LE PARADOXE DE HAUSDORFF - BANACH - TARSKI

L.-E. DUBINS

Cet article est paru en 1979, dans le numéro 12 de la '*Gazette des Mathématiciens*' Le lecteur intéressé trouvera l'état actuel de la question et une bibliographie abondante dans '*The Banach-Tarski paradox*' par Stan WAGON, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 24, Cambridge Univ. Press.

Il s'énonce de la manière suivante (les définitions précises seront données plus loin) : "*Si X et Y sont deux parties de $\mathbb{R}^3$ bornées et d'intérieur non vide, il est possible de découper X en un nombre fini de morceaux et de réarranger ceux-ci pour obtenir Y*".

L'essentiel du paradoxe est contenu dans le lemme suivant, qui en constitue la partie géométrique.

LEMME.— *Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ (d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Il existe deux rotations a et b dans SO_3, d'angles respectifs $180°$ et $120°$, et une partition (A, B, C, D) de S telles que D est dénombrable, et que*

$$C = bB = b^2 A\ ;\ A = a(B \cup C).$$

Autrement dit, l'ensemble A est à la fois le tiers et la moitié de $S - D$.

Démonstration.— On pose

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

et on appelle G le groupe engendré par a et b, qui est constitué de l'identité e, de a, et des rotations de la forme

$$r = a^{\epsilon_1} b^{n_1} a b^{n_2} a \dots a b^{n_{k-1}} a b^{n_k} a^{\epsilon_2}, \qquad (1)$$

où $k \in \mathbb{N}^*, \epsilon_i \in \{0, 1\}$ et $n_i \in \{1, 2\}$. On remarque que tout élément de $G - \{e, a\}$ admet une seule écriture du type (1). (Ceci revient en effet à vérifier qu'un produit $b^{n_1} a b^{n_2} a \dots a b^{n_k} a (k \in \mathbb{N}^*, n_i \in \{1, 2\})$ n'est jamais égal à a ou à e; or on vérifie facilement par récurrence qu'un tel produit est de la forme

$$\frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3\sqrt{3} \\ i_1 & p_4 & i_2\sqrt{3} \\ i_3\sqrt{3} & p_5\sqrt{3} & i_4 \end{pmatrix}$$

où les p_j sont des entiers pairs et les i_j des entiers impairs.) Le groupe G est donc le groupe des mots réduits formés à l'aide des lettres a et b, les seules règles de réduction étant $a^2 = b^3 = e$.

On peut maintenant définir une partition (G_1, G_2, G_3) de G selon la règle suivante : pour $n \geq 0$, on met dans G_1 les mots $(b^2a)^n$, dans G_2 les mots $a(b^2a)^n$ et dans G_3 les mots $ba(b^2a)^n$; les autres mots sont mis dans G_1 (resp. G_2, G_3) selon qu'ils commencent (à gauche) par a (resp. b^1, b^2). On vérifie sans peine les égalités $G_3 = bG_2 = b^2G_1, G_1 = a(G_2 \cup G_3)$.

Il ne reste qu'à faire opérer G sur S. L'ensemble

$$D = \{x \in S : \exists r \in G - \{e\} \qquad rx = x\}$$

est formé des intersections avec S des axes des rotations $r \in G - \{e\}$; c'est un ensemble dénombrable, stable par G. Pour $x \in S - D$, l'orbite de x sous G est en bijection avec G par $r \leftrightarrow rx$. On choisit un représentant de chacune des orbites contenues dans $S - D$; grâce à l'axiome du choix, ceci peut se faire de manière à obtenir un ensemble E. On pose alors $A = G_1E, B = G_2E, C = G_3E$; compte tenu des propriétés de G_1, G_2, G_3, on vérifie sans peine, orbite par orbite, que A, B, C forment une partition de $S - D$ et satisfont à

$$C = bB = b^2A \quad ; \quad A = a(B \cup C).$$

Le reste de la démonstration du paradoxe est consacré à des manipulations d'ensembles.

