

CONSIDÉRATIONS SUR UNE FAMILLE DE POLYÈDRES

Roger Iss

1.— Manipulations préliminaires

Imaginez un tétraèdre en terre glaise, posé sur une table. Avec un couteau, découpez une “*pointe*” de ce solide, comme si c’était un gâteau, c’est-à-dire en pratiquant une coupe plane — pas forcément verticale — allant jusqu’au ras de la table (fig. 1). Enlevez le petit tétraèdre ainsi découpé : il vous reste un polyèdre à base quadrangulaire.

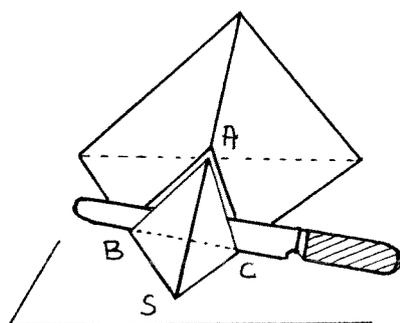


Figure 1

Sans changer la face en contact avec la table, continuez à tronquer ce polyèdre de la même manière, ou, de façon plus précise, à

- choisir un sommet S de la face située dans le plan de la table;
- choisir, sur chacune des trois arêtes issues de S un point distinct de leurs extrémités;
- A, B, C étant les points ainsi choisis, enlever au solide le tétraèdre $SABC$.

En répétant cette opération, que nous appellerons **troncature triangulaire**, on obtient une suite de polyèdres convexes ayant la particularité suivante : chaque face visible a un côté commun avec la face en contact avec la table.

Mais nous pouvons laisser la terre glaise et nous contenter de représenter ces solides par des vues en projection horizontale, car il est facile de voir, sur le dessin, l’effet d’une troncature triangulaire. On constate que, quelle que soit la manière de faire la première troncature, les solides à base quadrangulaire que l’on obtient — ce sont des pentaèdres — se ressemblent tous par la disposition des faces et le nombre de côtés de celles-ci. Il en est de même des solides à base pentagonale obtenus après deux troncatures. Par contre, avec trois troncatures, on peut obtenir trois types

différents de solides à base hexagonale (fig. 2 et 3).

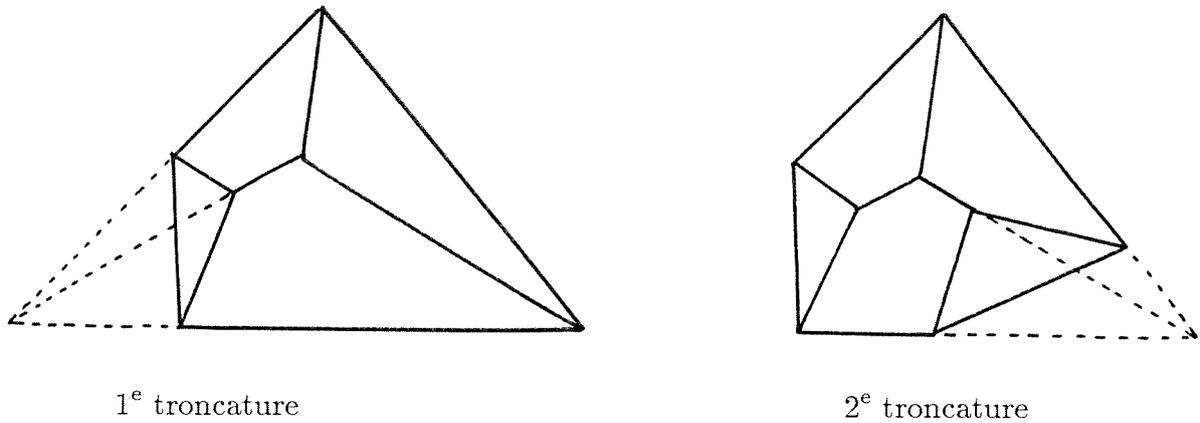
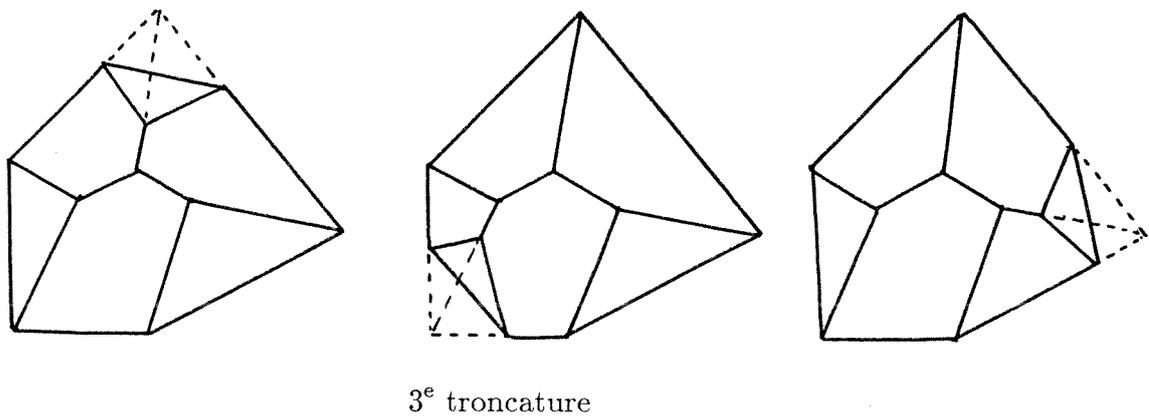


Figure 2



3° troncature

Figure 3

Etudions ces polyèdres d'un peu plus près.

