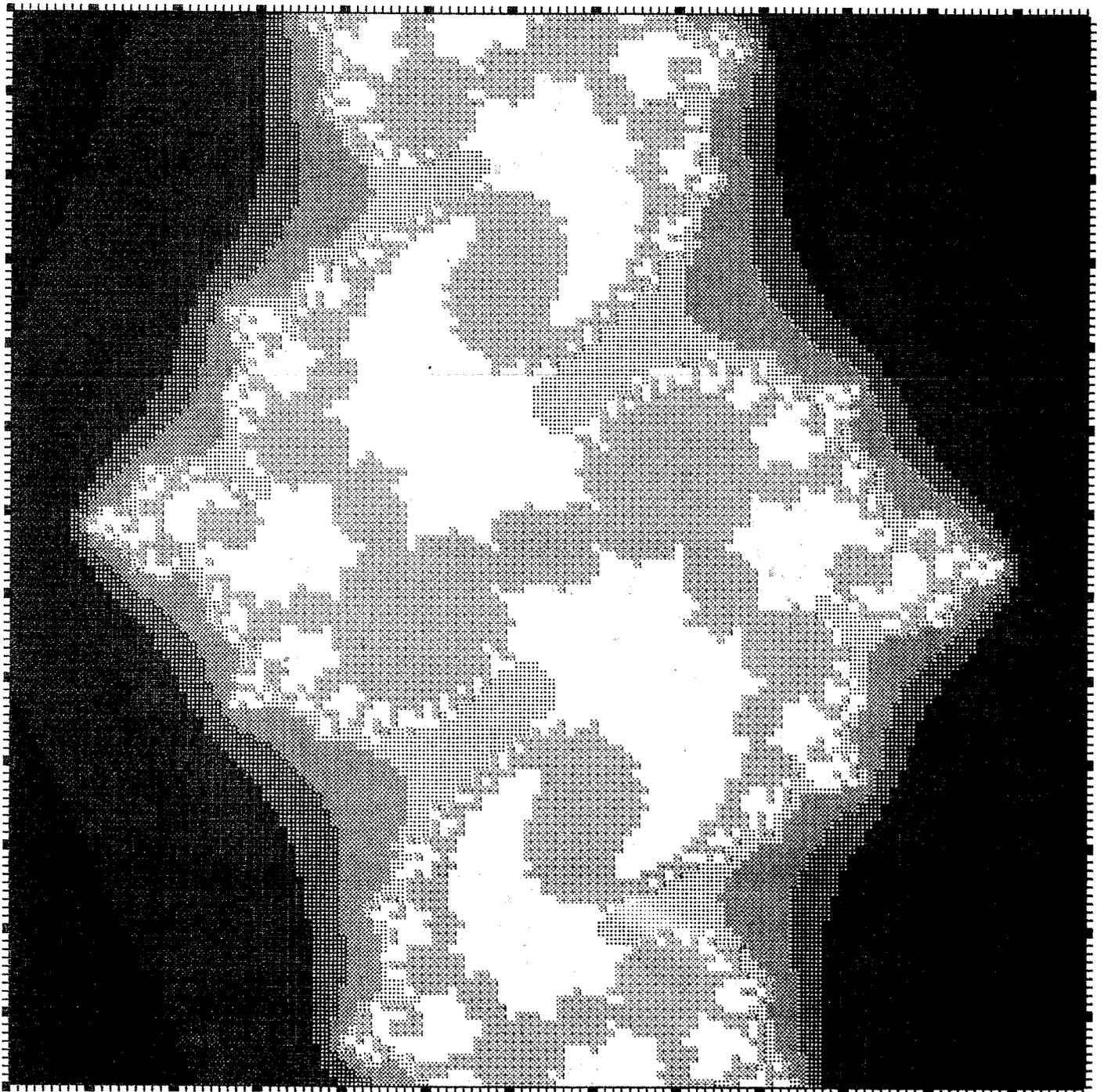


# L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG  
n° 52 - SEPTEMBRE 1988

ISSN 0290-0068



## NOTRE COUVERTURE :

### LES ENSEMBLES DE MANDELBROT ET DE JULIA

Les ensembles de MANDELBROT et de JULIA sont issus de la même transformation  $T$  du plan complexe :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ Z &\longrightarrow Z^2 + c \quad c \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Quand on itère indéfiniment cette transformation, on constate que le module du résultat peut être fini ou infini. Compte tenu de la forme de la transformation, deux cas peuvent être envisagés :

1) On fixe le  $Z$  initial à zéro et on cherche les valeurs de  $c$  pour lesquelles une infinité d'itérations de  $T$  fournit un résultat de module fini.

L'ensemble des images de  $c$  forme alors dans le plan complexe l'ensemble de MANDELBROT.

2) On fixe  $c$  et on cherche les valeurs de  $Z$  initial pour lesquelles une infinité d'itérations de  $T$  fournit un résultat de module fini. L'ensemble des images des  $Z$  ainsi obtenu forme alors dans le plan complexe l'ensemble de JULIA relatif à la valeur du paramètre  $c$  initialement choisie.

On constate qu'il existe un seul ensemble de MANDELBROT mais une infinité d'ensembles de JULIA suivant les valeurs attribuées à  $c$ .

Ces définitions, purement mathématiques, des ensembles de MANDELBROT et de JULIA doivent être précisées dès lors que l'on envisage un traitement informatique.

En particulier, il faut donner un sens au mot *fini* et *infinité d'itération* :

- pour *fini* on se contentera de vérifier que le module de  $Z$  est inférieur à deux ;
- pour *infinité d'itérations* on prendra un grand nombre d'itérations (500 à 1000 en général).

Afin d'obtenir des représentations graphiques parlantes on ne se contente pas de représenter uniquement les ensembles susnommés, on représente à l'aide de couleurs différentes les zones du plan complexe pour lesquelles après  $k$  itérations de  $T$  ( $k = 10, 100, 200, 300, 400 \dots$ ) on obtient un résultat fini. Quand on ne dispose pas de couleur, on peut obtenir un effet de courbes de niveaux en provoquant un changement de couleur noir/blanc pour certaines valeurs de  $k$ .

Dans le même ordre d'idée, on peut utiliser le nombre  $k$  d'itérations nécessaires pour dépasser 2 en module pour représenter une altitude et donc obtenir des ensembles de MANDELBROT ou JULIA en *relief*.

Jean DREYER.

