d'un tel logiciel .Toutefois , nous pouvons tenter , dès maintenant , de prendre en compte les réflexions émises dans les paragraphes précédents pour préciser notre projet pour un logiciel d'aide à la démonstration en géométrie .

IV Vers l'élaboration d'un cahier des charges

Le but d'un tel logiciel n'est pas la démonstration automatique de problèmes . Il doit être plus orienté vers la *recherche d'un chemin* pour la démonstration que vers une mise en forme de cette démonstration . Un tel système doit pouvoir *commenter , expliquer, justifier* son cheminement (M.Vivet). Ce système (appelé généralement *tutoriel intelligent* ou logiciel D'E.I.A.O) doit comporter :

- un module *expert* capable de résoudre les problèmes et de *justifier* sa démarche,
- un module *apprentissage* capable de fournir de l'aide et des explications à l'élève,
- un module *diagnostic* capable d'évaluer le travail de l'élève .

(Evidemment , c'est l'élève qui garde l'initiative de la démarche et du dialogue)

a) Le module expert

Le module expert doit comporter :

- un sous-module de *base de connaissances* ,
- un sous-module de *construction* de la figure,

- un sous-module d'*exploration* de la figure en *liaison* avec l'énoncé permettant de mettre en évidence les statuts , puis les propriétés de la figure et les figures prototypes ou extraites intéressantes ,
- un sous-module de *représentation* du problème sous forme de réseau mettant en évidence les statuts des assertions (traduisant la *compréhension* du problème) .
- un sous-module d'*élaboration d'un plan ,*
- un sous-module d'*organisation déductive* à partir d'un corpus d'énoncés (permettant de contrôler la démonstration d'un problème ou un sous-problème)

- Le sous-module de base de connaissances , ou encore dictionnaire

La partie expertise de ce module est presque achevée . Pour faire des démonstrations, l'élève a besoin d'une base de connaissances . Le logiciel doit donc lui permettre de consulter les définitions , théorèmes et propriétés , un peu comme dans une encyclopédie . Pour chaque objet , il y a une dizaine de rubriques qui reprennent les idées mises en évidence précédemment , comme , par exemple :

- définition avec différentes représentations , animations des figures .
-théorèmes avec exemples et contre-exemples animés . Etude systématique des réciproques et de l'effet de l'absence d'une des entrées du théorème .
- figures extraites, figures prototypes , sur - figures .
- arbre des *spécialisations* et des *généralisations* de l'objet , sous forme de réseau sémantique (cf ci-dessus le réseaux sémantique du parallélogramme).

Pour une réalisation informatique , la représentation orientée objet est particulièrement bien adaptée . Le logiciel HYPERCARD (Macintosh) donne actuellement la possibilité d'une réalisation rapide de ce module par des non spécialistes : c'est le premier objectif de notre groupe I.R.E.M.

- Le sous-module de construction de figures

Un module ayant les caractéristiques mises en évidence auparavant dans Géophile et une communication homme-machine analogue à celle de Cabri-géomètre conviendrait parfaitement .

- Les sous-modules exploration de figures et représentation du problème nécessitent , à notre avis , une représentation des connaissances adaptée à la modélisation de la compréhension dont nous ne disposons pas actuellement .

- Le sous-module d'élaboration d'un plan

Ce sous-module doit comporter des méta-règles pour effectuer le *choix* des connaissances à appliquer . Ces méta-règles manipulent des heuristiques et permettent de calculer un coût et un espoir pour chaque plan candidat en fonction du *contexte* .Le plan choisi est le meilleur vis à vis d'une note calculée à partir de ces valeurs coût / espoir (M. Vivet) . En cas d'échec du plan , le système refait un nouveau choix de plan . Nous avons déjà mis en évidence un certain nombre de méta-règles , mais le travail est loin d'être terminé. L'expérimentation menée avec les élèves sur l'élaboration de plans nous apportera , sans doute , de éléments supplémentaires .

b) Le module apprentissage

Nous rappelons que c'est l'élève qui doit garder l'initiative de la démarche et du dialogue . En particulier , dans l'élaboration de réseaux , l'élève doit avoir la possibilité de les *organiser* comme il le désire . Le module *apprentissage* doit comporter :

- un sous-module de *construction* de la figure,
- un sous-module d'*exploration* de la figure en *liaison* avec l'énoncé
- un sous-module de *représentation* du problème sous forme de réseau mettant en évidence les statuts des assertions (traduisant la *compréhension* du problème) .
- un sous-module d'*organisation déductive* à partir d'un corpus d'énoncés (permettant de contrôler la démonstration d'un problème ou un sous-problème)
- un sous-module d'*élaboration d'un plan*
- un sous-module de *démonstration*

Une telle structure permettrait de commencer l'apprentissage de la démonstration en occultant le sous-module d'*élaboration d'un plan* correspondant à la partie heuristique de la démonstration pour en faire comprendre les *règles du jeu* .

- le sous-module d'exploration de la figure

L'élève peut entrer ou choisir un exercice dans un fichier .Il construit la figure . Il y a ensuite un contrôle de la figure en liaison avec l'énoncé :

a) la figure prend-elle en compte toutes les hypothèses de l'énoncé ?

b) la figure prend-elle en compte uniquement les hypothèses de l' énoncé (pas de figure particulière)?

Si l'une des deux réponses est négative , le logiciel doit pouvoir le signaler immédiatement à l'élève avec une justification , afin qu'il recommence sa construction.Celà nécessite pour le logiciel une comparaison des caractéristiques de la figure avec les hypothèses de l'énoncé de l'exercice .

c) recherche de figures extraites ou prototypes .

- un sous-module d'organisation déductive

Dans un premier temps, ce module doit permettre de travailler les seuils 1 et 2 définis en (M.-A. Egret et R.Duval) à partir d'énoncés sur lequel le travail d'exploration de la figure aura été mené .

Dans un second temps , il permettra à partir du corpus d'énoncés (fourni pour un problème particulier) de contrôler l'organisation déductive .

Enfin , il permettra le contrôle d'une démonstration dont le plan a été explicité .

- un sous-module d'élaboration d'un plan

L'élève a la possibilité de construire et de faire contrôler un plan de démonstration pour un problème ou un sous-problème .Le logiciel doit pouvoir s' *adapter au niveau* de l'élève :

- plan complet : Le logiciel ne doit pas imposer de recherche à celui qui a trouvé , ni exiger trop de justifications quand il n'y a pas de difficultés de résolution .

- plan incomplet : Le logiciel doit accepter un plan incomplet et proposer des aides adaptées pour le compléter .

- plan inexistant : Si l'élève est complètement bloqué , le logiciel doit proposer une aide pour trouver un plan .

Le logiciel doit pouvoir contrôler la *cohérence* du plan , compte-tenu des hypothèses , proposé par l'élève.

- ***un sous-module de démonstration***

L'élève doit avoir le choix entre plusieurs possibilités :

a) Démontrer la première question de l'exercice (s'il pense savoir faire), construction du réseau de démonstration correspondant.

b) Démontrer une étape intermédiaire (s'il pense savoir faire), construction du réseau de démonstration correspondant .

c) Supposer la première question et démontrer la deuxième : plus généralement démontrer une étape du plan , construction du réseau de démonstration correspondant .

d) Assembler les différents réseaux de démonstration déjà construits.

- ***différents types d' aide :***

a) aide " marche arrière " : mise en évidence des buts et sous-buts (statuts), proposer des heuristiques (comme elles ont été présentées ci-dessus) pour prouver tel but.

b) aide " marche avant " : mise en évidence des hypothèses (statuts), proposer des heuristiques en fonction du contexte (hypothèses et ce qui a été démontré).

c) aide pour trouver un plan

d) possibilité de consulter la base de connaissances (définitions et théorèmes , avec les représentations qui en ont été données et réseaux sémantiques des objets géométriques).

e) Possibilité de retour en arrière : en cas d'échec du plan , possibilité de récupérer tout le travail encore valable : les sous-réseaux de démonstration corrects sont conservés et disponibles .

f) Possibilité de faire le point sur l'état du travail : à tout moment , l'élève doit pouvoir savoir où il en est , avoir un bilan de son travail (les étapes démontrées , le plan en cours).Une représentation claire de l'état du travail doit être fournie. Cette représentation sera donnée sous forme de *réseaux* (réseau associé au plan , réseaux de démonstration associés aux sous-problèmes) avec mise en évidence du *contexte* .

c) Le module diagnostic

Il nous paraît prématuré de réfléchir à ce module qui devrait , comme le disaient E.Chouraki et C.Inghilterra , évaluer et mémoriser les acquisitions de l'apprenant pour mieux définir son profil scolaire et modifier ou adapter sa progression pédagogique !

Conclusion

Les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie existant actuellement ont été élaborés à partir d'une modélisation du comportement humain en fonction du système informatique disponible .C'est une attitude naturelle et conseillée si l'on veut aboutir assez rapidement à des réalisations concrètes . Encore faut-il que ces réalisations soient des *aides efficaces* à l'apprentissage . A long terme , il est sûrement préférable de *modéliser* d'abord le comportement humain , et de concevoir un dispositif informatique prenant en compte cette modélisation . L'efficacité des logiciels s'en ressentira .

Actuellement , parmi les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie , aucun module expert n'est satisfaisant : la partie *compréhension de l'énoncé* par la modélisation de l'organisation des connaissances de l'expert n'est pas prise en compte .Il n'existe pas encore une représentation des connaissances adaptée à une telle modélisation (La représentation des connaissances de Géophile bien adaptée à la construction de figures , n'est pas adaptée à une modélisation de compréhension et de démonstration).La démarche démonstrative de l'expert n'est pas encore suffisamment explicitée : l' analyse cognitive en ce qui concerne *la découverte de la solution* est encore insuffisante . Ensuite, la réalisation d'un tutoriel intelligent passe par la réalisation d'un module de *diagnostic* de l'élève et d'un module d'*apprentissage* : ces modules ne sont pas réalisables sans une analyse didactique approfondie . Ensuite , on pourra envisager la réalisation informatique de ces modules .

Pour l'instant , il est possible de réaliser des modules *plus modestes* destinés à être intégrés ensuite dans un projet plus ambitieux de tutoriel intelligent comme un module de dictionnaire , de construction de figures , et d'exploration de figures .

Pastre D., 1987, Représentation et expression de connaissances mathématiques pour démontrer auomatiquement des théorèmes, in *Actes de l'Université d'Intelligence artificielle et enseignement des mathématiques , Editeur IREM de Toulouse* .

Pilat Informatique Educative , 1988, Géométrie plane , *St Appolinard 42410 PELUSSIN.*

Pluvinage F., Rauscher J.-C. , 1986, La géométrie constructive mise à l'essai , in *Petit X n°11, Editeur IREM de Grenoble* .

Polya G., 1965 , Comment poser et résoudre un problème , *Editeur Dunod* .

Rogalski J., Samurcay R., 1987, Enseigner des méthodes , in *Cahier de didactique des mathématiques , Paris VII* .

Schoenfeld A. , 1985, Mathematical problem solving , *Editeur Academic Press* .

Vivet M. , 1988, Présentation d'un système expert en mathématique CAMELIA , un logiciel pour raisonner et calculer . Une approche des tutoriels intelligents , in *Bulletin de liaison n° 1 commission inter-IREM Mathématiques et Intelligence Artificielle , Editeur IREM de Toulouse* .

UN OUTIL POUR LA CONSTRUCTION GEOMETRIQUE

Gabriel BRAUN

This paper presents Geophile, a soft designed to manipulate geometric concepts, that can be used at two levels : at the teacher level Geophile is an object oriented language specialized in geometric knowledge representation and the student level provides tools to manipulate easily this knowledge. This article deals only with this student use of Geophile.

First we show how the user can create interactively geometric constructions with primitive objects an relations (defined by the teacher) in any order. Then we explain how to operate some modifications that will be automatically propagated in the whole construction. Some more elaborated tools making possible locus or enveloppes visualisation and a few formal manipulations are shown at end.

INTRODUCTION

La géométrie telle qu'elle est enseignée aujourd'hui dans les lycées et collèges tend à réintroduire la pratique de la construction géométrique, favorisant ainsi une approche visuelle, de cette discipline plutôt que calculatoire ou formelle [PLU 86].

La visualisation de constructions (figures géométriques) constituant une extension du domaine sensible, favorise une approche plus perceptive, privilégiant ainsi l'intuition [INH 47].

Cependant la réalisation concrète de constructions présente d'innombrables difficultés d'ordre matériel. En effet le tracé de figures est long et délicat, en raison des contraintes inhérentes à cette activité : le maintien de la figure dans les limites de l'épure demande souvent de procéder par approximations successives, la complexité d'une figure nécessite la réalisation de constructions intermédiaires qui seront effacées, un minimum de précision est requis, toute modification est coûteuse en temps.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2(1989) (p. 111-133) IREM de Strasbourg

La construction géométrique est donc une activité de haut niveau, malheureusement très difficilement praticable.

Lever cette contradiction a été l'élément moteur qui nous à conduit à l'élaboration d'un outil informatique adapté aux besoins de la construction géométrique : Géophile.

Géophile s'adresse tout d'abord aux étudiants pour qui il constitue un outil élaboré, facile d'accès, permettant la réalisation, la modification, l'animation de constructions géométriques définies à partir d'objets et de constructeurs de base.

La connaissance géométrique étant variable selon le niveau des élèves, l'ensemble des constructeurs utiles n'est pas figé. Ainsi, outre les nombreux constructeurs de base définis dans le système, il est possible à l'enseignant de rajouter de nouveaux objets et de nouveaux constructeurs élémentaires.

Le logiciel que nous présentons peut donc être employé à deux niveaux :

- le niveau utilisateur qui permet la manipulation de constructions par des élèves
- le niveau programmeur qui permet à l'enseignant d'adapter les notions géométriques connues par le système aux besoins des étudiants utilisateurs

L'utilisation de Géophile tant au niveau utilisateur (élève) que programmeur (enseignant) utilise un formalisme proche de celui en vigueur en mathématique et ne requiert donc quasiment aucune connaissance informatique.

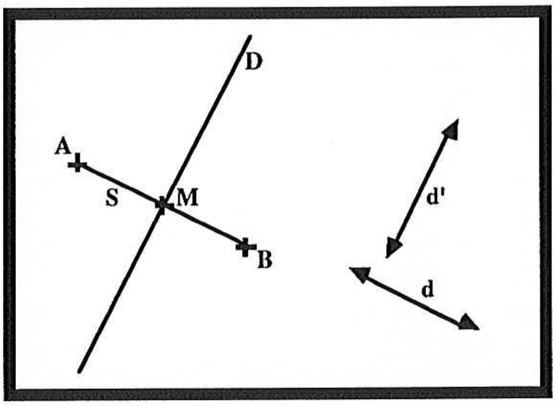
Dans cet article, nous présentons Géophile exclusivement d'un point de vue utilisateur, la description de Géophile en temps que langage étant quelque peu technique. Pour une description complète tant au niveau utilisation que programmation nous reportons le lecteur à [BRA 88].

Quant à la géométrie traitée, nous nous sommes restreints à la géométrie plane euclidienne élémentaire. Elle nous a semblé constituer un cadre suffisemment large pour illustrer les possibilités de Géophile.

CARACTERISATION D'UNE CONSTRUCTION GEOMETRIQUE

Exemple : médiatrice d'un segment

Dans le cadre d'un exercice scolaire, la construction d'une médiatrice peut constituer un problème qui pourrait être ainsi formulé : déterminer la droite D passant par le milieu de A et B, extrémités du segment donné S, ayant pour direction la direction perpendiculaire à la droite passant par A et B.



Remarquons qu'une première lecture linéaire de l'énoncé précédent sans une analyse étape par étape est bien insuffisante pour se faire une idée du résultat de la construction. Par contre un simple coup d'oeil sur la figure illustrant l'énoncé donne instantanément une vision globale et complète de la situation.

Nous pouvons transcrire l'énoncé précédent en un ensemble de relations entre les divers éléments de la contruction :

S = segment donné
A = point origine de S
B = point extrémité de S
M = milieu de A et B
d = direction de la droite AB
d' = direction perpendiculaire à d
D = droite passant par M et de direction d'

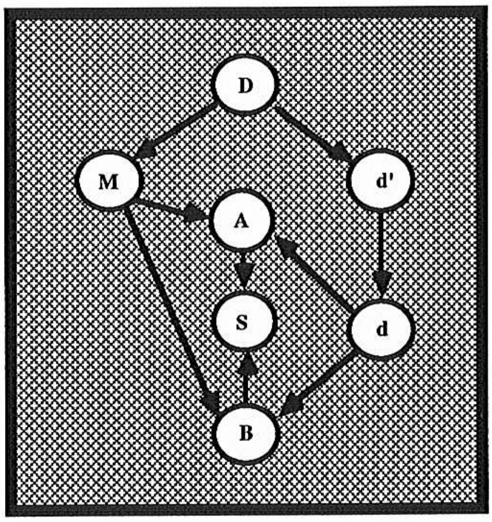
Chaque relation de la construction peut être assimilée à une équation de la forme : **X = f (Y Z ....)**, f étant une fonction dont on connait une description procédurale (milieu de , direction perpendiculaire à, etc.) et X,Y et Z sont des entités mathématiques.

La construction d'une médiatrice semble donc intégralement déterminée par le système d'équations ci-dessus. L'ordre de construction correspond à un ordre possible de résolution du système : on ne détermine un élément que lorsque tous les éléments dont il dépend sont déterminés.

Plus généralement si nous notons "<" la relation d'ordre partiel "doit être déterminé avant" nous avons les contraintes suivantes pour notre construction :

S < A   S < B
A < M   A < d
B < M   B < d
d < d'
M < D
d' < D

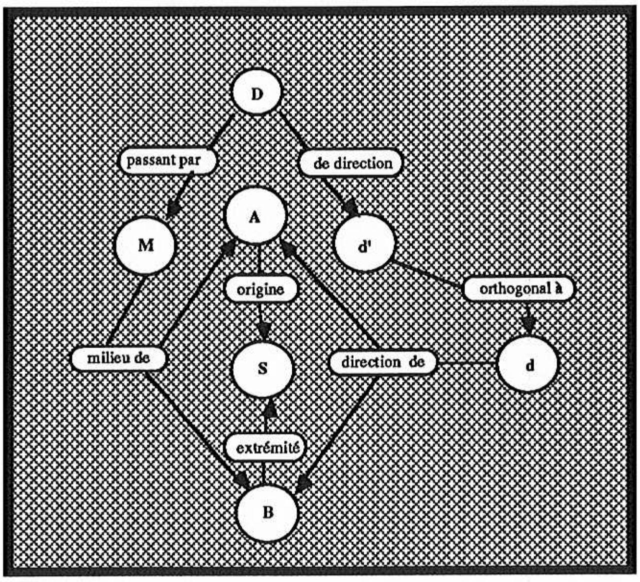
Nous pouvons également représenter l'ordre partiel entre les divers composantes de la figure sous forme d'un graphe :



Ce graphe qui ne représente que les diverses relations entre les objets sans en préciser la nature est appelé : **"graphe d'interdépendances"** .

Un tel graphe ne contient pas la complète information nécessaire à la réalisation de la figure, mais permet seulement de définir un ordre partiel de construction entre les divers objets entrant dans la composition du résultat.

Notons que, pour peu que l'on rajoute le terme fonctionnel au niveau de chaque noeud du graphe afin de préciser la relation entre deux objets reliés par une arête, nous avons une représentation complète de la construction :



Cette représentation sous forme de graphe orienté dont les arêtes sont étiquetées est appelé "**réseau de construction**" associé à la construction.

Généralisation

De façon plus générale nous pouvons représenter une procédure de construction d'une figure par un système d'équations de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N \text{ donnés} \\ x_{N+1} = f_{N+1}\,(x_1 \ x_2 \dots \ x_N) \\ \dots\dots\dots \\ x_{N+K} = f_{N+K}\,(x_1 \ x_2 \dots \ x_N \ x_{N+1} \dots \ x_{N+K-1}) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ x_{N+M} = f_{N+M}\,(x_1 \ x_2 \dots \ x_N \ x_{N+1} \dots \ x_K \dots \ x_{N+M-1}) \end{cases}$$

$X_1, X_2 \ldots. X_N$ sont les objets connus initialement

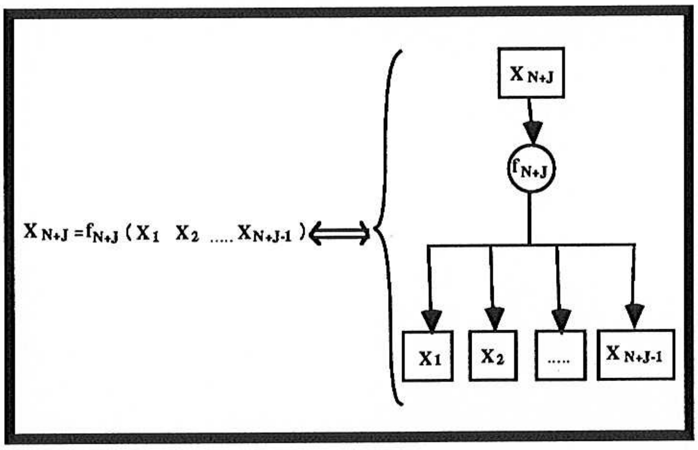
$X_{N+1}, X_{N+2} \ldots. X_{N+K} \ldots.. X_{N+M-1}, X_{N+M}$ sont des objets calculés

f_{N+J} est une fonction qui, dépendant de certains objets pris parmi $(X_1.. X_{N+J-1})$, détermine X_{N+J}

Ce type de système d'équations a été largement étudié dans le cadre de travaux sur les langages à affectation unique et sur la méthode de programmation déductive [HUC 77], [PAI 79]. Nous ne présentons ici que les aspects essentiels dans le cadre de la construction géométrique.

Réseau de construction associé à un système d'équations

Pour chaque équation de la forme $X_{N+J} = f_{N+J}$ $(X_1 \ldots\ldots X_{N+J-1})$ on crée un noeud du réseau de nom X_{N+J} pointant vers tous les X_K effectivement arguments de la fonction f_{N+J}.
On obtient ainsi le graphe d'interdépendance. Afin d'aboutir au réseau sémantique il faut et il suffit de stocker au niveau de chaque noeud X_K sa définition, en l'occurrence la fonction f_K.



La relation d'ordre doit être déterminé avant se traduit en terme de chemin au niveau du graphe d'interdépendance.

X_I doit être déterminé avant X_J est équivalent à dire qu'il existe un chemin de X_J à X_I dans le graphe d'interdépendance.

Le réseau est un graphe sans cycle en vertu de l'antisymétrie de la relation d'ordre. Il ne peut y avoir de définition circulaire dans le système d'équations définissant la construction géométrique.

ELABORATION D'UN RESEAU DE CONSTRUCTION

Rappelons que l'un des objectifs essentiels du système est de minimiser l'intervention de l'utilisateur. Dans cette optique il est souhaitable que ce dernier ne soit pas contraint de construire une figure selon l'ordre imposé par le système d'équations la représentant.

Mais, ne respectant plus l'ordre de construction, l'utilisateur ne dispose a priori plus d'aucun critère de complétude de son système de définition. Le système est dit **complet** lorsque toute les équations nécessaires à sa résolution sont définies.

Afin de répondre à ces deux impératifs nous avons conçu un protocole de construction n'obligeant pas l'utilisateur à définir un ordre et rendant impossible toute omission d'une définition par l'intervention du système.

Le protocole de construction

Le protocole de construction d'une figure est le suivant :

Lorsque l'on définit une entité $X_J = f_J$ (certains X_K) avec $K < J$

- X_J fait partie des **objets en cours de définition** qui représentent à un instant donné toutes les entités dont la valeur n'a pu être déterminée, faute de connaitre la définition de tous ses arguments

- il faut avant tout qu'aucun des arguments X_K de f_J ne fasse partie de l'ensemble des **objets en cours de définition** car il s'agirait d'une définition circulaire ; si ce n'est le cas le système refuse la définition et en demande une nouvelle

- la définition n'étant pas circulaire, le système cherche parmi les arguments X_K ceux qui ne sont pas encore définis et en demande la définition à l'utilisateur ; le même protocole s'applique récursivement à tous ces arguments indéfinis

- tous les arguments de la définition étant définis et évalués il est à présent possible pour le système de déterminer la valeur (évaluer) du sommet X_J traité, qui est alors extrait de l'ensemble des **objets en cours de définition**, étant dès lors intégralement défini..

Notons que la procédure termine toujours, car tôt ou tard on introduit des définitions constantes qui correspondent aux données connues de la construction. Le protocole inspiré de la méthode déductive [HUC 77] [BEL 78], autorise les trois types de construction suivants :

a) Construction exclusivement **descendante** ou **déductive**

Une construction **descendante** de la médiatrice a l'allure suivante :

définir D = droite passant par M et de direction d'
  ? donnez la définition de M argument de D (interrogation du système)
   M = milieu de A B
   ? donnez la définition de A argument de M
     A = origine de S
     ? donnez la définition de S argument de A
       S = #(segment #(point 0 0) #(point 1 2)) (notation d'un segment)
   ? donnez la définition de B argument de M
     B = extrémité de S
  ? donnez la définition de d' argument de D
   d' = direction perpendiculaire à d
   ? donnez la définition de d argument de d'
     d = direction de A B
----> **#(droite -6 4 11)** (droite d'équation : -6x + 4y + 11 = 0)
("---->" indique le résultat d'une évaluation)

Notation : les réponses du système sont imprimées en **caractères gras**

Notons que lorsque plusieurs objets dépendent d'un même argument la définition de ce dernier n'a lieu qu'une fois. Par exemple, lors de la définition de B, S est déjà connu ayant été défini comme argument de A.

La définition de D se termine par la donnée de sa valeur. Il est bien entendu possible pour le système d'afficher au fur et à mesure toutes les valeurs des objets intermédiaires évalués entrant dans la définition de D.

b) Construction exclusivement **remontante** ou **incrémentale**

Il s'agit de définir les objets selon l'ordre induit par le réseau de construction :

définir S = #(segment #(point 2 3) #(point 5 (cos 0)) **----> #(segment #(point 2 3) #(point 5 1))**
définir A = origine de S **----> #(point 2 3)**
définir B = extrémité de S **----> #(point 5 1)**
définir M = milieu de A et B **----> #(point 3.5 2)**
définir d = direction de A B **----> #(vecteur 3 -2)**
définir d' = direction orthogonale à d **----> #(vecteur 2 3)**
définir D = droite passant par M et de direction d' **----> #(droite -6 2 11)**

Il est bien entendu possible de combiner à volonté constructions remontantes et descendantes. Il est ainsi possible de constituer le réseau par sous-réseaux complets successifs.

On appelle **sous-réseau complet** toute partie de réseau étant un réseau à part entière c'est-à-dire complètement défini et dont les valeurs de tous les noeuds ont pu être calculées.

c) <u>Construction partiellement déductive</u>

définir A origine de S
? donnez la définition de S argument de A
  S = #(segment #(point 2 3) #(point 5 1))
----> #(point 2 3)

définir M = milieu de A B
? donnez la définition de B argument de M
  B = extrémité de S
----> #(point 3.5 2)

définir D = droite passant par M et de direction d'
? donnez la définition de d' argument de D
  d' = direction perpendiculaire à d
  ? donnez la définition de d argument de d'
    d = direction de A B
----> #(droite -6 4 11)

Ainsi l'utilisateur peut librement choisir sa façon de construire étant assuré par le système de ne pas oublier de définition.

Notons que la construction descendante n'est autre qu'une méthode déductive telle que celle employée par des informaticiens pour l'analyse d'un problème [DUC 84], [FIN 85], [HUC 77], [PAI 79].

MODIFICATION D'UNE CONSTRUCTION

Ayant défini un certain nombre de réseaux nous désirons à présent opérer des modifications. On peut en distinguer deux sortes : les modifications d'objets **terminaux** d'un réseau (ou **feuilles**) et les modifications d'objets non terminaux. Un objet est dit **terminal** si sa définition est indépendante d'arguments, c'est à dire constante. La distinction entre les deux porte sur le but de la modification plutôt que sur la méthode utilisée. En effet le changement d'un objet terminal correspond à un simple changement d'une donnée de base de la construction, celle-ci restant inchangée dans son principe, alors que toute autre modification change la construction en tant que procédure. De façon équivalente nous avons au niveau du système d'équations la possibilité de changer soit une donnée de base soit certaines équations sans pour autant modifier la méthode de résolution.

Modifications terminales

Il s'agit donc de modifier des objets ne dépendant pas d'autres entités. Ce sont les données du système d'équations ou les feuilles du graphe d'interdépendance.

Ce type de modification correspond à la démarche classique de l'étudiant désirant représenter plusieurs cas de figure d'une même construction afin de mieux en saisir la généralité. D'un point de vue d'informaticien en assimilant la construction à la procédure qui l'exécute, la modification d'un objet terminal revient à un simple changement du jeu d'essai.

Lorsqu'une feuille du réseau de construction est modifiée, tous les objets qui en dépendent de façon directe ou indirecte devront également subir une modification.

Plus précisément, si nous nommons F l'objet terminal modifié, il est nécessaire de réévaluer tout objet X vérifiant la relation d'ordre :

F <u>doit être déterminé avant</u> X <==> <u>il existe un chemin</u> de X <u>à</u> F

Dans l'optique de minimiser l'intervention de l'utilisateur nous avons permis à ce dernier de définir des constructions sans se soucier de la relation d'ordre de construction entre les objets. Cette démarche serait peine perdue si, lors d'une modification, l'utilisateur était obligé de faire réévaluer les divers objets le nécessitant dans le bon ordre qu'il devrait alors tout de même connaître. Aussi dans ce même esprit d'intervention minimale, nous rendons automatique la réévaluation des diverses entités à modifier.

<u>Stratégie de réévaluation</u>

A première vue on pourrait être tenté d'appliquer la stratégie suivante : dans un premier temps on corrige tous les objets qui dépendent de la donnée modifiée, puis tous les objets qui dépendent de ces objets et ainsi de suite jusqu'à ne plus trouver d'objets dépendants.

Cette façon de procéder réalise bien la modification, mais présente un défaut. En effet une telle remontée (en largeur) dans un graphe peut conduire à parcourir plusieurs fois un même sommet. Il suffit que plusieurs de ses arguments soient modifiés pour engendrer plusieurs réévaluations du même objet.

Afin de palier ce défaut la modification automatique se fait en deux étapes :

- le système fabrique la liste des sommets rencontrés en effectuant une remontée en largeur à partir de la feuille modifiée en ne retenant que la dernière occurence de chaque sommet
- les sommets sont réévalués dans l'ordre de cette liste

Utilisation : on peut distinguer deux sortes de modifications terminales du réseau.

- La modification d'une feuille en feuille

Ce type de redéfinition d'un objet a pour finalité de représenter une même construction avec différentes valeurs des données de bases.
Dans l'exemple de la médiatrice l'utilisateur pourrait donner différentes valeurs au segment S, unique donnée de base de la construction.

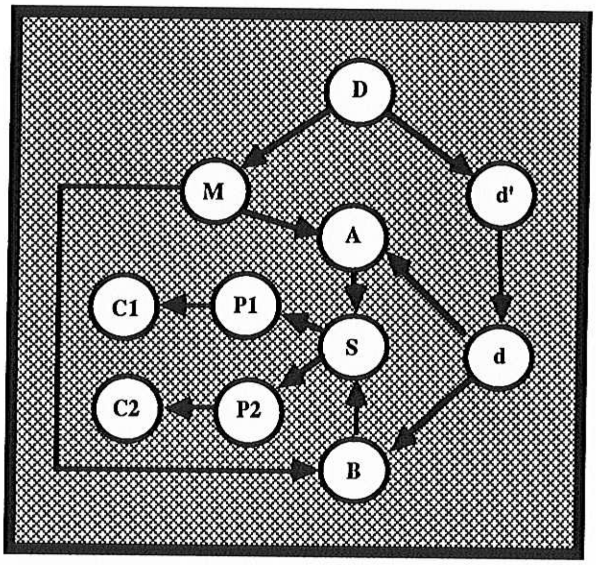
- La modification d'une feuille en un objet non terminal

Ce type de modification remplace une donnée de base par une construction ou une feuille par un réseau.
Lorsque l'utilisateur redéfinit une feuille en la faisant dépendre d'arguments, ceux-ci sont à leur tour définis de façon déductive comme dans le cas de la définition d'un réseau. C'est le système qui interroge l'utilisateur pour définir les nouveaux objets.
Pour la construction de la médiatrice il est possible de redéfinir le segment S comme un objet dépendant d'arguments. Par exemple S peut être redéfini comme reliant les deux centres P1 et P2 de deux cercles C1 et C2.

exemple : une telle redéfinition est réalisée de la façon suivante :

```
redéfinir S = #(segment P1 P2)
? donnez la définition de P1 argument de S
        P1 = centre de C1
        ? donnez la définition de C1 argument de P1
          #(cercle 5 #(point 1 2))
? donnez la définition de P2 argument de S
        P2 = centre de C2
        ? donnez la définition de C2 argument de P2
          C2 = #(cercle 3 #(point 5 0))
-----> #(segment #(point 1 2) #(point 5 0))
```

La valeur de la médiatrice a bien entendu été recalculée : D = #(droite -4 1 10.5)



La modification de feuilles est un outil très efficace pour représenter rapidement différentes instanciations du même schéma de construction. Cette possibilité de réévaluer automatiquement permet à l'utilisateur de disposer d'une vision plus générale d'un même réseau grâce à des modifications successives de feuilles réalisées en un minimum d'investissement de sa part.

En fait un utilisateur définit un schéma d'instanciation général en décrivant une construction particulière.

Lorsque l'utilisateur désire modifier partiellement la construction dans son principe, il a recours aux modifications non terminales.

Modifications non terminales

La redéfinition d'objets non terminaux modifie la construction dans ses principes. De telles modifications permettent de redéfinir des objets qui dépendaient précédemment d'arguments. La nouvelle définition peut être une feuille (sans arguments) ou un réseau (avec de nouveaux arguments).

Le principe de redéfinition d'objets non terminaux est le même que celui appliqué lors de la modification de feuilles. Le nouveau réseau est défini de façon déductive à partir de l'objet modifié.

Cependant il existe une différence essentielle pour la modification non terminale. Les anciens arguments de l'objet modifié n'y sont plus connectés alors que pour la redéfinition de feuilles ces arguments sont inexistants.

Ainsi la modification terminale n'est qu'un cas particulier de la modification non terminale.

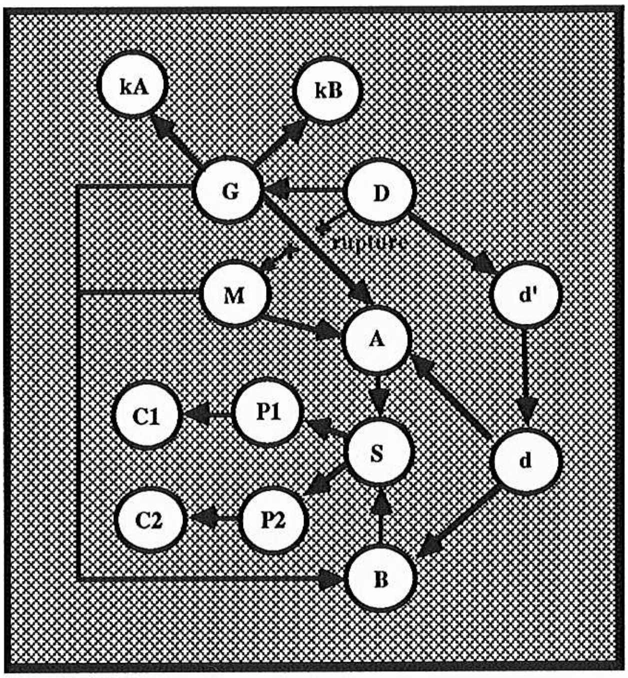
Un seul problème se pose dans le cas général : que deviennent les anciens arguments d'un objet modifié ?

Les arguments d'un objet modifié en sont déconnectés. Cependant certains peuvent également être arguments d'autres objets du réseau. Aussi est-il hors de question de les éliminer du système. Dans le cas particulier où chacun des arguments de l'objet redéfini n'entre que dans la définition de ce dernier ceux-ci vont constituer différents réseaux déconnectés qui pourront être réutilisés ultérieurement pour être rebranchés au réseau principal par exemple.

Nous illustrons ces deux cas pour la construction de la médiatrice dont nous prenons le dernier réseau en cours.

- <u>cas 1</u> : les arguments de l'objet modifié restent connectés au réseau

Nous décidons de redéfinir la droite D non plus comme passant par le milieu de A et B mais par un barycentre de ces derniers avec des coefficients respectifs kA et kB. Le point M n'est plus argument de D, devient une racine du réseau, mais y demeure connecté par ses arguments A et B. Ainsi dans ce cas de figure nous conservons un réseau connexe.