2.— Vers une définition

La face en contact avec la table sera notée \mathcal{B} et appelée **base** du solide. Celui-ci sera dit **d'ordre** n si le polygone \mathcal{B} a n côtés. Pour bien différencier \mathcal{B} des autres faces, nous réserverons les mots **faces**, **arêtes** et **sommets** pour désigner, respectivement, les faces, arêtes et sommets qui ne sont pas dans le plan de base. Pour ceux de ces éléments qui sont dans ce plan, nous parlerons de **base**, de **côtés de la base** et de **sommets de la base**.

Dans un polyèdre, un sommet est commun à trois faces et trois arêtes au moins. Nous dirons qu'un sommet est **simple** s'il est commun à trois faces et trois arêtes seulement. Comme, dans notre manipulation, nous avons choisi de couper les polyèdres successifs par des plans ne passant pas par les extrémités des arêtes ou des côtés, tous leurs sommets, qu'ils soient sur la base ou non, sont simples.

Définitions : On appelle **polyèdre** T_n (ou tout simplement T) tout polyèdre convexe dont

- 1) une face \mathcal{B} , n -gonale, a un côté commun et un seul avec chacune des autres faces du polyèdre;
- 2) tous les sommets sont simples.

3.— Propriétés des arêtes et des sommets

Toute arête étant commune à deux faces, et deux seulement, on peut distinguer deux catégories d'arêtes :

- les **arêtes latérales**, issues d'un sommet de la base et communes à deux faces consécutives (ou adjacentes);
- les **arêtes sommitales**, joignant deux sommets et intersection de deux faces non consécutives.

Sur un polyèdre T , on peut, de même, distinguer quatre catégories de sommets, suivant la nature des trois arêtes qui en sont issues :

1. **les trois arêtes sont latérales** : le sommet considéré est alors unique et cela ne se produit que pour le tétraèdre T_3 ;
2. **deux arêtes sont latérales et la troisième sommitale** : c'est, par exemple, le cas des deux sommets du pentaèdre T_4 (fig. 2);
3. **une arête est latérale, les autres sommitales** : exemple, le sommet central d'un polyèdre T_5 (fig. 2);
4. **les trois arêtes sont sommitales** : exemple, le sommet central du premier polyèdre T_6 de la figure 3.

On peut alors énoncer quelques propriétés presque évidentes :

- Un sommet d'où partent deux arêtes latérales est sommet d'une face triangulaire.
- Deux faces triangulaires ne sont jamais adjacentes, sauf pour le tétraèdre T_3 .
- Etant donnés deux sommets d'un polyèdre T , il existe toujours une suite d'arêtes consécutives — que nous appellerons un **chemin** — joignant ces sommets. En d'autres termes, la figure formée par les arêtes et les sommets est connexe.

4.— Propriété fondamentale des polyèdres T

Convenons d'abord de désigner, dorénavant, les côtés de la base d'un polyèdre T par des lettres majuscules A, B, \dots et par des lettres minuscules a, b, \dots les faces correspondantes.

Considérons une arête sommitale S_1S_2 , commune à deux faces j et k non consécutives et soit l la troisième face passant par le sommet S_2 . Si nous rangeons ces trois faces dans l'ordre j, l, k les côtés correspondants de la base sont dans l'ordre J, L, K : cet ordre oriente le polygone de base et nous pouvons dire que L est "entre" J et K .

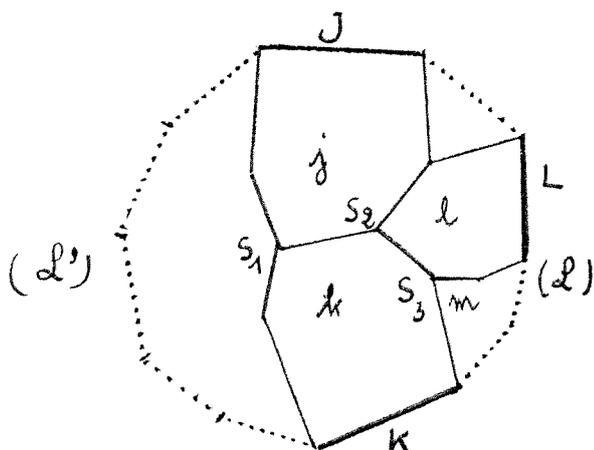


Figure 4

Par ailleurs, le polygone de base est la réunion des côtés J, K et de deux lignes polygonales \mathcal{L} et \mathcal{L}' disjointes (fig. 4). Soit \mathcal{L} celle qui est entre J et K et qui, par conséquent, contient le côté L .

Si \mathcal{L} se réduit au seul côté L , les deux arêtes, issues de S_2 — autres que $S_1 S_2$ — sont latérales et la face l est triangulaire.

