RÉFLEXIONS SUR L'APPRENTISSAGE DE LA DÉMONSTRATION EN GÉOMÉTRIE DE 4^e AUTOUR D'UN LOGICIEL

M.-A. EGRET – D. GUIN – G. KUNTZ – G. MÉTIVIER – N. VOGEL

avec la participation de R. DUVAL

I.— EXPOSÉ DES MOTIFS ET RAPIDE HISTORIQUE DU DÉVELOPPEMENT DU PROJET

Notre projet est de faire l'expertise d'un logiciel d'aide à la démonstration en géométrie en classe de 4^e. Il ne s'agit pas de réaliser un logiciel de démonstration automatique, mais d'aider l'élève en difficulté à structurer son raisonnement et de lui proposer, si nécessaire, des heuristiques en vue de la résolution du problème.

Cela nous conduit à réfléchir, d'une part à la manière dont on résout un problème de géométrie, d'autre part à la manière dont on enseigne la démonstration en classe de 4^e:
— nous avons retrouvé la notion d'heuristique (*) à propos des performances exigées d'un logiciel : il ne peut être question, pour des raisons de temps, d'explorer systématiquement et en aveugle toutes les situations et tous les théorèmes disponibles. Obtenir un logiciel performant exige l'utilisation de stratégies de résolution.
— l'implantation informatique nécessite l'explicitation de tout ce qui est implicite (le non-dit). Nous avons donc été amenés à mettre en lumière des démarches faisant appel à des "*évidences*" ou "*réflexes*" (qui ne le sont pas pour des élèves!).

Ainsi donc la définition d'un cahier des charges pour un logiciel d'aide à l'apprentissage de la démonstration nous a fait découvrir certaines raisons de la complexité de cet apprentissage pour les élèves. L'intelligence artificielle, par sa logique propre, nous a obligés à repenser notre manière d'enseigner. Elle nous a fait ressentir la très grande difficulté du problème. Elle a créé une dynamique en soulevant des problèmes relevant de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques, et suscité la création d'un groupe P.A.F. ("Elaboration de situations d'enseignement favorisant l'introduction de la démonstration en géométrie") et des expérimentations dans les classes (R. DUVAL – M.A. EGRET (à paraître)).
En effet :
— en psychologie cognitive, le projet est de modéliser le comportement humain :
   * exprimer précisément des modèles de fonctionnement,

© L'OUVERT 52 (1988)

(*) heuristique : vient du grec "*euriskai*" : trouver. Qualifie tout ce qui sert à la recherche de la solution sans forcément aboutir (connaissance stratégique).

* les mettre en œuvre pour simuler le comportement.
— en intelligence artificielle :
* il s'agit de faire réaliser par des systèmes artificiels des tâches qu'exécute le système cognitif humain
* il est donc nécessaire d'intégrer à la machine des modèles formels du fonctionnement humain et des dispositifs matériels pour la mise en œuvre (C. BONNET et al., 1986).
— dans l'activité de démonstration géométrique, l'élève n'utilise pas d'algorithmes. Il met en œuvre des procédures moins sûres, mais qui peuvent aboutir rapidement grâce aux heuristiques. C'est à la mise en évidence de telles heuristiques que nous nous attacherons car elles sont nécessaires à la réalisation d'un tutoriel intelligent. Mais de plus, cette mise en évidence présente un grand intérêt en ce qui concerne la didactique des mathématiques : doit-elle être objet d'enseignement? Répondre à cette question nécessite d'expérimenter pour valider les hypothèses émises sur le fonctionnement cognitif dans l'activité de démonstration. Réciproquement, nous verrons que la didactique des mathématiques fournit des éléments nécessaires à la modélisation du fonctionnement cognitif (figures prototypes, réseaux etc...).