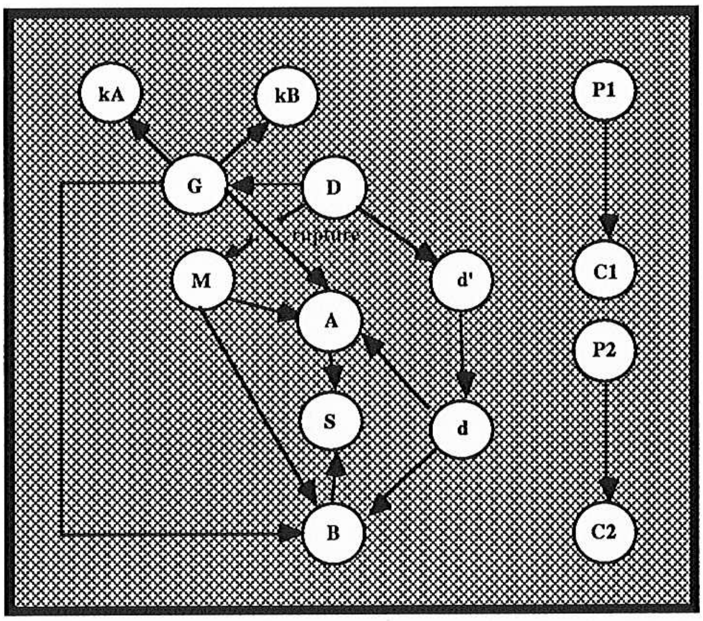


redéfinir D = droite passant par G de direction d'
? donnez la définition de G argument de D
G = barycentre de A et B avec les coefficient kA et kB
? donnez la définition de kA argument de G
kA = 1
? donnez la définition de kB argument de G
kB = 1
-----> #(droite -4 1 10.5)

Notons que D conserve la même valeur car nous avons utilisé un barycentre particulier qui est le milieu de A B (kA = kB = 1). Il suffira de modifier les nouvelles feuilles kA et kB pour obtenir D passant par un barycentre quelconque.

- <u>cas 2</u> : les arguments de l'objet modifié sont déconnectés

Nous considérons la construction de la droite D (qui n'est plus une médiatrice) en l'état. Nous redéfinissons le segment S non plus comme dépendant de P1 et P2, mais comme une donnée de base. Nous obtenons ainsi trois réseaux déconnectés qui demeurent accessibles dans le système.



AUTRES MANIPULATIONS DE RESEAU

Consultations

A tout moment l'utilisateur peut souhaiter consulter l'information contenue dans le système, en particulier lors d'une construction déductive. En effet, les diverses définitions des objets, la liste des objets déjà créés, la liste de ceux en cours de définition, l'ensemble des fonctionnalités existantes, etc. sont des informations indispensables pour une utilisation efficace de Géophile.

En effet le système permet toutes sortes de consultations et en particulier lors d'une construction déductive durant laquelle toute opération est autorisée. Lorsque le programme demande une définition d'objet pour construire le réseau il suffit à l'utilisateur de taper un point d'interrogation "?" signifiant qu'il désire interroger le système avant de lui fournir une réponse. Il peut alors donner toute commande au système et en particulier des commandes de consultation.

Nous inventorions les différentes informations accessibles à l'utilisateur que nous classifions en trois catégories :

Consultation des sommets du réseau

- Valeur d'un sommet	valeur de D = #(droite -4 1 10.5)
- Définition d'un sommet	déf G : barycentre de A B avec kA et kB
- Arguments d'un sommet	arguments de G : (A B kA kB)
- Sommets dont dépend un sommet	G dépend de : A B S P1 P2 C1 C2
- Sommets dépendants d'un sommet	sommets dépendant de S : A B M G d d' D
- Expression d'un sommet en fonction d'autres sommets	expression de S en fonction de C1 et C2 : segment d'origine le centre de C1 et d'extrémité le centre de C2

Consultation globale au réseau

- Racines du réseau
- Feuilles du réseau
- Objets existants définis dans le réseau

Consultation par classe d'objet

Il est possible de consulter l'information relative à une classe donnée d'objets. Par exemple :

- quels sont tous les points définis dans le système ?
- quelles sont toutes les primitives de bases applicables à un cercle ?
- comment est représenté une droite ?

Utilisation avancée des réseaux

Terme fonctionnel en argument

Dans tous les réseaux que nous avons décrits jusqu'à présent une fonction permettait de définir des relations entre les objets, mais jamais une fonction n'était elle-même considéré comme un objet. Il y a une distinction formelle entre les X_I et les f_I.

Cette distinction convient fort bien pour des constructions où les relations entre objets sont relativement figées et où l'on fait varier certains de ces objets non fonctionnels.

Cependant dans certains cas, ce sont plutôt les fonctions que l'on désirerait faire varier. Ceci est rendu possible grâce à l'implantation du langage Lisp, sur qui repose Géophile, qui ne distingue pas les données des programmes. Géophile permet de construire un réseau avec un terme fonctionnel en argument.

définir y = appliquer f à x
? donnez la définition de f argument de y
f = 'cosinus
? donnez la définition de x argument de y
0
----> 1

Géophile utilise donc la fonction "appliquer" qui permet de calculer le résultat de l'application d'une fonction qui est argument à certains arguments.

On pourrait ainsi appliquer différentes transformations ponctuelles à un même objet géométrique en donnant différentes valeurs à la fonction représentant la transformation.

Cette façon de procéder nous permet certes d'utiliser la fonction f en argument, mais elle suppose la prédéfinition des fonctions que l'on désire appliquer. Géophile permet la définition d'une fonction de façon dynamique au cours de la création d'un réseau.

Un pont entre utilisation et programmation

Dans certains cas de figure l'utilisateur peut être conduit à effectuer plusieurs fois la même construction dans le temps ou dans l'espace durant une même session ou entre plusieurs sessions. Géophile lui offre différentes possibilités de réutilisation automatique d'un réseau afin de lui éviter de réitérer souvent une même suite d'opérations.

- Durant une même session

L'utilisateur souhaite effectuer plusieurs fois la même construction non dans le temps, auquel cas il lui suffit d'utiliser la redéfinition, mais dans l'espace, c'est-à-dire qu'il désire représenter simultanément plusieurs réseaux identiques aux feuilles près.

Ainsi ayant construit le réseau de la médiatrice au segment S, pour obtenir la médiatrice du segment S1 sans redéfinir un réseau identique on procède ainsi :

```
définir D1 = appliquer expression sur S1
? donnez la définition de expression argument de D1
            expression = expression de D en fonction de S
? donnez la définition de S1 argument de D1
            #(segment #(point 1 0) #(point 0 1))
----> #(droite 1 -1 0)
```

Bien entendu toute modification du réseau D provoque la réévaluation de l'expression de D en fonction de S et modifie donc le réseau D1.

Plus généralement on peut extraire un sous-réseau sans partir d'une racine et sans arriver aux feuilles d'un réseau global.

Cette façon d'opérer s'avère donc efficace pour définir parallèlement plusieurs réseaux semblables durant une même session, mais ne permet pas d'automatiser une construction d'une session à l'autre.

- Entre plusieurs sessions

L'utilisateur peut être conduit à effectuer fréquemment une même construction au cours de différentes sessions.

Une première solution consiste à stocker la construction (liste des définitions) dans un fichier selon l'ordre incrémental que l'on rechargera à volonté pour définir la construction.

Cette première solution stocke toute l'information contenue dans le réseau que l'on mémorise. Or, bien souvent, lorsqu'une construction est fréquente ce n'est plus la procédure de construction qui est intéressante, mais directement le résultat. En d'autres termes on souhaite qu'une construction beaucoup utilisée devienne une construction de base.

Géophile crée un pont entre utilisation et programmation en permettant à partir d'un réseau de définir un constructeur de base qui restera accessible de sessions en sessions.

L'utilisateur ayant construit le réseau de la médiatrice, peut décider qu'une telle construction sera un constructeur de base permettant de définir une droite à partir d'un segment (médiatrice du segment)

Il suffit de spécifier : le nom du nouveau constructeur de base :"médiatrice_de"
le nom de l'objet résultat dans le réseau : "D"
le noms des objets arguments : "S"

Ce nouveau constructeur peut dorénavant être utilisé comme suit :

définir D1 = médiatrice_de S1

Suites définies à partir d'un réseau

En géométrie on est fréquement conduit à étudier certaines **suites d'objets** variant selon un paramètre telles que les courbes qui ne sont autres que des suites de points, les enveloppes des suites de droites, les mouvements des suites de positions, etc.

Le calcul de l'expression du sommet d'un réseau en fonction d'autres sommets trouve ainsi d'autres applications que la fabrication de constructeurs de base comme le montre le paragraphe précédent. En effet l'une de ces applications en géométrie est la définition de suites d'objets.

Une suite d'objets représente l'ensemble des valeurs prises par un objet du réseau pour un ensemble de valeurs prises par un autre objet du réseau dont il dépend. Plutôt que de représenter une suite par la liste des valeurs prises par un objet, nous la représentons par l'expression de l'objet en fonction de l'argument du réseau à faire varier. Cette façon de procéder s'impose car l'expression de l'objet, plus l'intervalle et le pas de variation, sont une représentation minimale de la suite. Ainsi une suite est représentée par :

- un objet1 dont la variation figure la suite

- un objet2 argument de objet1 induisant la variation de objet1

- un corps qui est l'expression de objet1 en fonction de objet2 dans le réseau

- la valeur initiale de la variation de objet2

- la valeur finale de la variation de objet2

- le pas de variation de objet2

A titre d'exemple pour définir la suite des droite D pour la variation du coefficient barycentrique kA (voir dernier exemple de réseau) l'utilisateur procède ainsi :

définir Suite_D = suite des D pour kA allant de 1 à 10 par pas de h
? donnez la définition de h
h = 0.5
-----> #(suite D Ka *(expression de D en fonction de kA)* **1 10 .5)**
(représentation d'une suite)

Suite_D est à présent connecté au réseau en pointant sur D kA et h et est automatiquement modifié dès que D est modifié.

Bien entendu il est possible de construire des suites de suites et ainsi de suite.

GRAPHISME

Principes

- <u>Affichage indépendant de l'existence des entités du réseau</u>

Il n'est pas nécéssairement intéressant de visualiser systématiquement tous les objets graphiques présents dans un réseau, cela peut même constituer une gêne nuisant considérablement à la clarté de la figure.Aussi l'affichage des entités du réseau est totalement indépendant de leur existence. C'est l'utilisateur qui doit demander explicitement l'affichage et l'effacement d'un objet graphique.

- <u>Représentation graphique correlée avec le réseau</u>

Une entité affichée le demeure jusqu'à ce que l'utilisateur donne un ordre d'effacement. Lors d'une modification tous les objets réévalués sont réaffichés automatiquement par le système de sorte à maintenir les contraintes de la figure imposées par le réseau. Cette corrélation permanente entre un réseau et sa représentation graphique est pédagogiquement l'un des interêts essentiels de Géophile.

- <u>Réseau de construction indépendant du repère écran</u>

Utilitaires d'affichage

- <u>Rafraîchissement de l'écran</u> - <u>Couleur du fond</u> - <u>Repère par défaut</u>

- <u>Trace d'un objet graphique</u>

Il est possible de tracer une entité graphique au fur et à mesure que de modifications lui sont appliquées. Lorsqu'une variable est tracée, lors d'une modification de réseau, son ancienne représentation à l'écran n'est pas effacée et une nouvelle liste d'affichage lui est attribuée. Cette fonctionnalité est largement dépassée par la possibilité de définir des suites d'objets.

CONCLUSION

Etat du prototype

A ce jour le prototype que nous avons décrit fonctionne sur SM90 sous Unix. Les connaissances géométriques implantées ont principalement servi de jeux d'essais pour éprouver les principes de Géophile. L'étude du développement systématique de la géométrie 2D est en cours de réalisation en collaboration avec des géomètres.

L'objectif de simplicité d'utilisation et de minimisation de l'intervention de l'utilisateur lors de la création, la modification et la manipulation de construction a été atteint. Cependant l'étude d'une bonne communication homme-machine, dépassant le cadre de ce travail, n'a pas été entreprise. Elle permettrait l'amélioration de la syntaxe des commandes et l'utilisation de dispositifs de sélection, désignation et localisation.

Les délais de réalisation ou modification d'une figure sont très décents pour le géomètre. La complexité des figures traitées a été considérablement accrue par rapport aux constructions réalisables manuellement (lieux, enveloppes, suites, par exemple). Une nouvelle approche de l'enseignement de la géométrie pourrait en découler. De nouveaux problèmes pourront être abordés car le support sensible que constitue une figure pourra être présent à tous les niveaux et stimuler l'intuition.

Comparaison avec des logiciels existants

Le logiciel le plus proche de Géophile, en temps qu'outil de construction et de dessin géométrique, est Euclide [ALL 86], développé à l'I.R.E.M de Grenoble. Euclide est en fait un ensemble de constructeurs de base en géométrie agissant sur des objets de base. On n'y trouve pas les notions de définition déductive et de réévaluation automatique d'une figure modifiée. L'extension du système ne pouvant se faire qu'en Logo, langage d'implantation d'Euclide, celle-ci relève bien plus d'une activité de programmation que d'une expression de connaissances en langage quasi mathématique comme le permet Géophile.

Cabri-Géomètre est un logiciel également développé à Grenoble. C'est outil possède un mécanisme de redéfinition automatique. Cependant les primitives de bases étant figés, la construction déductive est impossible. Cet outil quoiqu'ayant des idées communes avec Géophile n'en est qu'un cas particulier.

Qualités essentielles de Géophile

Le développement de la géométrie est facilité par la représentation "orientée objets" des connaissances, représentation modulaire donc mieux contrôlable et relativement proche de la description mathématique des concepts [BRA 88]. Géophile est un langage géométrique essentiellement évolutif ce qui en permet des utilisations particulières selon les niveaux d'enseignement.

La gestion de réseaux de construction est un point essentiel. Elle permet d'une part la définition d'une construction de façon déductive ou incrémentale comme pour la méthode déductive de programmation. Elle permet d'autre part toute modification d'une construction en minimisant l'intervention de l'utilisateur grâce au processus de redéfinition automatique de réseaux.
De plus la représentation sous forme de réseaux autorise du calcul formel sur les constructions (définition de méthodes ou fonctions, expression formelle d'un lieu ou d'une enveloppe). Cette propriété lance un pont entre utilisation et programmation, un réseau pouvant être transformé automatiquement en un constructeur de base.
L'utilisation des réseaux peut donc constituer un outil général de conception déductive de programmes.

L'extensibilité du système à toute géométrie et à d'autres applications voisines en font également un outil très puissant.

Développements futurs

Géophile ayant été conçu dans le but de couvrir les problèmes de constructions en général, il semble désormais possible de développer de nouvelles applications gérant des objets quelconques dépendant de façon quelconque les uns des autres.

Le développement systématique de la géométrie 2D étant en cours, nous envisageons une immédiate extension en 3D, toujours sur une base de géométrie analytique. Il serait intéressant de s'assurer qu'il est facile d'y intégrer des applications voisines telles que la cinématique, l'animation ou la mécanique en introduisant des notions physiques. L'intégration de fonctionnalités des modeleurs 3D de la C.A.O. en mécanique ou de la synthèse d'image semble également possible.

Le développement de Géophile en un progiciel destiné à l'enseignement de la géométrie est à l'étude.
Outre l'améloration sensible de la communication homme-machine mentionnée précédement, un tel développement passe par une exploration et expérimentation systématiques du domaine, actuellement réalisées par des enseignants en géométrie.
Des outils destinés à l'E.A.O , tels que la reconnaissance automatique d'une configuration donnée dans une construction , proposée par un enseignant, pourraient être étudiés.

Une autre direction de recherche concerne l'introduction de géométrie formelle permettant la démonstration automatique et réduisant le rôle de la géométrie analytique à la gestion des dessins affichés.

Enfin, étant donnée la similitude entre programmation déductive et la définition de constructions géométriques il pourrait être intéressant d'étudier les conditions d'utilisation de Géophile dans le cadre d'un enseignement de la programmation.

REFERENCES

[ALL 86] Jean-Claude Allard, Claude Pascal, Logedif, IREM de Grenoble : "Euclide,un langage pour la géométrie", Cedic/Nathan 1986.

[BEL 78] F. Bellegarde, J.P.Finance, B. Huc, J. Jaray, P. Lescanne, J. Maroldt, C Pair, A Quere, J.L. Rémy : "MEDEE, a type of language for deductive programming method" , Conference on reliable software, ACM, Bonn, 1978.

[BRA 88] Gabriel Braun : "Sur la programmation de constructions géométriques", Thèse d'informatique à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.

[CHA 86] Jérome Chailloux : "LE_LISP 15.2", INRIA, 1986.

[DUC 84] Amédée Ducrin : "Programmation 1 : du problème à l'algorithme", Dunod Informatique 1984.

[FIN 85] J.P. Finance, J. Souquières: "A method and a language for constructing iterative programs", Science of Computer Programming n° 5, p. 201 à 218, North Holland, 1985.

[GOL 83] Adele Goldberg et David Robson : "Smalltalk-80" the language and its implémentation, Addison Wesley, 1983.

[HUC 77] B. Huc : "Mise en oeuvre de la méthode de programmation déductive", Thèse de docteur ingénieur ,Université de Nancy-I, 1977.

[HUL 84] Jean-Marie Hulot : "programmer en Ceyx version 15", rapport INRIA 1984.

[INH 47] B. Inhelder et J. Piaget : "La représentation de l'espace chez l'enfant", PUF.

[PAI 79] C.Pair : "Construction des programmes", R.A.I.R.O Informatique Computer Science (Vol.13, n°2, 1979 , p. 113 à 137).

[PLU 86] François Pluvinage, Jean-Claude Rauscher : "La géométrie constructive mise à l'essai", Petit X 1986 n°11, IREM Grenoble.

[SOU 80] Jeanine Souquières : "Méthode pour la construction d'algorithme dans le cas de conflit de structure", actes du Congrès de l'AFCET, p. 203 à 215, 1980.

[WIS 84] Patrick Henry Wiston et Bergdold Klaus Paul Horn : "Lisp", Addison Wesley, 1984.

[WER 85] H. Wertz : "Lisp, une introduction à la programmation", Masson, Paris,1985

DEUX ANS DE CALCUL AU CM:

mesure et interprétation des progrès.

J.P. FISCHER[(1)]

We have measured Response Time on number facts in a longitudinal study with fourth-graders, four times in two successive school years. The pattern of more than 32000 RT shows a **massive progress**. This progress concerns **all** the four arithmetical **operations**, **all** the **students**, and **all** the presented **facts**, even such very simple one as 3x2=6. Qualitative changes of the underlying **memory processes** and of the **verification strategies** which may go whith this progress are reviewed. Factors - **practice** and **maturation** - which may influence it are also discussed.

Introduction

L'équipement informatique des écoles et le développement d'outils logiciels adéquats (Fischer, 1988c) permettent aujourd'hui d'entreprendre des **études longitudinales** avec la méthode des Temps de Réponse (TR) sur des questions scolaires "traditionnelles" comme l'apprentissage des faits numériques élémentaires, les "tables" si l'on préfère.

Il existe certes quelques **études transversales**, ne recourant pas nécessairement à la méthode des TR, qui ont essayé d'apporter des réponses à des questions que tout enseignant, de l'école élémentaire notamment, doit se poser. Mais ces réponses peuvent être curieuses ou controversées. Par exemple:

- Brousseau (1973) conclut qu' *«il n'y a pas de progrès»* après le Cours Moyen 1ère année (CM1, 4ème année d'école obligatoire en France) pour les multiplications, ou encore, plus précisément, que *«l'apprentissage continue un peu sur les produits faciles et moyens mais pas sur les produits difficiles»*, une conclusion qui n'a pas été confirmée par notre propre étude transversale (Fischer, 1987b);

(1) *L'auteur voudrait remercier tous les maîtres et élèves impliqués dans les résultats rapportés, ainsi que tous les collègues l'ayant aidé dans les passations et la rédaction.*

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 2 (1989) (p.135-152) IREM de Strasbourg*

- Findlay (1978) a trouvé, en étudiant des additions et soustractions, que les élèves de 10 ans sont moins rapides que ceux de 9 ans, un résultat visiblement dû à la transversalité (et aux effectifs insuffisants) de son étude;
- Ashcraft et Fierman (1982) ont trouvé que le passage d'un calcul procédural (ex.: le comptage) à une recherche en mémoire s'opère au niveau du Cours Elémentaire 2ème année (CE2, 3ème année), mais Campbell (1987) explique que la tâche de vérification utilisée conduit certainement à avancer cette date de passage par rapport à ce que l'on trouverait avec une tâche de production.

En outre, la portée des recherches menées jusqu'ici avec la méthode des TR se trouve limitée par les restrictions suivantes:
- on n'interroge qu'une partie des élèves d'une classe;
- les niveaux de classe sont relativement espacés, par exemple de 3 ans pour Hamann et Ashcraft (1985), et jamais de moins de un an;
- la passation est individuelle et la mesure n'est pas intégrée au travail scolaire habituel;
- on se limite à l'étude d'une seule opération arithmétique;
- on ne se préoccupe pas du progrès individuel des élèves.

Ainsi, jusqu'à un passé récent et malgré plus de 15 ans d'enseignement en Ecole Normale (formation des instituteurs), je n'avais aucune réponse précise à des questions extrêmement simples que tout instituteur, de CM (4ème et 5ème années) notamment, peut se poser sur le progrès de ses élèves dans la connaissance des faits numériques élémentaires. Par exemple:
- tous les élèves progressent-ils encore au CM ou, au contraire, les "meilleurs" atteignent-ils un plafond avant le CM, ou au moins au CM1, qui les empêche de progresser encore ?
- le progrès est-il fonction de la récence de l'apprentissage ? Autrement dit, les divisions apprises au CM1 ou en fin de CE2 progressent-elles beaucoup plus que les additions apprises au Cours Préparatoire (CP, 1ère année d'école) ?
- le progrès affecte-t-il tous les calculs, y compris ceux qui, comme 4+2, 3x2, 5-2,... , peuvent être considérés comme triviaux à ce niveau de la scolarité, et dont certains peuvent être maîtrisés dès le CP (Rightsel et Thornton, 1985) ?
- le progrès est-il uniforme sur les deux années ?
- quels sont les facteurs du progrès ?

Deux ans de calcul au CM :
mesure et interprétation des progrès.

Le but de cet article est de présenter une étude qui apporte quelques éléments de réponse à ces questions. Par sa longitudinalité ou ses caractéristiques propres, cette étude résout certains problèmes soulevés précédemment, sans évidemment les résoudre tous (et sans davantage en créer d'autres !). Elle utilise une tâche de vérification: l'élève doit répondre si une égalité, par exemple 3+9=11, est Juste ou Fausse, et non pas produire la réponse du calcul 3+9. Mais plutôt que de soutenir, comme l'a un peu fait Ashcraft (Ashcraft, Fierman et Bartolotta, 1984; Ashcraft, 1987, est plus nuancé), que la tâche de vérification ne diffère pas fondamentalement d'une tâche de production, nous préférons respecter ces différences (voir Fischer, 1988a; Campbell, 1987) dans nos interprétations, et en suggérons ailleurs (Fischer, 1988c) une exploitation pédagogique.

Méthode et expérience

Méthode. Elle s'appuie sur un programme, appelé JusteFaux, destiné aux élèves en fin d'école élémentaire ou en début de collège et dont une version est maintenant proposée aux enseignants (Fischer, 1988c). Je vais le décrire très brièvement en renvoyant à Fischer (1988a ou 1988c) pour plus de précisions.
Le programme JusteFaux propose la vérification d'"égalités" élémentaires (ex.: 7+2=8; 11-3=8; 3x4=16; 36:9=4) dans un délai limité à 532 cs pour la présente expérience. L'élève doit simplement appuyer sur la touche "J" ou "F" du clavier, suivant qu'il juge l'égalité Juste ou Fausse. Le programme mesure, et enregistre, à la centiseconde (cs) près, le Temps de la Réponse, ainsi que son exactitude.
La méthode comporte deux passations pour chaque session. Ceci permet de proposer à chaque élève, lors de l'une des deux passations, les opérations REGroupées (modalité REG):14 additions, puis 14 soustractions, puis 14 multiplications et enfin 14 divisions, et, lors de l'autre, les opérations Non REGroupées (modalité NREG). Les égalités proposées pour la présente expérience sont celles décrites exhaustivement dans Fischer (1988a) : elles impliquent les quatre opérations arithmétiques et sont divisées en deux niveaux. Le niveau 1 concerne les calculs a priori les plus faciles, alors que le niveau 2 concerne les égalités moins faciles mais sans jamais "sortir" des tables élémentaires.
Expérience. Elle concernait quatre classes de CM et comprenait quatre sessions régulièrement espacées: la première a eu lieu en décembre-janvier 86-87, la seconde en juin 87, la troisième en décembre 87, et la quatrième fin mai et en juin 88. Chaque session comprenait deux passations à une semaine d'intervalle environ. L'expérience était intégrée au travail scolaire habituel et se faisait, bien entendu, en accord et avec la coopération des maîtres concernés. Il va sans dire que tous les élèves de la classe, présents au moment

d'une session donnée, ont toujours été interrogés, mais que les effectifs ont un peu varié au cours de ces deux ans. Au total nous avons 73 élèves qui ont participé aux quatre sessions et c'est sur eux que porteront toutes les analyses suivantes.
Les élèves ont été informés, en décembre 86, de l'ensemble du projet et, à chaque passation, l'expérimentateur insistait sur le fait qu'il s'agissait certes de répondre vite, mais qu'avant tout il fallait répondre correctement. Les passations se faisaient en général par groupes d'environ 6 élèves dans la salle informatique équipée d'un NanoRéseau (Léanord) standard ou avec des TO7 ou TO7/70 (Thomson), souvent en présence du seul expérimentateur ou, sinon, d'un ou deux collaborateurs (dans l'une des classes le collaborateur était le maître lui-même).

Visualisation des résultats

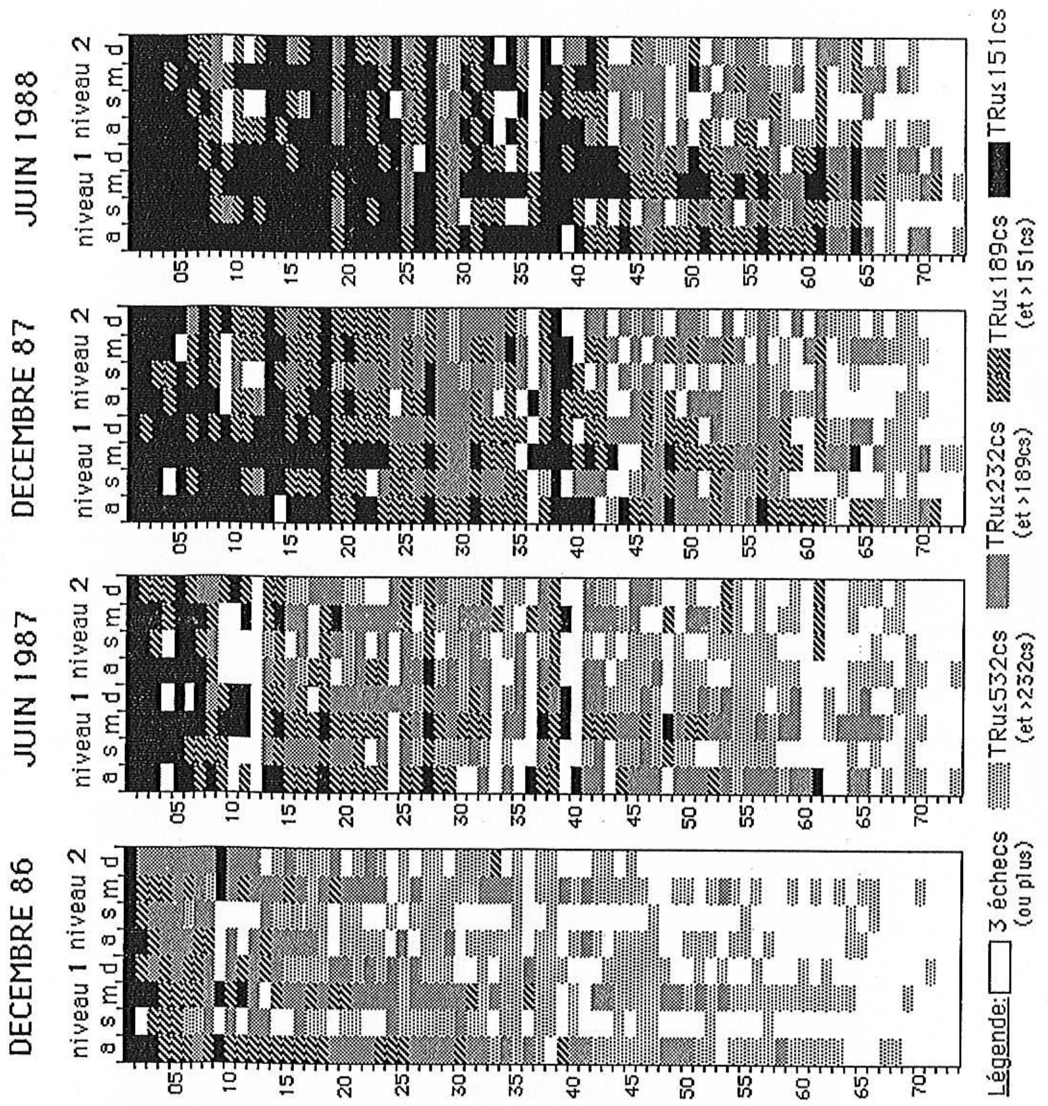
Technique. La technique de visualisation utilisée est celle de l'ensemble JusteFaux (Fischer, 1988c). Une ligne repérable par un numéro de 01 à 73 est attribuée à chaque élève en fonction de sa performance à la session 1. Une case élémentaire (voir page suivante : sur la légende les dimensions d'une case ont été doublées) correspond à une opération de niveau donné. Si un élève a échoué à plus de 2 calculs sur les 14 concernant cette opération et ce niveau, sa **case** correspondante reste **blanche**; sinon, on calcule son Temps de Réussite (TRu = temps de réponse calculé en ne tenant compte que des réponses correctes) moyen pour les 12 réponses correctes les plus rapides. Suivant le résultat, on lui attribue un niveau de gris: le choix des "paliers" (151 cs, 189 cs et 232 cs: voir légende) a été fait de manière à avoir approximativement une équi-représentation des quatre niveaux de gris effectif. Comme le noir reflète les meilleures performances, le progrès se traduira donc par une image qui se noircit ou, à tout le moins, devient plus foncée.

Commentaires. La visualisation donne une impression de **progrès important**. Clairement, elle suggère aussi que:

- le progrès est général: pratiquement tous les élèves et toutes les opérations àt ous les niveaux, progressent (l'image se noircit un peu partout) ;

Deux ans de calcul au CM :
mesure et interprétation des progrès.

Figure 1 : Visualisation des progrès



- la hiérarchie initiale semble conservée: la structure de l'image de la session 1 se retrouve à peu près pour les 3 sessions suivantes.

Tableaux statistiques

Les résultats quantitatifs précis, ainsi que les contrôles de la signification statistique,(1) sont résumés dans les deux tableaux suivants. Dans ces tableaux, nous présentons des gains **moyens**, la moyenne étant calculée sur toutes les opérations retenues et tous les élèves. Pour ce calcul, nous avons attribué un TR arbitraire de 582 cs (=532+50) aux questions qui n'ont pas reçu de réponse dans le délai de 532 cs. Précisons aussi que le test statistique a été utilisé bilatéralement et que 4 seuils ont été pris en considération: 4 (resp. 3, 2, 1) astérisques correspondent à un gain significatif au seuil de .001 (resp. .01, .05, .10), et ns signifie non significatif au seuil le moins sévère considéré.

Opér.	de Ses. 1 à 2		de Ses. 2 à 3		de Ses. 3 à 4		de Ses. 1 à 4	
	gain	signif.	gain	signif.	gain	signif.	gain	signif.
add.	36	****	22	****	19	****	77	****
sou.	47	****	25	****	23	****	95	****
mul.	41	****	22	****	14	****	77	****
div.	45	****	24	****	18	****	87	****
Ens.	43	****	23	****	18	****	84	****

Tableau 1 : Gains (en cs) en vitesse

Opér.	de Ses. 1 à 2		de Ses. 2 à 3		de Ses. 3 à 4		de Ses. 1 à 4	
	gain	signif.	gain	signif.	gain	signif.	gain	signif.
add.	2,5	**	1,7	*	0,8	ns	5,0	****
sou.	5,7	****	5,2	****	0,2	ns	11,1	****
mul.	0,5	ns	3,6	****	1,2	ns	5,3	****
div.	5,6	****	3,6	****	-0,1	ns	9,1	****
Ens.	3,6	****	3,5	****	0,5	ns	7,6	****

Tableau 2 : Gains (en %) en réussite

(1) On peut trouver des précisions sur le test statistique utilisé dans Fischer (1988a, p. 165).

Commentaires. En première impression, ces tableaux confirment **un progrès massif** et statistiquement significatif pour l'**Ensemble** des opérations et cela pour les deux critères - vitesse et réussite. Néanmoins, ce progrès est manifestement plus systématique pour la vitesse que pour les réussites

Nous pouvons maintenant affiner la discussion en fonction de deux de nos préoccupations annoncées en introduction.

1) Pour ce qui concerne l'évolution sur deux années, on voit que le progrès est moins important au cours de la seconde. En particulier il s'est nettement ralenti de la session 3 à la session 4. Ceci peut s'expliquer par le fait que certains élèves ont, notamment pour les réussites, atteint un plafond. Néanmoins, au début du CM1, quasiment aucun élève n'avait atteint son plafond. En effet, même l'élève 1 - un élève qui avait des capacités et un goût électifs pour le calcul - qui a noirci toute la ligne dès la session 1 et qui semblait le plus menacé par un effet plafond, a encore progressé sans ambiguïté: au cours des 18 mois: il a amélioré légèrement (8 cs) mais significativement ($p<0,05$) son TR moyen et, surtout, ce gain en vitesse s'est accompagné d'une réduction non négligeable du nombre d'erreurs (dix à la session 1 contre une seulement à la session 4).
2) Pour ce qui concerne le progrès différencié suivant les quatre opérations arithmétiques, il apparaît que les opérations directes (additions et multiplications) sont légèrement en retrait par rapport aux autres opérations inverses, tant au niveau des gains en temps, qu'à celui des gains en réussites. Néanmoins, il faut tenir compte du fait que les additions et les multiplications étaient les plus rapides et les mieux réussies en début de CM1. Par exemple, si l'on considère les gains relatifs en vitesse, les quatre opérations se resserrent: les additions et multiplications ont progressé de 30,6%, les divisions de 31,4% et les soustractions de 32,4%. Egalement, si l'on examine les tendances, les additions n'ont pas plus tendance à ralentir leur progrès au CM2 que les autres opérations. Tout ceci nous amène à conclure que **le progrès concerne, presque également, les quatre opérations arithmétiques.** En tout cas, il n'y a pas d' "étagement" net des opérations qui reflèterait la récence de l'apprentissage: le progrès n'affecte pas plus la division, la dernière opération apprise, que la soustraction.

Analyses individuelles

Les élèves. Un examen systématique, sur les deux années, montre que:

- à 6 exceptions près, les gains individuels en vitesse sont tous significatifs ($p<0,05$), le plus souvent très fortement. Notons que ces 6 exceptions sont en général des élèves sco-

lairement peu performants: y figurent notamment deux élèves orientés en Section d'Enseignement Spécialisé à la fin du CM2;
- 5 élèves, dont aucun n'appartient aux 6 précédents, ont régressé au niveau des réussites, mais la régression est toujours légère. De plus, pour 3 d'entre eux il s'agit, à l'évidence, d'un effet plafond (plus de 98% de réussites lors de la session 1), et l'un des deux autres a fait des progrès considérables en vitesse.

Nous concluons donc que **tous les élèves ont progressé** au cours des 18 mois séparant les sessions 1 et 4, la plupart assez considérablement et surtout en vitesse.

Remarque. Le fait que ce sont quasi-exclusivement des élèves scolairement peu performants qui n'ont pas progressé en vitesse peut donner lieu à deux interprétations (au moins):
- la première, qui est plutôt un artefact, consiste à penser que ces 6 élèves, dépassés par la difficulté de certains calculs en début de CM1, ont souvent répondu au hasard ou intuitivement, alors que, en fin de CM2, ils ont davantage cherché à calculer exactement. Ceci expliquerait le non progrès en vitesse acccompagné de quelques réussites supplémentaires que nous avons enregistrées pour ces élèves;
- la seconde, qui est plus profonde, consiste à penser que le progrès en vitesse est un indice très pertinent du progrès en général.

Pour déterminer si la première interprétation était bonne, nous avons calculé le progrès de ces 6 élèves aux 10 égalités les plus triviales (d'après les temps de réussite à la session 4), en pensant que le problème des réponses au hasard ou intuitives pour cause de trop grande difficulté ne se pose pas pour ces égalités triviales. Ce calcul a confirmé qu'ils ont davantage progressé à ces égalités triviales (44 cs en moyenne) qu'aux autres (1 cs). Si ce résultat conforte donc la première interprétation, il n'élimine pas pour autant la seconde. D'ailleurs, en faisant le même calcul pour les 6 élèves du haut de l'image, donc les plus performants à la session 1 (i.e ceux qui étaient le plus susceptibles d'être victimes d'un effet plafond), nous avons trouvé qu'ils ont progressé, très légèrement ou très fortement, plus que leurs 6 camarades, suivant que l'on considère le progrès absolu (45 cs à comparer aux 44 cs) ou le progrès relatif (33,2% contre 17,5%), à ces 10 égalités triviales.

Les égalités. Il est intéressant d'analyser aussi les progrès suivant les égalités ellesmêmes et non plus seulement suivant leur nature. Le constat est très clair: **toutes les égalités ont progressé** de plus de 50 cs, une valeur largement supérieure à ce que l'on peut attribuer aux facteurs périphériques (encodage et exécution de la réponse motrice: ≈ 15 cs sur 18 mois si l'estimation proposée dans Fischer (1988c) est exacte).