Si, au contraire, \mathcal{L} contient plusieurs côtés, du sommet S_2 est issue au moins une autre arête sommitale. Soit $S_2 S_3$ cette arête, commune, par exemple, aux faces l et k . On peut répéter pour elle le raisonnement fait pour l'arête $S_1 S_2$: si m est la troisième face passant par S_3 , le côté M correspondant est situé entre L et K et appartient donc encore à \mathcal{L} .

De proche en proche, en suivant un chemin d'arêtes sommitales à partir de S_2 , on parvient donc à un sommet d'une **face triangulaire ayant sa base sur la ligne \mathcal{L}** . Le même raisonnement pouvant être fait à partir du sommet S_1 , il existe une autre face triangulaire dont la base appartient à la ligne \mathcal{L}' . D'où le résultat fondamental.

Dans un polyèdre T , il y a au moins deux faces triangulaires.

Le même raisonnement montre, de plus, que tout chemin d'arêtes sommitales se terminant sur une face triangulaire, un tel chemin **ne se referme pas et ne comporte pas de boucles**.

Ces résultats peuvent aussi s'établir en faisant appel au théorème d'EULER pour les polyèdres convexes :

Nombre de faces F + nombre de sommets S - nombre d'arêtes $A = 2$.

En effet, supposons qu'un polyèdre T_n possède p sommets et q arêtes sommitales. En comptant aussi les éléments de la base, on trouve

$$F = n + 1 \quad S = n + p \quad A = 2n + q$$

d'où $p - q = 1$: le nombre des sommets surpasse celui des arêtes d'une unité. Or, s'il y avait une boucle, on aurait $p - q = 0$ ($p - q = -1$ pour 2 boucles, etc). La ligne des arêtes sommitales ne se refermant pas, elle admet au moins deux extrémités, sommets de faces triangulaires.

5.— Représentation d'un polyèdre T

On peut représenter, comme on l'a déjà fait ci-dessus, un polyèdre T en le projetant — orthogonalement pour fixer les idées — sur le plan de base. La figure obtenue définit le polyèdre à une affinité près, par rapport au plan de base, comme une carte topographique où les cotes ne seraient pas données.

A cette indétermination près, on peut dessiner exactement la "carte" d'un polyèdre T , à partir de son polygone de base, en utilisant les règles de la géométrie dans l'espace. A savoir, essentiellement, les deux suivantes :

1. **Règle d'alignement** : Si une arête est l'intersection de deux faces j et k , elle passe, ainsi que sa projection, par le point d'intersection des droites qui portent les côtés J et K correspondants de la base (elle leur est parallèle lorsque ces deux droites sont parallèles).
2. **Règle des trois arêtes** : Si j et k sont deux faces distinctes, les arêtes $a \cap j$ et $a' \cap k$ ont une extrémité commune S seulement si $a = a'$. Si c'est le cas, la troisième arête issue de S est $j \cap k$ (fig. 5).

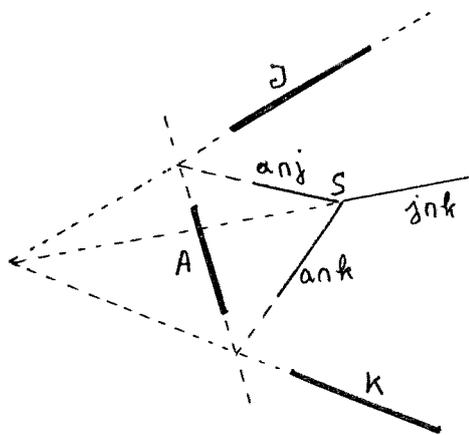


Figure 5

Ces deux règles ont été utilisées pour la construction de la figure 6 où la base \mathcal{B} est un hexagone. On commence le dessin par une face triangulaire que l'on trace arbitrairement à partir de n'importe quel côté de la base. Sur chacune des arêtes, obtenue par la règle des trois arêtes, on choisit un sommet, puis une autre arête issue de celui-ci. Il suffit de veiller à la convexité, la projection d'une face convexe étant elle-même convexe.

On procède ainsi de proche en proche et on termine par une face triangulaire.