II.— LES DIFFÉRENTS TYPES DE CONNAISSANCES ET LEUR DIFFICULTÉ SPÉCIFIQUES

Après avoir simulé les processus de lecture et compréhension d'un énoncé (D. GUIN - F. ROUSSELOT, 1986, 1987), nous poursuivons l'étude du fonctionnement cognitif dans la démarche démonstrative : cette étude ne peut être abordée sans différencier les différents types de connaissances entrant en jeu dans l'activité de résolution de problème. La démonstration géométrique nécessite de trouver un chemin entre les hypothèses et la conclusion (connaissance stratégique, heuristique). Mais, pour cela, il faut savoir :
— mettre en évidence des statuts des propositions de l'énoncé : hypothèses, conclusion (connaissances déclaratives). La connaissance déclarative d'une définition ou d'un théorème est insuffisante pour comprendre l'activité de démonstration qui nécessite une représentation opératoire du théorème (*cf.* ci-après figures prototypes);
— savoir appliquer correctement un théorème en fonction des hypothèses, ce qui nécessite une connaissance sous forme procédurale des théorèmes ou définitions;

De plus, il faut séparer deux tâches souvent confondues dans les problèmes de géométrie : la découverte de la solution ou de son idée, et l'organisation déductive des énoncés. La première tâche relève de l'heuristique, la seconde relève de l'organisation et de la mise en forme. Ces tâches sont différentes et ne font pas appel au même type de compréhension.

a) Connaissances procédurales

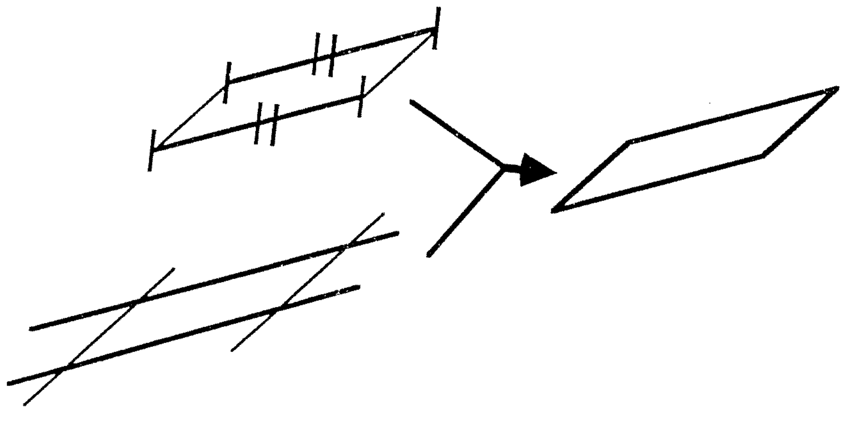
Elles consistent à savoir appliquer correctement un théorème dans une situation particulière donnée :
— vérifier qu'on a les hypothèses du théorème dans la situation particulière donnée,

— savoir exprimer la conclusion dans la situation particulière donnée.

i) définition, théorèmes et représentations à l'aide de figures prototypes

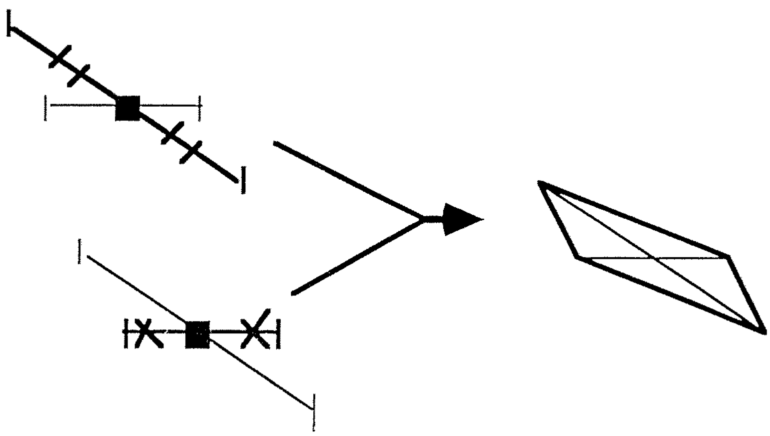
Les expérimentations que nous avons menées mettent en évidence l'association de plusieurs figures prototypes associées aux définitions et théorèmes : nous utilisons souvent dans la recherche d'une démonstration une représentation des théorèmes sous la forme d'une figure caractéristique à rechercher dans une figure. Ces représentations reflètent l'appréhension opératoire des figures nécessaires à la démarche heuristique que nécessite la démonstration (R. DUVAL, 1988). Voici quelques exemples :

Théorème (Rlongueur) : Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, ce quadrilatère est un parallélogramme :

