UNE TRANCHE DE VIE

N.D.L.R. : Nous remercions '*Pour la Science*' d'avoir bien voulu nous autoriser à reproduire le texte ci-après paru en avril 1982. Nous signalons que '*Pour la Science*' publie régulièrement des articles sur les mathématiques et que la Société Mathématique de France à décerné à cette revue le Prix d'Alembert en 1986 pour sa contribution à la diffusion de la pensée mathématique en France.

Théo : Mon problème de recherche est dans une impasse.

Cantorbaki : Lequel? Celui sur les nombres premiers mon petit Théo?

Théo : Oui... Je suis en train de le démontrer pour chaque nombre premier en utilisant l'article de RAMDY et HARAMANUJAN...

Cantorbaki : Vous voulez dire *La liste complète de tous les nombres premiers. Journal de l'infini*, volume 173 et suivant?

Théo : Oui : Mais ils n'ont publié juqu'à présent que les nombres premiers pairs !

Cantorbaki : J'ai reçu une lettre d'HARAMANUJAN il y a quelques semaines. Il disait qu'ils avaient bien commencé avec 2, qui est premier naturellement, et qu'ils avaient décidé d'étudier tous les nombres premiers pairs. Il dit qu'ils ont été jusqu'à 1 355 579 014 264 890 988 mais n'ont pas trouvé d'autres premiers pairs !

Théo : Peut-être n'y a-t-il pas d'autres nombres premiers pairs?

Cantorbaki : Mais que faites-vous du théorème de DIRICHLET,— vous savez celui qui dit qu'il y a une infinité de nombres premiers dans n'importe quelle progression arithmétique? Les nombres pairs ne forment-ils pas une progression arithmétique?

Théo : Je le pense. J'ai oublié la plupart de ce que j'ai appris à l'école. C'est très troublant.

Cantorbaki : DIRICHLET a peut-être fait une erreur?

Théo : Cela semble peu probable. Peut-être pourrions-nous démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers pairs?

Cantorbaki : Vous voulez dire en modifiant la démonstration d'EUCLIDE pour les nombres premiers quelconques?

Théo : Exactement. Travaillons seulement avec les nombres premiers pairs et voyons ce qui se passe. Supposons qu'il y en a un nombre fini.

Cantorbaki : On en connaît déjà un : 2.

Théo : Donc supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers pairs plus grands que 2. Disons $p_1 \dots p_n$. Et maintenant? EUCLIDE forme le nombre

$p = p_1 p_2 \dots p_n + 1$, etc.

Cantorbaki : Cela ne marche pas : il est impair.

Théo : C'est foutu...

Cantorbaki : Non ! Pourquoi ne poserait-on pas $P = p_1 p_2 \dots p_n + 2$?

Théo : OK. Alors P est pair et il doit être divisible par quelque nombre pair, disons q. Et q ne peut être aucun des p_1 car ils donnent 2 lorsqu'on divise P par ceux-ci...

Cantorbaki : ...et q ne peut être 2 car si 2 divise P alors il divise aussi p_1 ... qui est premier et plus grand que 2.

Théo : Par conséquent q est un nombre premier pair différent de 2, $p_1, \dots p_n \dots$

Cantorbaki : ...contrairement à l'hypothèse. Il doit donc exister une infinité de nombres premiers pairs.

Théo : Je pense que cela marche. DIRICHLET avait raison après tout.

Cantorbaki : Je vais en parler à André...

Théo : J'aimerais tant qu'il m'aide dans mon vrai problème.

Cantorbaki : Quel est votre vrai problème?

Théo : Euh... bon, je pense que ma petite amie est...

Cantorbaki : Non; votre problème de recherche.

Théo : Ah oui. C'est une espèce de réciproque de la conjecture de GOLDBACH.

Cantorbaki : Vous voulez dire : "*que tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers*"?

Théo : Oui. Je veux démontrer que tout nombre premier est la somme de deux nombres pairs. Vous voyez si je peux le démontrer, alors...

Cantorbaki : C'est sûrement faux? Que faites-vous de 3? Si 3 est la somme de deux nombres pairs alors l'un est 2... donc l'autre est 1. Et 1 est impair.

Théo : Voilà où je bute...

Cantorbaki : Vous avez besoin d'autres hypothèses. Pourquoi ne pas supposer que vos nombres premiers sont pairs?

Théo : J'y ai pensé. Mais supposons que l'on prenne un nombre premier pair et supposons que $q = x + y$ avec x et y pairs, disons $x = 2u$ et $y = 2v$. Alors $q = 2(u + v)$, donc 2 divise q. Mais q est premier : contradiction !

Cantorbaki : Donc votre hypothèse est réfutée pour les nombres premiers pairs.

Théo : Vraiment? Je n'en suis pas si sûr...

Cantorbaki : Cela signifie qu'il vous suffit d'étudier les nombres premiers impairs.

Théo : Mais je ne peux attendre RAMDY et HARAMANUJAN pour les avoir...

Cantorbaki : Bien. Mais vous l'avez établi pour la moitié des cas possibles.

Théo : Plus trois que vous avez fait.

Cantorbaki : Alors écrivez et publiez. De cette façon si vous réussissez à démontrer le théorème avec les nombres impairs, cela vous fera deux articles. De nos jours avec cinq articles et vous êtes maître-assistant, 15 articles, maître de conférence.

Théo : Attendez, attendez. Quand dans notre démonstration, avons-nous fait l'hypothèse que q est pair?

Cantorbaki : Où nous avons - non - nous ne l'avons pas fait. La même démonstration marche aussi pour les premiers impairs !

Théo : Je le vois maintenant. Réfutation de la réciproque de la conjecture de GOLDBACH par Théo.

Cantorbaki : et CANTORBAKI.

Théo : Oui. On pourrait le publier dans les Compte-Rendus

Cantorbaki : Le Bulletin

Théo : Le Journal...

Cantorbaki : Les Annales...

Théo : Quelles références !

Cantorbaki : Du calme ! du calme... Je dois en parler à Pierre.

Théo : On pourrait le présenter au congrès international, on aurait peut-être une médaille Field.

Cantorbaki : Deux médailles Field.

Théo : Je serais immédiatement professeur et alors je roulerais sur l'or.

Cantorbaki : Vraiment?

Théo : Et je n'aurais même pas à écrire 31 thèses...

Cantorbaki : J'aurais un poste permanent à Princeton.

Théo : Comme André?

Cantorbaki : J'irais à Paris avec un emploi du temps chargé, déjeuner à la Sorbonne, dîner à l'Institut. Je pourrais même peut-être rencontrer BOURBAKI ! Oui ! Oui ! (il s'arrête soudainement soucieux). Attendez une minute. Et 2 !

Théo : 2?

Cantorbaki : 2.

Théo : Qu'y a-t-il? Allez! Allez !

Cantorbaki : $2 = 0 + 2$.

Théo : Génial !

Cantorbaki : 2 est premier. 0 et 2 sont pairs.

Théo : Ah malheur ! ...