## EDITORIAL

A la vue de ce numéro en couleurs, je connais un certain nombre de collègues qui vont s'exclamer : "*c'est pour ça que les tarifs ont augmenté!*" Eh bien, ces collègues se trompent. Ce n'est pas la première fois (ni la dernière, nous l'espérons) que '*L'Ouvert*' se présente sous une forme un peu exceptionnelle, forme qui nécessite un investissement plus important que d'habitude. Mais ceci ne peut être que rarissime, sinon les finances de la régionale APMEP et/ou de l'IREM seraient mises à mal.

Nous cherchons actuellement à rationaliser la politique d'abonnement de façon à en simplifier la gestion. Par exemple, par souci d'honnêteté, nous répercutons auprès des abonnés alsaciens la faiblesse des frais d'expédition dûe à l'utilisation de la franchise postale pour l'académie... Nous nous sommes rendus compte que cela compliquait la tâche de notre secrétaire pour une différence de coût minime. Aussi cette distinction va-t-elle disparaître.

D'aucuns critiqueront notre façon de modifier petit à petit les règles; à notre décharge, nous leur disons que nous ne sommes pas des spécialistes en techniques de gestion et que nous sommes prêts à utiliser les compétences de ceux (ou celles) qui le sont.

P.S. : C'est avec beaucoup de plaisir que nous avons reçu de membres de l'APMEP des lettres nous disant ne plus vouloir se réabonner en raison du niveau trop élevé de '*L'Ouvert*'. Prendre le temps d'écrire un tel mot, c'est manifester un soutien tout à fait désintéressé à notre revue. Nous ne pouvons qu'encourager de tels collègues à s'abonner au '*Plot*' ou à '*Tangente*' (si ce n'est déjà fait).

*'L'Ouvert'*

## SOMMAIRE

N° 52 – 1988

◇ <i>Notre couverture : Les ensembles de MANDELBROT et de JULIA</i> .....	I
◇ <i>Editorial :</i> .....	II
◇ <i>La restitution graphique des images numériques, par T. HATT</i> .....	1
◇ <i>La grande saga des calendriers, par J. LEFORT</i> .....	21
◇ <i>La démonstration : calcul et/ou raisonnement, par J. LUBCZANSKI</i> .....	27
◇ <i>Géométrie de 4<sup>e</sup> autour d'un logiciel, par le Groupe Intelligence Artificielle</i>	32
◇ <i>A vos stylos, par 'L'Ouvert'</i> .....	41
◇ <i>Sommaire</i> .....	III

### L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication :* J. LEFORT
- ◇ *Correspondance à adresser à :*  
Université Louis Pasteur  
Bibliothèque de l'I.R.E.M.  
10, rue du Général Zimmer  
67084 STRASBOURG Cédex  
Tél. : 88-41-64-40
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels) :*  
50.-F pour les membres A.P.M. d'Alsace  
90.-F pour l'Alsace  
120.-F pour les autres départements  
110.-F pour l'étranger  
Chèque à l'ordre de Mr l'Agent  
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
- ◇ *Prix du numéro :* 25.- F

# LA RESTITUTION GRAPHIQUE DES IMAGES NUMÉRIQUES

## Quelques techniques pour la classe

Thierry HATT

Les techniques présentées ici ont été expérimentées en classe d'histoire-géographie au lycée Fustel de Coulanges de Strasbourg depuis cinq ans, essentiellement dans le cadre d'un travail de recherche INRP d'introduction de la télédétection satellitaire.

Ce travail avait plusieurs objectifs en relation avec l'image :

— Initiation des élèves aux méthodes graphiques et cartographiques de traitement de l'information en utilisant le support informatique disponible au lycée, outil efficace de production graphique.

— Apprentissage des règles de construction des images analogiques à partir des images numériques.

Tout graphique est une construction : à partir d'images numériques identiques il est *facile* de construire des images analogiques très différentes. Il importe de mettre en évidence les règles statistiques et graphiques de construction.

L'ordinateur permet de mettre en valeur à grande vitesse et visuellement les conséquences des choix techniques et constitue ainsi un outil privilégié d'apprentissage par l'**expérimentation**. Ce caractère expérimental est tout-à-fait nouveau dans des disciplines comme la géographie.

— Mettre les élèves en situation de **production** de documents graphiques de qualité professionnelle. La micro-informatique apporte ici à l'évidence une situation nouvelle. En effet la qualité *professionnelle* de construction d'images publiables peut être déléguée au logiciel. Certains choix initiaux restent évidemment à faire, leur importance dépend des objectifs pédagogiques et du niveau de la classe. Le logiciel de traitement graphique peut aussi servir à l'enseignant pour produire des documents de T.P., selon les règles qu'il spécifie, sans qu'il soit obligé de se plier à des règles voulues par d'autres.

— Mettre les élèves en situation de recherche scientifique avec des outils de traitement évolués sur des images de taille significative : il est facile sur les micro-ordinateurs actuels de travailler sur des images de l'ordre de 64 K octets soit  $\# 256 \times 256$  pixels. L'informatique permet de placer les élèves en situation de recherche vraie : par exemple extraction d'informations d'une image satellitaire : types de culture, type d'emprise urbaine, etc. . .

— Création des outils matériels et logiciels pour cet apprentissage. Ce travail de création **pluridisciplinaire**, conduit avec des électroniciens, des physiciens, des mathématiciens, des informaticiens, a conduit à mettre au point des outils d'EAO ("*Voici Mona Lisa*" : apprentissage sur MO5 de la notion de table de transcodage), de traitement d'images satellitaires (Turbo-Télédao sur compatible PC), d'animation d'images sous Turbo-Graphix, et un ensemble de numérisation d'images sur table traçante (logiciel Turbo-Image pour compatible PC). Avec les langages compilés du type de Turbo-Pascal les temps de traitement sont négligeables (inférieurs à 2-3 minutes pour des traitements complexes du type lissage).

Nous présentons ici, en donnant priorité à l'image, la chaîne complète de traitement qui va de la numérisation de l'image à son traitement thématique en passant par les étapes de restitution graphique.

## I.— LA NUMÉRISATION DE L'IMAGE

Dans le cas *normal* on se contente de traiter des images satellitaires fournies par des organismes comme de CNES (image Spot fig. 4). Il est aussi très intéressant de pouvoir traiter ses propres données, aussi avons nous développé au Centre Informatique et Enseignement une manipulation complète de numérisation qui nous permet de traiter nos propres images numériques. Ce point est très important du point de vue pédagogique : la numérisation de portraits ou de photos aériennes de lieux connus des élèves les motive énormément.