Précisons encore que:

- le progrès à 15 des 112 égalités atteint ou dépasse la seconde: il s'agit souvent de grandes soustractions;
- l'égalité qui a le moins progressé (en temps) est une grande division: 72:9=6.

Si l'on regarde maintenant le rangement les 112 égalités suivant leur pourcentage de progression en vitesse, il apparaît que:

- les quatre opérations - l'addition, la division, la soustraction et la multiplication - sont présentes aux quatre premières places;
- l'égalité qui a le plus progressé est un complément à 10 (3+7=10), alors que l'égalité qui a le moins progressé est la division déjà mentionnée ci-dessus;
- quelques égalités triviales se situent très honorablement: 3x2=6 est 6ème position, 5-2=1 en 9ème, 3+5=6 en 13ème, 4x2=8 en 17ème, 3+4=7 en 26ème, etc...

Il apparaît donc clairement que les divisions sont loin d'être les égalités qui progressent le plus, et que les additions, soustractions et multiplications, mêmes triviales, ne sont nullement à la traîne dans ces rangements suivant le progrès en vitesse. Ceci confirme l'impression visuelle et les résultats quantitatifs globaux.

Changements qualitatifs

Le progrès quantitatif massif ne peut s'expliquer que par des changements qualitatifs chez les élèves étudiés. De tels changements qualitatifs peuvent concerner aussi bien la stratégie de vérification, que le calcul lui-même, voire que la représentation neurale de certains événements. Nous décrirons ici quatre de ces changements.

1) Le premier concerne le calcul lui-même. Les élèves peuvent soit changer de procédure, soit passer d'une méthode *reconstructive* s'appuyant sur une mémoire **procédurale** à une méthode *reproductive* s'appuyant sur une mémoire **déclarative** (cf. Fischer, 1987b pour le premier couple de qualificatifs, et 1988b pour le second).
   Un changement de procédure consiste, par exemple, à passer d'un comptage de 1 en 1 (ex.: dire 10,11,12,13,**14**, en regardant les doigts pour calculer 9+5) à un passage par 10 plus économique (ex.: dire 9+1, **10**, plus 4, **14** pour l'exemple de 9+5).

Un changement de méthode consiste à passer d'une méthode procédurale, comme celles que nous venons de décrire, à une méthode déclarative, c'est-à-dire à une récupération en Mémoire à Long Terme d'une phrase ou proposition comme "neuf plus cinq, **quatorze**" ou d'une image comme "9 + 5 = 14".
Notons que ce dernier changement de méthode est en accord avec l'évolution de la comparaison des modalités figurée ci-après. En effet, si la mémoire déclarative est moins sensible à l'amorçage que la mémoire procédurale (voir Fischer, 1988b), on peut prévoir que cette différence va s'atténuer de la session 1 à la session 4. Et ceci se vérifie assez bien sur les histogrammes ci-après visualisant l'évolution de l'avantage de la modalité REG, à la fois pour le Temps de Réussite (TRu, histogrammes montants larges) et pour le pourcentage de Réussite (%Ru, histogrammes descendants effilés). Par exemple, pour les additions, l'avantage de la modalité REG qui a été de 26 cs pour le TRu ($p<0{,}001$) et de 5% pour le %Ru ($p<0{,}01$) au cours de la session 1, n'est plus que de 19 cs ($p<0{,}001$) pour le TRu et a disparu pour le %Ru (avantage non significatif de NREG) au cours de la session 4.

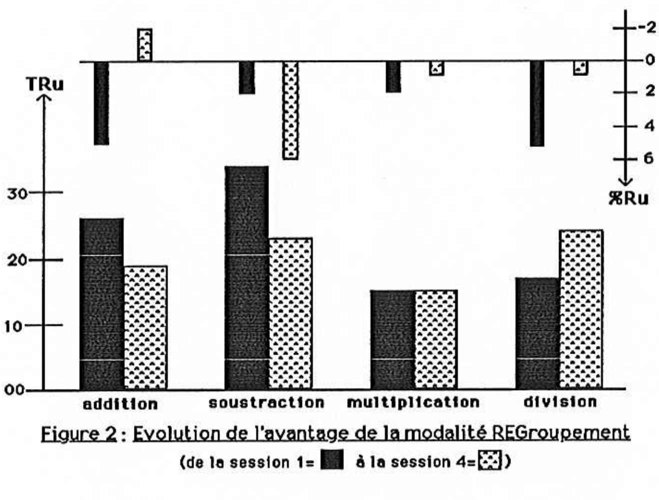


Figure 2 : Evolution de l'avantage de la modalité REGroupement
(de la session 1 = ■ à la session 4 = ▩)

2) Un deuxième changement concerne la *stratégie de vérification.* Les élèves peuvent, lorsque la conception des opérations inverses ou l'exécution des opérations directes s'améliore, partir du résultat proposé dans les opérations inverses et vérifier par exemple 8+3=11 à la place de 11-3=8. Les présentes données, comme celles de Fischer (1988a) pour la division au CM2, offrent un petit support à une telle évolution: les opérations inverses (divisions et soustractions), qui sont les seules à profiter éventuellement d'un tel changement de stratégie, ont progressé un peu plus que les opérations directes. Egalement, dans la comparaison des modalités REG et NREG, on voit sur les histogrammes ci-avant, que la division est la seule opération pour laquelle l'avantage de la modalité REG s'est accentué pour le TRu, en passant de 17 cs (session 1, $p<0{,}05$) à 24 cs (session 4, $p<0{,}001$). Bien que cette évolution soit un peu ambiguë, puisque les réussites n'ont pas évolué dans le même sens, elle est conforme avec le fait que les élèves utilisent de plus en plus une stratégie systématique de calcul de la droite vers la gauche pour les divisions dans la modalité REG (Fischer, 1988a). De plus, lors d'une discussion avec les élèves (au terme de la 4ème session), ceux-ci ont souligné que les divisions étaient faciles car on pouvait faire le calcul inverse. L'expérimentateur remarquant alors que, pour les soustractions (difficiles), on pouvait tout autant faire le calcul inverse, une élève s'est exclamée: «*Ah tiens ! Pour les soustractions je n'y ai pas pensé !* ». Cette remarque conforte donc aussi l'observation (Fischer, 1988a) qu'une telle stratégie d'inversion est moins fréquente pour les soustractions que pour les divisions.

3) Le troisième concerne encore la vérification, mais touche cette fois à sa qualité même. En effet, avec l'âge et lorsque les égalités ne sont pas suffisamment bien représentées en mémoire (on peut espérer que c'est le cas pour les égalités "fausses" !), il est possible que certains élèves recourent à des **jugements de plausibilité**, plus économiques (Reder (1982) a argumenté dans cette direction pour la vérification de phrases), plutôt qu'à une vérification exacte. Ce jugement de plausibilité peut se faire sur la base du "degré de fausseté" de la réponse proposée ou sur un critère de parité. Ceci est très bien illustré par une discussion que nous avons pu avoir, à l'issue de la session 4, avec les élèves d'une autre classe. L' "égalité" 3+9=11 ayant été la moins bien réussie lors de cette dernière session, nous les avons incités à trouver l'origine de la difficulté. La première explication proposée a été que la réponse fausse est proche de la réponse juste. Puis, l'une des élèves a remarqué qu'il y avait un problème de parité. L'un de ses camarades est alors arrivé à le formuler de très belle manière: «*Comme la somme de deux nombres pairs est toujours un nombre pair, on pourrait s'**imaginer** que la somme de deux nombres impairs est un nombre impair.* » !

4) Enfin, tous les calculs, même ceux connus par coeur, peuvent encore progresser si l'on ne conçoit pas l'automaticité (Logan, 1985) ou la représentation en mémoire (Squire, 1987) comme un phénomène de "tout ou rien". En effet, comme l'explique Squire, la représentation neurale d'un événement peut évoluer avec le temps: "sortie" ou "recrutement" de neurones, augmentation du nombre et de la taille des contacts synaptiques,... Un tel phénomène peut alors affecter toutes les égalités, mêmes triviales, et peut expliquer pourquoi les égalités de niveau 1 progressent quasiment autant que celles de niveau 2, comme le suggère la figure 1 et le confirme le tableau 3 suivant, où nous avons présenté les gains en vitesse (en cs) et en pourcentage de **Ré**ussite de la session 1 à la session 4 en fonction du niveau (avec les mêmes conventions pour la **signif**ication que précédemment).

Opér.		Niveau 1				Niveau 2		
	Vit.	signif.	%Réu	signif.	Vit.	signif.	%Réu	signif.
add	73	****	4,1	****	81	****	5,9	****
sou	90	****	9,7	****	98	****	12,5	****
mul	80	****	6,4	****	75	****	4,2	***
div	91	****	9,9	****	83	****	8,2	****
Ens	84	****	7,5	****	84	****	7,7	****

Tableau 3 : Gains (de la session 1 à 4) en fonction du niveau

Précisons que, si nous n'avons pas inclus les sessions 2 et 3 dans ce tableau, c'est parce qu'elles ne révèlent rien de plus. En particulier, elles ne suggèrent pas que les égalités de niveau 1 (resp. 2) ont surtout progressé au CM1 (resp. CM2). Enfin, attirons l'attention sur les multiplications: celles de niveau 1, principalement des produits extraits des tables de 2 et 5, ont plus progressé en vitesse et en exactitude que celles de niveau 2. Ce résultat, contraire à l'intuition, rejoint localement [1] l'observation de Brousseau (voir introduction).

(1) Globalement, nos résultats montrent quand même, pour les multiplications, un progrès significatif de la session 2 à la session 4, i.e. de CM1 au CM2. De plus, bien que les multiplications de niveau 2 aient moins progressé en réussites que celles de niveau 1, elles ont tout de même progressé significativement.

Remarque. Dans une récente simulation du développement de l'arithmétique (des additions principalement), Ashcraft (1987) a pondéré davantage l'incrément (d'une année à l'autre) de la force de représentation en mémoire déclarative des petits calculs que celui des grands. Ashcraft, qui reconnaît qu'une telle pondération différenciée n'est pas évidente, la justifie par l'observation de l'une de ses collaboratrices. Cette dernière a analysé la fréquence de présentation des 100 faits additifs de base dans les manuels scolaires (américains, du niveau 0 au niveau 3, 3 par année scolaire). Et elle a trouvé que les petites additions, notamment celles impliquant 3, étaient plus fréquemment présentées que les grandes (notamment celles impliquant 9).

Facteurs du progrès

Quelle est la source de ce progrès massif ? Avant d'aborder les facteurs "intéressants" du progrès, essayons de montrer que l' **habituation à la tâche** - que nous considérons plutôt comme un artefact - n'a probablement pas joué un rôle majeur.
L'espacement des différentes sessions - environ 6 mois d'intervalle - rend cette hypothèse vraisemblable. De plus, l'habituation devrait surtout s'observer d'une passation à l'autre, puisque ces dernières ne sont espacées que d'une semaine. Or un contrôle systématique a mis en évidence que, si les élèves ont bien progressé significativement en Nombre de Réussites au cours des 3 dernières sessions et d'une passation à l'autre, ce progrès en nombre s'est accompagné d'une augmentation (non significative) des Temps de Réussite. Le progrès d'une passation à l'autre n'est donc jamais net et le pattern observé semble plutôt une conséquence des consignes données entre les deux passations que de l'effet d'habituation: en effet, voyant, après la passation 1 des 3 dernières sessions, que les élèves avaient surtout progressé en vitesse, nous les incitions, avant la passation 2, à respecter les consignes, à savoir répondre vite mais correctement avant tout.
Rajoutons à cela que le progrès ici trouvé sur les deux années est comparable à celui trouvé dans une étude transversale (Fischer, 1987b) pour laquelle tout effet d'habituation est exclu.

Nous pouvons donc maintenant discuter le rôle de la **maturation** qui, si elle est considérée comme un "vrai" facteur par le (neuro-)psychologue, est aussi vue comme un artefact par le pédagogue qui cherche à interpréter le progrès comme une conséquence de son travail. Dans la mesure où Case (1985, 1987) soutient que c'est la **maturation** qui explique principalement les progrès en **efficience opérationnelle** des jeunes élèves, et que notre tâche implique - évidemment non exclusivement - cette dernière, il convient de regarder la question de près.

Le **résultat principal** observé, à savoir le progrès très peu différencié suivant la nature de l'opération, le niveau de l'opération ou le niveau initial de l'élève, est tout à fait **compatible avec un facteur général comme la maturation.** Mais dès que l'on essaie de regarder les résultats d'un peu plus près, les arguments deviennent flous et discutables. Par exemple:

- la dépression de la courbe des progrès due aux grandes vacances est à peine perceptible: un peu pour les TR, mais pas du tout pour les réussites. Ce manque d'effet des grandes vacances serait un argument en faveur d'une hypothèse maturationnelle, mais l'intersession - qui englobe les grandes vacances - recouvre aussi trois mois de travail scolaire !
- le progrès un peu plus important au CM1 qu'au CM2 peut très hypothétiquement être vu comme une conséquence de la myélinisation(1) qui s'effectue par cycles (Roch-Lecours, 1982) et dont l'un des cycles pourrait alors recouvrir davantage le CM1 que le CM2. Mais Fischer (à paraître) a mis en évidence des progrès massifs au seul CM2: 72 cs pour les TR. Si la myélinisation produisait ses effets principalement au CM1, il faudrait trouver un autre facteur pour expliquer ces derniers progrès massifs !

D'ailleurs, ces observations peuvent souvent s'expliquer par la seule pratique (ou aussi par la méthode de mesure). Par exemple, on peut très bien attribuer le progrès aux additions au fait qu'elles sont souvent impliquées dans les autres calculs, et donc toujours très pratiquées (indirectement), même au CM.

En outre, le facteur maturationnel, considéré isolément, se heurte à des difficultés lorsque l'on regarde les résultats de notre étude transversale du CE2 au CM2 (Fischer, 1987b), prolongée par Gadio (1987) en 6ème. Par exemple:

1) Fischer (1987b) a comparé les élèves nés dans la première moitié de l'année à ceux nés dans la seconde: si la maturation était le facteur majeur du progrès, l'avantage des premiers aurait dû être supérieur à la moitié du progrès (sur 6 mois). Et il ne l'a pas été.
2) Les résultats de CM2 (Fischer, 1987a) comparés à ceux de 6ème (Gadio, 1987) montrent une évolution non unidirectionnelle des mutiplications que ne prédit pas un facteur maturationnel isolé. Cette évolution est présentée dans le tableau 4 suivant, où:

(1) Case cite principalement la myélinisation des voies nerveuses comme agent de la maturation. La myélini sation expliquerait bien le gain en vitesse (voir par ex. Raimbault, 1988 p. 8), ainsi que, selon Case, le gain en réussite (par réduction des interférences). Les connaissances sur la myélinisation, en particulier sur son "timing", restent cependant imprécises et imcomplètes dès que l'on s'éloigne des premières années de la vie.

- la première colonne précise les égalités multiplicatives proposées avec un délai de 5 s;
- la deuxième indique les performances en CM2 avec d'abord le Temps de Réussite en cs et, entre parenthèses, le pourcentage des échecs;
- enfin, la troisième colonne présente les performances comparables en 6ème.

Egalités	CM2 TRu (% échecs)	6ème TRu (% échecs)
2 x 3 = 6	146 (4)	**126 (1)**
5 x 2 = 10	140 (7)	**129 (3)**
4 x 4 = 18	197 (10)	**190 (8)**
8 x 2 = 16	**165** (11)	170 **(8)**
4 x 3 = 13	190 **(4)**	**178** (5)
3 x 5 = 25	202 **(9)**	**192** (12)
6 x 8 = 48	**187 (6)**	192 (16)
6 x 7 = 32	**216 (21)**	218 (27)

Tableau 4: Comparaison CM2-6ème

Sachant que les "meilleurs" sont en gras, il apparaît nettement que:

- pour les trois premières égalités, très simples, les élèves de 6ème sont clairement les "meilleurs";
- pour les trois égalités suivantes, intermédiaires ou simples aussi, il se produit un échange exactitude-vitesse qui complique la comparaison;
- enfin, pour les deux dernières égalités, incontestablement les plus complexes, ce sont cette fois-ci les élèves de CM2 qui sont clairement les meilleurs.

Cette évolution peut s'expliquer ainsi: l'absence d'une pratique suffisante conduirait à une régression pour les calculs les plus complexes, alors que les calculs les plus simples, peut-être mieux entraînés indirectement, continueraient à progresser sous l'effet conjugué de cet entraînement et de la maturation.

Toutes ces considérations nous amènent donc à considérer la **pratique** comme le **facteur principal du progrès,** tout en reconnaissant, comme vient de le suggérer l'exemple 2, que ce progrès dû à la pratique peut être amplifié par la maturation (le coefficient d'amplification pouvant lui-même être fonction du calcul, de l'élève, et de la pratique elle-même).

CONCLUSION

Dans la présente étude nous avons analysé plus de 32000 TR produits par 73 élèves de CM au cours de 4 sessions espacées chaque fois d'environ 6 mois. Cette étude longitudinale montre que **la progression de la connaissance des faits numériques élémentaires,** mesurée précisément et complètement (c'est-à-dire à la fois par le TR et par l'exactitude) dans une tâche de vérification, **est encore importante** au CM, même si elle semble se ralentir au CM2.

Cette progression concerne quasiment **tous les élèves, toutes les égalités**, petites ou grandes, et mêmes triviales comme 3x2=6, et **toutes les opérations arithmétiques,** même l'addition dont l'apprentissage est pourtant "ancien".

Le facteur principal de ce progrès **est**, très vraisemblablement, **la pratique** régulière et suffisante du calcul mental et du calcul en général, même si un phénomène de maturation peut amplifier ce progrès.

Cette pratique, scolaire ou non, pourrait conduire à des changements qualitatifs, en général déjà décrits par d'autres auteurs ou nous-mêmes (Fischer, 1987b; 1988a; Fischer et Pluvinage, à paraître), à savoir: le remplacement de procédures de calcul par d'autres plus économiques, le recours à une mémoire déclarative qui contient les faits numériques plutôt qu'à une mémoire procédurale qui nécessite leur reconstruction. Egalement, dans le cas d'une tâche de vérification, les élèves peuvent changer leur stratégie de vérification (faire le calcul inverse notamment), voire recourir à des jugements de plausibilité plutôt qu'à une vérification exacte.

Mais c'est sur un autre changement, celui de la représentation en mémoire déclarative, que nous aimerions terminer cette contribution. Ce changement nous paraît bien illustré par l'égalité **3+7=10.** C'est, en effet, ce **complément à 10 qui a le plus progressé** en vitesse, au point de se révéler en fin de compte (i.e à la session 4) **le plus rapide** de tous les 112 faits proposés[1].

(1) Il faut préciser qu'il n'y avait pas de doubles (3+3, 7+7, ...) dans notre échantillon et que le seul autre complément à 10 correct, à savoir 2+8=10, a obtenu lui aussi de bons rangs : 20ème (sur 112) d'après sa pogression relative, et surtout 2ème (derrière 3+7=10) dans le rangement final (d'après les TRu).

Son rôle "pivotal" suggère alors qu'il doit souvent être impliqué dans des calculs plus complexes: il est donc intéressant non seulement de le transférer dans une mémoire déclarative (le connaître par coeur si l'on préfère), mais aussi de "gérer" son accès de manière à ce qu'il soit des plus brefs. Et c'est la pratique (indirecte) qui pourrait être le "responsable" d'une telle gestion. Ceci expliquerait alors pourquoi l'égalité 3+7=10 ne se dégage que tardivement (au CM2 dans les classes performantes) et, pourquoi aussi, **le rôle particulier et important des compléments à 10,** contrairement à celui des doubles, n'a été que rarement souligné dans la littérature. Une telle interprétation est en tout cas en accord avec l'étude actuelle des systèmes informatiques complexes et hiérarchisés qui confirme que **les connaissances de base doivent être introduites par les bas niveaux à temps de réponse brefs** (Felden, 1987).

REFERENCES

Ashcraft M.H., 1987. Children's knowledge of simple arithmetic: A developmental model and simulation. In J. Bisanz, C.J. Brainerd & R. Kail (Eds), *Formal methods in developmental psychology.* New York: Springer.

Ashcraft M.H. & Fierman B.A., 1982. Mental addition in third, fourth, and sixth graders. *Journal of Experimental Child Psychology,* **33,** 216-234.

Ashcraft M.H., Fierman B.A. & Bartolotta R., 1984. The production and verification tasks in mental addition: An empirical comparison. *Developmental Review,* **4,** 157-170.

Brousseau G., 1973. Notes sur l'apprentissage des opérations dans les naturels: la multiplication. In *Enseignement élémentaire des mathématiques:* cahier n°**13.** Bordeaux: IREM.

Campbell J.I.D., 1987. Production, verification, and priming of multiplication facts. *Memory & Cognition,* **15,** 349-364.

Case R., 1985. Intellectual development: Birth to adulthood. Orlando: Academic Press.

Case R., 1987. The structure and process of intellectual development. *International Journal of Psychology,* **22,** 571-607.

Felden M., 1987. Le songe de Minerve: Le cerveau et les sciences de l'artificiel. Paris: Lieu Commun.

Findlay J.M., 1978. What form of memory do schoolchildren use whilst performing mental arithmetic ? In M.M. Gruneberg, P.E. Morris & R.N. Sykes (Eds), *Practical aspects of memory.* London: Academic Press.

Fischer J.P., 1987a. L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie,* **80,** 17-24.

Fischer J.P., 1987b. Les faits numériques à l'école: une étude développementale par les TR. *Psychologie Scolaire,* **60**, 7-24.

Fischer J.P., 1988a. La mesure des TR en arithmétique élémentaire: Spécificités d'une tâche de vérification. In R. Duval (Ed), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives: Vol.1.* Strasbourg: IREM.

Fischer J.P., 1988b. Les erreurs de lecture: un éclairage des sciences cognitives. *Psychologie Scolaire,* **n°65, 23-38.**

Fischer J.P., 1988c. 11-3=9 : Juste ou Faux ? (Une méthode moderne d'évaluation de - et des progrès dans - la connaissance des faits numériques élémentaires). Montigny-lès-Metz: CDDP de la Moselle.

Fischer J.P., à paraître. Un an de calcul en (e année d'école : mesure des progrès par les TR. *Bulletin de l'A.D.L.* (Bruxelles).

Fischer J.P. et Pluvinage F., à paraître. Complexités de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*

Gadio I., 1987. L'automatisation du calcul au début de l'école secondaire (Manuscrit: DEA de Didactique des Mathématiques). Strasbourg: non publié.

Hamann M.S. & Ashcraft M.H., 1985. Simple and complex mental addition across development. *Journal of Experimental Child Psychology,* **40**, 49-72.

Logan G.D., 1985. Skill and automaticity: Relations, implications, and future directions. *Canadian Journal of Psychology,* **39**, 367-386.

Raimbault J., 1988. Les conductions nerveuses chez l'enfant normal. Paris: Expansion Scientifique Française.

Reder L.M., 1982. Plausibility judgments versus fact retrieval: Alternative strategies for sentence verification. *Psychological Review,* **89**, 250-280.

Rightsel P.S. & Thornton C.A., 1985. 72 addition facts can be mastered by mid-grade 1. *Arithmetic Teacher,* **33**, 8-10.

Roch-Lecours A., 1982. Correlates of developmental behavior in brain maturation. In T.G. Bever (Ed), *Regressions in mental development: Basic phenomena and theories.* Hillsdale: Erlbaum.

Squire L.R., 1987. Memory and brain. New York: Oxford University Press.

L'ERREUR DE PERSEVERATION

EN ARITHMETIQUE

J.P. Fischer*

If a teacher offers a sequence of computations, e.g. four additions followed by a multiplication, some students perseverate in addition. Fischer (1988b) hypothesized that this perseveration behavior is not necessarily caused by inattention. It could originate in the use of a procedural memory which is more sensitive to (here biasing) repetition priming. The experiment presented here gives some empirical support to this hypothesis.
In the conclusions, the fecundity of this finding is underlined: to our great surprise, it (with other results) explains an old observation by Hans Berger who is more known for his discovery of electroencephalography but was also interested in arithmetic (Berger, 1926).

Jasper (1931) a défini la **persévération** comme « *la tendance d'un ensemble de neurones, une fois activé, à persister de manière autonome dans cet état d'activation, en offrant une résistance à tout changement de cet état* ». Il a aussi comparé cette qualité du processus nerveux à l'inertie de la matière physique, et a proposé une série de tests pour la mettre en évidence. L'un de ces derniers est un test arithmétique, inspiré des travaux de Jersild (1927): ce test consiste à présenter 3 pages de chiffres regroupés en paires. Sur la première page, les sujets doivent additionner les chiffres de chaque paire pendant 2 minutes 1/2. Sur la seconde, ils doivent les multiplier, également pendant 2 minutes 1/2. Enfin, sur la troisième, ils doivent, **alternativement**, additionner et multiplier pendant 5 minutes.

* L'auteur voudrait remercier tous les élèves (différents de ceux de l'autre expérience rapportée dans le présent volume) et maîtres des classes impliquées dans l'expérience, ainsi que tous les "relecteurs".

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p.153-171) IREM de Strasbourg

La différence entre le nombre de calculs pendant les 5 premières minutes et celui pendant les 5 minutes suivantes est une mesure de la persévération, une différence importante étant un indicateur de persévération.

Depuis, et même antérieurement, les neurologues cliniciens ont rapporté de nombreux cas pathologiques de persévération dans le domaine numérique. Et Grewel (1969), dans un article de synthèse sur les acalculies, classe la persévération en calcul parmi les acalculies secondaires et cite l'exemple (didactique ?) du patient qui calcule : $2 \times 2 = \mathbf{4}$; $2 + 4 = \mathbf{8}$; $3 - 3 = \mathbf{9}$.
Or, un test comme celui de Jasper suggère qu'il y a continuité entre les sujets déclarés "atteints" de persévération et ceux qui ne le sont: on ne voit pas, en effet, pourquoi la distribution des différences ne serait pas approximativement normale. Mais Werner (1946) a mis en doute cette continuité en essayant de montrer que la persévération pathologique était qualitativement (et pas seulement quantitativement) différente de celle que l'on peut observer chez les élèves faibles. Pour ces derniers, Werner suggère qu'il s'agit plutôt de globalisme, d'indifférenciation. Comme nous avons nous-même (Fischer, 1988b) souligné l'intérêt d'une étude du phénomène de persévération pour éclairer une erreur fréquente en calcul mental, le point de vue de Werner nous a paru "gênant". En effet, si l'étude de la persévération non pathologique se ramenait à l'étude d'une "faiblesse" aussi générale (et vague !) que le globalisme ou le manque de différenciation invoqué par Werner, elle serait sans intérêt particulier pour la didactique des mathématiques.

Pour "trancher" cette question de continuité entre normal et pathologique, une expérience "décisive" consisterait à comparer des élèves, présentant un déficit neurologique reconnu, à des élèves, **de même niveau**, n'en présentant pas. La consultation d'une base de données (PsycINFO) nous a permis de trouver une recherche (Gutezeit et Mai,1974) qui effectuait une telle comparaison expérimentale. Et ces auteurs n'ont pas trouvé de différence significative pour la fréquence des persévérations entre les groupes contrôle et expérimental. De plus, en généralisant, ils ont conclu que les tendances à la persévération ne sont pas typiques des enfants ayant des lésions cérébrales légères, pas même dans des conditions de stress.

Quelque peu rassuré, au moins sur le problème de la différence entre pathologique et normal, nous pouvons maintenant décrire notre propre expérience avant de présenter les hypothèses dont la formulation est largement dépendante du matériel expérimental utilisé.

Expérience

Le programme JusteFaux. L'outil logiciel utilisé pour la présente expérience étant encore une fois le programme JusteFaux, il nous suffit de présenter très brièvement les grandes caractéristiques de ce logiciel (voir aussi Fischer, 1988c et l'autre contribution du présent volume). Nous insisterons cependant sur l'une d'entre elles - la présentation dans **deux modalités** - qui est centrale dans la présente approche expérimentale.
JusteFaux présente des égalités, Justes ou Fausses, par exemple 3+6=9, 11-5=8, 7x9=64, 20:5=4, etc..., impliquant les quatre opérations arithmétiques. L'élève doit simplement répondre, dans un délai limité, si l'égalité affichée est Juste ou Fausse en appuyant sur la touche J ou F. Le programme mesure et enregistre à la fois le Temps de Réponse (TR) et l'exactitude de cette réponse pour chacune des 112 égalités (invariables) proposées à tous les élèves. Ces derniers sont encouragés à répondre vite mais correctement avant tout.
La méthode JusteFaux prévoit deux passations au cours d'une session. L'organisation de deux ou plusieurs sessions, à plusieurs mois d'intervalle, permet une évaluation précise des progrès des élèves. Quant à l'intérêt des deux passations, espacées d'environ une ou deux semaines, il est, entre autres, de pouvoir présenter les égalités dans deux modalités. Au cours de l'une des passations, l'élève se voit ainsi proposé 56 égalités REGroupées (modalité REG): d'abord 14 additions, puis 14 soustractions, puis 14 multiplications et, enfin, 14 divisions, en étant prévenu, avant chaque bloc de 14 égalités, de la nature de l'opération impliquée dans le bloc suivant. Au cours de l'autre passation, les 56 (autres) égalités proposées sont mélangées (ou Non Regroupées: modalité NREG), et l'élève n'est pas prévenu de la nature de l'opération qui suit.

Les initialisations. Pour la présente expérience nous avons fixé le délai de réponse à 695 centisecondes (cs), et l'intervalle entre deux questions à 2,5 secondes. En outre, et surtout, nous avons aménagé un jeu très particulier de 112 égalités. En effet, dans la version de base du logiciel JusteFaux et dans la modalité NREG, la nature de l'opération change systématiquement d'une égalité à l'autre. Par exemple, deux (ou plus) additions ne se suivent jamais. Pour pouvoir étudier la persévération, nous avons donc dû introduire, dans la modalité NREG (ce qui respecte le principe de la méthode et ne piège pas vraiment les élèves), des séries de, par exemple, quatre additions. L'égalité suivante, une multiplication, sera qualifiée par la suite de **cruciale**. Comme nous avons des séries de **2** ou **4** opérations nous préciserons même **2-cruciale** ou **4-cruciale**.

Les égalités cruciales. Outre le fait qu'elles peuvent être **2** ou **4** -cruciales, nous les regrouperons en opérations directes (addition et multiplication) et opérations inverses (soustraction et division). Le jeu des 112 égalités se décompose en 2 sous-jeux de 4 blocs de 14 égalités chacun. Nous avons extrait ci-après les égalités cruciales et les égalités "intéressantes" qui les précèdent immédiatement, en précisant leurs sous-jeu et bloc d'appartenance:

1) 4 opérations directes 4-cruciales:

2x6=12 (sous-jeu 1, bloc 1) précédée par 4 additions : 8+3=11, 1+2=4, 5+3=6, et 3+6=9[(1)]
2x3=6 (sous-jeu 2, bloc 1) précédée par 4 additions: 5+6=11, 3+3=5, 6+3=7, 2+5=9;
4+2=6 (sous-jeu 1, bloc 4) précédée par 4 multiplications: 7x7=49, 2x5=11, 4x3=10, 6x3=18;
1+5=6 (sous-jeu 2, bloc 4) précédée par 4 multiplications: 9x9=81, 0x8=2, 5x3=17, 7x2=14.

2) 4 opérations inverses 4-cruciales:

54:9=6 (sous-jeu 1, bloc 2) précédée par 7-5=2, 12-8=3, 11-5=8, 12-7=5;
30:6=5 (sous-jeu 2, bloc 2) précédée par 8-5=3, 17-8=8, 11-8=2, 13-6=7;
11-2=9 (sous-jeu 1, bloc 3) précédée par 15:3=5, 81:9=8, 35:7=3, 48:6=8;
14-7=7 (sous-jeu 2, bloc 3) précédée par 12:4=3, 49:7=5, 24:4=8, 16:8=2.

3) 4 opérations directes 2-cruciales:

3+4=7 (sous-jeu 1, bloc 2) précédée par 3x0=0 et 2x2=3;
2+7=9 (sous-jeu 2, bloc 2) précédée par 3x3=7 et 4x5=10;
1x7=7 (sous-jeu 1, bloc 3) précédée par 0+9=11 et 4+4=8;
4x1=4 (sous-jeu 2, bloc 3) précédée par 8+0=8 et 3+2=7.

4) 4 opérations inverses 2-cruciales:

13-5=8 (sous-jeu 1, bloc 1) précédée par 28:4=6 et 20:5=4;
13-8=5 (sous-jeu 2, bloc 1) précédée par 32:4=7 et 10:2=5;
18:9=2 (sous-jeu 1, bloc 4) précédée par 15-8=5 et 9-3=6;
27:3=9 (sous-jeu 2, bloc 4) précédée par 11-5=6 et 9-3=7.

(1) Les égalités sont rapportées dans leur ordre de présentation dans la modalité NREG. La dernière est toujours celle qui précède immédiatement l'égalité cruciale dans cette modalité.

Remarque. Pour légitimer davantage la comparaison entre additions et multiplications (voir l'hypothèse 4 résultante), nous avons permuté, dans deux des quatre classes impliquées, les blocs de présentation des 2 additions et des 2 multiplications 4-cruciales.

Le plan expérimental. Il est important de préciser que les égalités cruciales sont également présentées dans la modalité REG où, évidemment, elles suivent des opérations de même nature. Ceci permet de comparer les réussites dans les deux modalités. Mais le programme JusteFaux standard ne propose pas, à un élève donné et au cours d'une session, le même sous-jeu d'égalités à la fois dans les modalités REG et NREG. La comparaison intra-élève des réussites s'est donc faite grâce à un aménagement du plan expérimental. Ce dernier a été conçu de manière à ce que, sur **deux** sessions, chaque élève ait répondu, dans chacune des deux modalités, une (et une seule) fois à chacune des 16 égalités cruciales.

Les élèves. L'expérience a porté sur quatre classes de la campagne messine. L'analyse est restreinte aux 74 élèves présents aux deux sessions organisées, l'une plutôt en début d'année (octobre à janvier), l'autre vers la fin (mai et juin), dans ces classes. Deux des classes sont des CMM, i.e. des Cours Moyens **1** et **2** (4ème et 5ème année d'école), et les deux autres des CM1. L'un de ces CM1 n'est cependant pas une classe "réelle": il s'agit du regroupement des CM1 de deux classes d'une même école (qui ne comprenait qu'un CE2/CM1 et un CM1/CM2). Tout ceci fait que nous parlerons parfois, dans nos commentaires, de demi-classe. Précisons que dans l'un des CMM le taux des élèves ayant dépassé l'âge standard était 0,47[(1)].
Les passations se sont en général déroulées par groupes de 6 élèves, sur des NanoRéseaux standard. Précisons que ces derniers étaient, dans deux des classes, au fond de la salle de la classe elle-même. Les élèves savaient que dans la modalité NREG les opérations sont mélangées mais n'ont évidemment pas été informés des aménagements particuliers de l'ordre de présentation.
Les observations se faisant dans le cadre d'une évaluation des élèves, nous avons bien entendu obtenu l'accord et la coopération des maîtres concernés. Ceci nous a également conduit à considérer le bon déroulement des passations comme prioritaire par rapport à nos observations sur la persévération: celles-ci n'ont donc pas toujours pu être très systématiques.

(1) Précisons que ce CMM n'a pas apporté de contribution particulière aux erreurs de persévération. Par contre, à la session 1, quelques élèves ont "démissionné" aux divisions dans la modalité REG.

Hypothèses

Hypothèse 1 (préalable): Lorsque les opérations sont "mélangées" (modalité NREG), les égalités cruciales conduisent à plus d'erreurs.

Cette hypothèse soulève immédiatement une question par rapport à l'objectif de la recherche: comme des recherches antérieures (Jersild, 1927; Spector et Biederman, 1976; et nous-même) ont montré que les opérations mélangées sont plus difficiles, ou en tout cas conduisent à des TR plus longs, les erreurs plus nombreuses dans NREG ne prouveront pas que les élèves ont persévéré.
Outre celui du qualificatif **préalable**, nous avons fait au moins deux choix destinés (en partie) à répondre à une telle question.
Le premier choix porte sur les égalités cruciales. On aura pu remarquer que les opérations directes cruciales sont toujours des calculs triviaux. Comme nos recherches ont montré que les multiplications et les petites additions ne conduisent guère à des différences de réussite dans les deux modalités, nous avons, pour les opérations directes, une bonne réponse à la question soulevée.
Le deuxième choix est celui de présenter toujours des opérations 4- et 2-cruciales. En effet, si c'était une plus grande difficulté générale de la modalité NREG qui faisait davantage échouer les élèves à nos égalités cruciales, ils devraient tout autant échouer aux égalités 2-cruciales qu'à leurs homologues 4-cruciales.

Remarque. Comme le premier argument ne vaut pas pour les opérations inverses, nous précisons que nous avons surtout introduit ces dernières par souci d'équilibre, afin de préserver (en cas d'effet important) aussi bien la comparaison des niveaux que celles des opérations.

Hypothèse 2 (de l'amorçage): Les multiplications sont moins sensibles à l'amorçage que les additions.