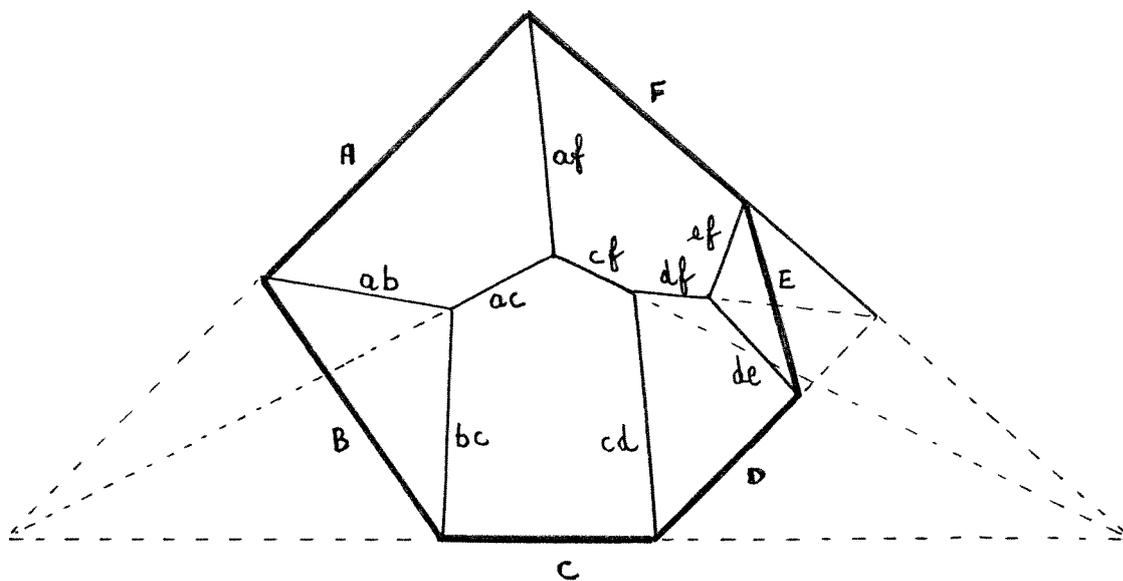


Figure 6

Signalons, qu'à partir d'une telle vue en projection, il est facile d'obtenir un **développement** du polyèdre (donc aussi de le réaliser en carton). Il suffit d'effectuer un rabattement de chaque face sur le plan de base, à l'extérieur du polygone B . On commence, là encore, par une face triangulaire dont on pourra choisir arbitrairement la hauteur.

6.— Génération par récurrence des polyèdres T_n

Nos manipulations sur un tétraèdre en terre glaise ont montré que, par des troncatures successives, on pouvait, à partir de lui, obtenir des polyèdres T_n d'ordre aussi élevé que l'on voulait. Nous allons voir, qu'inversement, tout polyèdre T_n peut être obtenu, par troncatures, à partir d'un tétraèdre, ou, à défaut, d'un pentaèdre. En effet, considérons un polyèdre T_n et supposons que, parmi ses faces triangulaires, il en existe une qui ait la propriété suivante : si $\alpha\beta$ est le côté de la base qui définit cette face, la somme $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$ des mesures en radians des angles du polygone en α et β est supérieure à π (fig. 7).

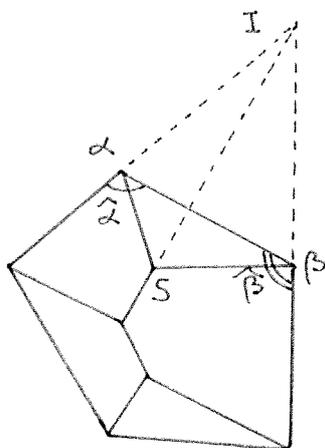


Figure 7

Les prolongements des côtés adjacents au côté $\alpha\beta$ se coupent alors en un point I tel que le triangle $I\alpha\beta$ soit, en entier, extérieur au polygone de base. S étant le sommet de la face triangulaire, le tétraèdre $S\alpha\beta I$ est extérieur au polyèdre T_n .

Réunissons ce tétraèdre et le polyèdre : nous obtenons encore un polyèdre T , mais qui est d'ordre $n - 1$ et contient $T_n \dots$ L'opération que nous venons de faire est exactement l'**opération réciproque de la troncature triangulaire**. Elle est toujours possible, à une exception près. En effet, dans un polygone convexe de plus de quatre côtés, il ne peut y avoir quatre angles dont la somme est inférieure à 2π ⁽¹⁾. Si donc la condition $\hat{\alpha} + \hat{\beta} > \pi$ n'est pas vérifiée pour une face triangulaire, elle l'est nécessairement pour une autre.

Par contre, pour $n = 4$, le résultat est en défaut lorsque $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \pi$ pour chacune des deux faces triangulaires. La base B est alors un trapèze (pouvant être, bien sûr, un parallélogramme ou un rectangle ...) et les faces triangulaires sont relatives aux côtés "obliques" de ce trapèze.

⁽¹⁾ Pour $n > 4$, s'il existait quatre angles dont la somme soit inférieure ou égale à 2π , la mesure de chacun des $(n - 4)$ autres angles étant strictement inférieure à π , la somme s des angles du polygone serait telle que

$$s < 2\pi + (n - 4)\pi.$$

Or, $s = (n - 2)\pi$. C'est donc impossible.

Pour $n = 4$, $s = 2\pi$. Si donc $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \pi$, deux côtés opposés du quadrilatère B sont parallèles et on a aussi $\hat{\alpha}' + \hat{\beta}' = \pi$ pour les deux autres angles.

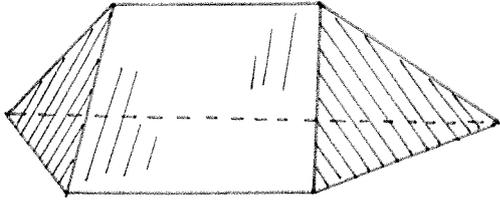


Figure 8

Le pentaèdre T_4 correspondant (fig. 8) a son arête sommitale **parallèle au plan de base** et ne peut donc pas être obtenu par des troncatures à partir d'un tétraèdre. Il en est de même des descendants, par troncatures, d'un tel pentaèdre : ils sont caractérisés par l'existence d'une arête sommitale parallèle au plan de base.

Tout polyèdre T_n , pour $n > 4$, descend, par $(n - 4)$ troncatures triangulaires, d'un pentaèdre T_4 .