Format de l'image :

Les étapes obligées de numérisation d'une scène analogique sont toujours : le balayage de la scène par un capteur muni d'une optique, la conversion analogique numérique du signal mesuré, le transfert en mémoire informatique des valeurs numériques.

Les technologies de numérisation sont très nombreuses : microdensitomètres, analyseurs à balayage par miroir ou par faisceau de lumière, transformation de l'image optique en image électronique, réseaux de capteurs linéaires ou bi-dimensionnels type CCD, etc. . .

Nous avons choisi de transformer une table traçante en table à numériser, le porte-plume assurant le déplacement d'une photodiode munie d'une optique. Le pas de mesure est du  $1/10^{\circ}$  de mm.

Une image peut être considérée comme une fonction  $f(x, y)$  où  $(x, y)$  sont les

## RESTITUTION GRAPHIQUE DES IMAGES NUMÉRIQUES

coordonnées et  $f(x, y)$  les valeurs de luminance mesurées par le capteur.

Pour le traitement informatique les valeurs sont discrètes : fonction  $f(i, j)$  où  $i = 1, \dots, \text{Maxlignes}$ ;  $j = 1, \dots, \text{Maxcolonnes}$  et  $f(i, j)$  appartient à l'intervalle  $[0, 255]$ . Le capteur numérise l'image par un balayage ligne par ligne et la transforme en une matrice de 240 lignes, 240 colonnes maximum. Au pas de  $1/10^\circ$  de mm on peut numériser un document de  $2,4 \text{ cm} \times 2,4 \text{ cm}$ .

La luminance d'un pixel est codée entre 0 (noir mat) et 255 (blanc brillant). Chaque pixel stocké sur un octet (byte Pascal). La matrice image représente 57600 octets sauvegardée en fichier à la fin de la saisie. Il faut à peu près 25 minutes pour numériser une telle image avec ce capteur ponctuel. Le logiciel permet ensuite de représenter à l'écran l'image dans une fenêtre de  $90 \times 120$  pixels. Les fichiers images sont compatibles avec Turbo-Télédao.

### II.— ANALYSE DE LA STRUCTURE DE L'IMAGE

La structure de luminance de l'image est décrite par son histogramme (fig. 1f, 2f, 3). L'histogramme est une fonction qui donne l'effectif de chaque niveau de luminance de l'image, en abscisse les luminances  $[0, 255]$ , en ordonnées les effectifs associés.

L'histogramme donne des informations importantes sur la distribution des luminances : image sombre ou claire, contrastée ou douce, c'est-à-dire distributions asymétriques à gauche (fig. 8b de plus multi-modale), à droite (fig. 1f), bimodale (fig. 2f et 3) ou équilibrée. On peut déterminer d'un seul coup d'œil les images bien contrastées qui peuvent être binarisées de manière efficace (lettres d'un texte, feux de forêt, eaux libres, empreintes digitales...).

Bien entendu toute l'information spatiale de l'image est perdue. La plupart des méthodes d'amélioration d'image sont fondées sur l'analyse de l'histogramme pour déterminer le nombre et l'étendue des classes de restitution graphique.

### III.— LA RESTITUTION GRAPHIQUE DE L'IMAGE NUMÉRIQUE

Cette étape est évidemment indispensable, il est impossible de rien tirer de la matrice des nombres stockée en mémoire.

L'objectif est de mettre en valeur *au mieux* l'information contenue dans l'image. Chaque application a évidemment ses propres critères d'utilité : décodage de code barre, numérisation de texte, repérage d'outils sur une bande transporteuse, détermination de formules chromosomiques, renforcement de contrastes de radiographies X, segmentation d'images satellitaires, etc... les contraintes ne peuvent être les mêmes.

Aussi procède-t-on à :

A. La transformation analogique des données.

On réalise une *compression* des données : les données initiales sont étalées dans

l'intervalle théorique  $[0, 255]$ . On comprime l'image pour la ramener à 16 ou 8 niveaux de gris.

Pourquoi cette compression? Il y a deux raisons à cela :

— La première est une raison d'encombrement de l'image. Pour définir 64 niveaux de gris il faut une matrice de  $8 \times 8$  bits par pixel. Sur une imprimante à aiguilles de 72 points au pouce on ne pourra dessiner que 8 pixels au pouce soit 129 pixels par lignes, deux pages d'imprimante pour une image  $240 \times 240$ , un format d'affiche difficile à exploiter!

— La deuxième raison est liée aux capacités de l'œil humain qui possède des capacités très grandes de discrimination des couleurs mais très faibles en niveaux de gris (une douzaine sans gamme de référence). Les systèmes professionnels se contentent de 16 niveaux de gris en restitution, c'est ce que nous avons choisi.

Ce découpage en classes graphiques de l'information numérique initiale pose un certain nombre de problèmes de fond : faut-il discrétiser (dans le cas d'une variable continue) ou *surdiscrétiser* (dans le cas d'une variable initiale discrète)? Il serait techniquement possible de représenter 256 niveaux de gris, il suffirait d'une grille de  $16 \times 16$  bits par pixels. Mais on ignore quels seront les regroupements faits par le lecteur de l'image qui ne peut matériellement faire la différence entre des symboles trop proches. L'erreur cartographique serait réduite mais l'erreur de lecture par généralisation augmentée. En proposant au lecteur un regroupement en classes on oriente sa lecture, ce qui procure éventuellement un gain de lisibilité mais peut aboutir à déformer l'information initiale si les limites sont *mal* choisies.

## B. L'amélioration de l'image

Comme on l'a déjà vu les critères d'*amélioration* sont très variables, les techniques disponibles sont également très nombreuses. Il est très rare qu'une image occupe de manière uniforme l'intervalle théorique  $[0, 255]$ . La plupart des images ont des luminances concentrées dans des zones relativement étroites de l'histogramme.

*Le réétalement de dynamique :*

Une première technique consiste à procéder à un *réétalement de dynamique* (fig. 2) : on choisit des seuils qui permettent de réétaler les valeurs intéressantes pour le problème étudié (fig. 11). Il est possible de faire une coupure à gauche **ou** à droite de l'histogramme (on parle de seuillage), à gauche **et** à droite (on parle de fenêtrage) (fig. 11).