Il s'agit là d'une hypothèse qui devrait découler d'un résultat que nous croyons avoir solidement établi (Fischer, en préparation) et qui est d'ailleurs très bien visualisé par la figure 2 de l'autre contribution du présent volume. Précisons ce résultat.
Dans la modalité REG, du fait que l'élève est prévenu de la nature de l'opération qui va suivre, on peut considérer qu'il bénéficie d'un **amorçage** facilitant (voir Fischer, 1988b; 1988d). Et cet amorçage s'est révélé moindre pour les multiplications que pour les autres opérations: la différence, au niveau des TR, n'est pas énorme (même pas un dixième de seconde), mais est statistiquement significative et a été retrouvée plusieurs fois.

L'interprétation générale de ce phénomène et de l'analyse de Fischer et Pluvinage (à paraître) est que les multiplications relèvent davantage d'une mémoire déclarative (celle qui contient la phrase "sept fois sept, quarante-neuf" ou l'image " 7 x 7 = 49 "), alors que les soustractions ou, à un titre moindre, les additions(1), relèvent plutôt d'une mémoire procédurale (celle qui contient, non pas le résultat de 9+7, mais une procédure pour le retrouver).
Comme nous avons ici un jeu d'égalités et un ordre de présentation très particuliers - secondairement aussi, des élèves différents - il est intéressant de vérifier, avec la méthode et les tests statistiques précisés dans Fischer (1988a), si nous arrivons à retrouver cette moindre sensibilité (à l'amorçage) des multiplications. En outre, la problématique et le langage introduits sont nécessaires pour comprendre la suite. Nous nous limitons ici aux additions et multiplications car ce sont les seules opérations impliquées dans l'hypothèse 4 (aussi à cause du problème des divisions soulevé en note précédemment).

Hypothèse 3 (de la persévération): Dans les classes normales, certains élèves persévèrent effectivement. Il ne s'agit pas toujours d'élèves "faibles". De préférence, il s'agit d'élèves ayant recours à leur mémoire procédurale.

Cette hypothèse comporte essentiellement trois points. Le premier consistera, après les évidences indirectes fournies par la confirmation de l'hypothèse 1 (qui doit nécessairement être confirmée puisque c'est un préalable à la suite !), à citer des évidences, obtenues par l'observation directe ou l'interview, en faveur du fait que certains élèves ont effectivement **persévéré**. Après 4 additions, par exemple, ils ont continué à faire une addition à la place de la multiplication cruciale qui a suivi.
Le second consistera, principalement à partir de renseignements informels donnés par les maîtres sur ces élèves, à montrer que certains d'entre eux ont des performances scolaires au-dessus de la moyenne.
Enfin, le troisième point consistera, d'abord, à soutenir que les "procéduralistes", i.e. les élèves qui ont plus fréquemment recours à leur mémoire procédurale (à notre tâche au moins), devraient être plus sûrs que rapides, et s'opposer ainsi à leurs camarades "déclarativistes" (et à ceux qui répondent intuitivement ou au hasard), qui devraient être plus rapides que sûrs.

(1) *Dans notre autre contribution, nous avons souligné une tendance développementale pour les additions dans la direction d'un recours plus fréquent à la mémoire déclarative (la connaissance par cœur) avec l'âge. Comme ici, les élèves sont plus jeunes que dans Fischer et Pluvinage (à paraître), il est possible que l'opposition entre additions et multiplications soit plus nette.*

Ceci nous conduira alors à analyser et interpréter plus systématiquement la distribution des élèves ayant échoué à au moins une opération directe 4-cruciale, ou bien dans la modalité NREG (i.e. ceux qui sont le plus susceptibles d'avoir persévéré), ou bien dans REG.

Hypothèse 4 (résultante) : Les élèves ne persévèrent pas davantage aux multiplications cruciales précédées par des additions qu'aux additions cruciales précédées par des multiplications.

Cette hypothèse **résulte** de la confirmation des hypothèses précédentes. Pour l'expliciter davantage, il nous paraît nécessaire de présenter d'abord le problème théorique auquel elle essaie d'apporter un élément de réponse.

Les élèves peuvent trouver le résultat d'un calcul numérique soit par recherche directe dans leur mémoire (traitement déclaratif), soit par application de procédures, règles, heuristiques,...(traitement procédural). Mais un des problèmes de la modélisation théorique est de savoir quel traitement va être déclenché en premier chez l'élève (ou l'adulte d'ailleurs). Intuitivement, on peut écarter le fait qu'il y ait une reconstruction du résultat par un traitement procédural avant le traitement déclaratif: si nous savons par coeur "sept fois sept", "quarante-neuf" s'impose à nous bien avant que nous ayons eu le temps de faire, ou penser consciemment à faire, l'addition répétée de 7, six ou sept fois ! Mais le problème de savoir si les deux traitements se déclenchent simultanément[(1)] ou si le traitement procédural ne se déclenche qu'après échec du traitement déclaratif (parce que le résultat ne se trouve pas, ou n'est pas accessible, en mémoire) est un problème non résolu à notre connaissance. Par exemple, Ashcraft (1987) a opté pour la première solution, alors que Siegler et Shrager (1984) ont choisi la seconde.

Nous pouvons maintenant expliquer pourquoi notre hypothèse pourrait apporter un élément de réponse à ce problème. Si les deux traitements sont déclenchés en parallèle, les séries de 4 multiplications aussi bien que les séries de 4 additions activeront les deux types de mémoire et provoqueront autant d'erreurs de persévération aux additions qu'aux multiplications cruciales. Par contre, si le traitement déclaratif est déclenché avant le traitement procédural les choses sont différentes. Les additions, qui font davantage appel à la mémoire procédurale, sensible à l'amorçage, conduiront à la persévération, alors que les multiplications, qui font davantage appel à la mémoire déclarative (voir Fischer et Pluvinage, à paraître), moins sensible à l'amorçage, ne devraient pas conduire à la persévération.
Comme nos propres informations sur le cerveau nous conduisent à le voir comme un « *extraordinaire système de traitement de l'information en parallèle* » (Thompson, 1986), nous avons opté, comme Ashcraft (1987), pour un déclenchement en parallèle.
L'hypothèse 4 résultante a été formulée en conséquence.

(1) Dans ce cas le traitement déclaratif nous donnerait la réponse beaucoup plus vite (lorsqu'elle est présente et accessible en mémoire) et interromprait alors le traitement procédural à peine commencé.

Hypothèse 1 (préalable)

Codage. Nous avons traité séparément les 4 types d'égalités cruciales. Pour un type d'égalités, nous avons défini la Réussite dans une modalité comme une réussite totale, i.e. une réponse correcte aux 4 égalités de ce type présentées dans cette modalité, et, en conséquence, l'Echec comme une réponse fausse (ou Non Réponse dans le délai) à l'une au moins de ces 4 égalités. Par exemple, un élève qui s'est trompé, ou n'a pas répondu, à l'une au moins des égalités 2x6=12, 2x3=6, 4+2=6, 1+5=6 présentées dans la modalité NREG, se verra attribuer un échec aux opérations directes 4-cruciales dans la modalité NREG. En croisant les Réussites et Echecs (ainsi définis) dans les deux modalités, nous pouvons présenter quatre tableaux.

Tableau 1. Le tableau 1, qui concerne les opérations directes 4-cruciales, est présenté séparément, car c'est lui qui retiendra essentiellement notre attention par la suite.

		NREG	
		Réussite	Echec
REG	Réu	43	21
	Ech	4	6

$\chi^2 = 10{,}24 (p< 0{,}005)^{(1)}$

Tableau 1: Opérations directes 4-cruciales

(1) Nous utilisons le chi-deux de MacNemar. Comme les conditions de l'application de la correction de Yates semblent assez floues, nous ne l'avons appliquée, pour les deux tableaux majeurs (1 et 3), quez lorsqu'elle est défavorable à nos hypothèses. Comme les effectifs minimaux restent également flous et discutés (cf. Delucchi, 1983), nous avons calculé, ici, la probabilité exacte, si l'on ignore les deux cases R-R et E-E, d'avoir, sous l'hypothèse nulle, une distribution (21 contre 4) au moins aussi favorable à notre hypothèse (d'un plus grand nombre d'échecs dans la modalité NREG:) cette probabilité est inférieu re à 0,0005. Mais précisons que le "conservatisme" du chi-deux ne provient pas ici de la seule correction de Yates. Il provient aussi de fait que la probabilité exacte que nous avons calculée correspondant à un test unilatéral - une unilatéralité qui semble s'imposer ici - alors que le chi-deux est, de manière inhéren te, bilatéral.

Il apparaît nettement que les élèves ont davantage échoué dans la modalité NREG: **21** élèves sont en effet en échec dans NREG, i.e. se sont trompés (ou n'ont pas répondu) au moins une fois à l'une des 4 égalités que nous venons de rappeler, tout en répondant correctement à toutes ces égalités dans la modalité REG, contre seulement **4** qui se sont trompés au moins une fois dans REG sans jamais se tromper dans NREG à ces mêmes égalités.

Tableaux 2. Les autres tableaux obtenus sont les suivants:

		NREG R	NREG E
REG	R	41	15
REG	E	10	8

$\chi^2 = 0{,}64$ $(p>0{,}10)$

Tableau 2a: op. dir. 2-cruciales

		NREG R	NREG E
REG	R	14	25
REG	E	12	23

$\chi^2 = 4{,}57$ $(p<0{,}05)$

Tableau 2b: op. inv. 4-cruciales

		NREG R	NREG E
REG	R	8	23
REG	E	5	38

$\chi^2 = 10{,}32$ $(p<0{,}005)$

Tableau 2c: op. inv. 2-cruciales

Commentaires. Le tableau 2a, pour les opérations directes **2**-cruciales, ne conduit pas à la même différence que le tableau 1 pour les opérations directes **4**-cruciales. Ceci est un argument indirect en faveur du fait que c'est bien la persévération produite par les égalités précédentes qui pourrait être responsable d'un certain nombre d'échecs dans la modalité NREG. En effet, il est raisonnable de penser qu'après 2 égalités la tendance à persévérer est moindre qu'après 4.

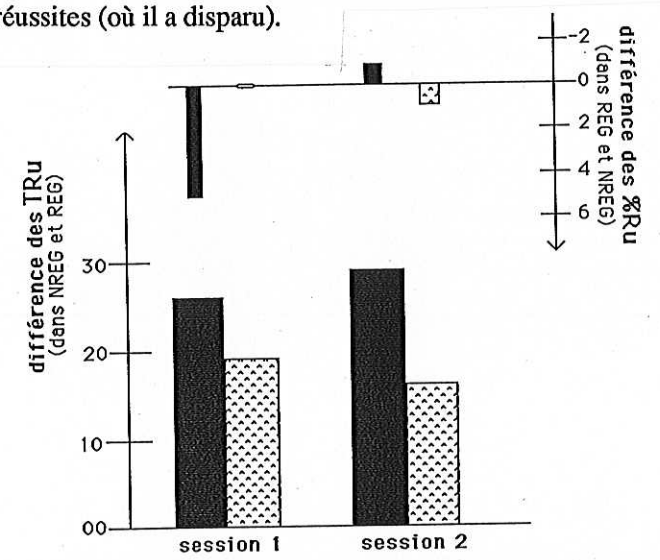
Les tableaux 2b et 2c, pour les opérations inverses, conduisent tous les deux à des différences significatives. Néanmoins, ici la différence pour les égalités 2-cruciales est plus accentuée que pour les 4-cruciales. Ceci suggère que ce n'est pas essentiellement la persévération qui a entraîné la différence de difficulté des deux modalités.

En conséquence, nous ne nous intéresserons dorénavant plus aux opérations inverses, ni, non plus, aux opérations 2-cruciales pour lesquelles l'hypothèse préalable ne s'est pas vérifiée.

Remarque. L'interview nous a quand même permis de repérer une élève au moins qui semble bien avoir persévéré dans les opérations inverses. Il s'agit de **Car**, une élève qui avait échoué aussi, dans la modalité NREG, à 1+5=6 en 174 cs. Comme cela s'est passé au cours de la passation 2 de la session 2, i.e. quand l'expérience était terminée, nous avons essayé de savoir, en l'interrogeant, si son échec à 1+5=6 était bien une erreur de persévération. Elle affirma que non, qu'elle voulait appuyer sur J mais a appuyé sur F, mais rajouta que parfois elle ne faisait pas attention au signe: « *Une fois c'était moins et j'ai fait divisé.* » . Et l'analyse des résultats enregistrés confirme effectivement qu'elle s'est trompée à deux soustractions, l'une 2- et l'autre 4- cruciale.

Hypothèse 2 (de l'amorçage)[(1)]

Observations. Pour visualiser les résultats concernant l'hypothèse 2, nous avons construit les histogrammes ci-après. Nous y représentons la différence des **Temps de Réussite** (TRu= moyenne des TR corrects) dans les deux modalités par les histogrammes larges et montants, et celle des Pourcentages de **Réussite** (%Ru) par les histogrammes effilés et descendants. Nous pouvons ainsi comparer l'**avantage de la modalité REG** pour les **additions** (en noir) à celui pour les **multiplications** (en pointillés). Et cela pour les deux sessions et les deux critères. Par exemple, au cours de la session 1, les élèves ont, aux additions, mis 26 cs de moins pour répondre (correctement), et ont eu 5% de réussites en plus, dans la modalité REG. En comparaison, on voit qu'aux multiplications, à cette même session 1, l'avantage de la modalité REG est moindre (19 cs) pour les TRu et, surtout, pour les réussites (où il a disparu).



Avantage de la modalité REGroupement pour les additions (= ■) comparativement aux multiplications (= ⬚)

(1) Nous avons omis d'éliminer les élèves non communs aux deux sessions dans cette analyse ***intra-session*** *(les fluctuations d'effectif ont d'ailleurs été faibles : 74 + 1 élèves à la session 1 et 74 + 3 à la session 2).*

Commentaires. L'avantage de la modalité REG pour les additions est significativement supérieur ($p < 0{,}05$) à celui pour les multiplications, à la session 1 pour les TRu et %Ru, et à la session 2 pour les TRu. Comme la seule tendance contraire à notre **hypothèse 2** - les %Ru à la session 2 - n'est pas significative ($p > 0{,}10$), nous en concluons que cette dernière s'est **confirmée: Les multiplications ont été moins sensibles à l'amorçage que les additions.**

Hypothèse 3 (de la persévération)

Observations. Toutes les erreurs rapportées ici s'étant produites dans la modalité NREG à une égalité cruciale, nous ne le reprécisons pas chaque fois.

Cél a échoué à 4+2=6, i.e. a appuyé sur **F**, en 185 cs. Elle s'exclame: « *Quoi ! (...) Ah j'ai cru que c'était multiplié !* »

Jed , pour 4+2=6, oralise l'égalité présentée: « *Quatre fois deux, six* », et appuie sur **F** au bout de 174 cs.

Dav ne fait pas de commentaires spontanément lorsqu'il se trompe à 2x3=6 en 98 cs. Mais, lorsqu'à la fin de la série nous attirons son attention sur le fait qu'il y a 2 fautes dans la série il précise: « *J'avais cru que c'était plus: je me suis trompé.* », et est parfaitement capable d'indiquer précisément l'égalité (2x3=6) à laquelle il s'est trompé.

Aud, lorsqu'elle échoue à 6x2=12 en 194 cs, s'exclame: « *Quoi ! (...) Oh c'était un multiplié !* ».

Ces observations montrent donc que, au moins dans les cas rapportés, les erreurs aux opérations directes 4-cruciales, sont bien des erreurs de signe. En outre, comme le signe erroné correspond toujours à celui de la série de 4 égalités qui a précédé immédiatement l'égalité cruciale, nous pouvons, sans grand risque, parler de **persévération.**

Remarquons aussi que ces élèves sont parfaitement capables d'identifier la nature de leur erreur. Particulièrement remarquables à ce point de vue sont les comportements de **Cél** et **Aud**: elles semblent, une fois que le message évaluatif ("Non !") les a averties de leur erreur, relire l'égalité dans leur tête (ce que nous avons marqué par des points entre parenthèses). Non seulement elles avaient donc bien le bon code dans leur tête, mais le fait qu'elles arrivent à le relire quelques secondes après prouve que cette égalité n'a pas pu être relue dans une mémoire sensorielle et donc était bien dans leur Mémoire à Court Terme (d'autant que le message évaluatif agit comme un masque, i.e. abrège la persistance de l'image dans la mémoire sensorielle iconique).

Ces observations montrent donc aussi que, au moins dans ces cas, **l'erreur n'est pas vraiment une erreur de lecture (d'encodage), mais bien une erreur de traitement.** Ce traitement pourrait être insuffisant (le signe opératoire n'est pas pris en considération), prématuré (le signe n'est pas encore complètement décodé), ou déformant (par l'effet persévérateur des calculs précédents). Notons d'ailleurs que ces possibilités peuvent très bien se combiner: c'est peut-être parce qu'un signe opératoire est encore très activé que le nouveau signe n'est pas pris en considération ou décodé complètement.

Etude de cas. Quelques cas d'élèves qui se sont trompés à au moins une égalité cruciale dans NREG, i.e. qui sont soupçonnables de persévération, nous paraissent intéressants à édudier.
Aud, dont nous venons de décrire la réaction après son échec à 6x2=12 lors de la session 2, s'est aussi trompée, toujours dans NREG, à 2x3=6 lors de la session 1. La maîtresse nous précise qu'elle est l'une des deux **"meilleurs"** de sa demi-classe **en raisonnement.**
Yan, l'autre **"meilleur" en raisonnement** de cette demi-classe, s'est lui aussi trompé, dans NREG, à 2x3=6 en 366 cs. Comme le suggère ce dernier TR, il est très lent (en calcul). En outre, et comme **Aud**, il fait beaucoup de fautes d'orthographe tout en étant capable de les corriger.
Dans une autre classe, **Car**, dont nous avons déjà parlé (hypothèse 1), semble avoir accumulé les "bêtises" au cours de la session 2, dans la modalité NREG. Voilà une élève qui, en fin de CM1, se trompe à 1+5=6, fait des divisions lorsqu'on affiche des soustractions,... Tout maître un peu expérimenté pourrait prédire qu'une telle élève se retrouve plutôt vers la fin du classement scolaire que vers le début. Mais il se tromperait lourdement! Lorsque nous avons regardé le classement en mathématiques au cours du deuxième trimestre, **Car** était tout simplement **première** de sa classe. Et la maîtresse confirme que c'est l'une des deux "meilleurs", son **point fort** étant, ceci étonnera moins, **le raisonnement.**
Précisons que l'autre "meilleur" de cette classe, **Rég**, s'est lui aussi trompé à 2x3=6, en 160 cs, dans NREG.
Ces cas paraissent encore plus intéressants lorsqu'on les constraste avec un autre cas, celui de **Pie** qui, pour sa part, s'est trompé à 2x3=6 en 94 cs mais **dans REG** et non pas dans NREG. **Pie**, un redoublant qui a eu de très bonnes performances d'ensemble à JusteFaux, est décrit par la maîtresse comme un élève ayant des connaissances mais incapable de les utiliser dans une activité constructive. « *En français c'est pareil. Quand je demande de trouver un mot, il est souvent le premier à le trouver. Mais dès que je demande de construire une phrase avec ce mot, il n'y arrive plus.* » nous a-t-elle expliqué.

Essai d'analyse plus systématique. Pour avoir un critère objectif nous permettant de qualifier un élève de "**plus sûr que rapide**" ou, inversement, de "**plus rapide que sûr**" (voir présentation de l'hypothèse 3), nous avons rangé, pour chacune des deux sessions, les 74 élèves d'une part suivant le nombre d'Erreurs, d'autre part suivant le Temps moyen de Réponse non erronée (TRne)[1]. Chaque élève a donc un rang moyen (=moyenne des rangs aux deux sessions) aux Erreurs et aux TRne: dans le cas où son rang moyen aux Erreurs est meilleur que son rang moyen aux TRne, nous le qualifions de "plus sûr que rapide"; dans le cas contraire, nous le qualifions de "plus rapide que sûr".
Avec ces critères et ce vocabulaire, nous pouvons envisager une conséquence de l'hypothèse selon laquelle les élèves qui sont "victimes" de la persévération utilisent davantage une mémoire procédurale. En effet, les méthodes procédurales (reconstruction du résultat) sont reconnues être plus lentes que les méthodes déclaratives (récupération du résultat en mémoire). L'hypothèse conduit donc à penser que les **21** élèves du tableau 1, qui ont échoué à au moins une opération directe cruciale dans NREG mais pas dans REG, devraient être "plus sûr que rapides".

Cette conséquence ne s'est confirmée que moyennement: 13 des 21 élèves sont effectivement "plus sûrs que rapides". Mais il faut tenir compte du fait qu'un élève qui prend trop de risques, et qui sera "plus rapide que sûr", a, à peu près (si l'on fait abstraction de la différence entre modalités), autant de chances de se retrouver dans l'une des deux cases de la diagonale décisive du tableau 1 que dans l'autre. Par conséquent, sur les 8 élèves qui ne vérifient pas la conséquence prévue, il doit y en avoir un certain nombre qui ne constituent pas vraiment une objection à notre hypothèse de départ: leur échec dans NREG est dû à un facteur (prise de risque par exemple) pouvant affecter aussi bien les connaissances procédurales que déclaratives. Notons d'ailleurs que **la distribution des 21 élèves** de la case Echec (dans NREG) - Réussite (dans REG) du tableau 1 dans nos deux catégories **contraste avec celle des 4 élèves** de la case Réussite (dans NREG) - Echec (dans REG): tous ces derniers sont en effet "plus rapides que sûrs".

(1) *Nous appelons Réponse non erronnées les réponses correctes et les Non Réponses (dans le délai de 695 cs). A ces dernières nous avons attribué un temps de 695 cs + 50 cs pour le calcul du TRne moyen.*

Hypothèse 4 (résultante)

Tableau 3. Pour tester l'hypothèse que les séries d'additions ne conduisent pas davantage à la persévération que les séries de multiplications, nous avons construit un tableau croisant les Réussites et Echecs aux additions et multiplications 4-cruciales dans la modalité NREG exclusivement. Avec un codage analogue à celui utilisé pour construire le tableau 1, nous attribuons un Echec aux additions (resp. multiplications) à un élève qui a échoué au moins une fois à l'une des deux additions (resp. multiplications) 4-cruciales dans la modalité NREG. Sinon, c'est-à-dire s'il a réussi à ces deux dernières additions (resp. multiplications), nous lui attribuons une Réussite. Voci le tableau obtenu:

ADDITION	MULTIPLICATION Réussite	MULTIPLICATION Echec
Réu	47	15
Ech	8	4

$\chi^2 = 2{,}13$ $(p>0{,}10)$

Tableau 3: Comparaison des additions et multiplications 4-cruciales

Commentaires. Le résultat non significatif obtenu est une confirmation de l'hypothèse 4 qui affirme la non différence. Néanmoins, il faut voir que la différence observée, à savoir plus d'échecs dans les multiplications, i.e un effet plus important de la série des 4 additions, va dans la direction de la thèse adverse (voir présentation de l'hypothèse). Ceci, joint au fait que les effectifs sont faibles, ôte l'essentiel de son poids au résultat statistique trouvé.

CONCLUSION

En abordant cet article sur la persévération en arithmétique, il n'était pas dans nos intentions de discuter la persévération dans sa généralité. La persévération est en effet un phénomène complexe présentant de nombreuses variétés (Goldberg, 1986) et ayant probablement des origines multifactorielles (Bayles et al., 1985).
Nous voulions ici traiter **la persévération**, non pas comme un signe clinique de dysfonctionnement cérébral, mais simplement comme la **conséquence d'un amorçage biaisant**. Un tel point de vue avait essentiellement deux conséquences que nous avons essayé d'approcher expérimentalement:
1) On peut observer le phénomène de persévération dans des classes normales et dans des conditions de stress très léger;
2) On peut appliquer à la persévération certaines caractéristiques plus générales de l'amorçage.

Pour ce qui concerne le premier point, nous avons réussi à montrer, statistiquement (hypothèse 1) et par l'observation directe (partie 1 de l'hypothèse 3), que certains élèves, après une série de 4 additions (resp. multiplications) continuent effectivement à faire des additions (resp. multiplications) si on leur propose une multiplication (resp. addition).

Pour ce qui concerne maintenant le second point, nous avons essayé de trouver un support empirique à l'hypothèse que les méthodes procédurales de calcul pourraient plus facilement engendrer la persévération que les méthodes déclaratives (Fischer, 1988b; 1988d).
Avant d'y arriver vraiment, nous avons revérifié un résultat qui est à la base de notre hypothèse et qui apparaît comme une "instanciation" de l'hypothèse générale selon laquelle l'amorçage relève de la mémoire procédurale (Squire, 1987; voir aussi Fischer, 1988d). Ce résultat est que les **multiplications**, qui relèvent davantage d'une mémoire déclarative, sont **moins sensibles à l'amorçage que les additions** qui sont, à l'origine et souvent encore au CM, procédurales. Il a été clairement confirmé (hypothèse 2).
Nous avons ensuite analysé quelques cas d'élèves qui ont été "victimes" de la persévération, ainsi qu'un cas qui leur faisait constraste. Cette analyse a confirmé que quelques élèves "victimes" de la persévération n'étaient nullement des élèves en difficulté scolaire (partie 2 de l'hypothèse 3).
Tout au contraire, nous avons pu observer, plus d'une fois, que certains d'entre eux brillaient en mathématiques, dans le raisonnement notamment. Or, si les "victimes" de la per-

sévération recourent davantage à leur **mémoire procédurale,** c'est peut-être parce qu'elle est, originellement ou par l'exercice, particulièrement **efficiente.** Comme la mémoire procédurale est **gouvernée par les règles** (Cohen et Squire, 1980), il est alors beaucoup moins étonnant que nous ayons trouvé des élèves **brillants en raisonnement** parmi les "victimes" de la persévération. Egalement, en contre partie, ces élèves pourraient avoir une mémoire déclarative moins efficiente: il n'est donc pas étonnant qu'ils soient, en majorité, plus sûrs que rapides (partie 3 de l'hypothèse 3). En outre, ils pourraient être très "vulnérables" aux égalités cruciales lorsque les opérations sont mélangées parce que le mécanisme correcteur d'erreurs(1), décrit dans Fischer (1988b; 1988d) et qui s'appuie sur la mémoire déclarative, ne joue peut-être pas pleinement son rôle.
Enfin, nous avons essayé de montrer une application théorique de nos approche et résultats (hypothèse 4). La conclusion ayant été un peu décevante, nous aimerions terminer cet article avec une autre application, assez inattendue, de ces derniers.

Il s'agit d'une observation ancienne de Berger (1926). Ce dernier, neuropsychiatre à Iéna, avait observé plusieurs cas de persévération en calcul(2), dont les deux suivants (les questions ou interventions de l'expérimentateur sont entre parenthèses, les réponses du patient en **gras**):
- le premier a calculé : (7x9 ?): **63**; (12x13 ?): **156**; (17+32 ?): **52...42...92**; (17-7 ?): **7** - (Non !) - **10**; (62-19 ?): **49** - (Non !) - **43**; (93:31 ?): **49** - (Non ! 93:31 ?) - **31**;
- le second: réponse immédiate à 2x3, 3x4 et 4x5, mais (10:5 ?): **5**; (12:6 ?): **6**; (8:2 ?): **2**.
Après ce deuxième cas, Berger commente: « *Il est intéressant de remarquer à nouveau que,* ***comme chez le patient précédent, ce n'est pas la multiplication qui est touchée par la persévération mais la division.*** ». Rajoutons à ce commentaire que l'addition et la soustraction, chez le premier patient, semblent également touchées, et précisons que Berger n'a pas avancé d'explication à cette curieuse épargne des multiplications.
Or nos approches et résultats permettent aujourd'hui d' "expliquer" cette observation: les multiplications sollicitent davantage une mémoire déclarative (notons d'ailleurs Berger souligne la rapidité de la réponse de l'un de ses patients), peu sensible à l'amorçage, alors que les autres opérations, sollicitent davantage une mémoire procédurale, sensible à l'amorçage,

(1) *Notons que le mécanisme correcteur d'erreurs ne peut fonctionner que sur des égalités correctes, mais que toutes les égalités "cruciales" le sont.*

(2) *Il est important de noter que les persévérations rapportées par Berger sont, presque exclusivement, des persévérations intra-opérations (et non inter-opérations comme les nôtres) : sinon il pourrait y avoir contradiction avec les fondements de notre hypothèse 4.*

i.e. pouvant conduire aux persévérations observées par Berger.
Nous voyons donc comment nos approches et résultats peuvent éclairer une observation vieille de plus d'un demi-siècle. Nous convenons que cet éclaircissement arrive avec beaucoup de retard. Mais il faut savoir que Hans Berger a aussi découvert l'électroencéphalographie (en 1929). C'est donc plutôt lui qui, par la finesse de ses observations[(3)], devait avoir beaucoup d'avance sur son temps !

REFERENCES

Ashcraft M.H., 1987. Children's knowledge of simple arithmetic: A developmental model and simulation. In J. Bisanz, C.J. Brainerd & R. Kail (Eds), *Formal methods in developmental psychology.* New York: Springer.

Bayles K.A., Tomoeda C.K., Kaszniak A.W., Stern L.Z. & Eagans K.K., 1985. Verbal perseveration of dementia patients. *Brain and Language,* **25**, 102-116.

Berger H., 1926. Über Rechenstörungen bei Herderkrankungen des Grosshirns. *Archiv für Psychiatrie und Nervenkrankeiten,* **78**, 238-263.

Cohen N.J. & Squire L.R., 1980. Preserved learning and retention of pattern-analyzing skill in amnesia: Dissociation of Knowing how and Knowing that. *Science,* **210**, 207-210.

Delucchi K.L., 1983. The use and misuse of chi-square: Lewis and Burke revisited. *Psychological Bulletin,* **94**, 166-176.

Fischer J.P., 1988a. La mesure des TR en arithmétique élémentaire: Spécificités d'une tâche de vérification. In R. Duval (Ed), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives: Vol.1.* Strasbourg: IREM.

Fischer J.P., 1988b. Le rôle positif des erreurs n'est-il pas surfait ? In R. Duval (Ed), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives: Vol.1.* Strasbourg: IREM.

Fischer J.P., 1988c. 11-3=9 : Juste ou Faux ? (Une méthode moderne d'évaluation de - et des progrès dans - la connaissance des faits numériques élémentaires). Montigny-lès-Metz: CDDP.

(3) Il mesurait les Temps de Réponse de ses patients au 1/5 de seconde près !

Fischer J.P., 1988d. Les erreurs de lecture: un éclairage des sciences cognitives. *Psychologie Scolaire,* **65**, 23-38.

Fischer J.P., en préparation. Priming of the four arithmetical operations: Why are the multiplications less sensitive than the subtractions ?

Fischer J.P. et Pluvinage F., à paraître. Complexités de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*

Goldberg E., 1986. Varieties of perseveration: A comparison of two taxonomies. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology,* **8**, 710-726.

Grewel F., 1969. The acalculias. In P.J. Vinken, G.W. Bryun (Eds), *Handbook of clinical neurology (vol. 4).* Amsterdam: North-Holland.

Gutezeit G. & Mai P., 1974. Tachistoskopische Untersuchungen zur Mengenerfasung und -schätzung an leicht hirngeschädigten Kindern. *Praxis der Kinderpsychologie und Kinderpsychiatrie,* **23**, 130-139.

Jasper H.H., 1931. Is perseveration a functional unit participating in all behavior processes? *Journal of Social Psychology,* **2**, 28-51.

Jersild A.T., 1927. Mental set and shift. *Archives of Psychology,* **89** (reprinted).

Siegler R.S. & Shrager J., 1984. Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed), *Origins of cognitive skills.* Hillsdale: Erlbaum.

Spector A. & Biederman I., 1976. Mental set and mental shift revisited. *American Journal of Psychology,* **89**, 669-679.

Squire L.R., 1987. Memory and brain. New York: Oxford University Press.

Thompson R.F., 1986. The neurobiology of learning and memory. *Science,* **233**, 941-947.

Werner H., 1946. Abnormal and subnormal rigidity. *Journal of Abnormal and Social Psychology,* **41**, 15-24.

PROCEDURES DIFFERENTIELLES DANS LA MISE EN EQUATION DE PROBLEMES

M. ARTIGUE

In mathematics as well as in physics, differential procedures are mainly used in two different modes in university courses for beginners. Refering to the results obtained in an interdisciplinary research on this subject, we show that traditional teaching does not make explicit these modes and describe some noxious consequences of this fact on conceptions developed by students. Then we present an experiment carried out with first year students in order to overcome these difficulties and we analyse their problem solving strategies.

Les travaux rapportés ici s'inscrivent dans une recherche sur la notion de différentielle au niveau des premières années universitaires, menée dans le cadre du GRECO "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques" du CNRS. Trois équipes ont participé à cette recherche : deux équipes de didactique des mathématiques (équipe DIDIREM de l'université Paris 7 et équipe de didactique des mathématiques et de l'informatique de l'université de Grenoble I) et une équipe de didactique de la physique (le LDPES de l'Université Paris 7).

La recherche dont l'objectif était de comprendre le fonctionnement de l'enseignement dans ce domaine en mathématiques et en physique au niveau envisagé et d'élaborer des stratégies d'enseignement visant à optimiser ce fonctionnement, s'est développé dans trois directions :

- l'analyse de l'évolution du statut de la notion de différentielle au sein des mathématiques et, rapportée à celle-ci, l'analyse de l'évolution de l'enseignement dans ce domaine, en mathématiques et en physique,

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p.173-190) IREM de Strasbourg

- l'analyse des conceptions développées par les étudiants et leur mise en relation avec les pratiques de l'enseignement usuel et les conceptions des enseignants eux-mêmes,

- l'élaboration, l'expérimentation et l'évaluation d'ingéniries didactiques dans ce domaine.

Nous ne détaillerons pas ici les différents travaux menés dans ces différentes directions, ni les résultats obtenus (le lecteur intéressé pourra se référer à [1] ou [2], nous essayerons plutôt de montrer comment ils nous permettent de comprendre le pourquoi des stratégies mises en œuvre par les étudiants dans les mises en équation de problèmes au moyen de procédures différentielles et d'envisager des moyens de remédier aux difficultés constatées.

I DIFFERENTS REGISTRES D'UTILISATION DE L'OUTIL DIFFERENTIEL

L'outil différentiel est utilisé, au début des études supérieures, en mathématiques et en physique, essentiellement comme outil d'approximation locale :

- soit en restant au niveau purement local dans l'étude locale des fonctions d'une ou plusieurs variables et des variétés associées : courbes, surfaces ..., la recherches d'extremums, les calculs d'incertitudes,

- soit pour permettre le passage du local au global dans la mise en équation de problèmes non linéaires aboutissant à des équations différentielles ou à des intégrales.

Les résultats obtenus par questionnaires ou entretiens individuels montrent clairement que les étudiants ne repèrent pas ces différences et confondent même dans un flou uniforme les approximations intervenant nécessairement dans la modélisation des phénomènes physiques d'une part, et la linéarisation locale liée à la mise en œuvre des procédures différentielles, d'autre part.

Donnons-en quelques exemples :

Le calcul de la pression atmosphèrique :

Nous avons soumis à des étudiants de première année (93) le début classique d'un calcul de pression atmosphérique, par découpage en tranches et bilan des forces s'exerçant sur une tranche cylindrique de section S et d'épaisseur dz, jusqu'à l'expression différentielle :

$$dp = -\rho g dz.$$

p désignant la pression fonction de l'altitude z, ρ la masse volumique de l'air et g l'accélération de la pesanteur à l'altitude z considérée.

Interrogés sur la nécessité de considérer la hauteur dz comme petite, ces étudiants répondent massivement oui (90 %). Mais à peine 10 % se révèlent capables de justifier correctement cette nécessité, la réponse la plus fréquente étant la suivante :
dz doit être petit parce que la pression dépend de l'altitude.

Et intérrogés ensuite sur ce qu'il advient si l'on remplace l'air par de l'eau (donc si la masse volumique devient constante), ils répondent tout aussi massivement que bien sûr, là encore dz doit être considéré petit.

Le calcul de la pression sur un barrage :

Nous avons soumis à 100 étudiants de fin de première année un questionnaire bâti à partir du calcul classique par découpage en tranches de la force s'exerçant sur un barrage. Le calcul était présenté intégralement et l'on demandait ensuite aux étudiants s'ils pensaient que le résultat obtenu :

$$F = \int_0^h \text{pression}(z).d(\text{surface}(z))$$

était exact.

Les résultats obtenus se répartissent comme suit :
- une petite moitié des étudiants estime le résultat exact,
- un tiers environ répartit ses réponses entre l'affirmation nette : "l'intégrale aura une valeur approchée" ou des expressions plus ambigües comme : "l'intégrale sera exacte si on a sa valeur limite ou le résultat sera exact si dz est suffisamment petit.

Mais aucun étudiant ne fait intervenir, comme l'on aurait pu s'y attendre, l'approximation liée à la modélisation du phénomène physique. Le caractère approché du résultat, quand il est perçu, est automatiquement raccroché à la procédure intégrale elle-même.

Les résultats des questionnaires où l'on s'adresse plus directement aux éudiants vont dans le même sens :

- interrogés en physique sur ce qui rend nécessaire l'emploi des différentielles, 100 étudiants de DEUG citent des domaines comme la thermodynamique où les différentielles sont fréquemment utilisées mais s'avèrent dans leur grande majorité incapables de dépasser ce stade.

