PROBLÈME 2

Proposé par D. DUMONT

Enoncé

Pour $n \geq 1$, on appelle u_n le nombre égal à n si n est impair, et à $-3p(n)$ si n est pair, où $p(n)$ désigne le plus grand diviseur impair de n. Posant

$$s_n = u_1 + \cdots + u_n,$$

montrer que $|s_n| \leq n$, et trouver tous les n pour lesquels $|s_n| = n$.

Solution proposée par R. ANDRÉ-JEANNIN de Sfax en Tunisie. (L'auteur nous a proposé une solution plus courte.)

On se propose de montrer le résultat suivant :

Théorème :
Pour tout $n \geq 1$ on a $|S_n| \leq n$, et $|S_n| = n$ si et seulement si $n = 1$ ou si il existe $m \geq 2$ tel que $n = 2^m - 2$. Dans ce cas $s_n = -n$.
La démonstration se fait en plusieurs étapes. Dans toute la suite on pose : $\sigma(n) = p(1) + p(2) + \cdots + p(n)$.

Propriété 1 :
Pour r impair et $k \geq O$ on a :

$$\sigma(2^k r) = \frac{r^2(4^k - 1)}{3} + \sigma(r) \tag{1}$$

Démonstration :
Par récurrence sur k. La propriété est évidente pour $k = 0$, supposons la vérifiée jusqu'à l'ordre k.
Remarquons que pour $m \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}\sigma(2m) &= 1 + 3 + \cdots + (2m-1) + p(2) + p(4) + \cdots + p(2m) \\ &= m^2 + p(1) + p(2) + \cdots + p(m) = m^2 + \sigma(m)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\sigma(2^{k+1} r) &= \sigma(2.2^k r) \\ &= 4^k r^2 + \sigma(2^k r) \\ &= 4^k r^2 + r^2 \frac{(4^k - 1)}{3} + \sigma(r) \\ &= \frac{(4^{k+1} - 1) r^2}{3} + \sigma(r).\end{aligned}$$

La propriété est encore vraie à l'ordre $k+1$.

Remarque :
En posant $n = 2^k r$, (1) peut s'écrire :

$$\sigma(n) = \frac{n^2 - p(n)^2}{3} + \sigma(p(n)) \tag{2}$$

Propriété 2 :
Soit r impair, $r \geq 3$. On a :

$$r^2 + r + 3 \leq 3\sigma(r) \leq r^2 + 2r \tag{3}$$

et

$$3\sigma(r) = r^2 + 2r \text{ si et seulement si } r = 2^m - 1 \quad (m \geq 2)$$
$$3\sigma(r) = r^2 + r + 3 \text{ si et seulement si } r = 2^m + 1 \quad (m \geq 1)$$

Démonstration :
Soit $r = r_0 \geq 3$ impair. Considérons l'algorithme :

$$\begin{array}{llllll}
 & r_o - 1 = & 2^m r_1 & n_1 \geq 1 & r_1 = p(r_o - 1) \\
\text{Si } r_1 \neq 1 & r_1 - 1 = & 2^{n_2} r_2 & n_2 \geq 1 & r_2 = p(r_1 - 1) \\
\vdots & \vdots & & & \\
\text{Si } r_i \neq 1 & r_i - 1 = & 2^{n_{i+1}} r_{i+1} & n_{i+1} \geq 1 & r_{i+1} = p(r_i - 1)
\end{array}$$

La suite r_i est strictement décroissante. Il existe donc un entier $k \geq 0$ tel que $r_k > 1$ et

$$r_k - 1 = 2^{n_{k+1}} r_{k+1} \text{ avec } r_{k+1} \text{ et } n_{k+1} \geq 1.$$

On a alors d'après (2) pour $0 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
\sigma(r_i) = r_i + \sigma(r_i - 1) &= r_i + \frac{(r_i - 1)^2 - r_{i+1}^2}{3} + \sigma(r_{i+1}) \\
&= \frac{r_i^2 - r_{i+1}^2 + r_i + 1}{3} + \sigma(r_{i+1}).
\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre les égalités précédentes $(0 \leq i \leq k)$ on obtient :

$$\sigma(r_o) = \frac{r_0^2 - r_{k+1}^2 + r_0 + r_1 + \cdots + r_k + k + 1}{3} + \sigma(r_{k+1}).$$