Les règles de réétalement peuvent être

— linéaires, règle bien adaptée à une distribution pas trop dissymétrique (fig. 1 et 2c) ou

— non linéaires selon la structure de l'histogramme :

— règle exponentielle pour un histogramme dissymétrique à droite (fig. 1c et 2d),

— logarithmique pour une distribution déséquilibrée à gauche (fig. 1d et 2b), de façon à favoriser la représentation des fortes ou des faibles luminances.

Les classes sont plus étroites là où la population des pixels est la plus importante.

Ce type de technique peut être comparé à l'utilisation en photographie de papiers durs ou doux pour atténuer ou renforcer les contrastes d'une image sur ou sous-exposée. Ces règles aboutissent en fait sur des distributions déséquilibrées au découpage en classes à pas constant d'une variable normalisée. On peut aussi obtenir des *effets* sur des distributions non dissymétriques (tous ces effets sont visualisés sur les figures 1 et 2).

La règle d'équipopulation :

Une règle très utile est la règle d'égalisation d'histogramme aussi appelée règle d'équipopulation : on considère que cette technique optimise l'information restituée par l'image analogique, la perte d'information représentée par le passage de 256 niveaux de luminance à 16 niveaux de gris est minimisée si les classes sont équiprobables.

Si l'image est de taille  $N_{\text{lignes}} \times N_{\text{Colonnes}}$  et que l'on dispose d'un terminal à  $N_b$  niveaux de gris, le nombre idéal de pixels par niveau sera  $M = (N_{\text{lignes}} * N_{\text{Colonnes}}) / N_b$ .

On calcule sur l'histogramme les effectifs cumulés à partir du minimum jusqu'à obtenir des sommes partielles les plus proches possible de  $M$ .

Toutes les luminances décomptées sont alors attribuées à un niveau de gris unique. La méthode permet de traiter les histogrammes multi-modaux avec toutefois deux inconvénients :

- deux images égalisées ne peuvent être comparées en termes de niveaux de gris alors qu'avec d'autres transformations on peut forcer des limites telles que les niveaux de gris représentent les mêmes luminances ;
- si l'histogramme est *trop* déséquilibré, la méthode peut échouer. De toute façon, les résultats ne peuvent être qu'approchés car les luminances ne sont pas divisibles.

Binarisation d'image.

On peut enfin réaliser sur une image une *binarisation* c'est-à-dire associer un seul niveau de sortie noir ou blanc à un intervalle de luminances. C'est le type de technique utilisé pour les lecteurs de codes barres, pour l'analyse des lettres d'un texte, l'analyse d'empreintes digitales (fig. 5), l'extraction d'une zone de végétation abîmée par un feu de forêt, l'analyse des eaux libres (fig. 4), etc. . .

C'est la technique utilisée pour représenter les courbes de Julia des figures 9 et 10. On parle de *segmentation* d'image dans le cas satellitaire.

Cette technique est aussi celle qui permet les représentations les moins encombrantes (un bit allumé ou éteint par pixel de l'image). Il faut associer alors d'autres techniques pour représenter plus d'informations : c'est ce qui a été fait pour les zooms sur l'ensemble de MANDELBROT (fig. 6).

La *luminance* d'un pixel représente en fait le nombre d'itérations qui sont nécessaires pour faire diverger le point du disque unité. On a représenté les itérations

paires en noir ce qui donne cet aspect en *courbes de niveaux*. Une binarisation pure (fig. 7, 9 et 10) ne fournit qu'une petite partie de l'information : ensemble des points ayant divergé dans un intervalle de  $K$  itérations. Quant à la représentation en 16 niveaux de gris (fig. 8), on peut voir qu'elle est beaucoup plus encombrante. La forme multi-modale de l'histogramme (fig. 8b) exigeait une technique d'équipopulation.

La technique de la table de transcodage (ou table look-up) (fig. 12).

Une table de transcodage est une fonction qui transforme une luminance de l'image en un niveau de gris donné sans transformation de la structure spatiale de l'image. Cette conversion d'une luminance en niveau de gris est réalisée par une table associative : la luminance du pixel en cours de traitement pointe sur le rang de la table de transcodage où se trouve stocké le niveau analogique de sortie (fig. 12). Cette technique est ultra-rapide sur le plan informatique, elle permet de réaliser les transformations les plus complexes de l'image (logarithme ou exponentielle par exemple) en des temps linéaires (la table de transcodage est en effet calculée **avant** le traitement analogique et seul un adressage est effectué au moment de la restitution graphique analogique).

La réalisation de compositions colorées du type de celle de la couverture est une extrapolation de cette technique : on calcule pour l'image noir et blanc à représenter trois tables de transcodage complémentaires : une table pour le jaune, une pour le cyan, une pour le magenta. L'image est ensuite éditée à l'imprimante en trois passes par lignes, une passe par couleur.

Les logiciels FastCart, Turbo-Image et Voici Mona Lisa permettent l'apprentissage de ces manipulations de table de transcodage.

### C. La restitution sur un terminal graphique.

Le principe est simple : on définit pour 16 niveaux de gris un pixel de  $4 \times 4$  bits. Sur imprimante on noircit progressivement tous les points de la matrice de 16 aiguilles, ce qui donne 17 niveaux possibles du blanc au noir. Les points doivent être définis avec certaines précautions pour éviter les effets de lignage des pixels bord à bord.

Sur l'écran les points allumés représentent, au contraire de l'imprimante, le blanc, les points éteints le noir (ce qui explique que les recopies d'écran sur l'imprimante soient indiquées comme des négatifs) (fig. 2 et 5).

Les graphiques posent toujours des problèmes de géométrie : une matrice de  $4 \times 4$  bits ne permet généralement pas d'obtenir un pixel orthonormé. Dans la boîte à outils graphique MetaWindow c'est le pixel  $4 \times 5$  qui se rapproche le plus du graphique orthonormé. Dans le cas des imprimantes on rencontre des problèmes du même type, seules des imprimantes relativement coûteuses sont capables de frapper un nombre identique d'aiguilles par unité de distance en abscisse et en ordonnée. Si on ne dispose pas de ce matériel, il faut prédéfinir des pixels graphiques dont le nombre de bits en ligne et colonne soit le plus proche possible du rapport 1.

## CONCLUSION

Les images numériques envahissent notre civilisation : images spatiales, biomédicales, robotiques, de synthèse...

Ce domaine de recherche en évolution rapide est d'une importance économique fondamentale. D'autre part, l'équipement actuel des établissements de second degré (compatibles PC, écrans et imprimantes graphiques) est particulièrement adapté à un coût pas trop élevé à des activités graphiques et cartographiques. Il peut être intéressant de faire profiter les élèves de cette évolution favorable.