- interrogés en mathématiques sur ce qui leur semble important à propos de la notion de différentielle, 10 étudiants de troisième année sur 85 seulement mentionnent l'idée d'approximation locale. Et, ayant dans la question suivante à déterminer si la fonction de R^2 dans R définie par

$$f(x,y) = 2x + 4y + y^3\left[\sqrt{1 - \cos x} + y\right]$$

  est différentiable en (0,0), 87 % se jettent dans le calcul des dérivées partielles (malgré les difficultés liées à la nullité du radical en (0,0)), pour montrer que la fonction est C^1, sans reconnaître dans l'expression fournie une partie linéaire correspondant justement à la différentielle suivie d'un reste.

L'enseignement et ces différents registres :

En fait, l'enseignement de DEUG ne semble pas chercher à prendre en compte les difficultés liées à l'existence de ces différents registres et à la nécessité de les distinguer :

- en mathématiques, l'enseignement évite un certain nombre de difficultés en ne s'attaquant pas aux problèmes de modélisation. La différentielle a longtemps été réduite au rôle de simple outil de calcul formel. Mais, même actuellement, alors que l'idée d'approximation locale est au cœur de la définition qui en est donnée, le registre de l'approximation locale devient rapidement invisible dans la pratique. En effet, à l'algorithme de la période antérieure basée sur les propriétés d'invariance formelle de l'expression différentielle, a succédé une algorithmique algébrique basée sur la manipulation des dérivées partielles et matrices jacobiennes, légitimée par quelques puissants théorèmes. L'idée d'approximation est bien sûr au cœur des théorèmes clefs du calcul différentiel comme le théorème d'inversion locale ou celui des fonctions implicites, mais peut rester cachée aux étudiants qui, en général, ont juste à s'assurer qu'ils sont dans les conditions d'utilisation de ces théorèmes parce qu'ils ont affaire à des fonctions C^1, ce qui ne nécessite pas de manipulation explicite de l'idée d'approximation.

- En physique, la différentielle ne constitue pas un objet d'enseignement, c'est un outil. L'analyse des manuels et polycopiés de cours (cf. [1]) a montré que la présentation qui en est faite est marquée par la référence quasi-exclusive au registre du calcul d'incertitudes, son utilité y apparaissant liée, de façon floue, à l'idée de simplification des calculs. Les procédures différentielles de mise en équation sont, quant à elles, proposées comme des recettes. Au mieux note-t-on, dans certains ouvrages récents, l'explicitation d'une convention de calcul au premier ordre par rapport aux accroissements des variables.

En fait, on retire de l'analyse de l'enseignement dans les deux disciplines l'impression :

- qu'en mathématiques, l'enseignement même s'il ménage une place essentielle à l'idée d'approximation au niveau des définitions, écrase ce registre derrière des pratiques algorithmiques purement algébriques,
- qu'en physique, l'enseignement se limite à l'ambition d'obtenir des pratiques "correctes" et fait confiance à l'usage pour y parvenir,
- que, dans les deux cas, même si c'est pour des raisons différentes, il n'y a pas de travail explicite sur les différents registres dans lesquels intervient la notion de différentielle.

II L'ATELIER DE MISE EN EQUATION DE PROBLEMES

L'atelier de mise en équation de problème auquel nous consacrons la suite de cet article a été élaboré justement pour aborder explicitement avec les étudiants les problèmes d'identification et de distinction de ces différents registres.

En fait, son objectif était double :

- d'une part, du point de vue de la recherche, étudier les stratégies développées par les étudiants et ce qui les conditionne, les difficultés rencontrées, la façon dont elles sont éventuellement surmontées, analyser en quoi elles dépendent de facteurs propres à l'aspect différentiel ou de facteurs plus généraux comme le repérage des variables pertinentes et la prise en compte de l'aspect fonctionnel des grandeurs utilisées,

- d'autre part, d'un point de vue d'ingénierie didactique, tester l'efficacité d'une situation didactique visant à mettre en évidence la diversité des registres d'intervention des différentielles, pour permettre aux étudiants de gérer effectivement cette diversité en compréhension.

Pour réaliser ce double objectif, deux séances avaient été prévues. La première séance dont nous rendons compte ici a été expérimentée dans trois groupes de travaux dirigés de DEUG SSM première année, en février. Les contraintes de temps n'ont pas permis d'expérimenter la seconde séance, nous privant de ce fait des éléments prévus pour l'évaluation de l'efficacité de la première séance.

II- 1 : Les textes proposés aux étudiants

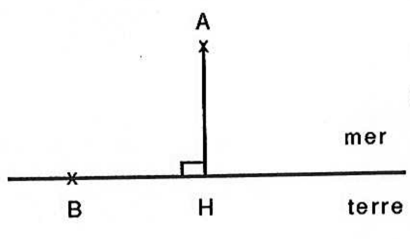
Pour cet atelier, quatre textes se rattachant à des registres distincts d'utilisation de l'outil différentiel avaient été choisis :

- registre du calcul approché (problème de la sphère dorée),
- registre de la recherche d'extremums (problème du nageur),
- registre du calcul intégral (problème de la coupe),
- registre de la mise en équation différentielle (problème de l'absorption).

Nous les reproduisons ci-après :

Le nageur :

Un baigneur situé en un point A de la mer désire atteindre un point B de la côte. La côte est rectiligne et la mer sans courant. Le trajet du baigneur peut être mixte (nage et marche). Sa vitesse de nage est de 2 km/h, sa vitesse de marche de 4 km/h .
Déterminer le trajet le plus rapide dans les deux cas suivants :



1) AH = 500m et HB = 400m

2) AH = 500m et HB = 200m

Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes

La sphère dorée :

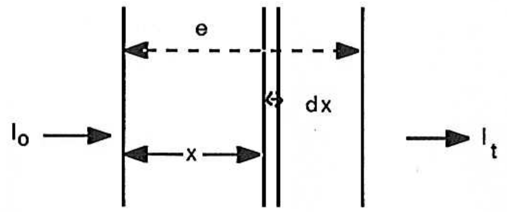
On veut dorer à l'or fin une sphère de rayon R. Sachant que l'épaisseur *e* de dorure est uniforme et très inférieure à la valeur de R, donner une valeur approchée de la quantité d'or nécessaire en fonction de R et de *e* (la masse volumique de l'or est de 19,3 g/cm).

L'absorption :

Soit Io l'intensité d'un faisceau de rayons X de section constante arrivant normalement à un échantillon métallique d'épaisseur *e*. L'intensité transmise est inférieure à l'intensité incidente Io. En effet, par suite d'interactions diverses, une partie de l'énergie est absorbée par l'échantillon. L'intensité absorbée par une tranche élémentaire dx, située à la profondeur x est proportionnelle à son épaisseur dx et à la valeur de l'intensité I en x, le coefficient de proportionnalité étant le coefficient d'absorption linéaire μ caractéristique du métal.

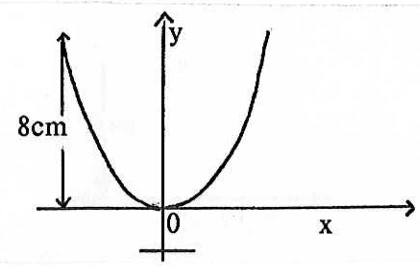
Donner la loi de variation de I en fonction de l'épaisseur de métal traversée et en déduire les épaisseurs e_{Al} et e_{Pb} d'aluminium et de plomb nécessaires que doit traverser un faisceau de rayons X pour que l'intensité incidente du faisceau soit réduite d'un facteur 100.

On donne $\mu_{Al} = 14\ cm^{-1}$ et $\mu_{Pb} = 1600\ cm^{-1}$.



La coupe :

On se propose de déterminer la quantité de vin contenue dans le verre ci-dessous en fonction de la hauteur h de liquide. On sait que la section du verre est parabolique et a pour équation $y = 2x^2$ dans le repère ci-dessous



II - 2 : L'organisation prévue pour le déroulement de l'atelier

Il était prévu d'organiser les étudiants en équipes au début de la séance, chaque équipe choisissant librement les problèmes qu'elle désirait traiter. On prévoyait une heure environ de recherche en équipes suivie d'une phase de synthèse où, problème après problème, on analyserait le travail des différentes équipes.

Il était prévu que l'enseignant interviendrait peu dans la phase de recherche, si ce n'est en cas de blocage complet d'une équipe. Mais après un premier problème choisi librement, il pouvait conseiller à une équipe donnée un problème non encore choisi, si le cas se présentait. Il devait animer la phase de synthèse, en veillant à faire expliciter et analyser les difficultés rencontrées puis conclure conformément aux objectifs de la séance.
L'atelier s'est à peu près déroulé comme prévu dans les trois groupes comportant respectivement 19, 19 et 20 étudiants, si ce n'est que la phase de recherche ayant, dans les trois groupes, été plus longue que prévu, la phase d'institutionnalisation suivant la synthèse a été, elle, quasiment inexistante.

Il faut souligner que les étudiants ont été souvent gênés au début par le statut de cette activité qui rompait avec les activités usuelles. Plusieurs ont demandé pourquoi on se mettait à faire de la physique dans les TD de mathématiques et ont manifesté quelques réticences à s'y engager. Une mise au point de l'enseignant a été nécessaire. Ensuite, l'intérêt a été soutenu.

II - 3 : Les résultats de cette expérimentation

Nous présenterons brièvement dans ce paragraphe, problème par problème, les traits les plus saillants de l'expérimentation, dans le cadre de la problématique précédemment explicitée.

Tous les problèmes ont été traités, mais tous n'ont pas rencontré le même succès comme en témoignent les couples suivants qui donnent, pour chacun d'eux, le nombre d'équipes qui l'ont abordé et le nombre d'équipes qui l'ont traité en premier :

le nageur (7,4) --- la sphère (6,2) -- l'absorption (4,2) -- la coupe (7,6).

Ces couples opposent le problème de la coupe à celui de l'absorption. Le problème de la coupe, situé à la fin de la fiche, attire visiblement les étudiants. On peut penser que c'est en grande partie parce qu'ils y reconnaisent d'emblée un problème d'intégration et qu'ils sont justement en train de commencer l'intégrale de Riemann . C'est en quelque sorte le moins hors-contrat des problèmes proposés. Quant au problème de l'absorption, il les rebute déjà par la longueur de son texte. De plus, il est très connoté "physique" donc particulièrement hors-contrat dans une séance de mathématiques.

Le nageur :

Aucune des équipes n'a rencontré de difficulté pour démarrer la résolution. L'extrait suivant du bilan du groupe I, témoigne bien de la stratégie généralement mise en œuvre :

"On s'est dit au début qu'il y avait plusieurs possibilités, par exemple aller tout droit ou aller d'abord dans l'eau et puis marcher sur la terre. Bon, la vitesse dans l'eau est plus petite que la vitesse sur la terre, donc on s'est dit : pourquoi il nagerait pas d'abord jusqu'en O (point introduit par eux entre B et H) *et ensuite il ferait le reste à pied. Alors, on s'est dit : cet angle* (angle ABH) *c'est l'angle α, on connaît AB, on connaît AH, donc on connaît α, il est de l'ordre de 50° à peu près. Bon, on sait ici qu'on a un angle droit doc 90° ; alors en fait si le nageur fait un trajet comme ça, il va former un angle β* (angle AOH), *et cet angle est compris entre α et 90°, donc β il va de 90° à α, donc il diminue, donc en fait il faut trouver le temps, il faut trouver une relation entre le temps et α, et β, je veux dire, et si on trouve β, on aura le temps minimum [...]. En fait, si on trouve le temps, on cherche l'angle pour le temps minimum, après c'est de l'algèbre."*

L'enseignant :

- *"Comment vous faites pour chercher l'angle correspondant à un temps minimum ?"*
- *"Quand on a la relation t égale fonction de β, on sait que lorsque la dérivée s'annule, t est minimum, donc on prendra la dérivée de t par rapport à β."*

La variable choisie est, suivant les équipes, un angle ou l'abscisse du point O. On ne note donc pas de difficulté dans la mise en place du cadre fonctionnel nécessaire à la résolution et le traitement différentiel, usuel, est en fait qualifié d'algébrique. Mais il faut souligner que cette partie "algébrique" de la résolution leur prend beaucoup de temps : sur les quatre équipes qui démarrent par ce problème, une seule en aborde un autre.

De plus, l'automatisme : "minimum=zéro de la dérivée" rend difficile dans tous les groupes l'interprétation des résultats obtenus dans la seconde situation proposée. En effet, avec les notations introduites, on obtient pour la fonction $t(\beta)$:

$$t(\beta) = AH/V_n \sin\beta + BH/V_m - AH/V_m tg\beta$$

V_m désignant la vitesse de marche et V_n celle de nage.
La dérivée s'annule pour $\cos\beta = V_n/V_m$ c'est-à-dire ici pour $\cos\beta = 1/2$. Pour AH = 500m et HB = 200m, l'angle α étant supérieur à 60°, ceci correspond à un point O extérieur au segment [B,H].

Quelques équipes, n'étant pas revenues à la situation physique, ne remarquent pas la difficulté. Les autres refusent la valeur obtenue par le calcul qui oblige le nageur à rebrousser chemin et proposent, sans être vraiment sûrs d'eux, le trajet AB. Aucune équipe ne parvient à résoudre seule cette contradiction apparente. Même, lorsque collectivement l'enseignant leur aura fait séparer, dans l'expression de la fonction temps, les cas : O entre H et B, puis O au-delà de B, leur aura fait calculer les deux expressions correspondantes et étudier leur sens de variation, ils resteront perplexes devant ce minimum qui n'est pas associé au zéro d'une dérivée.

La sphère :

Ce problème est jugé facile par toutes les équipes qui l'ont abordé. La stratégie généralement utilisée a consisté à exprimer le volume exact de la tranche puis :
- soit développer l'expression obtenue et ne conserver que le premier terme,
- soit écrire directement un développement limité à l'ordre un.

L'extrait suivant de l'enregistrement d'une équipe nous semble significatif de ce comportement très majoritaire :
"On va calculer le volume entre les deux sphères puis on fera un développement limité. Pas de problème, on sait faire."

Quelques élèves se demandent pourquoi, après avoir calculé le volume exact, il faudrait faire un développement limité. Dans ce cas, les explications fournies par les autres sont toujours données en référence au texte et aux procédures d'appel qu'il contient. Cet autre extrait en est un exemple typique :
-*"Comment t'as fait, toi ?"*
- *"J'ai fait la différence des volumes puis le développement limité."*
- *"Oh ! Tu as fait comme en physique un développement limité ! Moi, j'avais fait le truc exact, pas d'approximation."*
- *"Oui, mais ils te disent : "e très petit devant R" et "valeur approchée", alors j'ai simplifié."*

- *"Oui, t'as raison c'est sans doute ça qu'il faut faire."*

Un autre de l'équipe en riant :

- *"Ah oui ! Si on a dans un texte un "e très petit devant R" ça veut dire : faites un développement limité."*

Dans une équipe, les étudiants ont procédé différemment, intégrant (comme ils disent) la surface de la sphère entre R et R+e pour calculer le volume de la tranche. Lors de la phase collective, l'enseignant veut faire remarquer qu'à la base du calcul de l'intégrale, il y a justement l'utilisation de l'approximation obtenue à la fin. Il aura beaucoup de mal à se faire comprendre, les étudiants voyant dans l'expression sous l'intégrale le produit de la surface : πr^2 par le marqueur de la variable d'intégration : dr et se refusant à l'interpréter comme une approximation du volume d'une tranche de sphère.

L'absorption :

Sur les quatre équipes ayant abordé ce problème, deux le traitent rapidement, écrivant :

$$dI = -\mu I dx$$

et intégrant ensuite en logarithmes après avoir divisé les deux membres par I.
Les deux autres équipes ont rencontré de grosses difficulté.

Premier groupe :

Les étudiants repèrent très vite la phase clef de l'énoncé et essaient de la traduire par une relation.

Après avoir écrit : $I_{dx} = \mu I_x$,

ils passent dans le registre linéaire qu'ils justifient ainsi : *"L'intensité absorbée par chaque tranche dx, c'est la même puisque le métal est homogène ; et puis on nous parle du coefficient d'absorption linéaire, donc I(x) en fonction de x, c'est une droite décroissante qui partde Io et arrive à It."*
Ceci permet une interprétation satisfaisante à leurs yeux de μ : c'est la pente de la droite et elle ne dépend bien que du métal considéré, non de l'épaisseur traversée.
Malgré les réticences d'un étudiant, gêné qu'il y ait des dx dans le texte et qu'on n'ait pas besoin d'intégrer pour résoudre le problème, ils s'arrêtent à cette solution.

L'observateur la déstabilise cependant assez aisément en attirant leur attention sur la proportionnalité de l'absorption à l'intensité en x affirmée dans le texte. La remise en cause de la solution proposée et l'information fournie sont aussitôt récupérées par l'étudiant à l'origine de l'interprétation linéaire :

E1 : - "Mais alors, ça ne peut pas être une droite !"
E2 : - "Plus ça va, moins ça absorbe."
E1 : - "Ca va être comme ça (il trace une courbe décroissante), c'est du log ou une exponentielle."
E3 : - "Il doit y avoir une équation différentielle."
E4 : -"Oui, tu sais, comme quand ça frotte, dI/I et puis ça fera du log."

Ils essaient ensuite, sans se référer au texte, de procéder par analogie avec le cas évoqué du frottement et après trois essais infructueux arrivent à la bonne écriture différentielle qu'ils intègrent, comme prévu, en logarithmes.

Deuxième groupe

Dans ce groupe aussi, les étudiants repèrent vite la phrase clef de l'énoncé et essaient de la traduire par une relation.
Un étudiant (E1) propose : $I_{dx} = \mu dx I_x$.
Cette expression est critiquée par un autre et une discussion s'engage :

E2 : - "Mais il faut tenir compte de la profondeur parce que plus x va augmenter, moins ça va absorber."
E1 : - "Oui mais alors dx va changer lui aussi, ça marche."
E2 : - "Ah non, dx, il change pas lui !"
E3 : - "C'est proportionnel alors : It - Io = Io (e - x) dx".
E1 : - "Et μ, tu l'écris où dans ton truc ?"
E3 : - "Je l'ai pas encore fait mais je vais le mettre."
E4 : - "Y a sûrement une histoire d'intégrale là-dessous."
E2 : - "De toutes façons, dès que tu vois dx..."
E4 : - "Et puis tu as It - Io, ça ressemble entre quelque chose pris entre O et t."

Plusieurs propositions sont faites ensuite :
$I_t = I_o - \mu dx I_o x$, $I_x = \mu I_o dx$, $I_x = \mu I_x . x + C$,

mais aucune ne les satisfait vraiment. Les étudiants finissent par revenir à la première formulation et cherchent à l'intégrer, mais ils ne savent comment faire. Il y a blocage. Interrogés par l'observateur sur les fonctions qu'ils veulent retenir pour la résolution et les variables dont elles dépendent, ils arrivent, aidés, à repérer l'incohérence fonctionnelle des écritures indicielles : I_x, I_{dx} et à les transformer en écritures fonctionnelles : I(x), I(x +dx). Ils finissent par aboutir à la formulation :

$$I(x + dx) = I(x)\left(1 - \mu dx\right)$$

qu'ils interprètent comme une relation de récurrence : on avance à chaque fois de dx, implicitement supposé constant :

- *"Y a qu'à partir de Io et avancer de dx à chaque fois."*
- *"Oui, et puis on fera la somme de tous les morceaux. Ah, c'est là qu'elle intervient l'intégrale !*

Mais ils continuent à patauger, ne voyant ni comment résoudre cette récurrence, ni quelle intégrale écrire. Et quand finalement ils arrivent à l'intégrale :

$$\int_0^e I(x)\,dx$$

c'est pour se retrouver une fois de plus coincés puisque I est justement la fonction inconnue.

L'observateur intervient alors pour expliquer ce qui différencie cette situation d'une simple situation d'intégration et orienter vers le point de vue "équation différentielle", qui leur permettra enfin d'achever la résolution.

La coupe :

Les observations montrent des comportements assez proches dans deux des groupes, comportements distincts de ceux observés dans le troisième où l'atelier se déroule une semaine plus tard, après deux séances de travaux dirigés d'intégration.

Dans les premiers cités, le lien avec l'intégrale est immédiat et il se fait très majoritairement de la façon suivante : les étudiants calculent l'aire plane correspondant à la section de la coupe dans le premier quadrant du plan xOy puis, sachant que la coupe est obtenue par rotation de cette section, ils essaient de trouver un moyen mathématique de rendre compte de cette rotation. Une équipe se ramène au calcul, déjà fait en physique, du volume du cylindre par multiplication de l'aire de la section plane par πR. Le choix de l'analogue de R pour la section parabolique les gêne, ils se mettent d'accord sur R_{max} mais ne se sentent pas très sûrs d'eux. L'enseignant leur propose à titre de vérification de suivre la même démarche pour calculer le volume de la sphère qu'ils connaissent déjà. Ils multiplient comme on pouvait s'y attendre l'aire de la section plane par πR, R étant le rayon de la sphère et n'obtiennent pas le résultat attendu. Ils suivront, à partir de là un itinéraire comparable à celui des autres équipes.

Dans ces équipes, il y a blocage puis, plus ou moins rapidement et spontanément, changement de point de vue et considération de sections horizontales de la coupe. L'aire d'une telle section est égale à πx^2 et il suffit, disent-ils, de sommer ces surfaces. Qui dit sommation dit intégrale et les étudiants passent sans hésitation de l'expression de l'aire à l'intégrale :

$$I = \int_0^{xh} x^2 dx$$

dx jouant ici simplement le rôle de marqueur de la variable d'intégration.

Le résultat obtenu les laisse cependant perplexes puisqu'ils n'ont pas à tenir compte de la forme de la coupe.

L'intervention de l'enseignant est alors nécessaire. Mais il suffit qu'il demande si c'est vraiment des surfaces qu'on empile, pour provoquer le déclic : pour calculer un volume on empile des volumes et la hauteur sera dy, ça y est, on a récupéré y, donc la forme de la coupe. Le problème est résolu.

Dans le dernier groupe cité, la situation est différente. Les étudiants ont déjà calculé en mathématiques des intégrales par encadrement et appliqué la méthode au calcul du volume de la sphère. Sur les trois équipes qui abordent le problème, deux procèdent de même, encadrant le volume $V(x+\Delta x) - V(x)$ par celui de deux cylindres droits puis divisant par Δx et faisant tendre Δx vers 0 pour obtenir la dérivée de la fonction :

$$x \to V(x)$$

cette dérivée étant intégrée ensuite pour trouver le volume.

Lors du bilan final, un étudiant présente très clairement ce calcul au tableau ; mais après avoir obtenu, par passage à la limite, l'encadrement :

$$\pi x^2 f'(x) \leq V'(x) \leq \pi x^2 f'(x)$$

qui fournit la valeur de V'(x), il ajoute :

"Donc on voit que l'encadrement, que les choses qu'on avait négligées étaient vraiment négligeables et que V'('x) est bien égal à ..."

alors que justement rien n'a été négligé dans cette méthode. Preuve que la situation était moins limpide, même dans ce cas, qu'elle pouvait le paraître au premier abord.

πx^2dy .La dernière équipe a coupé en tranches élémentaires d'épaisseur dy, évalué le volume de chaque tranche par : πx^2dy, puis intégré cette expression pour calculer le volume global. Lors du bilan, elle présente sa méthode en insistant sur le fait qu'elle est bien plus rapide que celle des encadrements, tout en conduisant au même résultat.

CONCLUSION

Cette expérimentation, de type étude de cas, met clairement en évidence, nous semble-t-il, un certain nombre de faits concernant aussi bien les difficultés liées à l'utilisation de l'outil différentiel au début des études universitaires, que les stratégies développées par les étudiants, face à l'enseignement qui leur est dispensé, pour les surmonter. Nous voudrions pour conclure souligner quelques points qui nous semblent particulièrement importants.

1 - Les difficultés rencontrées par les étudiants sont apparues ici situées dans les registres propres au calcul différentiel et intégral plutôt que dans un registre fonctionnel général. Dans le problèmes du nageur, l'identification du cadre fonctionnel ne pose de problème à aucune des équipes. Ceci n'implique pas que ce cadre fonctionnel soit bien maîtrisé lorsqu'il doit être utilisé dans des contextes moins familiers que la recherche d'un extremum. Dans la résolution du problème de l'absorption, on voit apparaître des notations indiciaires que l'on pourrait qualifier de pré-fonctionnelles. En effet, elles permettent de prendre en compte une certaine idée de dépendance mais ne sont pas systématiquement soumises aux contraintes du registre fonctionnel. Elles peuvent de ce fait créer un blocage à un niveau ne permettant pas la résolution, les étudiants étant persuadés avoir rendu compte dans leur formulation des données et hypothèses de l'énoncé.

2 - Dans les difficultés observées ici, on retrouve bon nombre de difficultés mises en évidence dans l'analyse des réponses aux différents questionnaires envisagés dans l'ensemble de la recherche, par exemple :

- les difficultés liées au statut des éléments différentiels : globalement, la recherche a mis en évidence deux conceptions dominantes opposées : matérialité pure ou statut purement formel et l'obstacle qu'elles constituent l'une et l'autre à la mise en place d'une vision fonctionnelle souvent nécessaire à la résolution. On retrouve ces conceptions ici et l'on peut également mesurer certains de leurs effets pernicieux : la vision exclusive de dx comme petite quantité constante conduit une équipe à se perdre dans une itération discrète dans le problème de l'absorption, la vision exclusive de dx comme simple marqueur de la variable d'intégration conduit plusieurs équipes à commettre la même erreur dans la résolution du problème de la coupe. Soulignons que cette vision est alors soutenue par celle du volume comme empilement de surfaces, dans une perspective comparable à celle des indivisibles de Cavalieri.

- le poids du modèle linéaire et la non-distinction entre linéarité locale et globale ; ces difficultés apparaissent ici de façon manifeste dans le problème de l'absorbtion où l'on voit le modèle linéaire global appelé par divers indicateurs linguistiques comme : "proportionnel", "coefficient d'absorption linéaire".

3 - D'autres, non apparentes dans les réponses aux questionnaires vu l'éventail des questions posées, mais prévisibles compte-tenu de l'analyse du paragraphe 1, se manifestent ici : la présentation du problème de l'absorption, par exemple, en termes d'empilement de contributions élémentaires, tend à faire assimiler ce problème à un simple problème d'intégration alors que, les contributions élémentaires étant interdépendantes, ce n'est le cas que si l'on s'intéresse aux contributions relatives. De ce fait, l'objet "équation différentielle", qui est au cœur du problème, reste masqué et soit les étudiants, embrayent mécaniquement sur dI/I = ... et l'intégration par les logarithmes, par analogie avec des situations déjà rencontrées, soit ils restent bloqués.

4 - Au delà du repérage de ces difficultés, ces séances nous permettent de mieux identifier les stratégies des étudiants et nous aident à comprendre ce qui les détermine.

L'observation montre par exemple que, dès que la résolution ne leur paraît pas évidente, les étudiants se jettent prioritairement dans la recherche d'indices formels au niveau du texte du problème proposé. Ces mêmes indices sont également utilisés à titre de contrôle ou comme moyen d'emporter l'adhésion des autres dans les discussions, sans qu'un contrôle interne au problème soit nécessairement invoqué : on a déchiffré le rebus, on a découvert ce que l'enseignant attendait de nous, donc on a raison. On voit ici fonctionner un certain nombre de telles associations : la mention "e très petit devant R" appelle un développement limité, la présence d'éléments différentiels ou de tranches élémentaires appelle un calcul d'intégrales, les termes "proportionnel", "linéaire", "homogène" appellent le modèle linéaire.

D'autres associations paraissent de nature moins étroitement formelle comme celle qui fonctionne dans le problème du nageur : un problème de minimum se résoud en cherchant le zéro de la dérivée d'une fonction, ou les associations "sommation-intégrale" rencontrées dans le problème de l'absorption, ou encore l'analogie avec le problème du frottement subodorée à partir d'un tracé de courbe ressemblant à une exponentielle décroissante mais, bien que de nature plus conceptuelle, elles restent souvent sommaires et ne se situent pas dans le cadre d'une identification claire des différents registres d'utilisation de l'outil différentiel.

Si l'on se place, non plus seulement au niveau cognitif, mais sur le plan du fonctionnement du système d'enseignement, on ne peut manquer de voir dans les attitudes des étudiants et les stratégies qu'ils développent, l'effet d'une adaptation efficace des étudiants à ce système, basée sur une connaissance, implicite au moins, de certaines des lois qui le régissent. Ainsi la résolution de ces problèmes de mise en équation, choisis volontairement classaiques, peut être efficacement basée sur la stratégie suivante :

- repérage dans l'énoncé des termes clefs et indices,
- choix, en fonction de ce repérage, d'un algorithme de résolution,
- exécution de l'algorithme,

cette stratégie fonctionnant parce que les énoncés eux-mêmes sont surdéterminés par tout un système d'indices qui assure un niveau de réussite satisfaisant à qui sait intégrer la coutume didactique. Les étudiants observés ici sont encore des débutants, l'automatisme de certains branchements scolaires n'est pas encore parfait, mais on peut faire l'hypothème que confrontés aux mêmes problèmes, des étudiants de fin de DEUG obtiendrait des résultats très satisfaisants, et ceci sans que leurs conceptions des objets du calcul différentiel et intégral, comme des raisons de recourir à ces objets, aient foncièrement évolué.
Si nous voulons aller plus loin qu'une telle adaptation au scolaire et favoriser chez les étudiants la constitution d'une épistémologie plus satisfaisante, il est clair que nous devons modifier profondément les coutumes didactiques qui sont à l'origine de ces adaptations. C'est par exemple l'objet des travaux de l'équipe grenobloise déjà citée dont l'ingénierie didactique se fonde sur l'instauration d'une pratique de débat scientifique et, pour l'objet qui nous concerne plus spécifiquement ici, la mise en place d'ateliers de modélisation pluridisciplinaires (cf [3] et [4] par exemple).

REFERENCES

[1] : Alibert D., Artigue M., Courdille J.-M., Grenier D., Hallez M., Legrand M., Ménigaus J., Richard F., Viennot L. : *Le thème "différentielles" : un exemple de coopération maths-physique dans la recherche,* Actes du GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Sèvres, Mai 1987, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

[2] Artigue M. et al. : *Différentielles et procédures différentielles dans l'enseignement supérieur en mathématiques et en physique,* Rapport de recherche, Editions IREM Paris 7 (à paraître).

[3] Alibert D., Grenier D., Legrand M., Richard F. : *Introduction du débat scientifique dans un cours de première année de DEUG A à l'université de Grenoble I,* Rapport ATP "Transitions dans le système éducatif", 1986.

[4] Alibert D. : *Codidactic system in the course of mathematics : how to introduce it ?,* Actes du Congrès PME XII, Weszprem, Juillet 1988, Editeur Andrea Borbas, OOK Printing House, Weszprem.

LA RELATION ENTRE MODELISATIONS MATHEMATIQUES ET SITUATIONS D'EXPERIENCE POUR LE SAVOIR PROBABILISTE

Une conception épistémologique pour l'analyse des processus d'enseignement

H. STEINBRING

In teaching/learning processes, mathematical knowledge and its meaning cannot be adequately characterized as an a priori fixed and rigid structure. Understanding and personal meaning of knowledge is generated in recursive social interaction in mathematics teaching. A method for analyzing mathematics teaching is developed which tries to take into account the fact that the establishment of meaning depends on teacher-student interaction ;conceptual patterns of the development of mathematical knowledge with its different levels of meaning are vizualized by means of specifically constructed graphical diagrams.

Mathématiques et enseignement - Phénomènes linéaires ou systèmes complexes ?

Le paradigme prédominant et disséminé de la nature du savoir et de l'enseignement des mathématiques est celui d'une suite linéaire et déductive de phénomènes . Fondé sur des concepts élémentaires, l'édifice entier du savoir mathématique serait construit d'une manière déductive. Et, en suivant cet ordre linéaire et logique, les processus d'enseignement et d'apprentissage devraient être organisés comme une suite linéaire de pas.

Ce paradigme est accepté plus ou moins immédiatement par la plupart des enseignants et des chercheurs. Que le savoir mathématique soit organisé de manière déductive n'est pas mis en question. Et, en raison des conditions temporelles et séquentielles de toute activité d'enseignement, les enseignants de mathématiques considèrent que leur tâche essentielle est de transmettre les connaissances pas à pas et concept par concept.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p.191-215) IREM de Strasbourg

Ce paradigme se trouve aussi, implicitement, dans les recherches didactiques sur l'enseignement en mathématiques, et dans la pratique de l'enseignant. Même si les maîtres ont des conceptions personnelles sur les mathématiques et sur leur enseignement, ils ne contestent pas le paradigme d'une organisation linéaire (cf. Brown 1985, Cooney 1985). Des expériences faites dans l'observation de classes et dans des cours de formation continue pour les enseignants confirment cette impression : pour les professeurs de mathématiques c'est un fait irréfutable que le savoir mathématique et sa transmission sont des phénomènes linéaires.

Une vue superficielle de la structure du savoir et du cours d'enseignement peut donner l'impression du bien fondé de cette conception. La séquentialisation du savoir par sa présentation discursive et l'exigence didactique de le présenter d'une manière séquentielle et temporelle (Chevallard 1985 chap. 5&6) font que la recherche des "solutions" dans la théorie et dans la pratique de l'enseignement des mathématiques se dirige surtout vers des arrangements linéaires optimisés du savoir scolaire, et vers des ordres linéaires conformément adaptés aux processus d'enseignement et d'apprentissage.

Cette interprétation apparemment évidente est-elle valide ? Récemment, plusieurs études concernant les rapports sous-jacents à la "structure de surface" de la représentation du savoir et de son déroulement didactique viennent mettre en doute ce paradigme.

Dans la perspective socio-communicative sur les processus d'enseignement réels, cette interprétation est mise en question. Il paraît plus raisonnable de considérer le déroulement de l'enseignement comme un processus mutuellement interactif qui ne peut être déterminé ni complètement ni uniquement par les conditions initiales mais qui possède un caractère de système complexe. L'enseignement représente un "système de rétroactions" au sein duquel certaines structures, certains modes de déroulement et certains symptômes se produisent. Des routines et rituels communicatifs (cf. Bauersfeld 1978, Voigt 1984) par exemple ou des phénomènes spécifiques liés à l'activité d'enseignement comme l'effet "Topaze" ou l'effet "Jourdain" (cf. Brousseau 1986).

Non seulement du côté des analyses didactiques des processus réels d'enseignement, mais aussi du côté des études historiques et épistémologiques sur la nature du savoir mathématique, le paradigme "Les mathématiques et leur enseignement comme phénomènes linéaires" est mis en question. Le savoir mathématique ne peut pas simplement être saisi comme un inventaire objectif et universel de propositions vraies - comme la présentation du savoir dans la littérature professionnelle le suggère. Les mathématiques dépendent des conditions sociales et historiques. Pour analyser la nature du savoir mathématique dans les processus d'enseignement et d'apprentissage, il paraît par conséquent plus raisonnable de regarder ce savoir comme un système toujours en développement - et non comme un produit préfabriqué et achevé. En outre, il est essentiel de ne pas considérer ce savoir en lui-même comme un domaine isolé, mais de toujours examiner son rapport au sujet de la connaissance (par exemple au maître, aux élèves, aux chercheurs etc...). A la suite d'une telle interprétation dynamique et rattachée au sujet, le savoir mathématique cesse d'apparaître comme une "structure linéaire et hiérarchique" et prend un caractère de système complexe.

Ce passage d'un point de vue qui privilégie les "phénomènes linéaires", à un autre qui explicite les "systèmes dynamiques de rétroactions", va être illustré dans les paragraphes suivants, avec l'exemple du savoir probabiliste élémentaire et l'enseignement des probabilités (au premier cycle).

Dans la théorie mathématique expérimentale du "chaos déterministe" (cf. Schuster 1985) il existe maintenant des concepts précis pour décrire le comportement des "systèmes non-linéaires et complexes des mécanismes de rétroaction". Cette description conceptuelle des phénomènes non-linéaires élaborée dans la théorie du chaos va tout d'abord nous servir d'analogie relativement "ouverte" pour ne pas perdre de vue la contradiction essentielle entre les interprétations "linéaires" et "non linéaires" du savoir mathématique et de son enseignement. Reste le problème assez difficile de la modélisation et de la simulation mathématique des processus non-linéaires de l'enseignement réel en mathématiques.

II Savoir mathématique comme système : le cas des probabilités.

La signification du savoir mathématique est-elle complètement enfermée dans la définition formelle des concepts ? Est-ce qu'une théorie mathématique peut être dérivée exhaustivement des concepts élémentaires et de définitions précises ? Les probabilités élémentaires sont un bon exemple pour étudier ces problèmes épistémologiques du savoir mathématique. Leur enseignement et l'analyse, aussi bien historique qu'épistémologique, de leur développement montrent que la relation entre fondation et déploiement de la théorie est plus complexe que ne le laisse supposer la conception linéaire (cf. Steinbring 1980, 1986, 1988a, Jahnke 1978).

Traditionnellement, l'enseignant des mathématiques cherche à partir de notions fondamentales indubitables et de là il organise le processus d'enseignement et d'apprentissage sans jamais avoir besoin de reconstruire les fondements préalablement établis. Cette démarche ne peut être suivie dans l'enseignement des probabilités. Il est impossible de définir le concept de probabilité d'une façon universelle ou de l'appliquer automatiquement. De nouveaux problèmes mathématiques et des situations d'application diverses exigent souvent des modélisations stochastiques et des interprétations probabilistes radicalement nouvelles. Ce concept mathématique aux multiples significations chatoyantes ne peut qu'être défini de manière "locale" - non pas de manière universelle et absolue - par rapport à un contexte d'application ou d'interprétation (Steinbring 1984, 1988b).