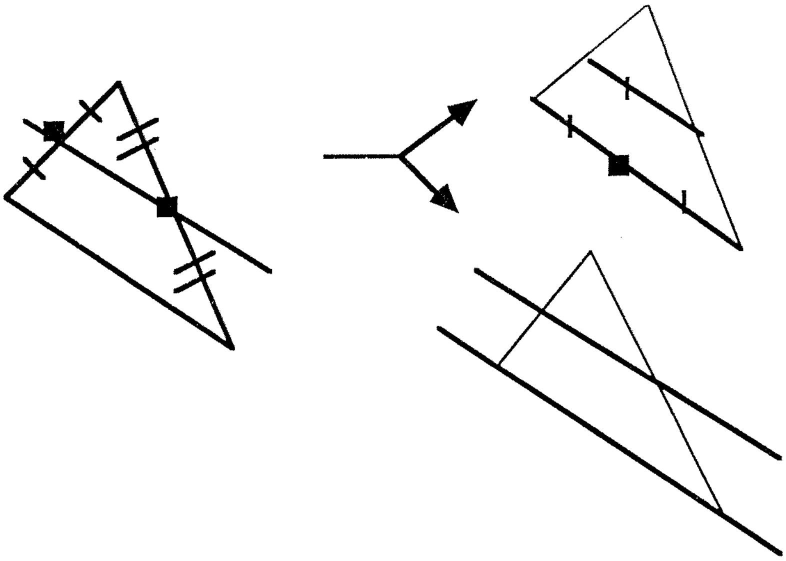


Remarque : la notion de parallélisme est rendue par des couleurs (ici par des traits renforcés).

Théorème (Rdiagonale) : tout quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

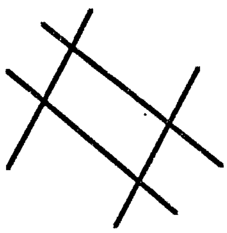


Théorème des milieux (milieu) : La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté. La longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

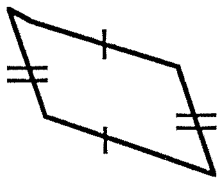


Dans les représentations des théorèmes, nous avons mis en évidence des représentations non équivalentes du point de vue cognitif. Voici les quatre figures prototypes associées au parallélogramme :

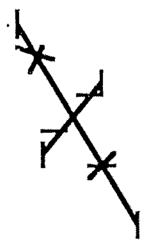
1)



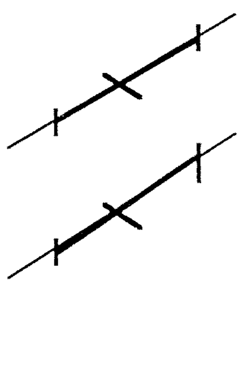
2)



3)



4)

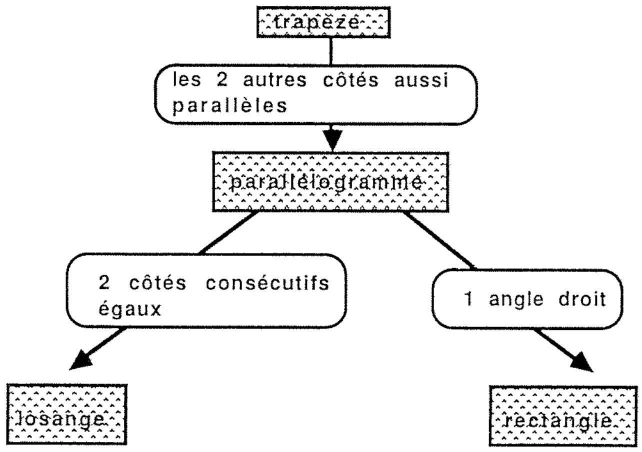


ii) réseaux sémantiques des objets géométriques

— les nœuds sont des objets géométriques,

— les arcs sont étiquetés par des propriétés.

Voici par exemple un extrait de celui du parallélogramme :



Les connaissances procédurales sont malheureusement en général intimement mêlées dans l'enseignement à la recherche du chemin qui mène à la conclusion! Il est souhaitable de séparer les deux types d'activité dans un premier temps : cela facilitera, sans doute, la "*compréhension des règles du jeu*" de la démonstration. Les connaissances procédurales peuvent s'acquérir par des jeux où l'on donne un certain nombre de règles : les élèves pourront écrire l'arbre des transformations possibles pour un objet donné. Ensuite seulement, on leur demandera de trouver un chemin pour aller d'un objet donné à un autre objet donné : nous abordons maintenant les connaissances stratégiques.