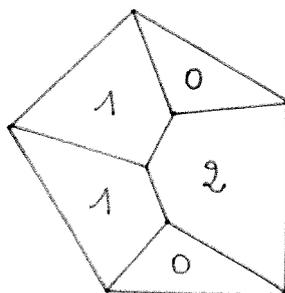
S'il n'a pas d'arête sommitale parallèle au plan de base, il descend d'un tétraèdre T_3 par $(n - 3)$ troncatures. Nous disposons ainsi d'une "récurrence" nous permettant de fabriquer **tous** les polyèdres T .

7.— Classification des polyèdres T

Déjà, en découpant notre tétraèdre en terre glaise, nous avons fait un tri parmi les polyèdres T obtenus. En disant qu'on ne trouvait qu'un seul modèle de polyèdre T_4 ou T_5 , mais trois modèles de T_6 , nous avons utilisé une relation d'équivalence dans l'ensemble des polyèdres considérés.

Pour préciser cette relation, nous allons convenir d'un code. Orientons d'abord le polygone de base et choisissons un de ses sommets pour origine. Cela revient à ranger les côtés de ce polygone — et, par conséquent, les faces du polyèdre — dans un certain ordre. A chacune des faces, associons le nombre des **arêtes sommitales** qu'elle contient (c'est le nombre de ses côtés diminué de trois unités). On obtient ainsi une suite de n entiers. Mais l'origine et le sens choisi sur la base étant arbitraires, cette suite n'est définie qu'à des permutations circulaires près et à une inversion près. C'est un **cycle**. Par exemple, pour le polyèdre T_5 de la figure 9, on trouve 10201, mais aussi 20110, 02011...

CONSIDÉRATIONS SUR UNE FAMILLE DE POLYÈDRES



Convenons de classer toutes les écritures de ce cycle par ordre lexicographique et de ne conserver que la plus “*grande*” de ces écritures. Nous l’appellerons **formule du polyèdre**. Ainsi, pour $n = 5$, la formule est 20110.

Figure 9

La relation d’équivalence cherchée est alors évidente :

Deux polyèdres T sont équivalents s’ils ont la même formule.

Remarque : la construction, vue au § 5, permet de représenter un polyèdre T quand on connaît sa formule, car celle-ci, “*programme*” le choix des arêtes à dessiner.

Il nous reste à voir l’effet, sur cette formule, des troncatures triangulaires. Or, chacune d’elles crée, dans un polyèdre T , une nouvelle face triangulaire et augmente d’une unité le nombre des arêtes sommitales des faces qui lui sont adjacentes (elle transforme l’arête latérale qui leur était commune en sommitale). Cela nous donne la règle suivante :

On intercale un zéro entre deux termes consécutifs de la formule et on augmente d’une unité les deux nombres ainsi séparés (étant entendu qu’il faut le faire aussi pour les termes extrêmes, car ils sont consécutifs dans le cycle).

Ainsi, à partir de la formule 20110 de T_5 (elle-même descendantes de 000 et 1010, formules respectives de T_3 et T_4), on obtient les cinq descendants suivants :

030111, 301110, 210210, 202020, 201201

Seulement, en ordonnant ces suites, comme convenu, on s’aperçoit qu’il n’y en a que trois distinctes :

301110, 210210, 202020.

Il y a donc trois classes de polyèdres T_6 et trois seulement (fig. 10). Nous les avons déjà trouvées au début de notre étude.

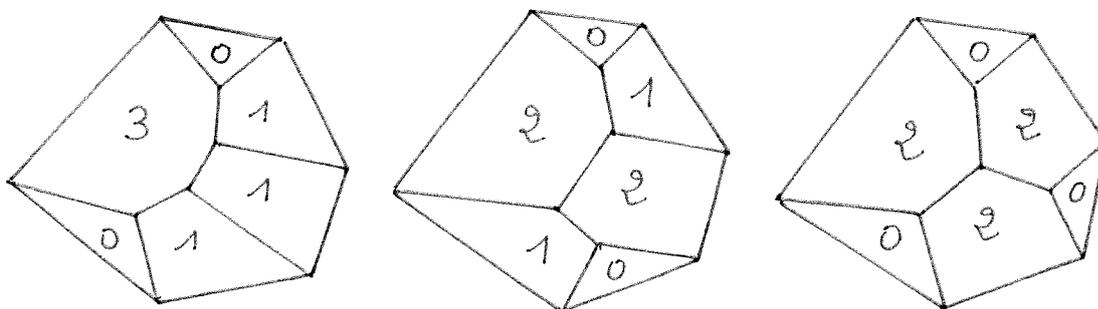


Figure 10

La recherche des différentes classes de polyèdres se ramène donc à une recherche purement numérique et on peut oublier complètement le contexte géométrique. La règle de récurrence ci-dessus nous permet de trouver les cycles de tous les polyèdres T_n pour n donné. Malheureusement, elle les donne non ordonnés et avec répétitions : la même suite peut être obtenue plusieurs fois, à une permutation circulaire ou une inversion près.