---

## REMERCIEMENTS

Ce travail est largement pluri-disciplinaires et a bénéficié d'aides multiples, de mathématiciens : J. DREYER, F. PLUVINAGE, d'électroniciens : J.-M. MOREL, S. WENDLING ; du soutien du Centre Informatique et Enseignement, de l'INRP, qu'ils soient ici remerciés.

## LOGICIELS UTILISÉS

Boîtes à outils :

- Turbo-Graphix de Borland.
- MetaWindow de MetaGraphics Software.

Cartographie :

- FastCart : logiciel de cartographie écrit par P. PISANO, Université de Grenoble.

Imagerie satellitaire :

- Turbo-Télédao : logiciel de traitement d'images satellitaires écrit pour le contexte de la classe (T. HATT).

Numérisation et traitement d'images numérisées :

- Turbo-Image : ensemble logiciel et matériel de numérisation et de traitement d'images, mis au point par l'équipe J. CARDON, J. DREYER, T. HATT, J.-M. MOREL, S. WENDLING au Centre Informatique et Enseignement.
- Mzoom et Anim calcul et animation de zooms sur l'ensemble de MANDELBROT (T. HATT).

Enseignement assisté de la notion d'image numérique et de table de transcodage :

- Voici Mona Lisa : logiciel pour MO5 sous Nano-réseau, (T. HATT, édité par France Image Logiciel).

## RÉFÉRENCES

- CAUVIN (Colette) et al.- *Discrétisation et représentation cartographique*, Reclus, 1987, 116 pages.
- Collectif.- *Principes physiques et mathématiques de la télédétection*, CNES, 1983, 833 pages.
- Collectif.- *Du satellite à la classe*, in "Rencontres Pédagogiques", n° 17, 1987, 126 pages.

T. HATT

- COSTER (Michel) et al.- *Précis d'analyse d'images*, CNRS, 1985, 521 pages.
- CUQ (François).- *Téledétection du littoral saintongeais*, Ecole Normale Supérieure de Jeunes Filles, 1983, 192 pages.
- HATT (Thierry).- *Logiciel Télédao, télédétection assistée par ordinateur, logiciel de traitement d'image numérique*, Univ. L. Pasteur, IREM de Strasbourg, 1985, 124 pages.
- HATT (Thierry).- *Voici Mona Lisa*, logiciel édité par France Image Logiciel Thompson, 1986.
- HATT (Thierry).- *Image numérique et télédétection en géographie au lycée*, colloque CNAM "Du tableau noir à l'ordinateur graphique", mars 1986, 21 pages.
- HATT (Thierry).- *Images pédagogiques, images professionnelles, quelles images satellitaires pour la classe ?*, à paraître in "Revue Géographique de Lyon", dernier trimestre 1988, 38 pages.
- TOUMAZET (Jean-Jacques).- *Traitement de l'image sur micro-ordinateur*, Sybex, 1987, 238 pages.
- PISANO (Pierre).- *Développement de didacticiels en géographie*.- Mémoire de Maîtrise, USTM de Grenoble I, Institut de Géographie Alpine, 1986, 36 pages.
- PEITGEN (H.-O.) et al.- *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, 1986, 199 pages.