La notation $X \equiv Y$ signifiant que les parties X et Y de $\mathbb{R}^3$ se correspondent par un déplacement, on dira que deux parties X et Y de $\mathbb{R}^3$ sont **équivalentes par découpage fini** (et on écrira $X \equiv_f Y$) si l'on a $X_1 \equiv Y_1, X_2 \equiv Y_2, \ldots, X_n \equiv Y_n$ pour une partition $(X_1, \ldots, X_n)$ de X et une partition $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de Y. Lorsque c'est le cas, il existe une bijection f de X sur Y ayant même restriction à chaque X_i qu'un déplacement f_i de $\mathbb{R}^3$: une telle bijection sera dite associée à l'équivalence entre X et Y.

L'énoncé exact du paradoxe est le suivant : **Deux parties bornées d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^3$ sont toujours équivalentes par découpage fini**.

Les propriétés de l'équivalence par découpage fini qui seront utilisées dans la suite sont
a) une propriété d'union disjointe : si les unions $X \cup X'$ et $Y \cup Y'$ sont disjointes, et si $X \equiv_f Y$ et $X' \equiv_f Y'$, alors $X \cup X' \equiv_f Y \cup Y'$;
b) la transitivité, qui en fait une relation d'équivalence : si $X \equiv_f Y$ et $Y \equiv_f Z$, il existe des partitions finies P_X et P_Z de Y qui correspondent respectivement à des partitions de X et Z; si P est alors une partition finie de Y plus fine que P_X et P_Z, les éléments de P convenablement déplacés permettent de reconstituer aussi bien X que Z, d'où $X \equiv_f Z$;

c) enfin, une propriété analogue au théorème de CANTOR-BERNSTEIN : si, pour une partie X' de X et une partie Y' de Y, on a $X \equiv_f Y'$ et $X' \equiv_f Y$, alors $X \equiv_f Y$. Soient en effet $f : X \to Y'$ une bijection associée à l'équivalence entre X et Y' et $g : X' \to Y$ une bijection associée à l'équivalence entre X' et Y. La démonstration classique du théorème de CANTOR-BERNSTEIN fournit l'existence d'une partie X'' de X' telle que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in X - X'' \\ g(x) \text{ si } x \in X'' \end{cases}$$

soit une bijection de X sur Y (par exemple $X'' = X - \bigcup_{n \geq 0} (g^{-1} \circ f)^n (X - X')$). La restriction de f à chaque élément d'une certaine partition finie P de X est la trace d'un déplacement; il en va de même pour g et une partition finie Q de X'. Les partitions P et Q induisent respectivement des partitions traces P' et Q' sur $X - X''$ et X''. La réunion $P' \cup Q'$ est une partition finie de X sur chaque élément de laquelle la restriction de h coïncide avec un déplacement, d'où l'équivalence entre X et Y.

Reprenons maintenant la démonstration du paradoxe où nous l'avions laissée, c'est-à-dire à la sphère unité découpée en quatre morceaux A, B, C et D, ce dernier étant dénombrable, tels que $A \equiv B \equiv C$ et $A \equiv B \cup C$. Donnons-nous deux autres sphères de rayon un, S' et S'', disjointes. La translation qui envoie S sur S' (resp. S'') transforme A, B, C et D en A', B', C' et D' (resp. A'', B'', C'' et D''). Les neuf ensembles $A, A', A'', B, B', B'', C, C'$ et C'' se correspondent par déplacement ; de $A \equiv B \cup C$, on peut donc déduire

$$A \equiv_f A' \cup A'' \qquad B \equiv_f B' \cup B'' \qquad C \equiv_f C' \cup C'',$$

et, par réunions disjointes, $(S - D) \equiv_f (S' - D') \cup (S'' - D'')$.

Ceci constitue le résultat de HAUSDORFF : à des ensembles dénombrables près, la sphère S équivaut par découpage fini à $S' \cup S''$. La suite est due à BANACH et TARSKI : élimination des ensembles dénombrables, puis généralisation à des parties quelconques.