On peut observer, dans le développement historique des probabilités, l'existence de définitions "locales" de probabilité et voir comment elles constitueraient une extension permanente des applications et des significations du concept. L'interprétation conceptuelle des probabilités a d'abord été liée au concept d'équipossibilité et d'équiprobabilité, puis elle a été rapportée à la probabilité classique, quelquefois dite "probabilité de Laplace", puis à la probabilité fréquentiste et à la probabilité logique, et enfin à la caractérisation axiomatique des probabilités. Les étapes de cette évolution ont conduit à une expansion des applications et des interprétations. La dynamique de cette évolution fut la circularité dans les définitions, résultat de l'intention exagérée d'équiper ces définitions "locales" avec des interprétations trop universelles et "globales".

L'analyse historique montre que la circularité dans les définitions du concept de probabilité est par principe inévitable. Une définition doit toujours contenir a priori quelques aspects du concept qu'on veut au fond dériver de la définition formelle. En dernière analyse, même la caractérisation axiomatique des probabilités ne constitue pas une définition sans circularité - elle exclut le problème de la fondation du concept en se bornant aux aspects techniques de la description mathématique implicite et elle laisse ouvertes les interprétations possibles des axiomes (cf. Kolmogorov 1933).

Il n'est pas fécond de considérer la circularité dans les définitions de probabilité comme un défaut, mais au contraire, il faut la considérer comme une forme "d'auto-référence conceptuelle". Cela veut dire, par exemple, que le concept fondamental nouveau de probabilité ne peut pas être totalement réduit à d'autres concepts mathématiques. Ce concept contient des déterminations effectivement nouvelles et spécifiques aux probabilités ; leur portée conceptuelle n'est pas fixée par la définition formelle, mais elle doit évoluer pas à pas pendant que les définitions des concepts fondamentaux de la théorie sont modifiées et réorganisées.

L'auto-référence est une caractéristique fondamentale indiquant l'impossibilité de déduire linéairement le savoir théorique à partir des concepts de base, ce savoir ayant le statut d'un système complexe.

Le **théorème de Bernoulli** est un exemple remarquable pour démontrer cette auto-référence conceptuelle. Dans une perspective historique, ce théorème représente la première tentative élémentaire de modéliser mathématiquement la relation entre fréquence relative et probabilité mathématique (resp. entre la situation empirique et sa description mathématique). Le théorème de Bernoulli peut être exprimé à l'aide de la notion moderne suivante :

> Soit h_n la fréquence relative de 0 en n épreuves indépendantes répétées d'une expérience de deux résultats (0 = succès, 1 = échec) ayant les probabilités p et q = 1 - p. Le théorème de Bernoulli dit que la différence entre probabilité et fréquence relative tend vers 0 et la"probabilité" de cet événement a pour limite 1 lorsque n tend vers l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall n_0, \quad \exists n >= n_0, \qquad P(|h_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \eta.$$

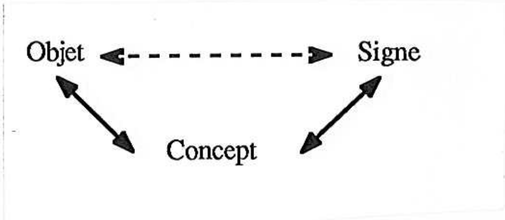
"On y trouve trois quantités variables : d'abord *l'exactitude* de l'affirmation considérée, mesurée par ε, puis la *validité* de cette affirmation, mesurée par η, et enfin le *nombre* des essais faits, donné par n. Ces trois paramètres dépendent les uns des autres, on peut fixer deux des paramètres et essayer d'estimer le troisième". (Steinbring 1980, p. 131). La "forme rédactionnelle" du théorème de Bernoulli, selon laquelle la fréquence relative tend vers la probabilité lorsque le nombre d'essais tend vers l'infini, cette connexion étant elle-même soumise à une "nouvelle" probabilité assez grande, est une autre forme de circularité dans la définition du concept et dans celle de la complémentarité entre situation empirique et modélisation mathématique. (Pour l'analyse didactique cf. v. Harten & Steinbring 1984 chap. 2.3 et Biehler & Steinbring 1982).

Le concept de la probabilité est soumis au "principe d'auto-référence" pour sa fondation conceptuelle et aussi pour son application à des situations externes. La signification de la probabilité ne peut pas être enfermée dans une définition mathématique formelle. Tout développement de ce concept de probabilité doit commencer par des interprétations relativement immédiates et préliminaires des probabilités, lesquelles contiennent dès le commencement le rapport fondamental entre situation d'application et modélisation mathématique, et ne se réduisent pas simplement aux aspects formels et aux techniques. Au cours de ce développement, des aspects significatifs divers des probabilités sont élaborés pas à pas d'une façon toujours plus précise et plus compréhensive : cette élaboration est commandée par des "mécanismes de rétroaction" et par des "auto-applications", elle fait appel à un répertoire croissant de techniques d'analyse et de descriptions mathématiques. Un tel développement est comparable à l'évolution des structures significatives dans les systèmes non-linéaires et complexes, l'évolution y étant produite et stabilisée par des mécanismes de rétroaction.

Un autre exemple important de la stochastique pour éclaire le *renversement du problème de la justification* du savoir théorique : c'est le concept de hasard et d'indépendance stochastique (Steinbring 1986). Le concept de hasard ou de suite de variables aléatoires ne saurait être un concept de base au sens qu'il fournirait une fondation fixe et immuable sur laquelle l'édifice de la théorie serait érigé. Toutes les tentatives pour donner une définition précise du concept de hasard (resp. du concept de suite de variables aléatoires, développé par exemple à l'aide de la théorie de l'information) ont abouti au résultat que ce concept ne pouvait pas être compris a priori d'une manière nette et formelle. Il n'y a que des descriptions relatives du hasard, cela veut dire, qu'il est seulement possible de décider suivant le niveau du développement de la théorie, si une suite de variables aléatoires est vraiment aléatoire ou non. On a besoin de tests statistiques élaborés par la théorie pour analyser la suite des variables aléatoires. Alors la fondation du concept d'aléas ou de hasard dépend du niveau du développement de la théorie des probabilités ; on ne saurait définir a priori la signification du concept de hasard dans sa complexité.

Même la théorie élémentaire des probabilités ne saurait être dérivée des concepts élémentaires de manière simplement linéaire - par exemple des concept de hasard et de probabilité. Il faut prendre la perspective inverse : la théorie représente un système complexe dans lequel se trouvent des relations implicitement définies entre concepts, entre moyens de représentation et d'activité, entre contextes d'interprétation et d'application, entre calculs et signes mathématiques etc... Ce ne sont pas les concepts élémentaires qui justifient la théorie des probabilités, au contraire, c'est le niveau actuel du développement de la théorie des probabilités qui fournit des justifications partielles des concepts élémentaires.
Il y a une autre façon de décrire le caractère systémique du savoir probabiliste. Que le savoir

stochastique soit un système complexe et ne soit pas linéairement dérivable des faits élémentaires, implique de le comprendre comme forme relationnelle ou comme "mécanisme de couplage" entre les aspects formels d'un calcul et les contextes d'interprétation pour tous les niveaux de développement de ce savoir. Cette forme relationnelle est caractérisée par le triangle épistémologique : objet, signe et concept.



Ce diagramme épistémologique représente des relations dans un système. La signification du savoir en question n'est pas dérivable de l'un ou l'autre nœud du diagramme, mais elle se constitue, à chaque instant du développement, comme une certaine forme d'équilibre, resp. d'interaction entre les éléments de ce système.

D'abord, ce triangle épistémologique sert à décrire d'une façon fondamentale le caractère systémique du savoir théorique et de sa signification ; dans le paragraphe suivant, on va essayer de démontrer comment ce triangle permet de développer aussi une méthode d'analyse de l'enseignement des mathématiques. Il s'agit d'une analyse des développements de la signification du savoir mathématique qui se produisent en classe dans les interactions entre maître et élèves.

III Le développement du savoir mathématique dans l'interaction en classe

La signification du savoir mathématique ne saurait être dérivée d'une manière purement logique et linéaire. La signification s'établit de façon relationnelle, elle est même une "forme relationnelle" reflétant le triangle épistémologique.

D'une part, ce triangle épistémologique est un instrument pour analyser la nature spécifique du savoir mathématique. D'autre part, il sert de fondement conceptuel pour développer un schéma d'observation de l'enseignement des mathématiques. Une hypothèse importante est que la distinction entre "objet" et "signe" représente une dimension centrale de l'épistémologie du savoir théorique. Cette distinction permet de décrire et d'analyser le développement de la compréhension du savoir et de sa signification, et aussi les types et les "structures" de savoir utilisés dans le processus d'enseignement. La relation complémentaire entre "objet" et "signe" tient compte du caractère systémique et non-linéaire des processus d'enseignement. Elle permet de prendre une perspective plus différenciée sur le savoir dans l'interaction entre maître et élèves, et elle permet aussi, d'une manière simple et encore préliminaire, d'explorer et de rendre visible quelques structures de signification sous-jacentes à la "surface lisse" de l'enseignement mathématique.

Nous allons maintenant présenter le schéma d'analyse de l'enseignement et les diagrammes qui visualise le développement du savoir dans l'enseignement. Ils se situent dans le cadre d'une analyse exemplaire de quatre leçons sur les probabilités élémentaires. Il ne sera pas toujours possible d'expliquer en détail les méthodes de codage, celles de l'analyse des problèmes et de la visualisation graphique ; une description complète se trouve dans Bromme/Steinbring (1987&1988).

Le codage des cours

Deux enseignants des mathématiques (maîtres A et B) ont été choisis, dans une population de 26 professeurs, en fonction de différences signifiantes pour certaines variables relatives à leur style d'enseignement (Bromme/Steinbring 1987). Pour chacun des deux enseignants, on analyse la transcription de deux leçons sur l'introduction des probabilités (en 5ème). Selon le triangle épistémologique, les contributions des enseignants et des élèves sont codées comme suit : les contributions sont codées "objet" (abr. : 0), lorsqu'elles ne contiennent que des rapports à la situation du problème ou de l'application, et elles sont codées "signe" (abr. : S) lorsqu'elles ne contiennent que des aspects de calcul ou du modèle mathématique. Enfin, les contributions sont interprétées comme appartenant au "niveau conceptuel", lorsqu'elles contiennent à la fois des aspects d'objet et de signe mis en relation (abr. : R). (Une quatrième catégorie comporte les contributions non-codifiables ; en plus, ces quatre catégories sont distinguées en "explication du maître", en "question du maître" et "contribution d'un élève", ce qui conduit à un total de douze catégories différentes. Par la suite, on ne considéra que les trois catégories centrales "objet" (0), "relation" (R) et "signe" (S).)

Le codage est fondé sur une analyse didactique et épistémologique des problèmes mathématiques traités dans les leçons, analyse qui a mené à distinguer entre le niveau de l'objet et le niveau du modèle dans le contenu mathématique de la leçon étudiée. Deux observateurs externes établirent séparément le codage technique des niveaux des contributions mathématiques. Dans ce but, les transcriptions des leçons furent segmentées en éléments de deux minutes ; elles furent aussi subdivisées en unités sémantiques. Chaque unité sémantique fut codée selon le schéma établi préalablement. A l'aide d'un programme d'ordinateur, les listes de codage furent traduites en un diagramme graphique montrant le développement du savoir (voir, par exemple, diagramme A1). Chaque trait noir représente une contribution (du maître ou d'un élève) de type 0, S ou R. Les traits noirs tracés sur les trois niveaux indiquent la présentation des problèmes mathématiques au cours de la leçon. (Pour une présentation plus détaillée, par exemple concernant la fiabilité du codage et la représentation graphique de toutes les douze catégories, voir Bromme/Steinbring 1987).

Le contenu des cours et leur déroulement

Le thème mathématique général des quatre leçons considérées était une introduction du concept "d'arbre probabiliste" comme moyen de représentation et d'activité ainsi qu'une première application. On a commencé par une situation de jeu, simple et accessible aux enfants : un petit garçon quitte la maison et peut aller par des chemins différents pour arriver à un certain terrain de jeu (football, jeu, piscine). A chaque carrefour, le garçon hésite entre plusieurs itinéraires possibles : pour décider il jette une pièce de monnaie, continuant à gauche ou à droite selon le résultat pile ou face. Devant cette situation, présentée avec le dessin des chemins, des carrefours et des terrains de jeu, la tâche des élèves consiste à développer un diagramme en arbre à deux degrés comme diagramme de décision. Le rapport entre le diagramme des chemins réels et le diagramme en arbre, ou diagramme de décision, est un bel exemple de la complémentarité de l'objectivité (au sens d'être lié d'une certaine manière à un "objet") et de la représentatibilité (au sens d'être le représentant de quelque chose extérieur) dans le savoir mathématique. L'établissement d'un rapport adéquat entre diagramme des chemins et diagramme de décision est aussi un problème didactique assez sérieux pour la compréhension des élèves.

Dans l'enseignement du maître A, le diagramme en arbre est introduit et étudié en premier lieu "de manière expérimentale", à savoir par plusieurs jeux et simulations de cette situation et en rassemblant et explorant des données statistiques obtenues. Dans les leçons du maître B, l'apprentissage du diagramme en arbre est tout d'abord favorisé par les notions terminologiques de chemins et de carrefours ainsi que par l'établissement d'un diagramme "schématique" de la situation réelle (dans laquelle la probabilité cherchée peut être déterminée par dénombrement).

La relation entre modélisations mathématiques et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.

Pour permettre une première interprétation des représentations graphiques du développement du savoir mathématique au cours de l'enseignement, nous allons maintenant donner brièvement les principales caractéristiques de chacune des quatre leçons.

Description brève du contenu de la leçon A1 *(représentation graphique n° A1)*

Le concept du diagramme en arbre est introduit au cours de la leçon A1 à l'aide d'un problème. (Les itinéraires de Bruno aux terrains de jeu). Après la présentation du problème et la discussion des possibilités de faire une simulation expérimentale de la situation (intervalles 1-7), les élèves commencent à travailler individuellement (intervalles 8-15), et la leçon s'achève sur l'exploration et sur une première interprétation des résultats expérimentaux (intervalles 15-19).

Description brève du contenu de la leçon A2 *(représentation graphique n°A2)*

Pour continuer le thème de la leçon dernière, un problème similaire est posé mais avec une généralisation du diagramme en arbre à trois degrés. Les élèves sont appelés à noter toutes les combinaisons possibles (intervalles 1-3). A la suite d'une phase de travail individuel (intervalles 4-14), les résultats sont discutés et interprétés selon leur caractère mathématique (intervalles 14-21).

Description brève du contenu de la leçon B1 *(représentation graphique n°B1)*

La leçon B1 commence avec le traitement et la discussion de trois problèmes élémentaires concernant les probabilités classiques (intervalles 2-11) ; puis un nouveau problème (les terrains de jeu de Bruno) introduit le diagramme en arbre. On peut observer que les élèves ont des difficultés graves à comprendre la distinction entre diagramme des chemins et diagramme de décision (intervalles 11-18). A l'aide d'une nouvelle tâche (concernant un diagramme en arbre à trois degrés) les élèves sont appelés à pratiquer le dessin exact et l'inscription correcte d'un diagramme en arbre (intervalles 18-22).

Description brève du contenu de la leçon B2 *(représentation graphique n°B2)*

Le problème présenté dans la dernière leçon est donné à nouveau. La difficulté centrale - comme auparavant - est de concevoir le diagramme des chemins concrets comme un diagramme de décision, c'est-à-dire comme un moyen de représenter une situation réelle, et d'éviter d'identifier le diagramme en arbre à cette situation directement (par exemple de détecter directement au diagramme l'école, la maison ou les chemins) (intervalles 1-14). La deuxième partie de cette leçon est consacrée à produire un diagramme à trois degrés pour décrire les combinaisons possibles de trois feux rouges avec les trois possibilités "rouge", "orange" et "vert". La leçon se termine sur une phase de travail individuel (intervalles 14-23).

Pour comparer les graphiques des quatre leçons produits par l'ordinateurs sans avoir trop de détails qui masqueraient la configuration d'ensemble, une forme de représentation est retenue qui ne distingue pas d'abord les contributions du maître et celles des élèves. En outre, les contributions non codifiables sont négligées. Cela permet une description phénoménologique des représentations graphiques du développement du savoir. Une première question se pose : comment la différence entre les deux enseignements se traduit-elle dans les différentes représentations graphiques ainsi obtenues ?

Les différences entre les maîtres A et B sont apparaissent nettement sur les représentations graphiques [A1, A2, B1, B2]. Au cours des deux leçons du maître A, le niveau de "relation" montre une importance presque égale comparé à celui des deux autres niveaux ; chez le maître B, par contre, ce niveau "relation" a une importance moindre. Cette impression visuelle résulte du plus grand nombre des contributions et de leur distribution plus importante au niveau intermédiaire dans l'enseignement du maître A. Chez le maître B, par contre, ce niveau est effectivement moins atteint que les autres (les pourcentages le montrent : 28 % resp. 37 % des contributions dans l'enseignement du maître A, et seulement 14 % des contributions chez le maître B se trouvent au niveau "relation"). En outre, on peut voir comment les contributions au niveau "relationnel" augmentent dans le temps chez le maître A. Surtout dans la première leçon, il est évident que les contributions se déplacent graduellement vers le niveau "relation" ; dans la deuxième leçon, une proportion assez élevée des interactions au niveau "relation" est déjà obtenue plus tôt.

La représentation graphique des leçons du maître B, par contre, donne l'impression qu'une stabilisation réelle du niveau "relation" n'est jamais vraiment atteinte. La première leçon (B1) est d'abord dominée par le niveau "calcul" resp. le niveau "modèle" (S), tandis que le niveau "empirique" ou "objectif" semble devenir plus fréquent dans la deuxième partie. Au cours de la deuxième leçon (B2), on observe des oscillations du niveau "objectif" au niveau "signe", et à l'inverse, sans que le niveau "relation" soit intégré d'une façon systématique.

Représentations graphiques

Il ne faut pas concevoir ces représentations graphiques comme des images ou des "copies" incomplètes de la complexité de l'enseignement réel - comme, par exemple, un regard superficiel sur nos diagrammes graphiques pourrait le suggérer. Les représentations graphiques et les diagrammes visuels fournissent des cadres géométriques pour rendre visible et analyser des *relations* possibles jusqu'alors cachées dans les données discrètes. On ne saurait trop souligner leur caractère théorique et exploratoires dans une perspective épistémologique.

1° Les représentations graphiques possèdent des fonctions autonomes qui sont généralement irremplaçables dans le processus de connaissance.

2° Les représentations graphiques sont de véritables moyens de connaissance et n'appartiennent pas seulement à la sphère de la communication ou à celle de la pédagogie.

3° Les représentations sont des moyens exploratoires... Ils permettent des opérations formelles qui sont relativement indépendantes de leurs rapports référentiels... et qui contribuent à l'examen de faits partiellement inconnus. (Biehler 1985, p. 70).

Cette interprétation théorique et exploratoire des diagrammes graphiques va de soi pour analyser des données *statistiques*. Pour les données statistiques, il faut tenir compte du fait que l'ensemble des données présentées ne représente qu'une multitude d'ensembles "similaires" des données. Ce phénomène statistique, selon lequel les structures générales, encore sous-jacentes, deviennent visibles tendanciellement dans le cas particulier d'un ensemble concret des données, se traduit dans l'utilisation des diagrammes graphiques comme concept théorique et exploratoire.

Les graphiques présentés ici pour coder et visualiser le développement du savoir dans l'enseignement des mathématiques permettent de prendre des perspectives exploratoires et variables sur des aspects divers ; par exemple sur :

- les structures visuelles "globales" du savoir au déroulement d'enseignement.
- les structures graphiques "locales" produites par les interactions en classe
- la séparation des données en groupe différents afin de produire des structures graphiques contrastées.

Selon l'idée que les processus d'enseignement sont des phénomènes non-linéaires complexes soumis aux mécanismes de rétroaction, il ne faut concevoir les visualisations graphiques en premier lieu comme des diagrammes temporels - même s'ils montrent aussi des développement séquentiels (par exemple les étapes bien connues de l'enseignement, la phase d'introduction ou de discussion des devoirs, la phase de travail et, enfin, la phase de réflexion). Pour notre propos, il est plus intéressant d'identifier certaines structures visuelles et certaines formes stabilisées du savoir résultant des interactions ou des rétroactions entre tous les participants dans le processus de l'enseignement. Les visualisations graphiques présentées sont produites empiriquement et contiennent donc des "impuretés empiriques". Les structures du savoir ne sont observables qu'à l'aide de la méthode de codage, non pas "directement" comme des simples phénomènes non-linéaires dans les sciences naturelles.

Une bonne méthode pour montrer des structures graphiques produites par les interactions entre maître et élèves est de séparer les contributions en deux groupes, celles du maître et resp. celles des élèves.

Séparation des données

Une opération importante sur les diagrammes consiste à séparer les contributions des élèves de celles du maître afin d'obtenir deux structures visuelles du développement du savoir mathématique à partir d'une seule leçon. Les secondes leçons des maîtres A et B sont "séparées" et leurs représentations graphiques sont discutées (voir les diagrammes dans l'annexe, A2, B2, A2M, A2E, B2M et B2E).

Les graphiques séparés pour la leçon du maître A (A2M et A2E) montrent une correspondance relativement évidente entre les structures graphiques du savoir chez les élèves et chez le maître, impression qui est renforcée par la comparaison des diagrammes séparés avec le diagramme non-séparé [A2]. Après séparation des contributions dans l'enseignement du maître B, par contre, on peut observer une différence remarquable entre les deux diagrammes séparés [B2M et B2E]. Le diagramme montrant les contributions des élèves confirme la structure du diagramme non-séparé. **Ce sont les élèves qui déterminent en principe la structure épistémologique du savoir dans l'interaction, et non pas le maître.** Les oscillations visibles sont le résultat des contributions des élèves.

Mathématique et enseignement comme phénomènes non-linéaires

Les visualisations graphiques du développement du savoir fournissent une certaine structure d'ensemble de l'enseignement des mathématiques. Elles permettent l'exploration des relations conceptuelles encore cachées dans les phénomènes empiriques. Elles offrent une perspective globale assez "rapide" sur la structure d'une leçon mathématique en ce qui concerne le développement du savoir, perspective conceptuelle qui modélise des phénomènes autrement très compliqués. Il ne s'agit pas de réduire ou de "négliger" la réalité par le recours aux graphiques, mais tout concept théorique doit élaborer certaines relations importantes en face de la complexité des faits réels. Le point décisif est que les graphiques, comme tous les concepts théoriques permettent de reconstruire des *relations* nouvelles dans la situation examinée, afin de faciliter la compréhension conceptuelle.

Le savoir mathématique et son enseignement ne consistent donc pas en phénomènes simplement linéaires, maîtrisables par la seule connaissance des "conditions initiales". Il s'agit des phénomènes non-linéaires soumis à des mécanismes d'interaction avec des évenements nouveaux et imprévisibles qui surviennent dans leur déroulement. Ces phénomènes forment certains ordres et s'auto-organisent assez spontanément. Dans cette perspective, il devient plus important de comprendre d'abord les mécanismes d'actions internes et les structures du savoir mathématique qui se développent assez spontanément dans l'interaction en classe, que de vouloir directement agir sur eux et que de chercher à améliorer la pratique de l'enseignement en variant les "conditions initiales" d'un processus imaginé "linéaire".

Le codage et la visualisation graphique de la structure épistémologique du savoir mathématique intervenant dans le processus de l'enseignement - à l'aide du triangle épistémologique - sont une première tentative pour décrire et pour analyser, empiriquement et de façon exemplaire, les "phénomènes d'auto-organisation" sous jacents à la surface visible de l'enseignement des mathématiques.

REFERENCES

BAUERFELD H. (1978)
Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht - Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung, in : Bauerfeld H. (ed) : Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht, Hannover, 158-170.

BIEHLER R. (1985)
Graphische Darstellungen, in : math. did. 8, 57-81.

BIEHLER R./ STEINBRING H. (1982)
Bernoullis Théorem : Eine "Erklärung" für das empirische Gesetz der grossen Zahlen ? In : Steiner H.G. (ed.) : Mathematik - Philosophie - Bildung. IDM - Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht. Köln : Aulis, 296-334.

BROMME R./STEINBRING H. (1987)
Die epistemologische Struktur mathematischen Wissens im Unterrichtsprozess. Eine empirische Analyse von vier Unterrichtsstunden in der Sekundarstufe. Occasional Paper no. 90, Bielefeld.

BROMME R. /STEINBRING H. (1988)
Interactive Development of Subjets Matter within Instruction in the Classroom, Manuscript, Bielefeld.

BROUSSEAU G. (1985)
Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques, In : RDM, vol. 7, no. 2, 33-115.

BROWN, S.I. (1985)
Problem-solving and teacher education : The humanism twixt models and muddles. In : Morris, R. (Ed.) Studies in Mathematics Education. The Education of Secondary School Teachers of Mathematics. Unesco. Vol. 4, 3-28.

CHEVALLARD Y. (1985)
La Transposition didactique, La Pensée Sauvage, Grenoble.

COONEY T. (1985)
A Beginning Teacher's View of Problem Solving, In : Journal for Research in Mathematics Education, vol. 16, no 5, 324-336.

V. HARTEN G./STEINBRING H. (1984)
Stochastik in der Sekundarstufe I, Köln, Aulis.

JAHNKE H.N. (1978)
Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem. Materialien und Studien Bd. 10, IDM Bielefeld.

KOLMOGOROV A.N. (1933)
Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin.

SCHUSTER H.G. (1984)
Deterministic Chaos - An Introduction, Physik-Verlag, Weinheim.

STEINBRING H. (1980)
Zur Entwicklung des Warscheinlichkeitsbegriffs - Das Anwendungsproblem in der Warscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht, Materialien und Studien Bd. 18, IDM Bielefeld.

STEINBRING H. (1984)
Mathematical Concepts in Didactical Situations as Complex Systems : The Case of Probability, In : Steiner H.G., Balacheff N. u.a. : Theory of Mathematics Education (TME), ICME 5 - Topic Area and Miniconference : Adelaide, Austria, August 24-30, 1984, Occasional Paper no. 54, IDM Bielefeld, 56-88.

STEINBRING H. (1986)
L'indépendance stochastique - Un exemple de renversement du contenu intuitif d'un concept et de sa définition mathématique formelle, in : RDM, vol. 7, no. 3, 5-50.

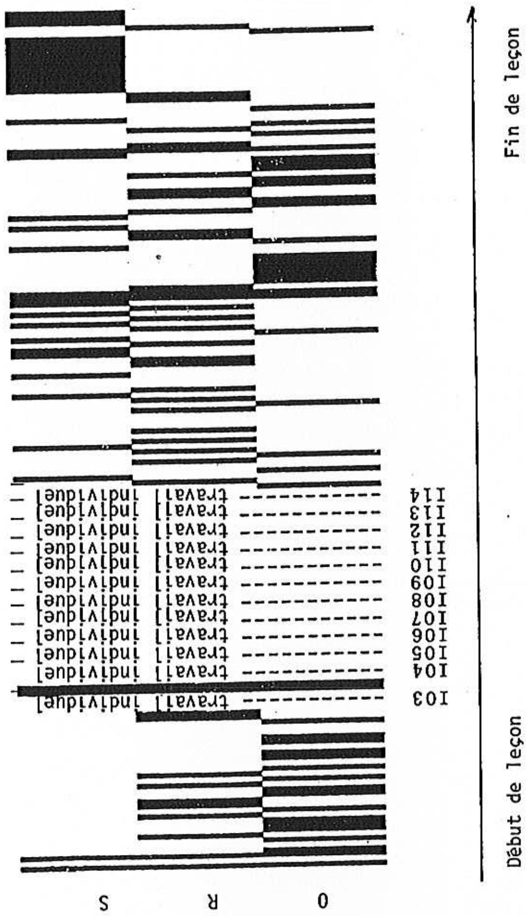
STEINBRING H. (1988a)
Nature du savoir mathématique dans la pratique de l'enseignant, In : Laborde C. (ed.) Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathémaques et de l'Informatique, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 307-316.

STEINBRING H. (1988)
The Theoritical Nature of Probability and how to Cope with it in the Classroom, Occasional Paper, no. 99, IDM Bielefeld.

VOIGT J. (1984)
Interaktionsmuster und Routinen im Mathemakunterricht-Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim, Beltz.

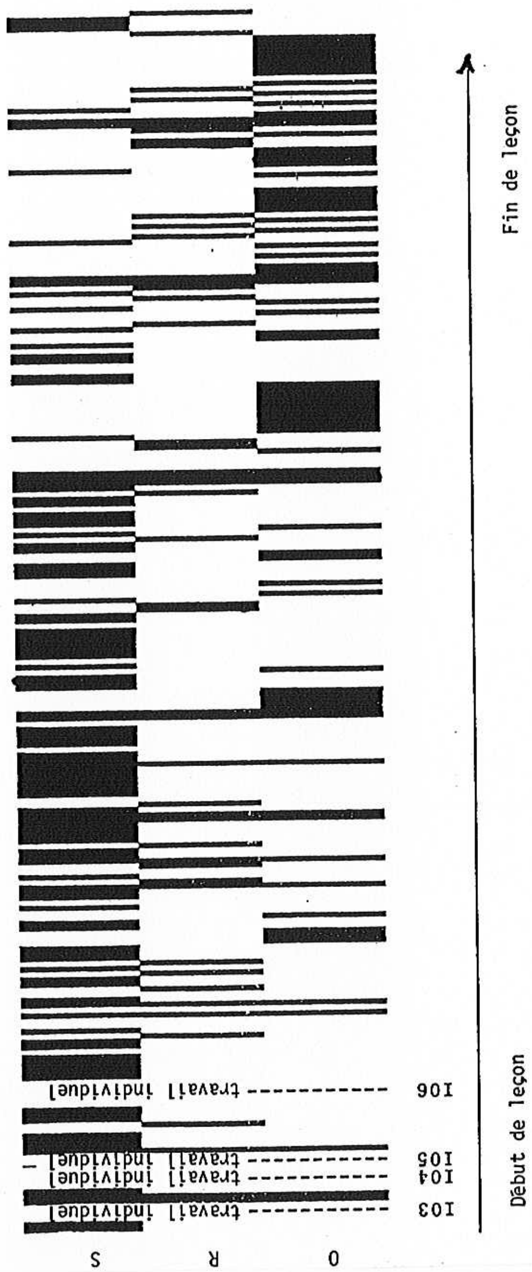
Représentation graphique n° A 2

Vue globale sur la représentation graphique de l'enseignement du maître A; leçon 2.



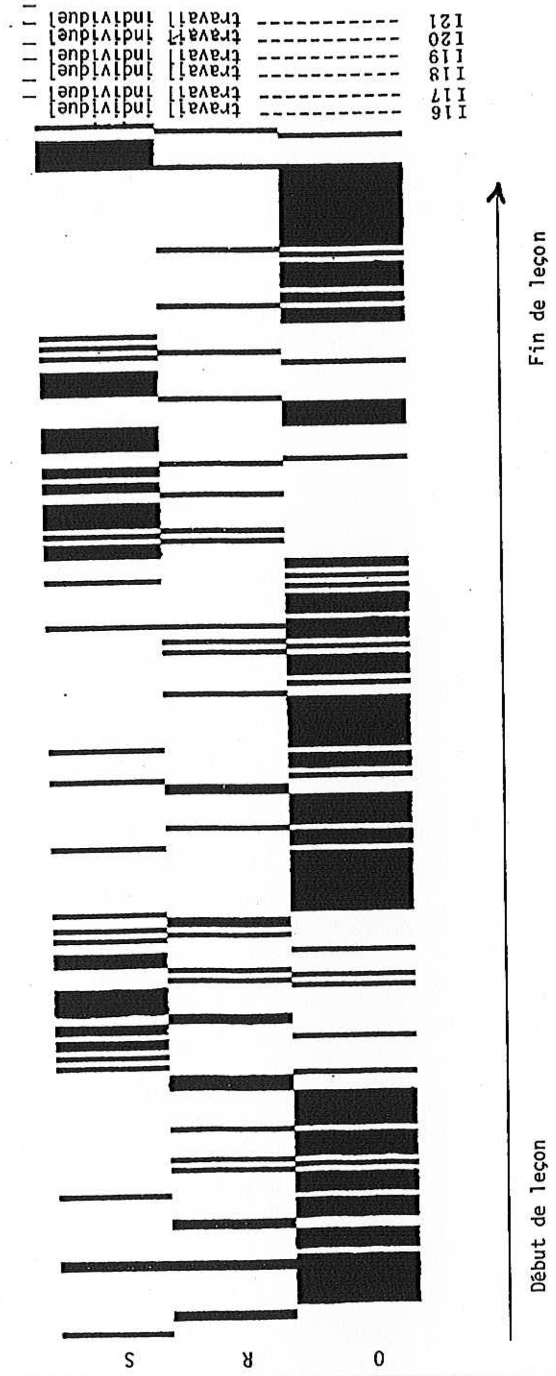
Représentation graphique n° B 1

Vue globale sur la représentation graphique de l'enseignement du maître B; leçon 1.



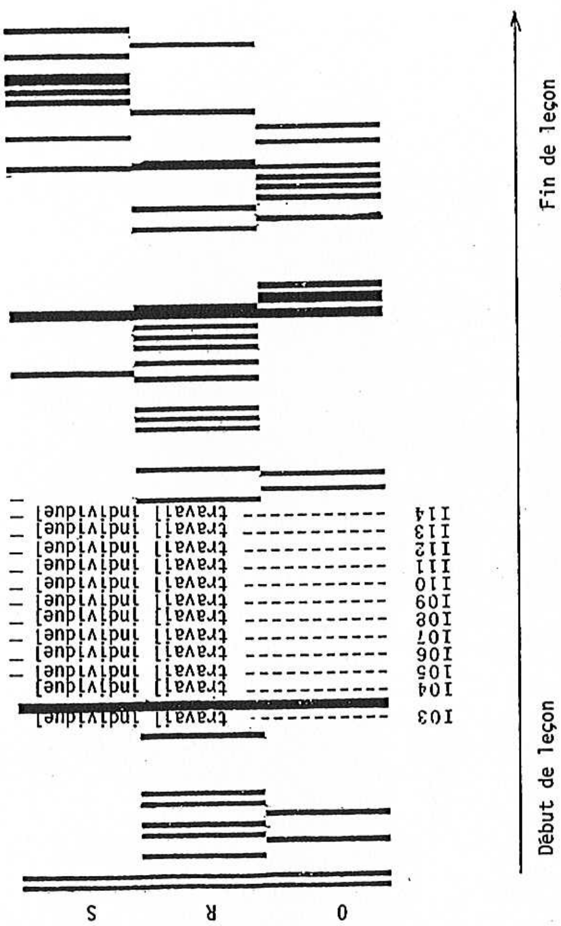
Représentation graphique n° B 2

Vue globale sur la représentation graphique l'enseignement du maître B; lecon 2.



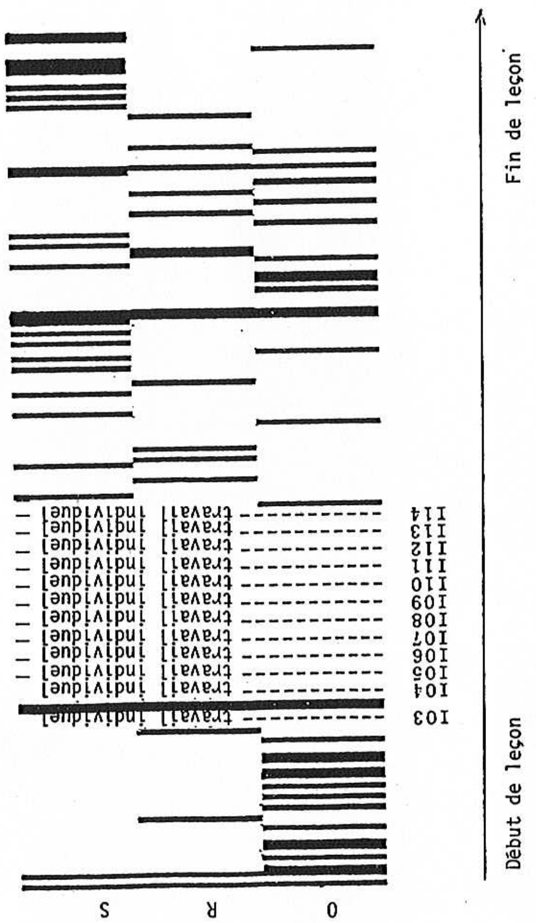
Représentation graphique n° A 2 M

Graphique séparé des contributions du maître et des élèves.
Contributions du maître A; leçon 2



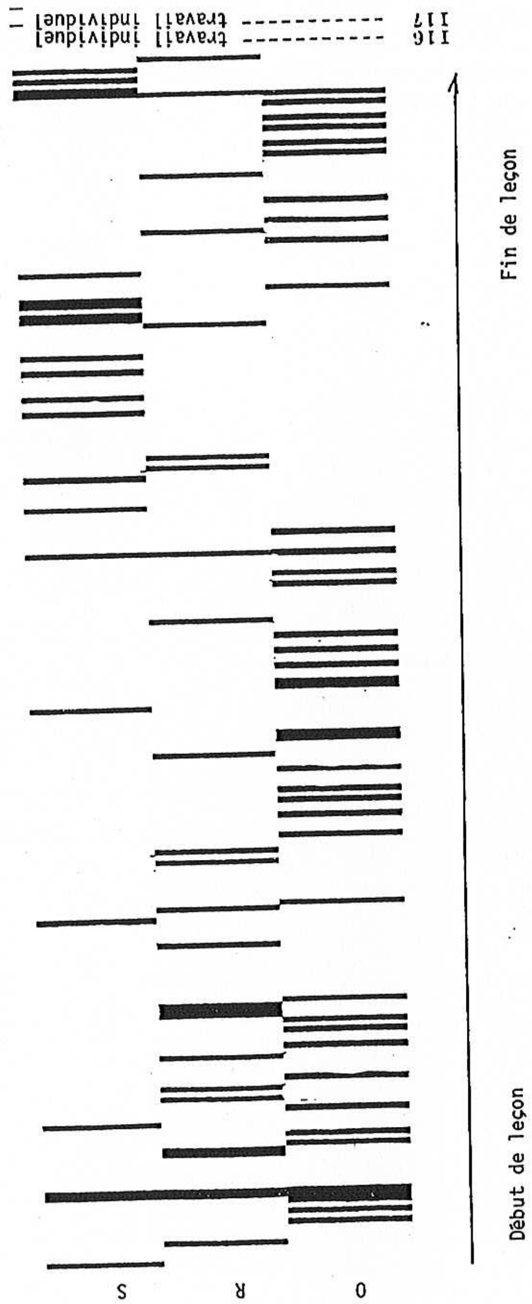
Représentation graphique n° A 2 E

Graphique séparé des contributions du maître et des élèves; contributions des élèves du maître A, leçon 2.