b) Connaissances stratégiques et heuristiques

Les bons élèves possèdent ces règles qui orientent la recherche vers des pistes pertinentes. Face à un énoncé, ils éliminent *a priori* toute une partie de la base de connaissances à la lumière des hypothèses : ils savent déjà ne pas avoir à l'utiliser au cours de la démonstration. Ces règles sont rarement enseignées, car elles ne sont en général même pas explicitées. L'enseignement des mathématiques est trop déclaratif : on se contente souvent d'exposer les définitions, puis les théorèmes, les démonstrations sans justifier le choix des théorèmes utilisés. La justification du choix apparaît très rarement dans le corrigé qui est, en général, la mise en forme de la démonstration. Nous considérons que :

— la découverte de la solution nécessite la recherche d'un plan (**),

— les heuristiques sont des aides à la recherche d'un plan.

Remarque : les heuristiques n'aboutissent pas forcément à la solution contrairement à un algorithme.

Si nous exprimons d'une manière assez précise le fonctionnement de l'activité de démonstration, nous pourrons réaliser un système ayant une structure de

(**) Plan : un chemin possible entre les hypothèses et la conclusion.

contrôle basée sur cette modélisation. De plus, nous formulons l'hypothèse que l'enseignement des méthodes apportera une aide sensible aux élèves (J. ROGALSKI, 1987).

Exemples : Voici quatre heuristiques fréquentes. Dans les deux premières, il s'agit de rechercher et identifier dans la figure des figures extraites, des figures prototypes. L'identification d'une figure extraite ou prototype comprend deux étapes :
— exhiber la figure,
— vérifier qu'elle a le statut de figure extraite ou prototype.

1. Si le but en cours est de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, alors essayer l'identification d'une figure prototype Défpar "*côtés parallèles 2 à 2*", ou d'une figure prototype Rlongueur "*côtés opposés 2 à 2 de même longueur*" *cf.* p. 34, ou d'une figure prototype Rdiagonale "*diagonales de même milieu*" *cf.* p. 34, ou d'une figure prototype Rparlon "*côtés opposés parallèles de même longueur*".

2. Si le but en cours est de démontrer qu'un point X est milieu d'un segment $[YZ]$, alors essayer :
— l'identification d'une figure prototype diagonale "*dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu*", dont l'une des diagonales est $[YZ]$ et le centre X,
— l'identification d'une figure prototype Rmilieu "*réciproque du théorème des milieux*", dans laquelle $[XY]$ est un côté.

Plus généralement :

3. Rechercher dans la figure des figures extraites ou prototypes qui ont quelque chose en commun (ex. : parallélogrammes ayant une diagonale en commun, triangles ayant un côté commun, etc...).

4. Enrichir la figure par des constructions, par exemple :
— si l'on ne peut appliquer les heuristiques ayant pour but parallélogramme, construire les diagonales et leur intersection et essayer d'appliquer l'heuristique correspondante,
— si les heuristiques n'ont pas abouti dans un triangle rectangle, compléter la figure pour obtenir un rectangle et essayer d'appliquer celles du rectangle.

c) Organisation déductive des énoncés : représentation sous forme de réseau sémantique d'une démonstration.

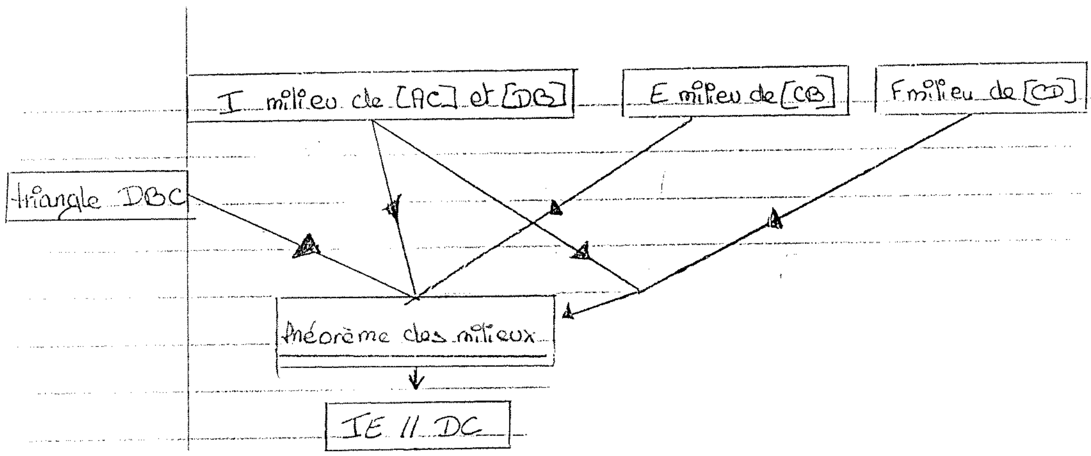
i) L'organisation déductive des énoncés dépend d'une ou plusieurs opérations de substitution. Chaque opération s'effectue à partir des *énoncés d'entrée* (soit les hypothèses, soit d'autres énoncés obtenus par substitution) selon une *règle de substitution* (un théorème, une définition, etc...). L'organisation de ces opérations donne la structure profonde de la démonstration (R. DUVAL – M.-A. EGRET (à paraître)).