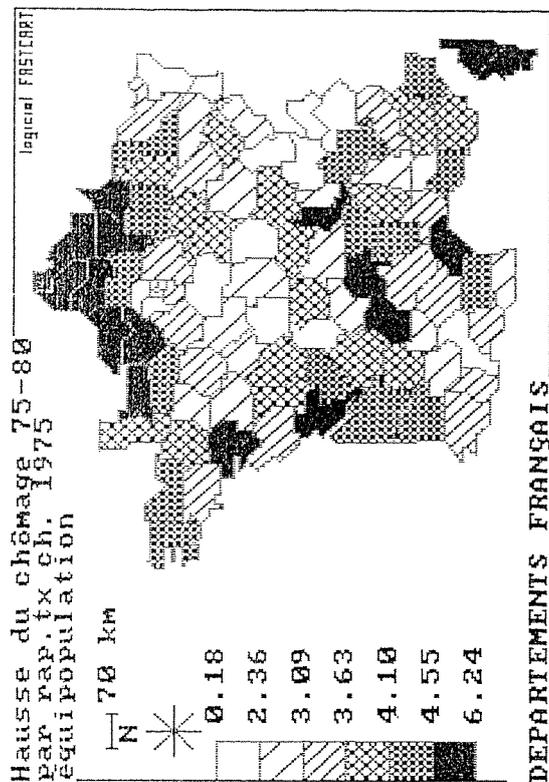


figure 1 a

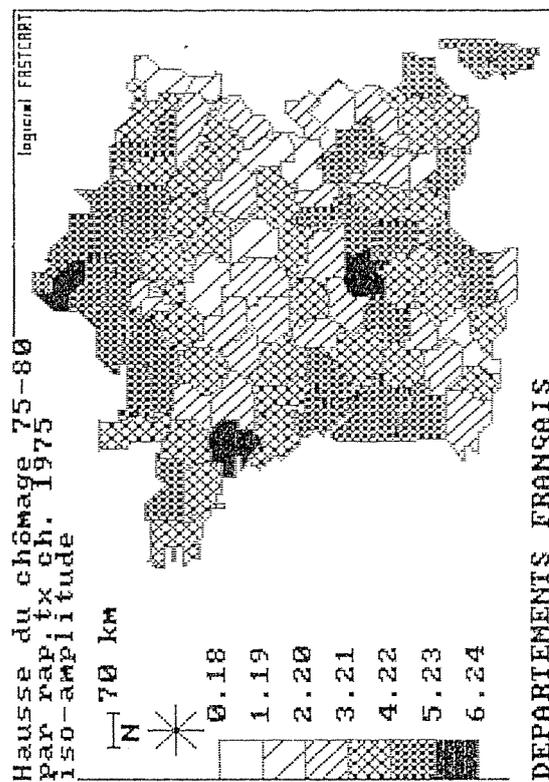


figure 1 b

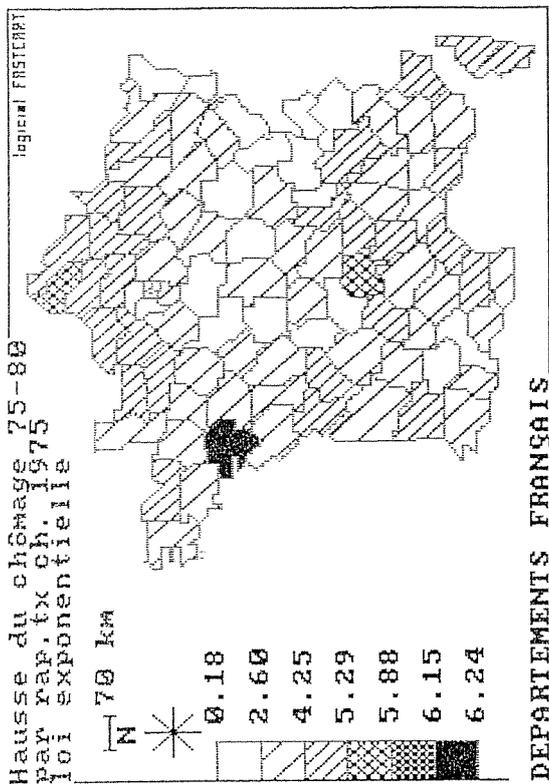


figure 1 c

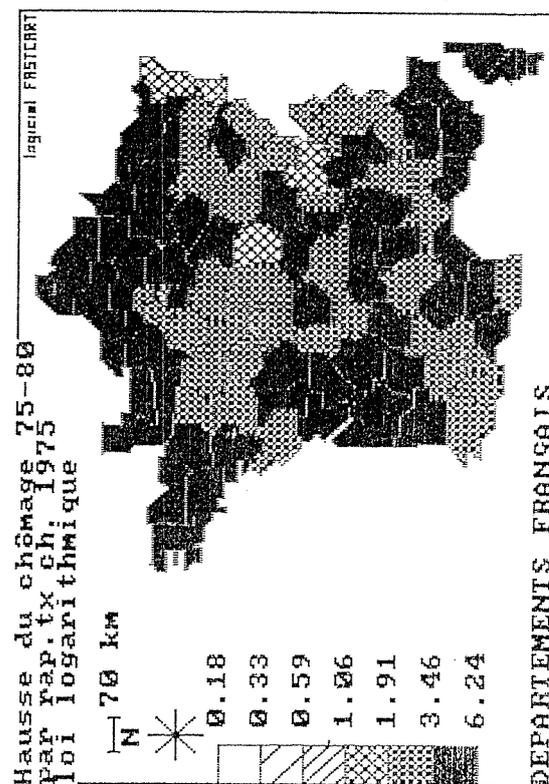
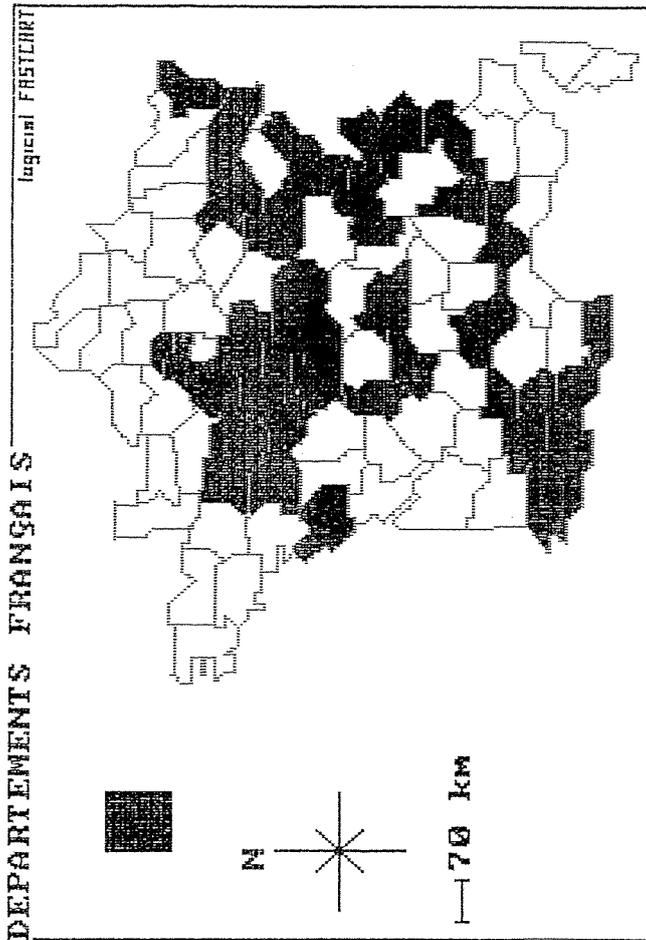


figure 1 d



DEPARTEMENTS FRANÇAIS

Un(e) Département de la couleur du carré a des valeurs comprises dans l'intervalle suivant pour: Hausse du chômage 75-80 entre 0 et 3.52 % par rapport à par rap.tx ch. 1975