Il faut donc opérer un tri. Cela peut se faire à la main jusqu'au $n = 7$, pour lequel on trouve les quatre formules suivantes :

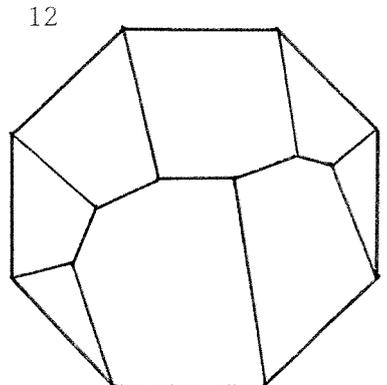
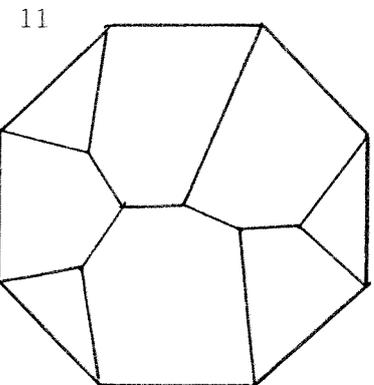
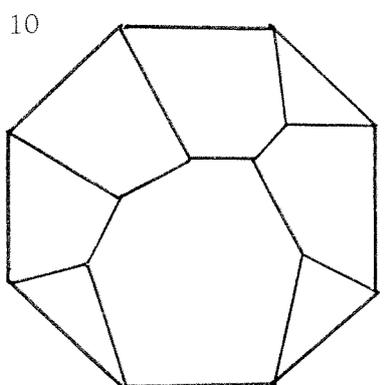
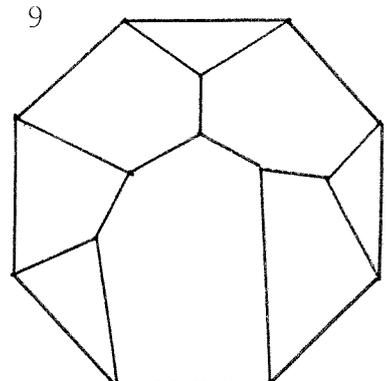
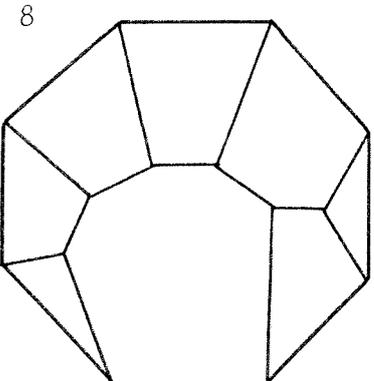
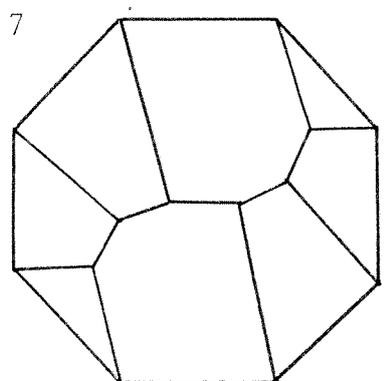
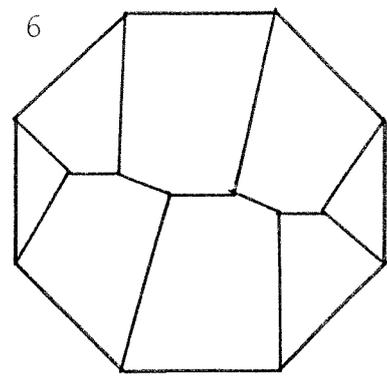
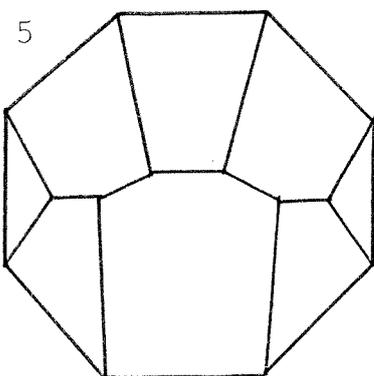
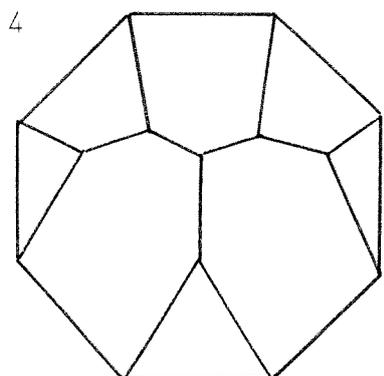
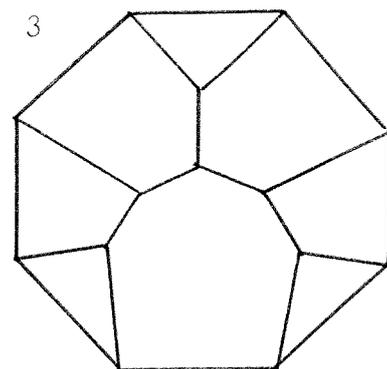
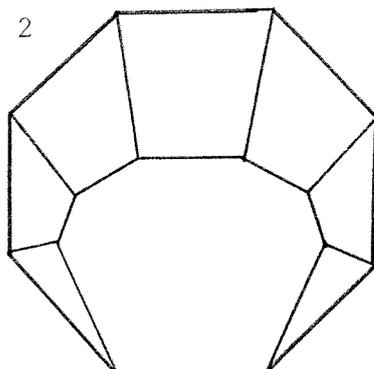
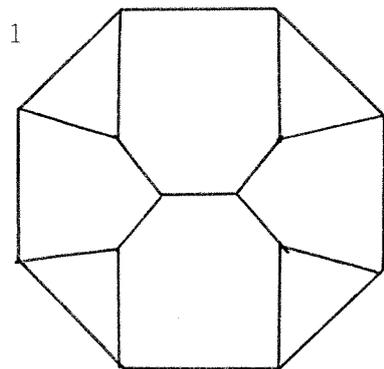
$$4\ 011\ 110, 3\ 102\ 110, 3\ 020\ 210, 2\ 201\ 210.$$