ii) La représentation de la structure profonde de la démonstration sous forme de réseau sémantique donne aux élèves le moyen de prendre conscience de ce

qu'est une démonstration et de contrôler leur propre discours. Lorsqu'ils rédigent la solution du problème, ils trouvent alors d'eux-mêmes les expressions et les connecteurs pour :
— d'une part, exprimer le statut des énoncés,
— d'autre part, articuler les énoncés.

Voici les principes du réseau sémantique d'une démonstration :
— les nœuds sont des assertions (ex. : $IE \parallel DC, IEFC$ parallélogramme etc...), les couleurs différencient leur statut (hypothèses, conclusion, figures extraites);
— les arcs sont étiquetés par des noms de figures prototypes correspondant aux définitions et théorèmes.

Exemple :
Enoncé du problème : $ABCD$ est un parallélogramme de centre I. E et F sont les milieux de BC et CD. La droite EF coupe AC en M. Montrer que M est le milieu de EF.
Un extrait du réseau d'un élève :



Ce réseau sera une aide fondamentale pour la mise en forme de la démonstration.

Un extrait du texte proposé par cet élève :

> *"Pour trouver qu'un point est le milieu de deux segments cela peut être les diagonales d'un parallélogramme.* **Il suffit que je prouve** *que $IE \parallel FC$ et $IF \parallel CE$.*
> **Il suffit d'appliquer** *le théorème des milieux dans le triangle DBC. On sait que E est le milieu de BC* **mais il nous faut un autre milieu.** *Ce sera I milieu de DB* **puisque** *I est l'intersection des diagonales d'un parallélogramme et qu'elles se coupent en leur milieu.* **Donc** *on peut appliquer le théorème des milieux. Dans le triangle DBC, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui passe par le milieu du côté opposé, cette droite est parallèle au troisième côté.* **Je suis sûre** *que $IE \parallel FC$..."*

Le réseau sémantique est une représentation proposée aux élèves qu'ils utilisent à leur convenance. Il ne peut être objet, en tant que tel, d'enseignement.

III.— FLASH SUR LE DICTIONNAIRE

Pour faire des démonstrations, l'élève a besoin d'une base de connaissances. Le logiciel doit donc lui permettre de consulter les définitions, théorèmes et propriétés, un peu comme dans une encyclopédie. Pour chaque objet, il y a une dizaine de rubriques qui reprennent les idées mises en évidence précédemment, par exemple :
— définition avec différentes représentations, animations des figures;
— théorèmes avec exemples et contre-exemples animés. Etude systématique des réciproques et de l'effet de l'absence d'une des entrées du théorème;
— figures extraites, figures prototypes, sur-figures;
— arbre des spécialisations et des généralisations de l'objet, sous forme de réseau sémantique (*cf.* ci-dessus les réseaux sémantiques des objets géométriques).

La partie expertise de ce module est presque achevée. Pour une réalisation informatique, la représentation orientée objet est particulièrement bien adaptée. Le logiciel HYPERCARD (Macintosh) donne actuellement la possibilité d'une réalisation rapide de ce module par des non spécialistes. Encore faut-il obtenir des décharges effectives ... pour un logiciel qui tournerait sur un matérel non disponible dans les années à venir dans l'Education Nationale!