Or, $r_0 = r$, $r_{k+1} = \sigma(r_{k+1}) = 1$, permettent d'écrire :

$$\sigma(r) = \frac{r^2 + r + r_1 + \cdots + r_k + 3 + k}{3} \tag{4}$$

(4) montre d'abord que :
$\sigma(r) \geq \frac{r^2+r+3}{3}$, l'égalité étant atteinte si et seulement si $k = 0$, autrement dit $r_0 = 1 + 2^{n_1} \quad (n_1 \geq 1)$.
Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} r_0 - 1 &\geq 2r_1 \\ r_1 - 1 &\geq 2r_2 \\ &\vdots \\ r_{k-1} - 1 &\geq 2r_k \\ r_k - 1 &\geq 2 \end{aligned} \tag{5}$$

En ajoutant membre à membre on obtient : $r_1 + \cdots + r_k \leq r - k - 3$, l'égalité étant atteinte si et seulement si les équations (5) sont des égalités, autrement dit si $r = 2^m - 1 \quad (m \geq 2)$.
On peut donc écrire d'après (4) : $\sigma(r) \leq \frac{r^2+2r}{3}$, l'égalité étant atteinte pour $r = 2^m - 1$.

Propriété 3 :
Pour r impair et $k \geq 1$, $S(2^k r) = r^2 - 3\sigma(r)$ (avec $S(n) = u_1 + \cdots + u_n$ la suite de l'énoncé).

Démonstration :
Pour $m \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} S(2m) &= 1 + 3 + \cdots + (2m-1) - 3\big(p(2) + \cdots + p(2m)\big) \\ &= m^2 - 3\sigma(m) \end{aligned}$$

D'où en utilisant (1) :

$$\begin{aligned} S(2^k r) = S(2.2^{k-1} r) &= 4^{k-1} r^2 - 3\sigma(2^{k-1} r) \\ &= 4^{k-1} r^2 - r^2(4k^{-1} - 1) - 3\sigma(r) \\ &= r^2 - 3\sigma(r) \end{aligned}$$

La propriété 3 montre que pour n pair $S(n)$ ne dépend que de $p(n)$.

Propriété 4 :
Pour $n \geq 1$ on a :

$$-2n \leq S(2n) \leq -2 \tag{6}$$

$S(2n) = -2n$ si et seulement si $n = 2^m - 2 \quad (m \geq 2)$.

Démonstration :
Posons $n = 2^k r$, $r = p(n)$. La propriété 3 montre que :

$$S(2n) = S(2^{k+1} r) = r^2 - 3\sigma(r)$$

si $r = 1$, $S(2n) = S(2^{k+1}) = -2$, d'où $S(2) = -2$.

Si $r \geq 3$ on a d'après (3)

$$-2n \leq -2r \leq S(2n) \leq -r - 3 \leq -6.$$

De plus $S(2n) = -2n$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow n = r \text{ et } r = 2^m - 1 \text{ (d'après la propriété 2)} \\ &\Longleftrightarrow 2n = 2^{m+1} - 2 \quad (m \geq 2) \end{aligned}$$

Remarquons aussi que $S(2n) = -r - 3$ lorsque $r = p(n) = 2^m + 1 \quad (m \geq 1)$.
Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème cité au début. En effet le cas de $S(2n)$ fait l'objet de la propriété 4. Il suffit de remarquer que :

$$S(2n+1) = (2n+1) + S(2n) \quad (\text{pour } n \geq 1)$$

d'où d'après (6) :

$$1 \leq S(2n+1) \leq 2n - 1$$

ce qui montre que $S(2n+1) < (2n+1)$ pour $n \geq 1$. Il est clair par ailleurs que $S(1) = p(1) = 1$, ce qui achève la démonstration.

PROBLÈME 3

Enoncé

Vrai ou faux ?

> Tout ensemble de parties de $\mathbb{N}$ qui est totalement ordonné par inclusion (ceci signifie que, deux éléments quelconques de cet ensemble étant donnés, l'un des deux est toujours inclus dans l'autre) est fini ou dénombrable.

Donner une démonstration ou un contre exemple.

Indication

L'assertion est fausse.

PROBLÈME 4

Enoncé

Trouver tous les réels $a > 0$ tels qu'il existe, dans l'espace euclidien usuel muni d'un repère orthonormé, un cube de côté a et dont les sommets ont toutes leurs coordonnées entières.