Au delà, les calculs et le tri deviennent fastidieux et il vaut mieux faire appel à un ordinateur. Un petit programme vous donnera facilement, sinon rapidement, 12 formules pour $n = 8$ ⁽³⁾, 27 pour $n = 9$, 82 pour $n = 10$, 228 pour $n = 11$, 733 pour $n = 12$.

L'expression, donnant le nombre de formules en fonction de n , reste encore à découvrir...

⁽³⁾ Les douze polyèdres T_8 sont représentés à la page ci-après. Les cycles des sept premiers présentent des symétries (par exemple le n° 3 dont le cycle 40120210 est un palindrome), une périodicité (par exemple le n° 7 de formule 31103110) ou les deux à la fois (le n° 1 de formule 30203020). On peut alors trouver, dans chaque classe, des représentants où cela se traduit par des symétries **géométriques**. C'est ce qui a été fait sur ce dessin. Par contre, les cinq derniers polyèdres ne présentent aucune symétrie.

CONSIDÉRATIONS SUR UNE FAMILLE DE POLYÈDRES



Les douzes polyèdres T_8

Dénombrement des arêtes et des sommets

A chaque troncature, le nombre des sommets d'un polyèdre T augmente d'une unité et celui des arêtes de deux unités. On trouve ainsi que **tout polyèdre T_n possède $(n - 2)$ sommets et $(2n - 3)$ arêtes, quelle que soit sa formule.**

La somme des entiers qui figurent dans cette formule est une constante, pour un ordre donné et vaut $(2n - 6)$.

8.— Dual d'un polyèdre T

Etant donné un polyèdre, si, à chaque face on fait correspondre un point et si on relie par un segment deux de ces points lorsqu'ils correspondent à des faces ayant une arête commune, on obtient le **dual** du polyèdre. Ce dual est encore un polyèdre si on choisit convenablement les points (pour les polyèdres réguliers, par exemple, à chaque face on fait correspondre son centre), mais il peut être "*aplati*" si les points sont pris dans un même plan. C'est sans importance, dans la mesure où on ne s'intéresse qu'aux relations existant entre faces, arêtes et sommets. Il y a réciprocité entre un polyèdre et son dual.

Considérons un polyèdre T_n (nous supposons avoir choisi un sens et une origine sur son polygone de base) et cherchons son dual T_n^* . Comme ce qui est relatif à la base ne nous intéresse pas, nous simplifierons en n'utilisant que les faces, arêtes et sommets — à l'exclusion de tout élément situé dans le plan de base —. De plus, pour avoir un dessin aussi simple que possible, nous choisirons les n points, images des faces, dans un même plan, aux sommets d'un polygone convexe de n côtés et rangés, sur celui-ci, dans le même ordre que les faces sur le polyèdre (fig. 11).

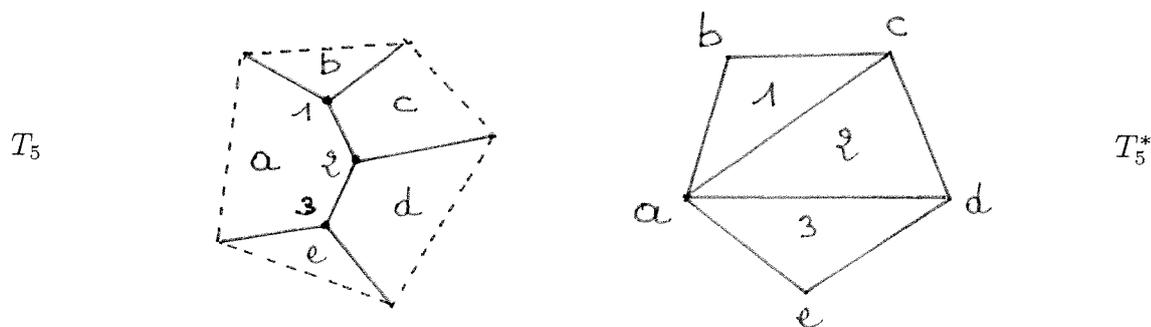


Figure 11

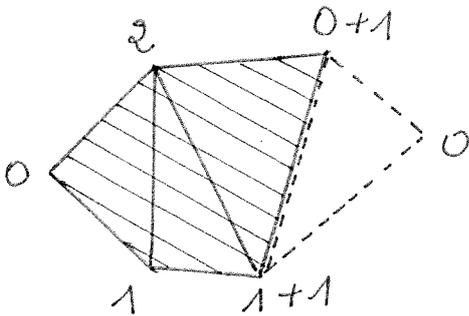
On constate alors, que les images des arêtes latérales du polyèdre T_n sont les côtés du polygone T_n^* et que celles des arêtes sommitales sont des **diagonales** de ce polygone. De plus, **ces diagonales partagent le polygone T_n^* en triangles, chacun d'eux étant l'image d'un sommet du polyèdre T_n .**