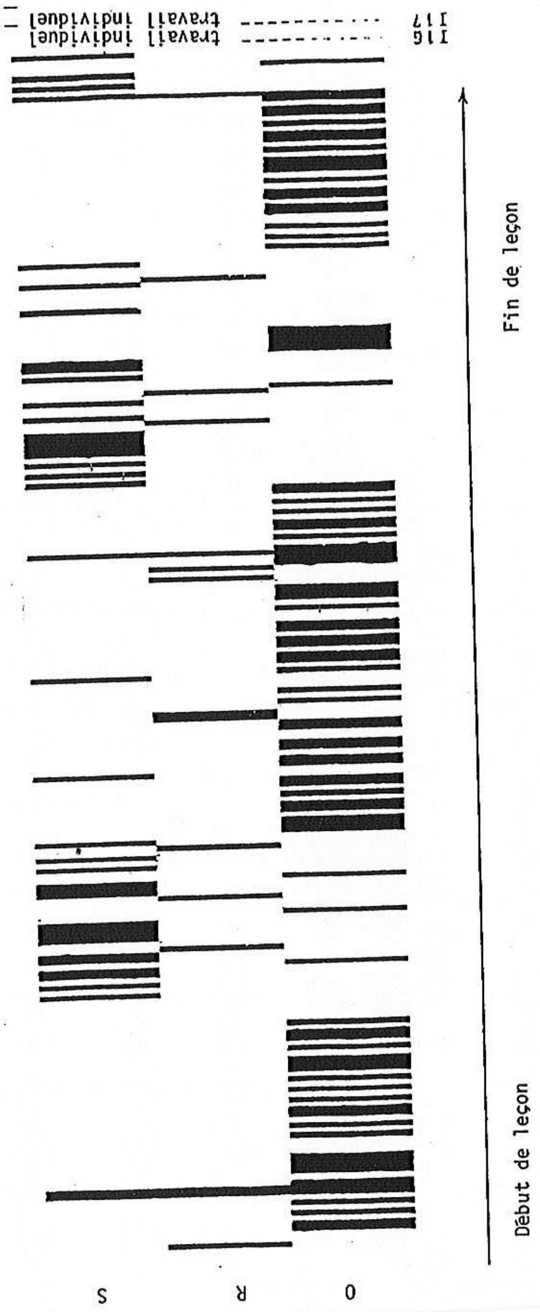
Représentation graphique n° B 2 M

Graphique séparé des contributions du maître et des élèves;
contributions du maître B, leçon 2.



Représentation graphique n° B 2 E

Graphique séparé des contributions du maître et des élèves;
contributions des élèves du maître B', leçon 2.



EFFETS DE LA SITUATION (SCOLAIRE OU NON)

SUR LA FORME

DU DISCOURS ARGUMENTATIF

D. COQUIN & E. PATEJ

The experiment presented tries to analyse the written argumentative discourses of the child when he produces a justification in two specific situations : at school (class situation) and in holiday camp (game situation). The hypothesis was that the child in a classroom situation produced an impersonal, unimplicated discourse. In a game situation the child implicates and affirmes his certitude.

Les enseignants de mathématiques déplorent souvent les difficultés des enfants à **formuler** la solution d'un problème. Nous nous sommes demandés dans quelle mesure la représentation **formelle** et idéalisée que l'enfant se donne du discours qu'il doit produire à l'école, ne fait pas obstacle à l'emploi d'une langue plus **naturelle** qui permettrait cependant aussi de produire des preuves mathématiques. En d'autres termes, l'enseignement qui crée des représentations jalonnées de prescriptifs et d'interdits, ne provoquerait-il pas une autocensure des élèves qui serait un frein à l'apprentissage en cause ?

Dans une première partie, nous présenterons le cadre psycholinguistique général dans lequel nous nous situons. Puis nous développerons, à titre d'exemple, une recherche particulière, portant sur les différentes formes des justifications mathématiques selon qu'elles sont données en classe ou en situation de jeu.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p.217-227) IREM de Strasbourg

Cadre des Recherches

Pour parler des différents types de langages qui répondent à des **exigences fonctionnelles** qui varient selon les situations, les psychologues parlent de conduites langagières.

La conduite langagière répond à un but, à un objectif précis qui fait partie de la situation élaborée par le locuteur : le locuteur traite l'ensemble des caractéristiques de la situation de production pour se construire une représentation du discours qu'il doit produire à ce moment-là, à cet endroit-là pour cet interlocuteur-là, etc... : par exemple, un enfant n'expose pas la solution d'un exercice à son professeur de la même manière qu'il l'expliquerait à un camarade ; il ne rédige pas comme il parle, etc...

En tant que psychologue du langage, nous cherchons à préciser certains processus mis en oeuvre par le locuteur au cours de son activité de production. Nous voulons en particulier analyser le fonctionnement du lien entre les caractéristiques des situations, d'une part, et les caractéristiques des discours produits dans ces situations, d'autre part. Nous présenterons donc tout d'abord les cadres théoriques permettant ces caractérisations.

1. Caractérisation des situations

Ce sont les configurations de paramètres extra-langagiers définis par Bronckart (1985) qui nous permettront de repérer les situations dans lesquelles nous recueillons les productions langagières. Ces paramètres sont classés selon trois "espaces" :

- L'espace référentiel : il correspond aux représentations psychologiques a-langagières élaborées ou mobilisées par le sujet. Il concerne les notions, les relations et les schématisations.
- L'espace de l'acte de production : il est défini par les caractéristiques matérielles de l'activité verbale qui concernent le locuteur, les interlocuteurs, le mode de production (écrit/oral ; monologue/dialogue ; ...), l'espace-temps physique de l'acte de production.
- L'espace de l'interaction sociale : il est précisé par le lieu social (ex. : institution scolaire), le destinataire et l'énonciateur en tant qu'instances sociales (maître, élève), le but ou l'effet spécifique visé par les conduites langagières (convaincre, montrer qu'on est le plus fort).

2. Caractérisation des discours produits

Travaillant sur les discours produits par les enfants en situation de raisonnement, nous avons adopté le cadre de Grize (1984) qui permet de repérer les différences entre discours produits en raisonnement formel et en raisonnement naturel à partir de différents critères, par exemple :

- **La nature des objets** : objets définis institutionnellement, préalablement au discours tenus (DF) ; des classes-objets construites progressivement dans et par le discours ;
- **Le mode d'étayage,** c'est-à-dire d'appui aux thèses défendues : justifications fondées sur les causes ou les raisons logiques, reformulation, appel aux exemples ou analogies, restrictions, etc... ;
- **La structure d'étayage** : en chaîne, avec enchâssement, avec accumulation d'arguments disjoints ou conjoints ;
- **Le degré d'implication discursive** : c'est ce critère qui a retenu notre attention dans un premier temps. Nous nous sommes intéressés essentiellement à l'implication du locuteur dans son discours et aux marques de modalisation de certitude (Miéville, 1984-85 ; Espéret, Coirier, Coquin, Passerault, 1987).

Les indicateurs d'implication sont par exemple :
a) la prise en charge du discours par le locuteur : "*je pense* que..." ;
b) la présence du locuteur dans son discours : "*je* rajoute 1" ;
c) la présence d'un interlocuteur personnalisé : "*M.*, lui aussi..." ;
les modalisations de certitude peuvent être conjuguées à la prise en charge : "*je suis sûr* que..." ou indépendantes de la prise en charge : "la droite est *certainement...*"

3. Les hypothèses

Une recherche collective (Espéret et al., 1987) nous a permis de faire l'hypothèse da la mise en place génétique de deux types de discours argumentatifs : le Discours Formel (DF) et le Discours Naturel (DN). Dans cette recherche, on a fait varier l'espace référentiel : on demandait à des enfants de donner leur point de vue et de l'argumenter par écrit (après une discussion générale en classe) à propos de deux questions différentes : l'une relevait d'un cadre scientifique et il existait pour le locuteur une réponse correcte (ex : question sur la conservation du volume) ; l'autre relevait d'un débat d'opinion et plusieurs positions étaient recevables (ex. : autorisation de fumer à partir de quinze ans seulement).

Seule la représentation que se fait le locuteur du type de raisonnement à produire variait ; il était plutôt formel dans le premier cas et plutôt naturel dans l'autre. On a effectivement constaté une différenciation progressive des deux types de discours en fonction de l'âge. Dès 13-14 ans, le discours naturel était marqué par un niveau élevé d'implication alors que le discours formel était largement désimpliqué. On a également repéré des différences de structure entre les deux discours.

A partir de ces résultats, nous avons cherché à repérer chez les enfants des discours différents produits à propos d'un même référent, mais dans des situations différentes.
Dans la recherche présentée ci-dessous, des enfants expliquent ce qu'il faut faire pour gagner à un jeu qu'ils connaissent bien ; seul change le **lieu social** de production : en classe/en centre de loisirs. Cette variation devrait suffire à modifier la représentation que se fait l'enfant du type de discours qu'il doit produire. Dans le premier cas (en classe), nous attendons un discours de type formel (DF) : impersonnel, désimpliqué, se rapprochant du discours scientifique standard ; ce DF s'opposerait à un DN obtenu dans le deuxième cas (en centre de loisirs), DN où l'enfant se met en scène, prend en charge son argumentation et affirme sa certitude.

La différence entre DF et DN devrait augmenter en fonction de l'âge : ce n'est que chez les enfants les plus âgés, ceux qui ont le plus fréquenté l'école, que la représentation d'un discours scientifique de type DF serait construite. Chez les plus jeunes, DF et DN seraient trè s proches.

L'expérience

1. La tâche

La tâche qui a été proposée aux enfants, est un jeu mathématique nommé : "la course à 20" (Brousseau, 1973). Les enfants jouent par binôme, c'est un jeu à un contre un. il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire "20" le premier en ajoutant 1 ou 2 au nombre dit par l'autre ; l'un commence, dit 1 ou 2 (exemple : 1), l'autre continue en ajoutant 1 ou 2 à ce nombre (2 par exemple) et dit donc "3", à son tour, le premier ajoute 1 ou 2 (1 par exemple) et donc "4", etc., le joueur arrivant à "20" le premier est le vainqueur.

Pour être sûr de dire "20", il est nécessaire et suffisant d'avoir prononcé 17 (l'adversaire ne pouvant annoncer que 18 ou 19). Mais pour annoncer 17, il faut avoir annoncé 14, donc 11, donc 8, 5, 2. Par conséquent le joueur qui commence, s'il joue bien, ne peut pas perdre. C'est un exemple typique de jeu fermé. Dès lors que la procédure est découverte, le jeu n'a plus d'intérêt.

Nous avons choisi ce jeu car il offre l'avantage de pouvoir être utilisé de différentes façons : en effet, il comporte un "aspect jeu" et peut donc être utilisé comme tel, mais aussi un "aspect mathématique" et peut ainsi jouer le rôle d'introduction d'une leçon mathématique.

2. Les variables

Compte-tenu de nos hypothèses, nous avons manipulé deux sources de variations :

* "le lieu social où se déroule l'expérience" avec deux situations :
  - la "situation classe" : la passation a eu lieu en classe pendant l'horaire imparti à l'apprentissage des mathématiques. Les instituteurs ont participé au déroulement de l'expérience ;
  - la "situation jeu" : elle s'est déroulée pendant les grandes vacances scolaires, dans un centre de loisirs, à des horaires et lieux de jeu. Les animateurs se sont également mêlés à l'expérience ;
* "l'âge des enfants", avec deux niveaux :
  - les enfants âgés de 8-9 ans qui sont en classe de CE2 ;
  - les enfants âgés de 10-11 ans qui sont en classe de CM2.

Comme nous avions choisi d'étudier le discours aurgumentatif sous sa forme écrite, l'âge minimum requis pour que les enfants puissent résoudre le problème posé (du moins en partie) et surtout l'argumenter par écrit, était de 8 ans (choix fait à l'aide d'un pré-test).

Ces deux niveaux d'âge doivent nous permettre d'observer une différenciation génétique des discours produits (cf. Esperet et al. 1987) dès l'école élémentaire.

* Plan expérimental

  Quatre groupes d'enfants ont passé l'expérience :
  - 2 classes de l'école d'Aiffres (près de Niort) ;
  - 2 groupes de jeu du centre aéré des Bois de St Pierre (près de Poitiers).

Tableau des effectifs

Age	8 - 9 ans	10 - 11 ans
Niveau scolaire	CE 2	CM 2
Situation classe	18	23
Situation jeu	12	13

3 . La procédure expérimentale

La tâche était la même pour les quatre groupes et sa présentation était collective pour chacun des groupes. Après nous être assurés que tous les enfants avaient compris le principe du jeu, nous leur faisions jouer quatre parties par binôme. Une fois les quatre parties terminées, chaque enfant proposait par oral ses idées, remarques, stratégies qui étaient retranscrites au tableau. Ensuite une brève discussion était engagée entre les enfants. Puis le tableau était effacé pour éviter le recopiage et chaque enfant devait répondre individuellement par écrit à la question :

"Que doit-on faire pour gagner la course à 20 ?"

Il avait été précisé aux enfants que le temps n'était pas limité, que l'épreuve était anonyme et qu'il ne serait pas tenu compte des fautes d'orthographe. Ce sont ces productions écrites que nous avons analysées dans cette recherche.

4 . Traitement des données

L'hypothèse principale de cette recherche était la suivante : le degré d'implication de l'enfant sera plus important dans un discours argumentatif produit dans un lieu de pratique de loisirs (situation jeu) que dans un discours argumentatif produit dans un lieu scolaire (situation classe).

Nous voulions tester d'autre part une hypothèse de type développemental : la différence observée entre les discours obtenus dans leus deux situations sera très faible chez les enfants les plus jeunes et significativement plus importante chez les plus âgés. Notre analyse a porté sur deux types d'indicateur : les marques d'implication et les marques de certitude.

a) les marques d'implications

Nous avons retenu comme marques d'implication :

* la prise en charge

Nous avons considéré qu'un locuteur prenait en charge un énoncé lorsqu'il se voyait attribuer la responsabilité de celui-ci :

"je suis sûr de gagner quand j'atteins le chiffre 17" (protocole n° 1130)

"je pense que ce jeu était bien" (protocole n° 0161).

* La présence du locuteur

Nous avons relevé une marque de présence lorsque le locuteur était présent dans son discours en tant qu'acteur :

"j'ai mis le chiffre 17 et j'ai gagné" (protocole n° 0121)

"je rajoute 1" (protocole n° 0161).

* La présence d'un interlocuteur unique personnalisé

Exemple :

"... parce que lui il a 17" (protocole n° 0111)

" Martine, elle aussi, a gagné deux fois".

b) Les marques de certitude

Ce marquage de certitude est représenté par l'emploi d'adjectifs ou d'adverbes comme : "sûr", "certainement", "absolument", "toujours", ...

Exemple :

"On est sûr de gagner" (protocole n° 1110)

"On gagne obligatoirement" (protocole n° 1070).

5. Résultats et discussion

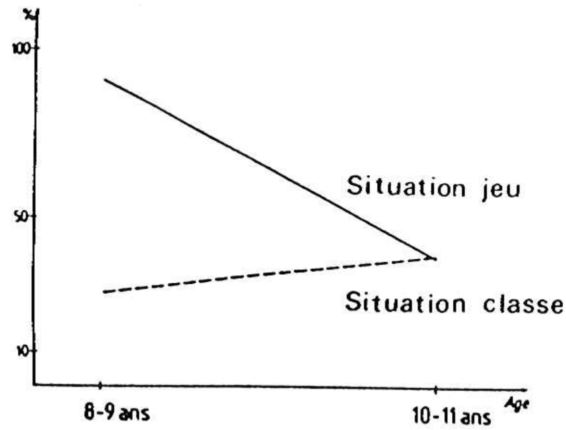


Figure 1. Pourcentage d'enfants qui présentent une marque d'implication.

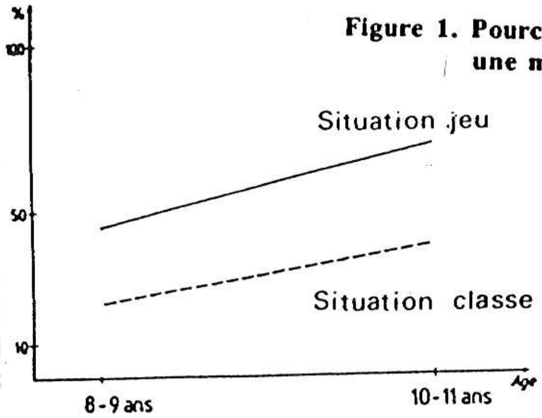


Figure 2. Pourcentage d'enfants qui présentent une marque de certitude.

Les données figurées ici sont exprimées en pourcentages de sujets présentant au moins une marque d'implication (fig. 1) ou de certitude (fig. 2) dans leur discours. Les courbes sont sensiblement les mêmes, lorsque l'on représente les pourcentages d'énoncés porteurs d'une marque d'implication (ou de certitude) par rapport au nombre total d'énoncés des protocoles.

Qu'il s'agisse de marques d'implication ou de marques de certitude, l'hypothèse principale est vérifiée : ces marques sont plus présentes en situation jeu qu'en situation classe : la représentation que l'élève se fait du discours qu'il doit produire en classe le contraint à désimplifier et dépersonnaliser son discours ; alors qu'en situation de jeu, joueur et partenaire sont mis en scène soit directement, soit par l'intermédiaire d'une prise en charge. Parallèlement, l'enfant ose exprimer la sûreté de son argumentation en situation de jeu : "on est sûr de gagner avec 17" ; alors qu'en classe (DF), il suffit "de dire" ; rien ne sert d'affirmer sa certitude.

Considérons maintenant l'hypothèse développementale.

1. Pour les marques d'implication

L'interaction observée va en sens inverse de celle attendue. Alors que nous pensions que les enfants les plus jeunes (8-9 ans) ne seraient pas encore soumis à l'institution scolaire et tiendraient un discours très impliqué aussi bien en situation de classe qu'en situation de jeu, nous observons au contraire chez eux une différence importante qui s'annule à 10-11 ans. Ainsi les enfants les plus jeunes seraient plus sensibles à l'effet de situation, alors que les plus âgés auraient une représentation du discours à produire induite surtout par la tâche : pour l'enfant, il s'agit de prouver qu'une stratégie est bonne ; le fondement de cette stratégie est d'ordre formel et le discours à utiliser sera de type DF, et ceci même en situation de jeu.

2. Pour les marques de certitude

L'interaction observée ici n'est pas significative, contrairement à celle observée pour l'implication. Nous devons revenir sur la signification de ces résultats dans la mesure où pour nous ces deux types d'indicateurs (marques d'implication et marques de certitude) auraient dû suivre une évolution génétique comparable.

a) Indépendamment d'un rôle éventuel d'indicateurs d'implication, les marques de certitude expriment tout d'abord l'assurance des enfants lorsqu'ils justifient leurs stratégie. L'augmentation de ces marques entre 8-9 ans et 10-11 ans traduit simplement un degré de certitude croissant des enfants, les plus âgés ayant certainement mieux assimilé "le concept 17", d'où une plus grande confiance dans leur représentation du problème et de sa solution.

b) Les énoncés comportant un indicateur de certitude sont en grande majorité du type "on est sûr de gagner avec le chiffre 17". Ce marqueur de certitude ("sûr") qui reflète habituellement une certaine implication du locuteur dans son discours est accompagné d'un indice ("on") qui est ambigu : en effet, est-ce que ce "on" représente un groupe indéfini (le "on" représentant tout le monde) ou bien le groupe d'appartenance du locuteur (exemple : "on est sûr" → mes copains et moi, nous sommes sûrs). Nous faisons plutôt l'hypothèse que cet indice marquerait un certain détachement du locuteur envers son discours et ainsi nuancerait le rôle d'implication joué paar l'indicateur de certitude "sûr". Ainsi les enfants exprimeraient leur sûreté uniquement en essayant, en parallèle, de se désimpliquer de leur réponse.

CONCLUSION

La recherche que nous venons de présenter est très ponctuelle, et elle ne prend son sens que resituée dans un ensemble de recherches sur les différents types de discours produits pour justifier une stratégie, argumenter un choix, donner une preuve, etc. Ces recherches devraient nous permettre de préciser un ensemble de paramètres de situations, (oral/écrit, type de représentation du référent, nature sociale institutionnelle de l'interlocuteur) dont la variation entraînerait des modifications des discours.

Il reste que les indicateurs permettant de distinguer les types de discours sont encore mal connus : nous hésitons sur l'interprétation des marques de certitude ; le problème posé par le "on" indicateur d'implication ou de désimplication est l'objet d'une nouvelle recherche ; l'établissement d'une hiérarchie de certitudes exprimées par "je crois que..." "je dis que...", "je pense que ...", etc... est en cours.

Dernier point, l'hypothèse présentée en introduction est très forte. Le groupe de recherches dont nous venons de parler n'est qu'une étape dans la vérification de cette hypothèse : à ce niveau, nous cherchons simplement à montrer que sous un certain nombre de contraintes particulières (non nécessairement pertinentes pour un didacticien), le langage produit par l'élève s'éloigne d'un langage "plus naturel".

Dans une deuxième étape, nous voulons identifier les raisons qui font que ce langage (DF) est effectivement appris par l'élève et les raisons qui conduisent l'élève à l'utiliser. Nous faisons l'hypothèse que ces raisons sont plus souvent institutionnelles que fonctionnelles. Si cette hypothèse se vérifie, il faudrait, dans une troisième étape, construire des situations didactiques qui contraindraient l'élève à utiliser un langage jugé pertinent par les maîtres ; mais la pertinence de ce langage résulterait de sa fonctionnalité dans la situation où il est mis en oeuvre plutôt que du caractère académique que l'élève se croit obligé de lui donner.

REFERENCES

Apotheloz,D., Mieville,D. (avec la coll. de **J.B. Grize**) 1986. Cohérence et discours argumenté, in M. CHAROLLES (Ed), *The resolution of discourse,* Hambourg, Buske Verlag.

Bronckart, J.P. 1985. *Le fonctionnement des discours : Un modèle psychologique et une méthode d'analyse.* Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Brousseau,G. 1973. Atelier de pédagogie "Maîtres du cycle élémentaire". Télé-enseignement.

Esperet, E., Coirier, P., Coquin, D., Passerault, J.M. 1987. L'implication du locuteur dans son discours : discours argumentatif formel et naturel. *Argumentation,* 1, 155-174.

Grize, J.B. (Ed.) 1984. *Sémiologie du raisonnement,* Berne, P. Lang.

Mieville, D. 1984-85. Connaissance et schématisation. In J. WITTWER (Ed.), La psycholinguistique textuelle. *Bulletin de Psychologie,* XXXVIII, pp. 625-630.

REGISTRES MIS EN JEU PAR LA NOTION DE FONCTION

I. GUZMAN - RETAMAL

In order to deal with the subject of function in the 3rd years, a pedagogical project was envisaged that introduces the concept of function by using loga language. A table of values can be constructed, then the function in question is written algebraically and finally its graphic representation is constructed. All this, without losing sight of either the associated mathematical vocabulary or the interpretation of proposition in natural language.
This article is a didactic analysis of the results of a questionnaire that was formulated by taking into account the more standard objectives involved in the subject of functions at 3rd years level. It was submitted to the students that worked on this project and students belonging to a control class that worked with a traditional method.

Des difficultés d'apprentissage se présentent au sujet des fonctions, à tous les niveaux d'enseignement où elles interviennent, même dans les premières années de faculté.
Nous avons choisi la classe de troisième pour notre recherche, puisque non seulement elle termine le cycle de collège où les élèves rencontrent les fonctions depuis la sixième d'une façon intuitive, mais encore elle marque le commencement d'un enseignement moins intuitif et plus mathématique des fonctions. A ce stade plusieurs questions se posent naturellement : **qu'est-ce que les élèves retiennent des fonctions à la fin de la 3ème? Comment les perçoivent-ils? Quel degré de maîtrise peuvent-ils en acquérir ?** Il est évident que les réponses sont très dépendantes du type d'enseignement reçu. Nous avons donc décidé d'étudier deux points de vue différents d'enseignement : l'un traditionnel et l'autre s'appuyant sur l'informatique, notamment dans le langage Logo, de plus en plus considéré dans l'enseignement à l'heure actuelle.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p.230-260) IREM de Strasbourg

Nous avons construit un questionnaire prenant en compte les objectifs les plus classiques dans une étude de fonctions. Ils sont indiqués dans les programmes et dans de nombreux manuels français actuels. Notre premier objectif est la **reconnaissance d'une fonction à partir de situations différentes** (graphique, algébrique, vie courante, programmation). Le second porte sur la **manipulation de la notion de fonction** (le changement de registre). Le troisième est **l'application de cette notion aux équations de droites et aux propriétes de proportionnalité.** Un projet pédagogique qui prétend faire en sorte que les élèves acquièrent cette notion dans toute sa globalité doit tenir compte de la complexité de cette notion et concerner tous les registres qu'elle met en jeu.
Dans le questionnaire (en annexe) nous avons considéré davantage les registres graphique, algébrique et de programmation au niveau du traitement, parce que ce sont ceux qui, d'une façon ou d'une autre, sont considérés dans la plupart des projets usuels d'enseignement des fonctions. Ce questionnaire a été proposé à des élèves de troisième, 24 d'une classe témoin et 20 d'une classe expérimentale, que nous avons observée du 14 mars au 11 mai 1987. Les résultats ont mis en lumière les avantages et les inconvénients des deux projets d'enseignement pour l'apprentissage des fonctions par les élèves. Et il est apparu très nettement qu'un apprentissage correct des fonctions exige que l'enseignement ait envisagé tous les registres liés à la notion de fonction et ses applications.

I Les registres mis en jeu par la notion de fonction

Les fonctions interviennent, au niveau de l'enseignement, sous diverses formes : des formules, des relations explicites entre deux ensembles, des tableaux de valeurs, des touches de calculette (touche $\sqrt{}$, cos, ln ...), des programmes (Logo,...), des graphiques, des expressions courantes de mesures; par exemple, en un lieu donné, la pression atmosphérique est fonction du temps (du moment) ou l'aire d'un disque est fonction de son rayon. Cette notion se trouve aussi dans des situations extra-mathématiques lorsque l'idée de cause et d'effet est présente, l'effet étant vu comme fonction de la cause dans le langage usuel. Les fonctions se rencontrent aussi dans bien d'autres disciplines : physique, géographie, sciences naturelles, langues.

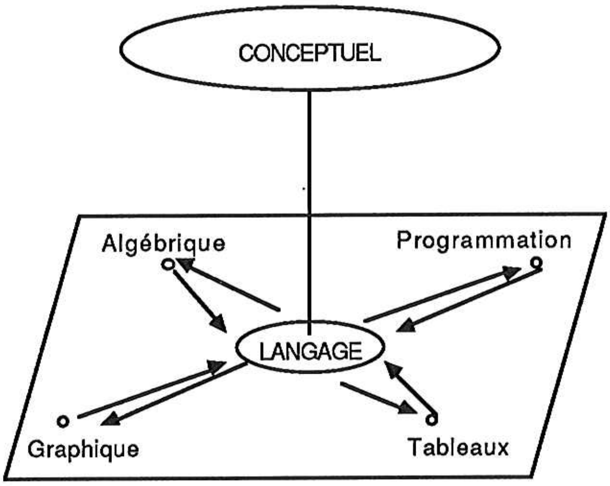
Tout cela indique la complexité de cette notion que le document de la COPREM (1987. P. 33) résume de la façon suivante :

" Une fonction n'est :
ni un tableau de valeurs
ni une représentation graphique
ni une suite de touches de calculette
ni une formule.
C'est tout cela à la fois."

Aux aspects de tableaux de valeurs, de représentation graphique, à l'aspect algèbrique (formules, y = f(x)), à celui de programmation, relevés par ce texte, nous ajouterons les aspects conceptuel de correspondance et le langage (vocabulaire, discours) surtout importants pour l'introduction de cette notion .

En essayant de préciser le statut de la notion de fonction, nous avons remarqué que parmi ces aspects, il y a ceux qui définissent un registre de présentation et de traitement permettant de fournir une concrétisation de cette notion. Ceci explique la diversité des projets d'enseignement qu'on pourrait envisager. Dans un sens didactique nous pouvons considérer que la notion de fonction renvoie à une multiplicité de registres tous reliés par le langage. Pour représenter les multiples registres mis en jeu par la notion de fonction, nous proposons le schéma suivant :

REGISTRES MIS EN JEU PAR LA NOTION DE FONCTION



Dans ce schéma les registres de traitement sont placés sur un même plan : ils ont le même statut, puisque chacun se caractérise par la possibilité de fournir une représentation concrète d'une fonction. La structure mathématique de la fonction constituant son aspect conceptuel relève d'un autre plan. Nous avons indiqué par des flèches les liaisons, à double sens, entre le langage et chacun des registres. Ce sont les liaisons qui sont les plus fréquemment mises en oeuvre, mais il existe aussi des passages directs entre registres qui ne sont pas représentés, pour des raisons de simplicité. Bien que le langage puisse constituer aussi un registre, nous ne le considérons pas ici dans ce sens, en raison de sa nature très complexe et trop large. Nous retiendrons ici son rôle de communication. Entre autres, le langage permet de dire "la même chose" en parlant de registres différents.

II Présentation globale des deux démarches mise en pratique La démarche logo et la démarche traditionnelle.

1) La démarche logo.

Elle prend surtout en compte, dans le traitement des fonctions et des équations de droites, le registre programmation.

Les **objectifs spécifiques** considérés par cette démarche sont les suivants:

A) Pour la notion de fonction

1) Reconnaître une fonction comme une procédure.
2) Ecrire une procédure-fonction qui permette d'obtenir l'image d'un élément par une fonction donnée.
3) Déterminer à l'aide de l'ordinateur la fonction correspondant à un tableau de valeurs incomplet (Fonction cachée)
4) Représenter à l'aide de l'ordinateur les fonctions affines et linéaires proposées précédemment dans l'objectif 3.
5) Ecrire une procédure dépendant des paramètres A et B permettant d'obtenir la représentation graphique d'une fonction affine $F: F(x) = Ax + B$.
6) Représenter graphiquement sur l'écran et dans le même repère des fonctions affines en faisant varier l'un des paramètres A ou B et en laissant l'autre fixe.

B) Pour les équations de droites.

7) Arriver à la notion d'équation d'une droite par des activités de recherche.
8) Déterminer l'équation d'une droite, à partir de différentes situations (un point et un vecteur directeur, deux points etc...).
9) Comprendre le rôle du coefficient directeur et faire le rapport entre la relation de parallélisme et celle de perpendicularité.

La mise en oeuvre de ces objectifs a été faite à l'aide de quatre fiches, intitulées : fonctions, les équations de droites, la fonction cachée et la représentation graphique des fonction affines (cf. Annexe). L'organisation de ces fiches met en jeu les deux domaines de l'informatique éducative, signalés dans la brochure Logo 3 (Dupuis,Egret,Guin, 1987) de l'Irem de

Strasbourg, à savoir **l'informatique objet** (fiches fonctions (intégrale) et représentation graphique (Ex.3; 4; 5)) et **l'informatique outil** (fiches fonction cachée (intégrale) et représentation graphique (Ex.1; 2).

Caractéristiques de la démarche Logo.

Parmi les caractéristiques principales de cette démarche nous signalons les suivantes:

1) La fonction apparaît comme une **procédure** qui permet d'obtenir l'image d'un antécédent donné.Et la construction d'un tableau des valeurs est naturelle.(Fiche 1 : fonctions).
Cette présentation :

- met en jeu des aspects conceptuels dans les registres de programmation et des tableaux.
- permet l'introduction naturelle du vocabulaire fonctionnel. (images, antécédents, ensemble de départ et d'arrivée ...).
- permet le choix de sujets le plus divers pour les exercices (numériques et extranumériques).

2) Le traitement des équations de droites est présenté comme une **situation de recherche** d'une condition nécessaire et suffisante (fiche : Les équations de droites).
Condition nécessaire: chercher la relation entre les coordonnées (x,y) d'un point M du plan pour que ce point appartienne à une droite (AB) (les coordonnées des points A et B étant données). Condition suffisante : Etant donnés trois points dont les coordonnées vérifient une relation du type $ux + vy + w = 0$, que peut-on dire de ces trois points ? Ce traitement, effectué sans le support informatique, apparaît dans tous les exercices classiques et permet un travail actif de la part des élèves dans le registre algébrique.

3) La **manipulation** de la notion de fonction et de son vocabulaire est mise en oeuvre dans des exercices qui portent sur des fonctions affines : linéaires, affines par morceaux etc, recherche de la fonction cachée. (fiche : fonction cachée). Dans cette partie on met en jeu des aspects de langage et les registres tableaux et algébrique.

4) La représentation graphique d'une fonction F se présente comme un **dessin de l'ensemble des points** de coordonnées (x, F(x)) dans le plan reperé. En mettant en jeu des

aspects de langage et les registres : programmation (Logo), tableaux, algébrique , graphique, ce traitement permet de mettre l'accent sur la lecture graphique et de mettre en évidence les rôles des paramètres A, B de l'expression $F(x) = Ax + B$, à travers la variation systématique et indépendante de ces paramètres.
5) Le **temps** d'enseignement de la séquence complète sur les fonctions et les équations de droites proposée dans la démarche Logo a été de **16 heures** dans la classe expérimentale.

2) La démarche traditionnelle

Cette démarche tient compte, pour le traitement de fonctions, des aspects conceptuels de correspondance avec le support graphique. En particulier, pour l'introduction de la notion de fonction elle privilegie le registre graphique.

Les **objectifs spécifiques** considerés dans cette démarche sont les suivants:

*1) **Rappeler et Préciser** les notions vues dans les classes précédentes telles que : relation, fonction, application, bijection, relation réciproque, source-but-graphe, image-antécédent, en insistant sur le vocabulaire mathématique. L'élève arrivera à reconnaître une fonction (et à le justifier) aussi bien dans les ensembles numériques qui lui sont proposés que dans des exercices concrets de la vie courante.*
*2) **Présenter des notions nouvelles** : les relations composées (sous forme d' exercices)et les ensembles de définition et des images (avec le support graphique).*
*3) **Etudier les conditions d'existence** de l'ensemble de définition ou domaine de la fonction, en mettant l'accent sur la nécessité de cette étude,(la racine carrée, expressions rationnelles avec des inconnues au dénominateur...).*
*4) **Travailler sur la représentation graphique**:*
- *des fonctions pas seulement sur R (en faisant remarquer qu'il n'est pas toujours possible de joindre les points),*
- *des fonctions affines et linéaires.*
- *La fonction en escalier est traitée à l'aide d'un exercice, sans mettre l'accent là-dessus.*
- *Faire remarquer que l'axe des abscisses contient la source de la fonction.*

*5) **Manipuler** le* sens de variation, *le coefficient angulaire, le vecteur directeur (des nombreuses manipulations entre autres , trouver la fonction connaissant deux images,etc).*

Nous ne donnons pas les objectifs spécifiques à propos des équations de droites, car ce sont là les objectifs classiques qui se trouvent dans le manuel actuel de 3ème, Faire de Mathématique et dans bien d'autres encore (cf. bibliographie).

Caractéristiques de la démarche traditionnelle.

Parmi les caractéristiques de cette démarche nous signalons les suivantes:

1) La présentation de la notion de fonction à l'aide d'un graphique permettant de visualiser la source et le but.
Cette présentation prend en compte le registre graphique et des aspects conceptuels de correspondance. Elle permet d'acquerir un critère intuitif pour reconnaître une fonction à partir d'un graphique donné et de rappeler le vocabulaire mathématique associé.

2) Le registre algébrique des formules a été bien privilégié dans cette démarche comme d'habitude, ce qui est clair d'après l'objectif 3. Mais le registre tableaux à été complètement ignoré dans le déroulement de l'enseignement.