CONCLUSION

Durant l'expérimentation en classe, nous avons observé que l'appropriation de la démonstration, avec ces méthodes, par des élèves de 4[e] suscite un changement d'attitude complet à l'égard de la géométrie : un véritable plaisir et beaucoup d'intérêt. Le raisonnement, en géométrie plus particulièrement, nécessite de la rigueur; c'est une activité intellectuelle gratifiante parce qu'exigeante. Nous sommes donc inquiets de voir qu'on envisage parfois de supprimer la démonstration au collège au profit d'autres activités moins contraignantes.

Les conséquences essentielles de ce travail sur notre enseignement sont d'une part la mise en évidence de méthodes, d'autre part l'explicitation, en classe, des heuristiques. Il reste, cependant, à approfondir une phase essentielle : comment apporter une aide efficace à la recherche d'un plan sans le fournir explicitement? Notre réflexion pédagogique sera alors suffisamment avancée pour qu'une équipe d'informaticiens passe à une réalisation concrète. Dans ce but, nous avons élaboré un cahier des charges tenant compte, d'une part, des résultats mis en évidence, d'autre part, des lacunes constatées dans d'autres travaux sur ce sujet (D. GUIN et al. (à paraître)).

La réalisation d'un tutoriel intelligent nécessite d'expliciter des savoirs que l'on n'expliciterait pas spontanément :
— les différents types de connaissanes;
— des représentations;
— des savoir-faire;
— des connaissances stratégiques.

Cette explicitation ne doit-elle pas être réinvestie dans l'enseignement? Nous pensons que d'une part, il faut poursuivre cette étude théorique et les expérimentations dans les classes menées par des enseignants de l'IREM et des chercheurs en didactique des mathématiques afin de mettre au point une modélisation de cette activité cognitive. D'autre part la réalisation concrète d'un projet aussi ambitieux ne semble possible que si une équipe d'informaticiens y collabore.

Cette recherche nécessite donc un travail simultanément dans trois domaines : intelligence artificielle, psychologie cognitive et didactique des mathématiques. Elle permet d'entrevoir à l'avenir la possibilité de réaliser un logiciel véritablement utile aux élèves en difficulté, mais indépendamment de ce but initial, les retombées nombreuses des réflexions dans toutes les directions indiquées justifient, à elles seules, les efforts entrepris, malgré les moyens très faibles de l'équipe (1 heure en heures supplémentaires par membre de l'équipe). Les résultats actuels qui ont fait l'objet de publications et de communications dans des colloques justifieraient l'obtention de décharges effectives pour poursuivre, dans de bonnes conditions, cette recherche.

BIBLIOGRAPHIE

BONNET C. – HOC J.-M. – THIBERGHIEN G. (1986).– *Psychologie et intelligence artificielle et automatique.*– Ed. P. Mardaga.

DUVAL R. (1988).– *Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruences.*– in "*Annales de didactique et de sciences cognitives*", Vol. 1, p. 57–75.– Ed. IREM de Strasbourg.

DUVAL R. – EGRET M.-A. (à paraître).– *La fonction discriminative des réseaux sémantiques dans la démarche démonstrative en géométrie.*– in "*Annales de didactique et de sciences cognitives*", Vol. 2.– Ed. IREM de Strasbourg.

GAUD D. – GUICHARD J.-P. (1984).– *Apprentissage de la démonstration (géométrie de 4^e^).*– in "*Petit x*", n° 4, p. 5–25.– Ed. IREM de Grenoble.

GUIN D. avec la collaboration du groupe IREM I.A. de Strasbourg (à paraître) : *Réflexions critiques sur les logiciels d'aide à la démonstration – Elaboration d'un cahier des charges.*– in "*Annales de didactique et de sciences cognitives*", Vol. 2.– Ed. IREM de Strasbourg.

GUIN D. – ROUSSELOT F. (1986).– *Un système expert résolvant des problèmes de géométrie (4^e^) – Recherche en vue de la réalisation d'un programme E.A.O.*– in "*Actes du colloque Intelligence Artificielle*".– Publication du Laboratoire C.-F. Picard.

GUIN D. – ROUSSELOT F. (1987).– *Aide à la recherche d'une démonstration (géométrie de 4^e^).*– in "Actes du colloque E.A.O." (Cap d'Agde), p. 429–438.

ROGALSKI J. – SAMURCAY R. (1987).– *Enseigner des méthodes.*– in "*Cahier de didactique des mathématiques*".– Ed. Paris VII.