A VOS STYLOS

PROBLÈME 4

Enoncé

Trouver tous les réels $a > 0$ tels qu'il existe dans l'espace euclidien usuel muni d'un repère orthonormé, un cube de côté a et dont les sommets ont toutes leurs coordonnées entières.

Solution (M.- P. MULLER, J. MULLER, E. EHRHART)

Il existe trois vecteurs à composantes entières, deux à deux orthogonaux, de même longueur a. Le théorème de PYTHAGORE appliqué à l'un d'entre eux montre que a^2, somme de trois carrés, est un entier. Le volume a^3 du cube, produit mixte des trois vecteurs, se calcule par un déterminant à éléments entiers, et est donc aussi entier. Ainsi $a = \frac{a^3}{a^2}$ est rationnel; comme son carré est entier, un raisonnement classique (décomposition en facteurs premiers) montre qu'il est entier.

Et si a est entier, le cube construit sur les vecteurs $\overrightarrow{ai}, \overrightarrow{aj}$ et $\overrightarrow{ak}$, où $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ sont les vecteurs unitaires des axes, a tous ses sommets à coordonnées entières.

M.- P. MULLER généralise cette démonstration au cas d'un espace de dimension finie impaire quelconque.

E. EHRHART fait référence à un article donnant tous les cubes entiers. A ce sujet, nous donnons ci-après un texte écrit il y a quelques années par A. VIRICEL.

CUBES ENTIERS

On appelle cube entier un cube dont tous les sommets ont des coordonnées entières dans un repère orthonormé. Après avoir donné deux familles de cubes entiers, E. EHRHART dans '*L'Enseignement Mathématique*' signale la propriété : "L'arête de tout cube entier est mesurée par un entier" qu'il établit et pose le problème :

"Trouver tous les cubes entiers".- Ens. Math., t. V, fasc. 2, 1959

On peut, par une translation convenable, amener un des sommets d'un cube entier en l'origine O.

On se bornera donc à considérer des cubes dont O est un sommet. Ils sont déterminés par leurs trois sommets A, B, C les plus proches de O. Le tableau des coordonnées de ces trois points permet de trouver les coordonnées des sommets autres que O, A, B, C.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} & \begin{pmatrix} 642 & 120 & 544 \\ 320 & 600 & -510 \\ -456 & 590 & 408 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ci-dessus un exemple de matrice carrée $\mathcal{M}_k$ déterminant un cube (K).
L'étude suivante comprend deux parties :
1° On peut passer d'un cube entier quelconque K à tout cube entier K' par la chaîne des transformations : une homothétie, deux symétries/plan, une homothétie.
2° On peut déterminer tous les cubes entiers à partir de l'un d'eux.

Première partie

Soient deux cubes entiers (K) et (K') d'arêtes respectives n et n'. D'après le théorème d'EHRHART, n et n' sont des entiers. Soit p leur P.P.C.M.

L'homothétie $(O, \frac{p}{n})$ donne de (K) l'image (K_1) d'arête p.
L'homothétie $(O, \frac{p}{n'})$ donne de (K') l'image (K_1') d'arête p.

(K_1) et (K_1') sont des cubes isométriques ayant un sommet commun O. Précisons dans (K_1) un trièdre trirectangle $OA_1B_1C_1$ et dans (K_1') un trièdre trirectangle $0A_1'B_1'C_1'$ de même sens.

On peut passer de (K_1) à (K_1') par une certaine rotation $\mathcal{R}$ d'axe Δ passant par O.
Δ est l'intersection du plan médiateur $\mathcal{A}$ de A_1A_1'.
Δ est l'intersection du plan médiateur $\mathcal{B}$ de B_1B_1'.

Ces plans, $\mathcal{A}$ normal à $\overrightarrow{A_1A_1'}$, $\mathcal{B}$ normal à B_1B_1', ont dans leurs équations, comme coefficients de x, y, z, des nombres proportionnels aux projections entières de $\overrightarrow{A_1A_1'}$ ou de $\overrightarrow{B_1B_1'}$.
$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ déterminent un faisceau de plans contenant Δ.

Si $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ est l'équation de $\mathcal{A}[(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3]$,
si $b_1x + b_2y + b_3z = 0$ est l'équation de $\mathcal{B}[(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{Z}^3]$,
$\alpha(a_1 + x + a_2y + a_3z) + \beta(b, x + b_2^1y + b_3z) = 0[(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2]$ est l'équation d'un plan P_1 de ce faisceau.

Soit A_2 le symétrique de A_1 pour P_1. A_2 a des coordonnées, sinon entières, du moins rationnelles.

Le plan P_2 médiateur de A_2A_1' a une équation à coefficients rationnels qui peuvent être rendus entiers.

Les plans médiateurs des trois côtés du triangle $A_1A_2A_1'$ ont en commun une droite. Cette droite appartient aux plans médiateurs de $A_1A_2(P_1)$ et de $A_1A_1'(\mathcal{A})$. C'est la droite Δ qui appartient donc au 3^e plan.

Ainsi, la rotation $\mathcal{R}$ est donc le produit des deux symétries/plan, pour P_1 et pour

P_2 et on a montré que :

$$K \xrightarrow[\mathrm{Hom}(O,\frac{p}{n})]{} K_1 \xrightarrow[\substack{\text{Produit de Sym}/p_1 \text{ et Sym}/p_2\\ \text{ou rotation } \mathcal{R}.}]{} K'_1 \xrightarrow[\mathrm{Hom}\,(O,\frac{n'}{p})]{} K'$$

Deuxième partie

A partir d'un cube quelconque (K), dont O est un sommet et dont la matrice caractéristique a pour éléments des nombres "*petits*" de préférence, on est sûr d'obtenir tout cube entier (K') dont O est un sommet.