3) *Le **temps d'enseignement** sur les fonctions par la démarche traditionnelle en considérant les équations de droites fut de **12 heures** dans la classe témoin.*

III Comparaison des deux démarches par rapport au question naire.

Nous nous proposons d'examiner comment des élèves de 3ème accèdent à ce traitement multi-registres, auquel la notion de fonction donne lieu. Cela semble devoir dépendre en priorité du type d'enseignement donné. En effet, étant donnée la multiplicité de registres, un enseignement de fonctions peut en privilégier certains en détriment d'autres, ou au contraire prendre comme objectif les changements de registres en vue de permettre une meilleure compréhension de la notion de fonction.
Nous nous sommes fixés trois objectifs, comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, lesquels ont donné lieu à 10 questions ayant chacune un ou plusieurs items. Dans le tableau suivant nous présentons l'organisation des questions et des items dans le questionnai-

re par rapport aux nos objectifs de reconnaîssance, production et application, en considérant les tâches des élèves et les buts de l'enseignement.

1) Structure du Questionnaire

<table>
<tr><th></th><th>RECONNAISSANCE</th><th>PRODUCTION</th><th>APPLICATIONS</th></tr>
<tr><td>Tâches des élèves</td><td>Question 1 (5 item)
Reconnaître des fonction à partir de graphiques.

Questions 2 (2 items, Logo)
Reconnaître une fonction à partir de données théoriques

Question 3 (3 items)
Reconnaître une fonction à partir d'une formule...</td><td>A partir de la notion de fonction avec interprétation donner une :
Question 4 (3 items)
expression algébrique
Question 5 (3 items)
expression algébrique et une représentation graphique
Question 10 (2 items)
expression algébrique plus un énoncé.</td><td>Question 6 (3 items)
Associer des données mixtes : équations et dessin,
Question 7 (2 items)
même tâche que la question 6 mais avec quadrillage.
Question 8 (3 items)
Interpréter des données sur un graphique et donner un résultat.
Question 9 (1 item)
Même tâche que la question 8 à partir d'autres données.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Buts de l' enseignement</td><td rowspan="2">Travail dans les différents registres: graphique
programmation
algébrique
en tenant compte des aspects conceptuels (définition et vocabulaire).</td><td colspan="2">Changements entre les registres graphique et algébrique en tenant compte des aspects conceptuels, de compréhension et de langage en ...</td></tr>
<tr><td>...tâches de production</td><td>...tâches d'application directe de propriétés</td></tr>
</table>

2) Etude comparative

On peut procéder à une étude comparative des deux classes sur des questions complètes ou seulement sur des items correspondant à des parties de questions. Comme chaque question correspond à un de nos objectifs, nous avions pensé a priori que l'analyse du comportement des élèves sur chacune des questions pourrait nous donner un panorama des performances des élèves des deux classes. Mais les résultats que nous avons obtenus avec une telle analyse sont très globaux et ils ne permettent pas une distinction nette entre les situations réelles des deux classes. Par exemple si on prend la question 5 nous obtenons le tableaux suivant de réussite - échec.

Classe \ Q5	R	E
Expérimentale	11	9
Témoin	7	17

On remarque que la différence entre les deux classes n'est pas significative au seuil .05, puisqu'on obtient $\chi^2 = 3{,}4$. Pourtant si on regarde séparément les items de cette question, le test du chi - 2 indique des différences significatives entre les taux de réussite. Voici les taux de réussite à chaque item :

Classe \ items	5.1	5.2	5.3
Expérimentale	1	.85	.55
Témoin	.84	.33	.54

Ceci nous donne des informations permettant d'apprécier plus nettement le comportement réel des élèves. Pour ces raisons, nous avons finalement choisi l'item comme "atome" pour procéder aux comparaisons des performances.

D'après l'analyse des performances des élèves par rapport au questionnaire, nous avons fait une classification des items en trois groupes. Le premier groupe contient les items où il n'y a pas de différences significatives entre les deux classes (Tableau 4.1). Le deuxième groupe contient les items où les différences sont significatives en faveur de la classe expérimentale (Tableau 4.2). Le troisième groupe contient les items où les différences sont significatives en faveur de la classe témoin (Tableau 4.3). La question 2 qui porte sur le Logo ne fait pas partie de cette comparaison, parce que ce sujet est hors du programme. Alors les items en comparaison apparaissent respectivement dans les tableaux suivants où est indiqué le taux de réussite à chaque item.

Tableau 1.- Taux de réussite des items du groupe 1.

Items / Classe	4.1	6.1	6.3	4.3	7.1	6.2	5.3	5.1	1.4	3.3	3.1	3.2	1.1
Expérimentale	.90	.85	.85	.80	.70	.65	.55	1	.55	0	25	0	.60
Témoin	.92	.83	.71	.75	.71	.62	.54	.84	.50	.17	.29	.04	.58

Pas de différences significatives entre les deux classes.

Tableau 2.- Taux de réussite des items du groupe 2.

Items / Classe	4.2	5.2	10.1	10.2	7.2
Expérimentale	.65	.85	1	.50	.90
Témoin	.25	.33	.50	.12	.67
χ^2	7,11	11, 8	13,7	7,36	3, 38

Différences significatives en faveur de la Classe Expérimentale.

Les différences significatives en faveur de la classe expérimentale sont assurées par le test de χ^2 ou de Fisher. En raison des effectifs on a utilisé le test de χ^2 d'homogénéité au seuil 0.05 avec conclusion de rejet pour $\chi^2 > 3,84$, à un degré de liberté.

Tableau 3.- Taux de réussite des items du groupe 3.

Items / Classe	1.2	1.3	8.1	8.2	8.3	9	1.5
Expérimentale	.35	.25	.20	.20	.20	.20	.30
Témoin	.71	.67	.75	.79	.87	.46	.50
χ^2	5,6	7.59	13,2	15,3	20,2	3,24	1,8

Différences en faveur de la Classe Témoin.

Pour l'item 1.5 et la question 9 il n'y a pas de différence significative entre les taux de réussites, puisque $\chi^2 < 3.84$.

Par rapport à la structure du questionnaire, les items de chacun des trois groupes se situent conformement aux tâches et registres concernés comme l'illustrent les trois tableaux suivants :

Registres mis en jeu par la notion de fonction

Tableau 4.1 Items du 1er Groupe

Registre \ Tâche	Reconnaissance	Production	Application
Graphique	1.4 (M)		
Algébrique	3.3 (N) 3.2 (N) 3.1 (N)		
Gra → Alg.		4.1 (B) 4.3 (B)	6.1(B) ; 6.3(B) 6.2(B); 7.1(B)
Alg. → Gra.		5.3 (M)	

TABLEAU 4.2 Items du 2ème Groupe

Registre \ Tâche	Reconnaissance	Production	Application
Graphique			
Algèbre			7.2
Gra → Alg.	10.1	4.2	
Français. → Alg / → Gra		5.2 10.2	

TABLEAU 4.3 Items du 3ème Groupe

Registre \ Tâche	Reconnaissance	Production	Application
Graphique			
Algèbrique	1.3 ; 1.2 1.5 ; 1.1		8.1; 8.2 8.3 ; 9
Gra. → Alg.			

Analyse des items par groupes

Premier Groupe

(Pas de différences significatives entre les deux classes)

On remarque que les performances des élèves aux items de ce 1er groupe sont très variables, elles vont de la réussite complète à l'échec total. Pour les commenter nous distinguerons les tâches bien réussies, les moyennement réussies et les tâches non réussies.

Les tâches bien réussies correspondent aux items 4.1, 4.3 et 6.1, 6.3, 7.1, 6.2.

Les items **4.1** et **4.2**, comme le montre le tableau 4.1, font appel à des tâches de production, lesquelles exigent un changement de registre, (dans ce cas un changement très simple entre le registre graphique et algébrique) qui tient compte de l'interprétation de données sur un graphique et sa traduction en termes algébriques.
Les items **6.1; 6.3; 7.1; 6.2** correspondent à des tâches d'application demandant d'établir la correspondance entre des équations proposées et des droites dessinées. Ici il s'agit du passage du registre algébrique au registre graphique dans une tâche de vérification concernant l'équation d'une droite.

Les tâches moyennement réussies correspondent aux items 5.3 et 1.4

Item 5.3: cet item demande une tâche de production, il porte sur la représentation graphique d'une fonction linéaire dont la détermination était l'objet de l'item 5.2. Il s'agit ici du passage du registre algébrique au graphique dans une tâche simple de construction d'une droite à partir de la relation algébrique.
Les résultats de la classe expérimentale sont moins bons que ceux obtenus dans l'item 5.2 qui comportait une tâche plus complexe. A quoi tient cette perte apparente dans le registre graphique dans cette classe?.
Dans la classe témoin on trouve une situation normale, un taux de réussite plus grand à l'item 5.3 qu' à 5.2.

Item 1.4 : cet item demande une tâche de reconnaissance, il s'agit de reconnaître une fonction à partir d'une droite horizontale. On est ici dans le registre graphique en faisant appel au concept de fonction. Plus de la moitié des élèves des deux classes ont réussi la tâche demandée en employant un langage fonctionnel, c'est à dire en utilisant les mots image, fonction affine etc... Le reste des élèves a un comportement semblable dans les deux classes. La grosse difficulté pour les élèves est de justifier convenablement leur réponses. Parmi ceux qui reconnaissent une fonction , on trouve :
dans la classe expérimentale des réponses telles que :

"parce que cette fonction est une fonction constante".
"parce que c'est une droite parrallèle à l'abscisse ".
"Dans le cas où la représentation est (0,1)".

Les deux premières sont insuffisantes. La dernière est confuse. Ce style de réponses atteint un taux de **.25.**

Dans la classe témoin on a une situation très semblable, on trouve ce même type de réponses avec un taux de **.21.** Par exemple :

"l'élément de la source a 0 ou 1 image".
"parce que la fonction a des images par rapport à x".
"car chaque élément a au moins une image".

Parmi les réponses de ceux qui ne reconnaissent pas une fonction, on trouve des justifications confuses dans les deux classes avec des taux semblables, **.15** dans la classe expérimentale et **.21** dans la classe témoin.Le style de réponses est le suivant :
Dans la classe expérimentale :

"parce que c'est y qui représente la fonction".
"on a toujours la même valeur 1".
"x varie mais c'est pas en fonction de x que y change,
y est fixe (c'est une fonction constante)".

Dans cette dernière réponse il y a une contradiction avec le choix.

Dans la classe témoin :

"la droite est parallèle à x".
"parce qu'il existe qu'un seul point".

Les tâches non réussies

Elles correspondent à celles des items **3.1**, **3.2** et **3.3** dont le travail se situe dans le registre algébrique et fait appel au concept de fonction. On trouve des situations peu différentes dans les deux classes. Les élèves n'ont pas réussi à reconnaître une fonction à partir des formules proposées. Au lieu de regarder le comportement des variables x et y , ils vérifient la véracité des formules.

L'item 3.1 a pour but de décider si la formule donnée détermine y comme fonction de x.

Dans la classe expérimentale on trouve la situation suivante :
Un peu plus de la moitié des élèves répondent OUI, option correcte, (un taux de **.55.**) mais seulement un quart des élèves donne de bonnes justifications (un taux de **.25**). Et parmi le reste de réponses on trouve des justifications confuses. Par exemple:

"car $x \rightarrow -y$ "
" Parce qu'on ne peut trouver y qu'en ayant la valeur de x
(il faut que x ou y soit négatif)"

Les élèves qui choisissent l'option NON, option incorrecte, sont très peu nombreux dans cette classe et leurs réponses sont aussi confuses. Par exemple :

" Car comme il y a présence de la valeur absolue de x alors x a deux images".
"Car deux valeurs absolues additionnées $\neq 0$ ".

Presque un tiers des élèves de cette classe n' y répondent pas (un taux de **.30**).

Dans la classe témoin le panorama est très semblable, nous avons :
Plus de la moitié des élèves qui répondent correctement, (un taux de **.60**) mais seulement environ d'un tiers des élèves donnent des bonnes justifications. Le reste donne des justifications très imprécises, par exemple:

" Car chaque nombre a un opposé "
" Parce que c'est l'opposé ".

Un taux de **.25** des élèves choisissent l'option NON (incorrecte). Parmi ces réponses on trouve des justifications telles que:

" Car il existe une infinité de nombres qui en s'additionnant donne 0 ".
" Car il n'y a aucun nombre plus un autre qui soit égal à 0, car dans une valeur absolue on ne peut pas mettre des négatifs . Donc / x + y / = 0 est impossible".

Les non réponses sont très peu nombreuses dans cette classe, elles atteigent un taux de **.16**, beaucoup plus petit que celui de la classe expérimentale.

Item 3.2 : Le but de cet item est le même que celui de l'item 3.1. Mais la formule proposée a un niveau de difficulté supérieur. Les résultats sont catastrophiques dans les deux classes. La présence de la valeur absolue a sans doute augmenté la difficulté de la tâche. Le taux de non réponses est très élevé dans les deux classes, **.60** dans la classe expérimentale et **.50** dans la classe témoin.
Dans la classe expérimentale il n'a pas de réponses justes et dans la classe témoin il n'y en a qu'une. Malgré le fait qu'il y a des choix justes dans les deux classes, leurs justifications sont confuses.
Dans la classe expérimentale pour l'option NON, (correcte) on trouve par exemple des justifications telles que:

" Car il faudrait que x ou y soit négatif et il y a valeur absolue ".
" Car, comme il y a la valeur absolue de x , alors x a deux images ".

Parmi les options OUI (incorrecte) on trouve:

" Parce que y est déterminé $y = 1 - x$ ".
" Car la fonction peut être $Ax + 1$ (affine); ex. : si $x=0$, $f(x) = 1$ ".
" Je crois que y est la fonction qui ajoute à x son opposé moins 1 ".
" Parce que y est l'opposé de $x+1$ quand x est négatif et -1 quand x est positif ".

Dans la classe témoin parmi les options NON (correcte) on a les exemples suivants de justifications :

" $(x + 1) - y = 1$ ex.: $|5+7| \neq 1$ $(13 \neq 1)$ ".
"Il faut que la somme de x et y égal 0. Car par ex.: si on prend $3 + 4$ on obtient 7 ".
" $|x - 1| = -y$ ".

Parmi les options OUI (incorrect) on trouve les exemples suivants :

" si $x = 0$, $y = 1$, $|x + 1| = 1$ le résultat est égal à 0.
Donc $|x + y| = 1$ est une fonction ".
" Parce qu'une valeur absolue est toujours positive ".
" 1er cas) $-x - y = 1$ donc $y = -x - 1$
2ème cas) $x + y = 1$ donc $y = -x + 1$
$y = -x + 1$.
Ces deux cas représentent des applications affines et sont donc des fonctions " .

Item 3.3 : il a pour but de décider si la formule $x^2 + y^2 = 0$ détermine y comme fonction de x.
Cet item n'a pas été réussi par les élèves de la classe expérimentale et dans la classe témoin il y a un taux de réussite de **.17**.
Dans la classe expérimentale on trouve plus des deux tiers des élèves (un taux de **.70**) qui affirment que la formule n'exprime pas y en fonction de x et les arguments donnés sont tels que:

" Car un nombre élevé au carré est positif. Donc 2 nombres additionés $\neq 0$ ".
" Parce qu'il n'y a pas de valeur pour y (x^2 est positif, y^2 est positif)
donc $x^2 + y^2 \neq 0$."

Cette fonction n'est possible que pour $x = y = 0$. Car il faut que x^2 et y^2 soient opposés donc l'un des deux négatifs. Il n'existe pas de carré négatif. La seule solution est x es y égal 0 ".

Dans ces réponses les élèves se prononcent sur la vérité de la formule au lieu de répondre à la question. La dernière réponse est contradictoire avec l'option choisie . Il semble que pour cet élève les valeurs x=y=0 ne suffisent pas pour définir une fonction. La même situation de contradiction se présente dans la réponse suivante :

" C'est pas possible car le résultat de deux nombres au carré puis s'ajoutant n'est jamais ϕ sauf si x est ϕ. "

Encore un autre exemple montrant comment cet élève à la suite d'une manipulation formelle non pertinente dans ce cas, continue son raisonnement :

" $x^2 = -y^2$ alors $x = y$ et $x = -y$ et $-x = y$.
Etant donné qu'il y a plusieurs possibilités (2),
cette formule ne détermine pas y comme fonction de x ."

Les non réponses à cet item sont peu nombreuses, elles atteignent un taux de **.15.**

Dans la classe témoin la situation est la suivante :
Il y a presque un tiers d'élèves que ne répondent pas (un taux de **.29**), près du double de l'autre classe.Près de la moitié des élèves considère que la formule ne détermine pas y comme fonction de x (un taux de **.46**) .Les justifications sont du même type que celles de la classe expérimentale, nous avons par exemple :

" il faut que x et $y \neq 0$ et alors c'est impossible,
car 2 carrés ne sont jamais négatifs, donc $\neq 0$."
" Un carré ne sera jamais nul, sauf si l'on prend 0^2 ".
" Les carrés sont toujours positifs donc il est impossible que le résultat soit nul."

Les réponses correctes dans la classe témoin atteignent un taux de **.17**, c'est à dire que presque un cinquième des élèves admettent que la formule exprime y comme fonction de x et arrivent à le justifier correctement.
On rencontre en général le même type d'argumentations dans les deux classes. Ces résultats

montrent que le concept de fonction dans le registre algébrique est encore faible. Les élèves ont considéré la véracité globale de la formule au lieu de penser à identifier des couples d'antécédents-images.

Deuxième Groupe.

(Différences significatives en faveur de la classe expérimentale)

Les tâches réclamées par les items du 2ème groupe correspondent à des objectifs de production, sauf celle de l'item 7.2 où il s'agit d'une vérification. Les items **10.1** et **4.2**, font appel à des tâches de reconnaissance, il s'agit d'arriver à écrire l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la droite qui la représente. C'est à dire le passage du registre graphique au registre algébrique comme l'indique le tableau 4.2.
Dans les items **5.2** et **10.2** il s'agit du passage du langage naturel au registre algébrique ainsi que du registre graphique au langage naturel

.

Item 10.1. Comme l'indique le tableau 2, toutes les réponses de la classe expérimentale sont exactes. Ce qui montre un acquis des élèves dans la maîtrise du passage entre les registres graphique et algébrique, suite à l'enseignement mis en place, et non pas un item qui n'a aucune discrimination.
Dans la classe témoin la moitié de réponses données sont incorrectes (un taux de.**33**).Voici quelques exemples :

"C'est une application affine linéaire, donc passe par l'origine, donc q=0

$y = 5px \quad C(1,5)$

$y = 2px\, D(1,2)$

$y = p/2x\, E(2,1)$".

Un autre exemple : "$g(x) \longrightarrow 5x$

$g(x) \longrightarrow 2x$

$g(x) \longrightarrow 1/2\ x$".

Encore un autre exemple : " $y = px + q$ *avec* $q = 0$

$5y = 1 \qquad y = 1/5\ x$

$2y = 1 \qquad y = 1/2\ x \qquad y = 2x$ ".

Ces réponses montrent la difficulté des élèves pour interpréter sur le graphique les coordonnées des points donnés, faire la transcription en x et y, et arriver à écrire les expressions algébriques correspondantes. En plus il apparaît une confusion dans le vocabulaire employé qui est fréquente parmi les élèves de la classe témoin et chez d'autres élèves de ce niveau que nous avons observés.
Les non réponses atteignent un taux de **.17.**

Item 4.2 : il s'agit d'écrire une relation algébrique à partir d'un graphique.
La classe expérimentale à obtenu un taux de réussite de **.65** et un taux de **.20** de réponses erronées, parmi lesquelles on trouve par exemple:

" x + 3 " ; " y + 3 " ; ou " -2 < x< 3 " .

Les non réponses atteignent un taux de **.15.**

Dans la classe témoin cet item a été réussi par un tiers des élèves (un taux de **.33**). Les réponses erronées sont nombreuses (un taux de **.58**). Parmi elles, on trouve des expressions telles que:

" f(x) = R+ " ; "f(x) = R " ;"f(x) égal à un nombre (0 , 2 , 3) ".
"f(x) = tous les points de la droite" ;"f(x) = l'ordonée de x ".

On observe que dans toutes ces expressions les élèves n'arrivent pas à donner une relation entre x et y. Ils n'ont pas vu qu'il s'agissait d'une fonction linéaire.Cela montre la difficulté des ces élèves à traduire un énoncé en langage algébrique.
Les non réponses atteignent un taux de **.17.**

Item 5.2 . La tâche ici consiste à trouver une relation, étant donné un énoncé.
Dans la classe expérimentale cet item a été réussi par les trois quarts des élèves. Seulement un taux de **.15** des élèves n'arrivent pas à donner la relation. Parmi les réponses erronées on trouve l'essai suivant de programme Logo :

```
" POUR RER : X :Y
            X * Y
FIN. C'est une fonction linéaire".
```

Dans la classe témoin la réussite est moins bonne. Un tiers des élèves donnent une réponse juste.Un quart des élèves n'y répondent pas, et un taux **.42** des élèves répondent faux. Parmi les réponses fausses on a par exemple les expressions suivantes :

" f(x) = 60 y ".
" la relation x ——› x : 60 ".
" x ——› 60 y ; y ——› x/60 "
" x = 60 y ".

Dans ces réponses on remarque que les élèves ont fait de confusions, ils ont inversé les variables.
Un quart des élèves n'ont pas répondu à cet item.

Item 10.2. La tâche de cet item consiste à interpréter une situation graphique et à en tirer une conclusion.
Dans la classe expérimentale la moitié des élèves ont donné des réponses justes.Un quart des élèves n'ont pas du tout donné de réponses, et l'autre quart a donné de réponses très imprécises. Parmi lesquelles on trouve:

"Plus le résultat des expressions algébriques sont petit plus la droite va vers l'axe de l'abscisse. J'ai trouvé en lisant sur le graphique".
"Plus x devient petit et plus la droite est parallèle à l'axe des abscises. Plus x est grand plus la droite est parallèle à l'axe des ordonnées".

Dans la classe témoin près de la moitié des élèves ne répond pas à cet item. La réussite est très faible, avec un taux de **.12** et l'échec atteint un taux de **.42.** Parmi les réponses erronées on trouve :

" D1; D2; D3 passent par l'origine donc sont de la forme y=px ".
" D1;D2;D3 sont de la forme ax+by+c =0 avec c=0 donc D1 ; D2 et D3 sont linéaires".
" Dans touts les expressions Q =0 ".

Ces élèves n'ont pas perçu, le rapport entre les positions des droites et leur expressions algébrique.

Troisième Groupe

(Différences en faveur de la classe témoin)

Les items de ce groupe correspondent à des objectifs de reconnaissance (items **1.1**; **1.3** et **1.5**) et d'application (items des questions **8** et **9**). Les premiers considèrent l'aspect conceptuel de la notion de fonction et les autres se refèrent à l'application directe d'une propriété.

Item 1.1. La tâche consiste ici à reconnaître une fonction à partir d'une droite oblique donnée.
Dans la classe expérimentale la moitié des élèves réussissent cette tâche. Dans l'autre moitié des élèves un taux de **.40** donnent de réponses erronées. On trouve par exemple des expressions comme les suivantes:

"Car, 0 a pour image 1, et -1 a aussi pour image 1. Impossible!".
" Car il n'y a pas de relation entre le nombre x et l'image y".
" Il y a 2 fonctions: une parallèle à l'axe et l'autre passant par l'origine O.
Celle-ci ne représente aucune des 2 fonctions".

Dans ces réponses on remarque une faiblesse conceptuelle. La dernière expression revèle une faute de comprehension. Il y a aussi des réponses où les justifications sont très imprécises, par exemple:

" Parce que la droite coupe l'axe des abscises et des ordonnées".
" Car D passe par l'axe des ordonnées".
" Parce que cette fonction est une fonction linéaire où y = ax ".

Dans cette classe les non réponses atteignent seulement un taux de **.10**
Dans la classe témoin le taux de réussite est bon, il est de **.67.** La plupart des justifications indiquent graphiquement l'élément de la source et son correspondant dans le but. Cela donne un certain critère graphique pour reconnaître la représentation graphique d'une fonction. Le taux de réponses fausses est de **.29** et presque tous les élèves, sauf un taux de **.04**, ont répondu cet item.

Item 1.3. La tâche ici était de refuser la droite verticale comme représentation d'une fonction.

Dans la classe expérimentale un quart des élèves seulement réussissent la tâche. Et un taux de **.65** donnent de réponses fausses. Parmi ces réponses on trouve celles qui reconnaissent une fonction à partir de la droite verticale (taux de **.40**) et celles qui donnent des réponses contradictoires (taux de **.25**).

Dans la classe témoin, la réussite est bonne, elle atteint un taux de **.62.** Cette réussite est due à notre avis à ce critère graphique de reconnaîssance, que les élèves ont utilisé: ils relient les élèments de la source et du but par des traits. Le taux de réponses non réussies est de.**38.** Parmi ces réponses on trouve celles qui décrivent le graphique et d'autres qui donnent des justifications contradictoires, par exemple :

" Car chaque élémént de la source n'a pas d'image. Ex.2".
" Il n' y a aucune image".
" Parce qu'il existe qu'un seul point".

Ces exemples laissent imaginer que pour ces élèves tous les éléments de la source doivent avoir une image.
Les autres réponses non réussies sont celles qui reconnaissent une fonction à partir de la droite verticale, mais elles sont très peu nombreuses (un taux de **.08**).

Item 1.5. Ici il s'agit de refuser le cercle comme la représentation graphique d'une fonction.
Dans la classe expérimentale la réussite est faible, elle atteint un taux de **.30.** Et un quart des élèves ne répondent pas cet item. Les réponses fausses sont nombreuses elles atteignent un taux **.45.** Parmi ces réponses on trouve celles qui refusent le graphique parce que "ce n'est pas une droite", et d'autres étranges telles que :

" Parce qu'il n'y a pas des valeurs pour 2 ou 3".
" Parce que cette représentation passe par 4 points différents".

La dernière réponse voudrait dire que ce n'est pas une droite non plus ?...

Dans la classe témoin la moitié des élèves donnent des réponses justes et presque un tiers des réponses fausses. La plupart des celles-ci reconnaissent le cercle comme la représentation d'une fonction. Les non réponses atteignent un taux de **.21.**

Question 8. Dans cette question la tâche est l'application de la pente d'une droite. Cette tâche se situe dans le passage du registre graphique au algébrique. Cette question a été nettement mieux réussie par les élèves de la classe témoin.

Dans la classe expérimentale un cinquième des élèves seulement a donné des réponses justes. Malgré le fait que la plupart des élèves (un taux de .85) ont choisi le NON, qui était l'option correcte, leurs justifications ne sont pas recevables. Les élèves ont perçu une proportionnalité qu'ils n'ont pas su expliciter correctement, et un grand nombre d'entre eux a interpreté les mesures des segments donnés sur le graphique comme des coordonnées des points qui n'ont pas été explicités non plus. Voici quelques exemples :

Parce que les coordonnées ne sont pas proportionnelles."

" Parce qu'il n'y a pas de proportionnalité entre 3; 6 et 4;7."

"Car ce sont fonctions linéaires et il n'a pas de proportionnalité $6/3 \neq 7/4$".

"D1 : $y = 2x$

D2 : $y = 4x$

Puisque : $y \times 4x - 7y \times 2x = 4xy - 14yx \neq 0$

Alors (D1) n'est pas parallèle à (D2)".

Dans la classe témoin plus des trois quarts des élèves répondent correctement. Ils justifient leurs réponses en explicitant une proportion en se référant à des triangles proportionnels. Et dans l'item 8.3 quelques élèves, en plus, font appel à la transitivité du parallèlisme (un taux de .21). Cela explique peut-être la montée de la réussite de l'item 8.3 que montre le tableau 4.3.

Question 9. Cette question a aussi par but l'application de la pente. Il s'agissait ici de calculer la mesure du segment indiqué en noir sur la figure. La tâche demandée par cette question a été beaucoup plus difficile pour les élèves de la Classe Expérimentale que pour ceux de la classe témoin.

Dans la classe expérimentale on a la situation suivante :
Un cinquième des élèves a donné des réponses justes. (taux de **.20**). Ces élèves ont justifié leurs réponses en déterminant l'équation de la droite.Une moitié des élèves a donné des réponses fausses. (taux de .50). Parmi ces réponses on a par exemple les suivantes :

" Cette mesure est 6, car les deux droites étant colinéaires, les coordonnées sont donc proportionnelles : 1 x 3 = 3 ; 2 x 3 = 6".

"La mesure est 6 parce que la mesure sur l'axe des abscisses est 3 fois plus grande, donc la mesure sur l'axe des ordonnée doit être 3 fois plus grande que celle de départ. (proportionnalité)."

"Ce segment mesure environ 6 cm parce que l'axe des abscisses est paralléle à la droite en rouge et cela est proportionnel, car 1x3=3 et 2x3=6 ".

"La mesure du segment est 6, car le segment (F1) déjà mesuré en bas est (1, 2) et dans celui du haut (F2) l'abscisse est 3 (3, y) → le facteur des abscisse entre (F1) et (F2) est 3, donc connaissant l'ordonnée de (F1), je la multiplie par 3 pour obtenir l'ordonnée de (F2) → 6 ".

"L'équation de la droite est y=2x donc si y =3 alors x=6".

Dans ces réponses on trouve encore la difficulté des élèves pour expliciter la proportionnalité qu'ils ont perçu. On a trouvé aussi des réponses imprécises (un taux de **.15**).
Par exemple :

"Puisque la droite passe par l'origine il s'agit d'une fonction linéaire
donc il y a une proportionnalité entre les coordonnées.(Voir le point C).
1 x ≠ 1/2 y donc on a à chaque fois 1x → 2y
1/2 x 2 = 2/2 ; 1 x 2 = 2 donc 3 x 2 = 6 ".

Ces réponses montrent aussi la difficulté pour expliquer la proportionnalité concernée.
Les élèves qui ne répondent pas cette question sont très peu nombreux.(un taux de **.15**).

Dans la classe témoin se présente une situation meilleure :
Presque la moitié des élèves donnent des réponses justes. (un taux de .46). Ces élèves ont justifié leurs réponses en s'appuyant sur la proportionnalité des côtés des triangles concernés.

Un tiers des élèves donnent des justifications confuses (un taux de **.33**). Voici quelques exemples:

"CAB triangle rectangle en B; AB segment en noir,
la mesure de ce segment AB fait 2 fois la mesure de BC qui est 3 donc AB =6".
"Pour trouver la mesure on fait :
3/1 = 3 (droite parallèle) 2x3=6. Donc 3/1 = 6/2 .
Les triangles ont un côté parallèle à l'axe des abscisses,
de plus ils ont la même droite qui leur sert d'hypothénuse,
ils sont donc proportionnels."
"En bas nous avons le triangle du haut en plus petit, l
a mesure du segment en noir est égale à 2.
Donc avec l'application affine on a y = 3/2 = 6 ".
"Dans le bas du dessin j'ai x=y/2 donc dans le triangle du haut j'ai
x=y/2; y=2x; 3 ; y=2X3=6".

Seuls deux élèves ne donnent pas de réponses à cette question (taux de **.08**). Et les autres élèves donnent une mesure fausse (taux de **.13**).

CONCLUSIONS

D'après notre comparaison des deux classes mettant en pratique deux démarches différentes nous retenons les résultats suivants:

1) La démarche logo se révèle plus performante que la demarche traditionnelle par rapport aux tâches de production.

Du point de vue des objectifs de production, la classe expérimentale a des résultats nettement meilleurs que ceux de la classe témoin. (Tableau 4.2). Ces objectifs ne correspondent pas seulement à la manipulation de la notion de fonction mais aussi à la production ou reconnaissance (choix) d'expressions à variables. Les résultats obtenus montrent les fruits de la démarche Logo au niveau de l'enseignement, puisqu' elle permet, comme nous l'avons déjà fait remarquer, de mettre en jeu le maximun de registres liés à la notion de fonction en tenant compte des aspects conceptuels et du langage courant.
La démarche traditionnelle privilégie le registre algébrique des formules comme cela se fait d'habitude dans l'enseignement en laissant de côté les autres registres ou en n'insistant guère là-dessus. Cela ne favorise pas la maîtrise par les élèves du concept de fonction, ni la possibilité pour eux de se débrouiller dans des tâches de production, même pas dans le registre privilégié.

2) La démarche traditionnelle se révèle plus performante par rapport aux tâches d'application directe de propriétés et de reconnaissance d'une fonction à partir d'un graphique.

La démarche traditionnelle, en mettant l'accent sur la définition de la notion de fonction avec l'appui graphique, a atteint l'objectif de la question 1 (Tableau 4.2). La concrétisation de l'aspect correspondance de la notion de fonction de façon graphique est un résultat intéressant de cette démarche. Ce qui a permi aux élèves d'acquérir un critère intuitif pour reconnaître une fonction à partir d'un graphique donné. Par contre, les concrétisations d'une fonction comme un tableau de valeurs ou comme une formule n'ont pas été travaillées dans la présentation faite de cette notion. En termes de registres, on peut dire que le registre graphique choisi pour présenter la notion de fonction n'a pas eu le renforcement adéquat des registres algébrique et tableaux, alors que le registre algébrique des formules a été bien privilégié de manière isolée. Le travail séparé de registres graphique et algébrique qui est fait dans la démarche traditionnelle n'a pas donné les fruits attendus au niveau des tâches de production. Tandis que la démarche logo en mettant l'accent sur le passage entre les registres a atteint les objectifs de production, malgré quelques point faibles au niveau conceptuel.

Par rapport au sujet de l'application de la proportionnalité, nous n'avons pas une explication didactique là-dessus. Nous sommes un peu surpris de ces résultats, parce que cette notion a été déjà rencontrée par les élèves dans leurs cours précédents et en troisième elle réapparaît liée aux fonctions affines. Dans la classe témoin l'enseignant en considérant cette notion très importante et en plus, difficile pour les élèves, a insisté davantage là-dessus, en mettant en évidence les propriétés pertinentes de la proportionalité chaque fois que l'occasion s'est présentée. Dans la classe expérimentale cette notion a été travaillée au moment du traitement de la représentation graphique des fonctions affines avec l'ordinateur. Donc ces derniers résultats n'expliqueraient pas une situation générale. Peut-être que dans la classe témoin il y a eu trop d'insistance sur le sujet et que dans la classe expérimentale il a manqué une mise au point là-dessus.

3) L'égalité de performances dans les deux classes.

Les items appartenant au premier groupe (Tableau 4.1) apparaissent comme neutres par rapport aux deux démarches considérées. Les tâches de ces items atteignent les trois objectifs du questionnaire. C'est à dire, qu'il y a dans ce groupe une diversité d'items significatifs du point de vue du questionnaire. Par exemple, les résultats obtenus pour l'item 5.3 attirent notre attention. En effet, la tâche demandée par cet item consiste à faire une représentation graphique d'une fonction linéaire. Du point de vue de la démarche logo, les résultats obtenus sont faibles par rapport à tout l'investissement fait par l'enseignement. On attendait des élèves une meilleure performance dans la représentation graphique. A notre avis cette perte apparente des élèves pourrait être due à ce que le travail sur la représentation graphique s'est fait davantage à l'aide de l'ordinateur et que peut-être le travail papier-crayon à ce sujet nécessite plus d'attention que celle qu'on lui a porté. Ainsi, les élèves de la classe expérimentale n'ont pas eu d'amélioration dans le registre graphique . Tandis que les élèves de la classe témoin ont eu des performances stables par rapport à la tradition.

Les performances à la question 3 révèlent que cette question a été trop difficile pour les élèves. La tâche demandée par cette question était de maîtriser la notion de fonction : pour y réussir il fallait bien reconnaître ce qu'est une fonction et pouvoir traduire l'expression algébrique d'une formule où les variables restent non distinguées, en une autre formule où chaque variable a un rôle précis.
Comme le montrent les résultats, l'objectif de cette question n'a été atteint par aucune des deux classes. Il se peut que la présence de la valeur absolue ait augmenté le niveau de difficulté des items **3.1; 3.2.**
Mais dans l'item **3.3** les élèves ont refusé la fonction pour $x = y = 0$, peut - être à cause de la présence d'un seul élément . On a trouvé cette idée chez d'autres élèves de troisième observés dans des situations semblables.
Finalement, à notre avis, la démarche logo ouvre de grandes possibilités d'obtenir des résultats meilleurs encore que ceux obtenus dans cette première expérience.

REFERENCES

Coprem. Document 1987. Imaginer le problème actuel (p.32-34).

Duval, R. "Graphique et équations : l'articulation de deux registres". P. 235 - 253. Annales de didactiques et sciences cognitives.Vol.1. 1988. ULP.Irem de Strasbourg.

Dupuis, Egret, Guin."Logo 3". 1987. Irem de Strasbourg.

Engel, A. "L'enseignement des probabilités et statistique". P.216 - 223. Vol.1. Cedic 1975.

Hajri, H. "Perception de relations dans le plan repéré". Thèse de doctorat 3e cycle.1986-.U.L.P. Strasbourg.

Manuels de troisième:

Deledicq (A), Lassave (C), Missenard (C et D). "Faire" de Mathématique. 3e. Paris, Cedic 1984.
Aguilar (P), Louquet (P), Moulia (L). "Mathématique 3e. Paris. Colin 1984.
Irem de Strasbourg."Mathématique Classe de 3e." 1980.
Gerll (D), Vitart (P)."Mathématique 3e". Collection M. Hachette 1980.
Biancamaria (P), Dehane (E)."Mathématique classe de 3e". Nathan, 1972. Coll.-Queysanne Revuz.