figure 1 e

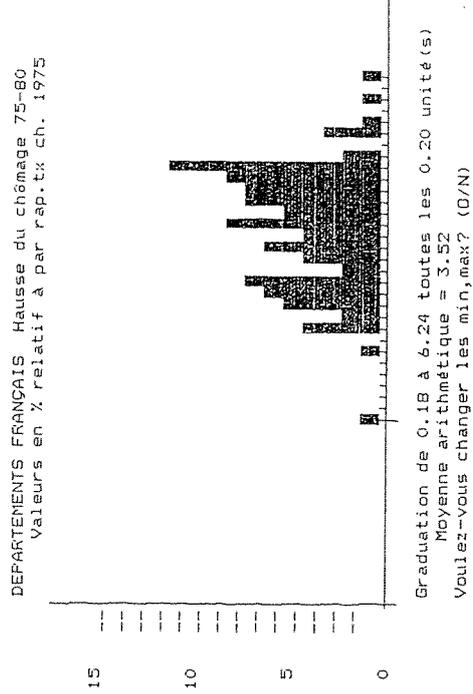


figure 1 f

RESTITUTION GRAPHIQUE DES IMAGES NUMÉRIQUES

LOI D'EQUIPOPULATION

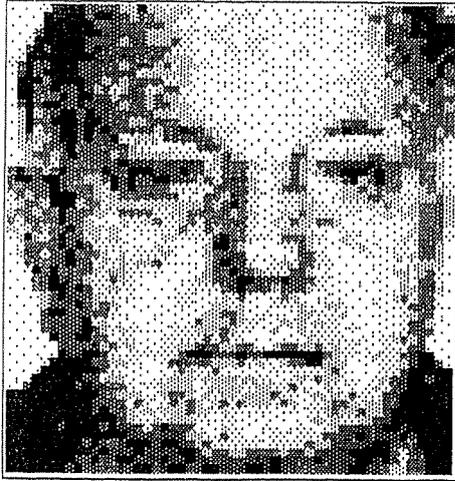


figure 2 a

LOI LOGARITHME

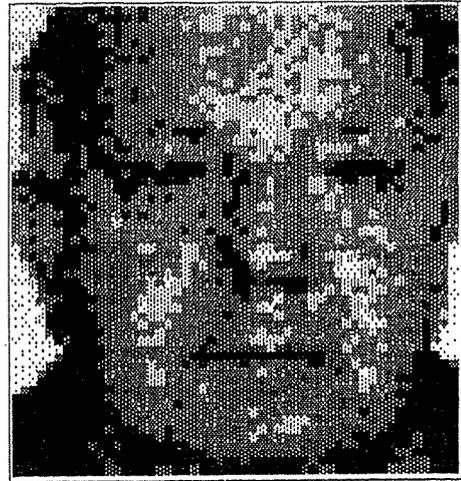


figure 2 b

LOI LINEAIRE,