Notre problème, qui était l'étude de la répartition des sommets d'un polyèdre T_n , se ramène donc à un problème plan : celui **des partitions d'un polygone**

convexe en triangles (ou triangulation). En se plaçant en géométrie métrique, on dispose d'un atout supplémentaire : on connaît d'avance le nombre de triangles de la partition. Il est égal à $(n - 2)$, car la somme des angles d'un polygone convexe de n côtés est $(n - 2)\pi$ (somme que l'on calcule d'ailleurs à l'aide d'une partition particulière en triangles ayant un sommet commun).

Le polygone T_n^* ayant n côtés, parmi ces $(n - 2)$ triangles, il y en a au moins deux qui ont deux côtés communs avec le polygone ; à ces deux triangles correspondent deux sommets d'où partent deux arêtes latérales, donc deux faces triangulaires. Nous venons de retrouver le théorème d'existence de deux faces triangulaires dans le polyèdre T !

A chaque sommet du polygone T_n^* , associons le nombre des **diagonales** qui en sont issues. Puisque nous avons rangé les sommets dans un ordre donné, nous obtenons ainsi une suite de n entiers qui, comme précédemment, définit un cycle ; c'est, évidemment, le même que celui qui a été défini pour le polyèdre T_n . A tout polygone convexe triangulé est donc associée une **formule**, la même que celle du polyèdre T_n correspondant.



On retrouve également la relation de récurrence établie au § 7. La troncature triangulaire se traduit, en effet, au niveau du dual, par l'addition au polygone T_n^* d'un triangle supplémentaire, construit sur un de ses côtés et vers l'extérieur (fig. 12). Cela provoque bien, dans la formule, l'insertion d'un zéro et l'augmentation d'une unité des deux nombres encadrant ce zéro.

Figure 12

Si, pour représenter des polygones triangulés équivalents, c'est-à-dire ayant même formule, nous utilisons des **polygones réguliers** de même dimension, cette équivalence se traduit par une **isométrie**. Le problème de la recherche des classes de polyèdres T_n et leur dénombrement est donc "*isomorphe*" au problème de la triangulation (à une isométrie près) d'un polygone régulier de n côtés. Ainsi nous savons que s'il n'y a que trois façons de trianguler un hexagone, il y en a 82 pour

le décagone, 733 pour le dodécagone...

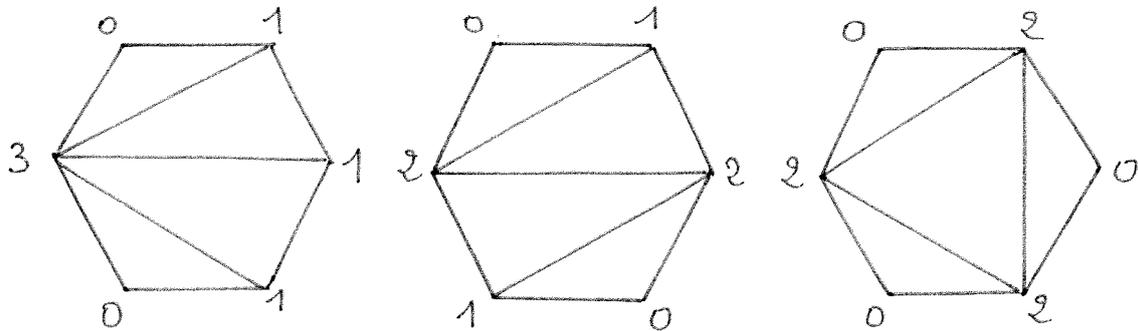


Figure 13

Polygone T_6^* duaux des polyèdres T_6 de la figure 10

Conclusion.

J'espère que ces polyèdres, curieux malgré leur simplicité, auront amusé le lecteur autant qu'ils m'ont amusé moi-même. Je pense qu'ils constituent un bon matériel de travaux pratiques de géométrie de l'espace, en raison de la facilité avec laquelle on peut les matérialiser, les dessiner ou les développer. Ils peuvent aussi fournir l'occasion d'introduire, de façon très élémentaire, des notions qui le sont moins comme équivalence, récurrence, cycle, dualité ...

GÉOMÉTRIQUE

Dans un parallélépipède rectangle se déplaçant le long d'une ligne droite d'équation $84x + S = y$, un hommoïde A présentant une calotte sphérique entourée de deux sinusoides, au-dessus d'une partie cylindrique de longueur $l > n$, présente un point de contact avec un hommoïde trivial B .

Démontrer que ce point de contact est un point de rebroussement.

Si l'hommoïde A rencontre un hommoïde homologue C , alors le point de contact est un disque de rayon $r < l$.

Déterminer la hauteur h de ce point de contact par rapport à l'axe vertical de l'hommoïde A .

R. QUENEAU
Exercices de style
 N° 95