L'élimination de l'ensemble D se fait en remarquant que l'ensemble des rotations r qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D - \{x\} \quad r^n x \neq y$$

n'est pas vide, car son complémentaire dans SO_3 est dénombrable. Soit donc r possédant cette propriété; les ensembles $D, rD, \ldots, r^n D, \ldots$ sont deux à deux disjoints. En notant U leur union, on a $rU = U - D$, d'où $U \equiv U - D$. On en déduit $U \cup (S - U) \equiv_f (U - D) \cup (S - U)$, c'est-à-dire $S \equiv_f (S - D)$. De même, on montre que $S' \equiv_f (S' - D')$ et $S'' \equiv_f (S'' - D'')$, ce qui permet de transformer le résultat de HAUSDORFF en $S \equiv S' \cup S''$.

Il existe donc des partitions $(S_1, \ldots, S_{m+n}), (S'_1, \ldots, S'_m)$ et $(S''_1, \ldots, S''_n)$ de S, S' et S'' telles que $S_1 \equiv S'_1, \ldots, S_m \equiv S'_m, S_{m+1} \equiv S''_1, \ldots, S_{m+n} \equiv S''_n$. En remplaçant les S_i par $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} tS_i$ et les S'_i et S''_i par des ensembles analogues, on en déduit

$$T - \{O\} \equiv_f (T' - \{O'\}) \cup (T'' - \{O''\}),$$

où T, T' et T'' sont des boules fermées de frontières S, S' et S'', et O, O' et O'' leurs centres respectifs.

Il est facile d'en déduire $T \equiv_f T' \cup T''$: il suffit pour cela de vérifier que $T - \{O\} \equiv_f T$, ou encore, puisqu'on a évidemment pour $x \in S \quad T - \{O\} \equiv_f T - \{x\}$, que $T - \{x\} \equiv_f T$ pour un x de S. Mais ceci résulte de l'équivalence $S - \{x\} \equiv_f S$ (vraie — voir plus haut — car l'ensemble $\{x\}$ est dénombrable) à laquelle il suffit de rajouter l'ensemble $T - S$.

Nous savons donc qu'une boule unité équivaut à deux boules unité. Il est facile d'en déduire par récurrence que, **pour $n \geq 1$, une réunion disjointe de n boules unité équivaut, par découpage fini, à une boule unité.**

Jusqu'ici, la propriété de CANTOR-BERNSTEIN n'a pas été utilisée. Elle va servir à passer des boules au cas des ensembles quelconques.

Soit X une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ qui contient une boule fermée X' de rayon $r > 0$. Il est possible de découper X en un nombre fini, soit n, de morceaux qui sont chacun inclus dans une boule de rayon r. Donnons-nous par ailleurs une réunion Z de n boules fermées disjointes de rayon r. Par définition de n, X est équivalente par découpage fini à une partie Z' de Z ; d'autre part, le travail fait sur les boules de rayon un se généralse par homothétie aux boules de rayon r, d'où $X' \equiv_f Z$. Grâce à la propriété de CANTOR-BERNSTEIN, on a alors $X \equiv_f Z$, donc $X \equiv_f X'$.

Si maintenant X et Y sont deux parties bornées d'intérieur non vide de l'espace $\mathbb{R}^3$, elles contiennent respectivement des boules X' et Y' de même rayon $r > 0$, et, de $X \equiv_f X'$ et $Y \equiv_f Y'$, on déduit $X \equiv_f Y$: le paradoxe est établi dans toute sa généralité.

REMARQUES

On n'a pas cherché ici la construction la plus économique possible. R. ROBINSON a montré $T \equiv_f T' \cup T''$ en découpant T' et T'' en **trois** morceaux chacune!

Le même paradoxe n'a pas lieu dans $\mathbb{R}^2$. Mais si l'on remplace, dans la définition de $X \equiv Y$, le groupe des déplacements par SL (qui conserve aussi la mesure), le paradoxe **a lieu** en dimension 2.

En dimension 1, disons que $A \geq B$ s'il existe une bijection 1-lipschitzienne de A sur B, et que $A \geq_f B$ s'il existe des partitions $(A_1, \ldots, A_n)$ et $(B_1, \ldots, B_n)$ de A et B telles que, pour tout i, $A_i \geq B_i$. Il est faux que $[0, 1] \equiv_f [0, 10]$, mais vrai que $[0, 1] \geq_f [0, 10]$!