Considérons l'ensemble des couples de plans P_1 et P_2 dont les équations sont de la forme $ux + vy + wz = 0$ $(u, v, w) \in \mathbb{Z}^3$.

Le couple particulier défini dans la première partie est inclus dans cet ensemble.

Soit (K) défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et six entiers $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$, $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$.

1° Appliquons à (K) l'homothétie $(O, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$.
2° Appliquons à (K_1) la symétrie/plan pour P_1 d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.
La matrice de cette symétrie est :

$$\mathcal{M}P_1 = \begin{pmatrix} \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta & \gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2 & -2\beta\gamma \\ -2\alpha\gamma & -2\beta\gamma & \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

On agit sur chacune des colonnes de (K_1) ce qui revient à faire le produit par $\mathcal{M}P_1$ de la matrice de (K_1).

3° Appliquons au symétrique de K_1 pour P_1 la symétrie/plan pour P_2 d'équation : $ax + by + cz = 0$. La matrice de cette symétrie est :

$$\mathcal{M}P_2 = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 - a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & c^2 + a^2 - b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & a^2 + b^2 - c^2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{a^2 + b^+ c^2}$$

4° Terminons par l'homothétie $(O, a^2 + b^2 + c^2)$.
Les deux homothéties ont pour effet de débarrasser les calculs des diviseurs : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, a^2 + b^2 + c^2$ et de substituer aux deux matrices $\mathcal{M}P_1$ et $\mathcal{M}P_2$ les matrices $\mathcal{M}'P_1$ et $\mathcal{M}'P_2$ qui sont les facteurs entre parenthèses de $\mathcal{M}P_1$ et de $\mathcal{M}P_2$.

Ainsi pour obtenir la matrice caractéristique d'un cube entier, il suffit d'appliquer à la matrice de (K) (c'est la matrice unité) le produit $\mathcal{M}'P_2 \times \mathcal{M}'P_1$.

Ce produit représente donc la matrice (*) caractéristique de tout cube entier.

$$\left(\begin{array}{cc} (b^2+c^2-a^2)(\beta^2+\gamma^2-a^2)+4ab\alpha\beta+4ac\alpha\gamma & -2\alpha\beta(b^2+c^2-a^2)-2ab(\beta^2+d^2-\beta^2)+4ac\beta\gamma \\ -2ab(\beta^2+\gamma^2-d^2)-2\alpha\beta(ac^2+a^2-b^2)+4bc\alpha\gamma & 4ab\alpha\beta+(c^2+a^2-b^2)(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)+4bc\beta\gamma \\ -2ac(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+4bc\alpha\beta-2\alpha\gamma(a^2+b^2-c^2) & 4ac\alpha\beta-2bc(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)-2\beta\gamma(a^2+b^2-c^2) \end{array} \right.$$

Les matrices $\mathcal{M}P_1, \mathcal{M}P_2, \mathcal{M}P_2 \times \mathcal{M}P_1$ sont des matrices d'isométrie. Les deux premières correspondent aux antidéplacements; la troisième aux déplacements.

Les matrices $\mathcal{M}'P_1, \mathcal{M}'P_2, \mathcal{M}'P_2 \times \mathcal{M}'P_1$ sont à un facteur numériques près, des matrices d'isométrie. Il en est de même des matrices caractéristiques de tous les cubes entiers. Il en résulte que le produit matriciel des matrices de deux cubes entiers est la matrice du cube entier.

D'autre part, l'arête du cube obtenu après les quatre transformations est : $(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$. On peut décomposer le carré de ce produit en trois premières sommes de trois carrés. En substituant à la matrice finale sa transposée, on obtient trois autres sommes de trois carrés égales à $(a^2+b^2+c^2)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2$.

PROBLÈME 5

(proposé par A. JEANNIN et X. RELIQUET)

Enoncé : Vrai ou faux?
Si F est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ et si $E_1 \dots E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de F tels que $E_1 \cup \dots \cup E_n = F$, alors l'un au moins des E_i est égal à F.
Donner une démonstration ou un contre exemple.

Indication
C'est vrai par récurrence sur n.

(*) Les deux premiers termes de cette matrice se trouvent sur la présente page de gauche, le troisième terme figure sur la page ci-contre.

$$\left.\begin{matrix} (b^2+c^2-a^2)(-2\alpha\gamma)+4ab\beta\gamma-2ac(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2) \\ 4ab\alpha\gamma(c^2+a^2-b^2)(-2\beta\gamma)-2bc(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2) \\ 4ac\alpha\gamma+4bc\beta\gamma+(a^2+b^2-c^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2) \end{matrix}\right)$$

PROBLÈME 6

Enoncé

Pour $\epsilon > 0$, soit $\mathcal{M}^\epsilon$ l'ensemble des matrices 3×3, à coefficients positifs ou nuls, telles que la somme de chaque colonne soit 1 et que l'une au moins des lignes ait tous ses coefficients plus grands que ϵ. Montrer que si $(M_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans $\mathcal{M}^\epsilon$, le produit infini

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \times \ldots$$

converge. La limite est-elle toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} ?$$

DEVOIR DE VACANCES :

L'isométrie mène à tout !
Une boîte de fromage...

EXERCICES EN ISOMETRIE

Inclinez le buste latéralement, puis poussez vers le haut avec le bras tendu, paume tournée vers le ciel, et enfoncez vers le bas avec le bras tendu, paume tournée vers le sol. Changez de côté. Forcez à chaque fois sur la position.

Comptez au moins dix secondes sur la position forcée et expirez lentement durant l'exercice.

Recherchez, pendant tout ce temps, l'étirement maximal.