LA DÉMONSTRATION : CALCUL ET/OU RAISONNEMENT

Jacques LUBCZANSKI

N.D.L.R. : Les exercices proposés sont plus ou moins faciles et on ne s'étonnera pas de chercher longuement certains d'entre eux (en particulier le premier). Dans le prochain numéro, J. LUBCZANSKI proposera des éléments de solution accompagnés de notes historiques.

Voici quelques exemples de principes de raisonnement, pris dans l'histoire des mathématiques, et qui permettent, chacun, la démonstration d'une propriété classique de l'ellipse.

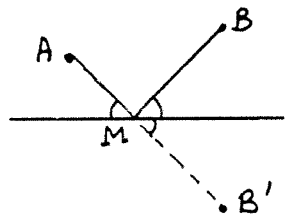
En outre, chacun de ces principes a pu, longtemps après qu'il ait été utilisé, être formalisé et justifié par un calcul.

Mais a-t-il fallu attendre cette justification pour être certain de leur validité?

A.— LE PRINCIPE DE HERON D'ALEXANDRIE (1^{er} s. ap. J.-C.)

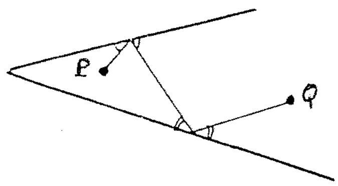
"*Pour aller d'un point A à un point B, la lumière suit le plus court chemin*".

Conséquence : lors de la réflexion lumineuse sur un miroir plan, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.
En effet, le plus court chemin de A à B, en passant par un point M du miroir est celui pour lequel A, M et B' sont alignés, B' étant le symétrique de B par rapport au miroir : car alors $AM+MB = AM+MB'$ est minimal.
L'égalité des angles s'ensuit.



Corollaire : Pour trouver le plus court chemin, après réflexion, de A à B, il suffit de réaliser l'égalité des angles d'incidence et de réflexion.

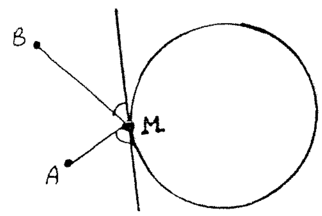
Exemple 1 :



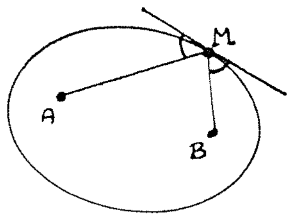
Recherche du plus court chemin après deux réflexions.

Exemple 2 :

Réflexion sur une courbe : c'est en fait la réflexion sur la tangente à la courbe.



Exercice 1 : Déterminer M connaissant A, B et le cercle.



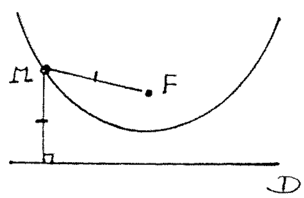
Application à l'ellipse : Soit une ellipse de foyers A et B.
Pour tout point M de l'ellipse, $AM + MB$ est constant; donc tout point M de l'ellipse réalise le plus court chemin de A à B après réflexion sur la courbe. Donc les deux rayons AM et BM font des angles égaux avec la tangente.
En d'autres termes, la tangente est bissectrice (extérieure) de l'angle $\widehat{AMB}$.

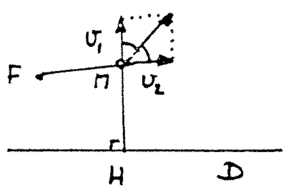
Remarque : si l'ellipse est un cercle (foyers confondus), on retrouve la propriété d'orthogonalité entre la tangente et le rayon.

B.— LE PRINCIPE DE GILLES PERSONNE DE ROBERVAL (1602–1675)

"*Lorsqu'un point se déplace sur une ligne de niveau, la direction de sa vitesse est telle... qu'il y reste !*"

Exemple : Considérons la parabole de foyer F et de directrice D.
Pour tout point M de la parabole, on a l'égalité $MF = d(M, D)$.
Donc si M se déplace sur la parabole, il doit se rapprocher (ou s'éloigner) autant de F que de D.



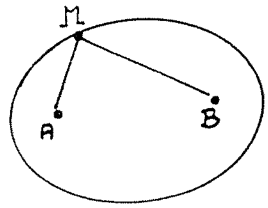


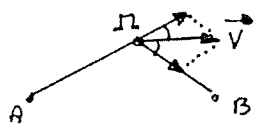
En langage moderne, les deux composantes v_1 et v_2 de la vitesse de M ont même module : il s'ensuit que la vitesse de M est dirigée selon la bissectrice de $\widehat{FMH}$, ainsi donc que la tangente.

Application à l'ellipse : Si A et B sont les foyers, pour tout point M de l'ellipse, on a :

$$MA + MB = \text{ cte.}$$

Donc si M se déplace sur l'ellipse, il doit s'éloigner autant de A qu'il s'éloigne de B (et vice versa).

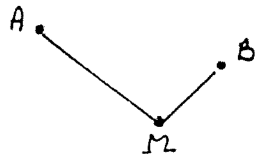


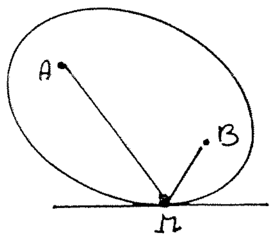


De la même façon que pour la parabole, on en conclut que la tangente est bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$.

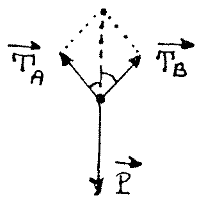
C.— UN PRINCIPE D'ÉQUILIBRE STATIQUE

Considérons une masse M pouvant glisser sur un fil inextensible AB.
A l'équilibre, M est au plus bas : la tangente en M à l'ellipse de foyers A et B est donc horizontale.





Les tensions du fil en M sont égales en module, et leur somme doit équilibrer le poids, vertical.

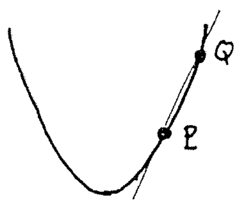


Il s'ensuit que la normale $\overrightarrow{P}$ est bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{AMB}$. Et donc que la tangente est aussi bissectrice.

Exercice 2 : Pourquoi les tensions sont-elles égales en module?

D.— LE PRINCIPE DE SHERLOCK HOLMES

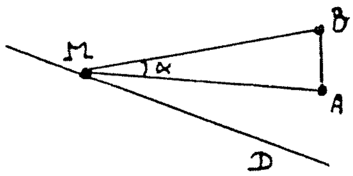
"*Quand vous avez éliminé ce qui est impossible, ce qui reste, même peu probable, doit être la vérité*".

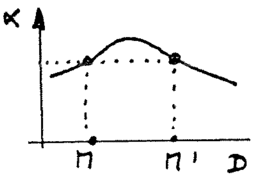


Exemple élémentaire : on cherche la pente de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point $P(1,1)$ (on suppose qu'on ne sait pas dériver...).
Si $Q\big(1+h,\ (1+h)^2\big)$ est un autre point de la parabole, la pente de (PQ) n'est sûrement pas la bonne.
Or elle vaut $\frac{(1+h)^2-1}{1+h-1} = 2 + h$ avec $h \neq 0$.

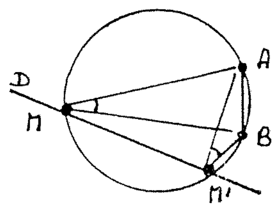
Donc, si $h \neq 0$, $2 + h$ n'est pas la pente de la tangente en P. S'il y a une réponse au problème, ce ne peut donc être que 2. Elémentaire, cher WATSON ...

Exemple géométrique : un footballeur se déplace en ligne droite. A quel moment doit-il tirer? En d'autres termes, étant donnés une droite D et deux points A et B, quel est le point M de D qui maximise la valeur α de l'angle $\widehat{AMB}$?





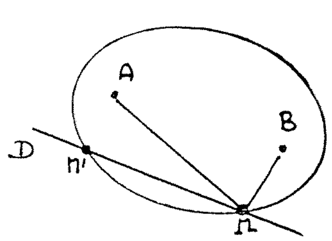
L'angle varie avec M : donc si, M étant fixé, en peut trouver M' qui donne la même valeur de α que M, le point M est à rejeter.



Or la construction géométrique d'un tel point M' est facile, pourvu que le cercle AMB coupe D.

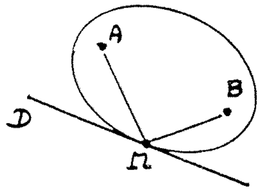
Conclusion : le seul point M possible est celui où le cercle AMB est tangent à D.

Exercice 3 : Construction géométrique de M; A, B et D étant donnés.



Application à l'ellipse : A, B et D étant donnés, on cherche le point M de D qui minimise la somme $MA + MB$. Tous les points M tels que l'ellipse de foyers A et B, passant par M, recoupe D en M' sont à rejeter, puisqu'alors $MA + MB = M'A + M'B$.

Le seul point pouvant répondre à la question est celui pour lequel l'ellipse de foyers A et B est tangente à D en M.
Dans les cas où c'est géométriquement possible (c'est-à-dire quand A et B sont hors de D, et du même côté), ce point est solution.



On sait alors, d'après le principe de Héron, que les angles d'incidence et de réflexion sont égaux...

Exercice 4 : Etant donnés trois points A, B et C, montrer que si M réalise le minimum de la somme $MA + MB + MC$, alors l'ellipse de foyers A et B passant par M est tangente au cercle de centre C passant par M.
En déduire la valeur des angles $\widehat{AMB}, \widehat{BMC}, \widehat{CMA}$, puis une construction à la règle et au compas de M.

Sources bibliographiques :
Mathématiques et formes optimales – S. HILDEBRANDT & A. TROMBA – Belin (1986).
Initiation à la géométrie – F. BORCEUX – Ciaco (1986).
Les mathématiques et le raisonnement plausible (*) – G. POLYÀ – Gauthier-Villars (1958).
Calculus : an historical approach – W.- M. PRIESLEY – Springer (1979).

VOUS ÊTES FANA DES PAVAGES DE PLAN

Vous pouvez lire "*Tilings and patterns*" de GRÜNBAUM et SHEPHARD, 700 pages en anglais : une somme sur la question : toutes les démonstrations et un nombre impresionnant d'exercices pour occuper vos loisirs. A recommander pour un 2^e cycle de fac.

Plus modestement, pour 25 F, vous commandez le numéro spécial "*Symétrie*" du 'Plot'. En vente à la bibliothèque de l'IREM (uniquement pour les personnes résidant en Alsace). Des idées pour animer vos classes de la 4^e à la terminale.

(*) Disponible à la Bibliothèque de l'I.R.E.M.