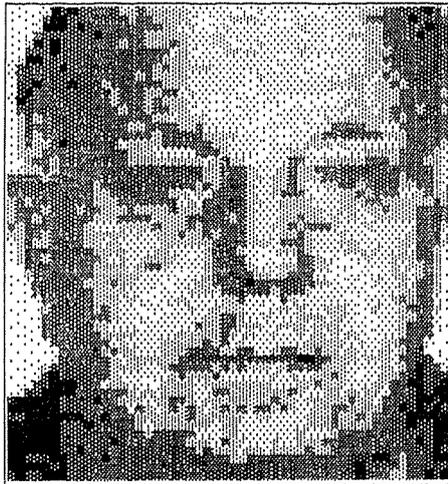


figure 2 c

LOI EXPONENTIELLE

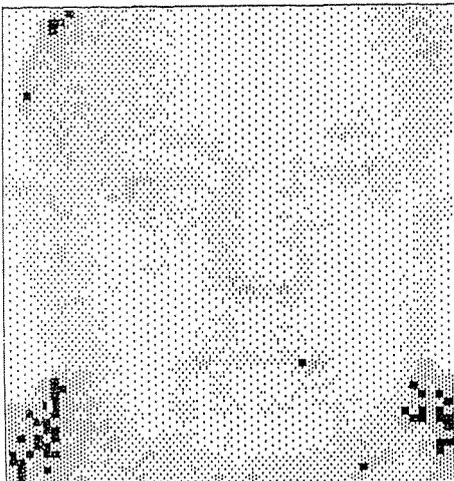


figure 2 d

LOI BINAIRE

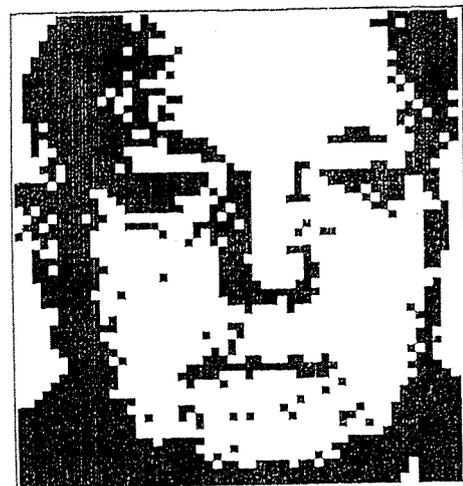
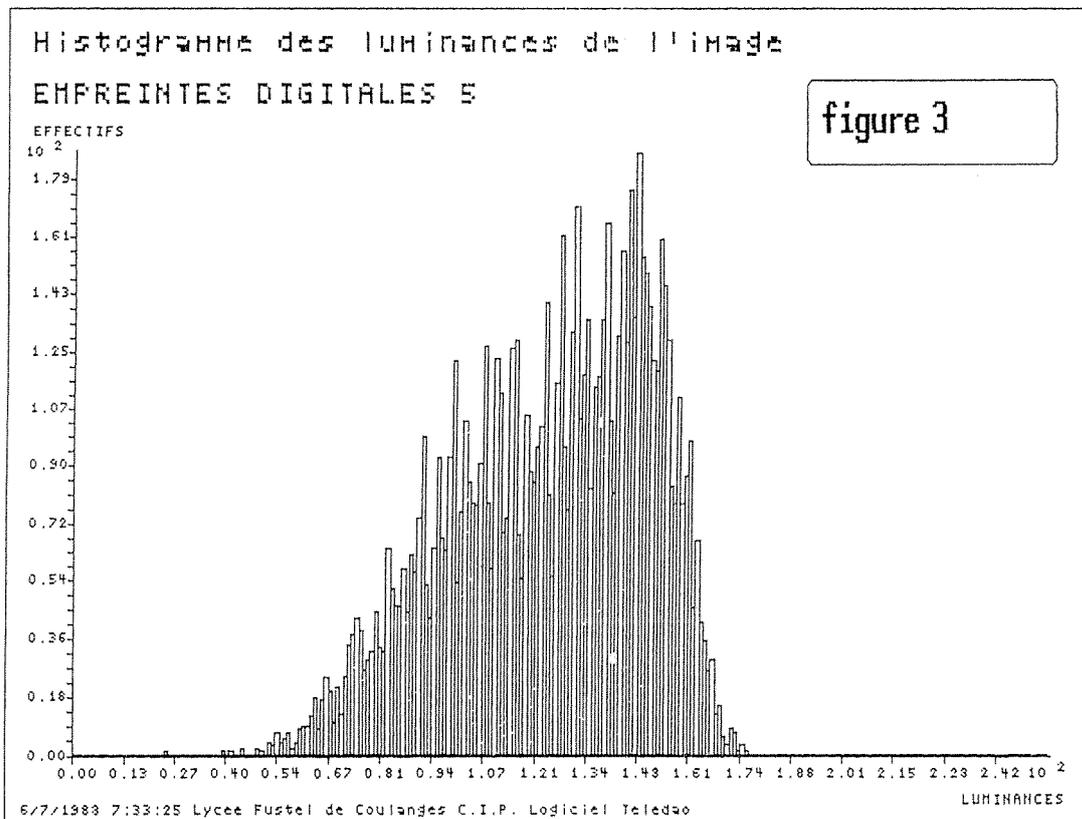
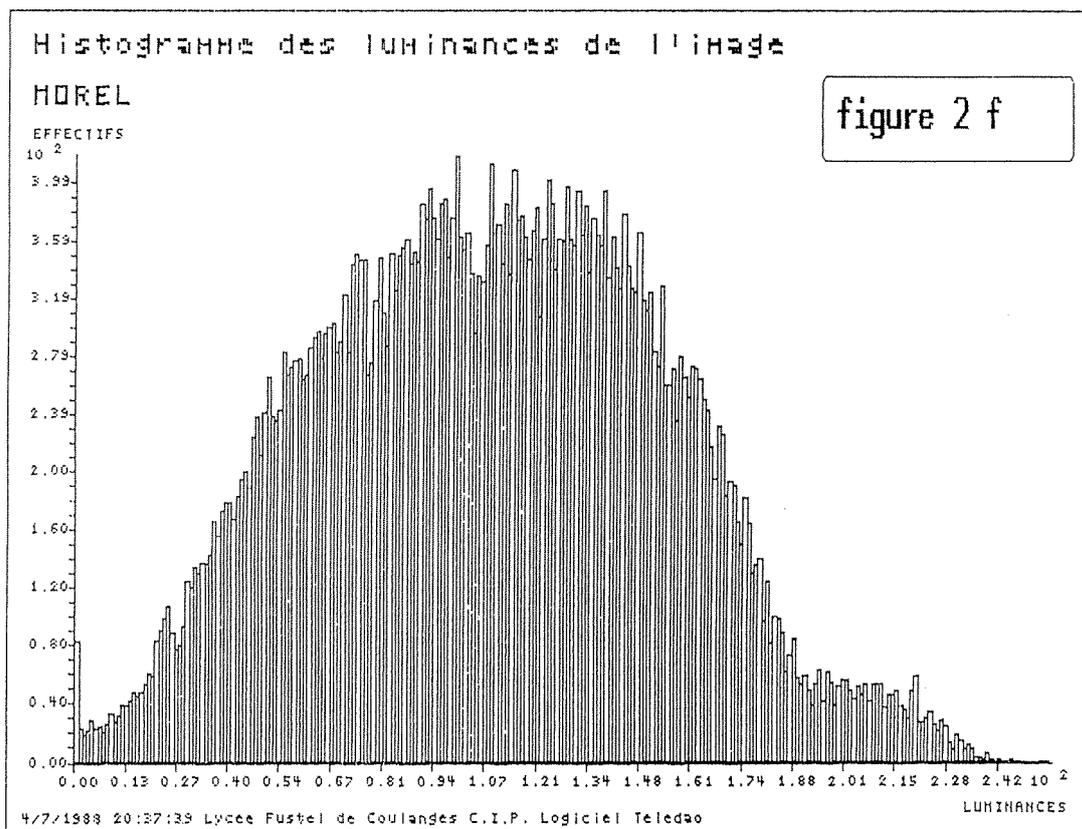
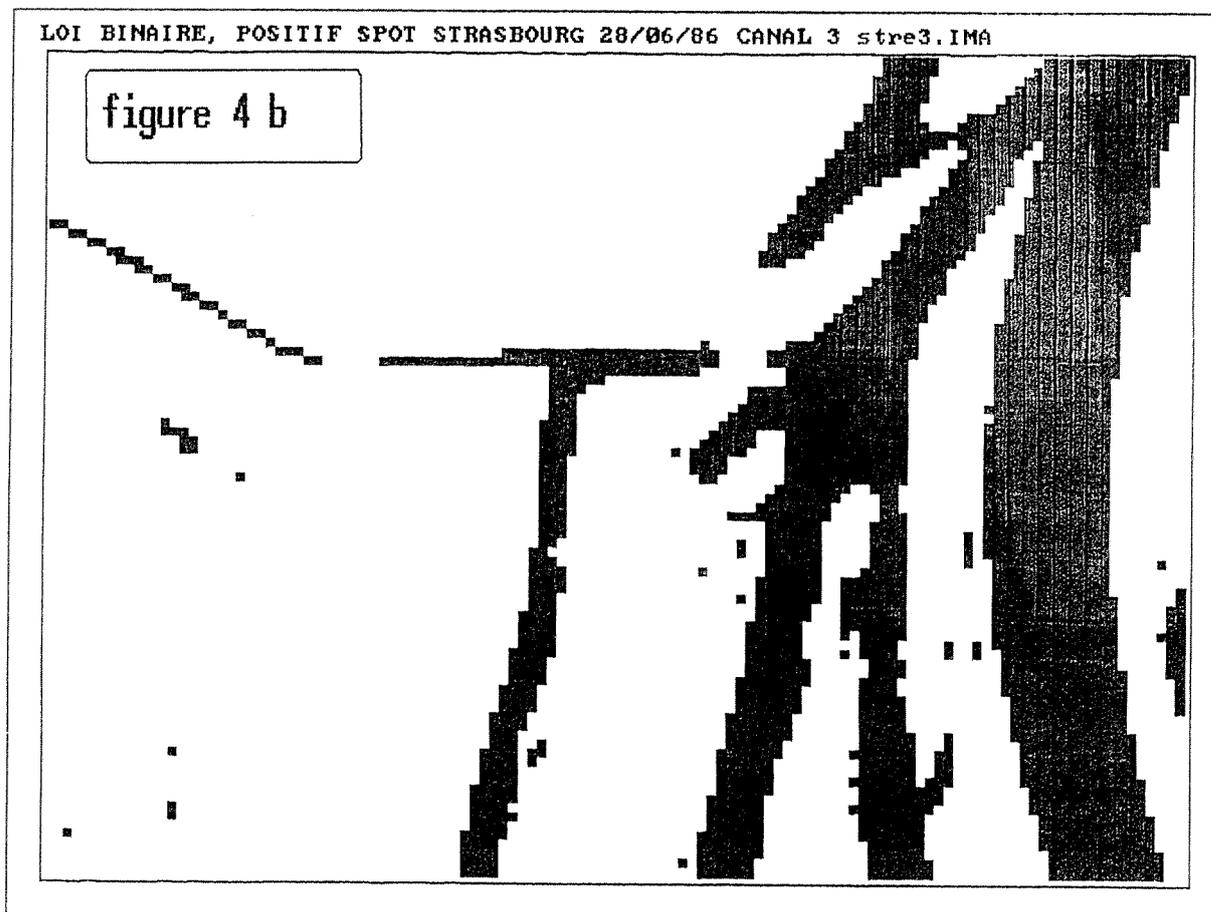
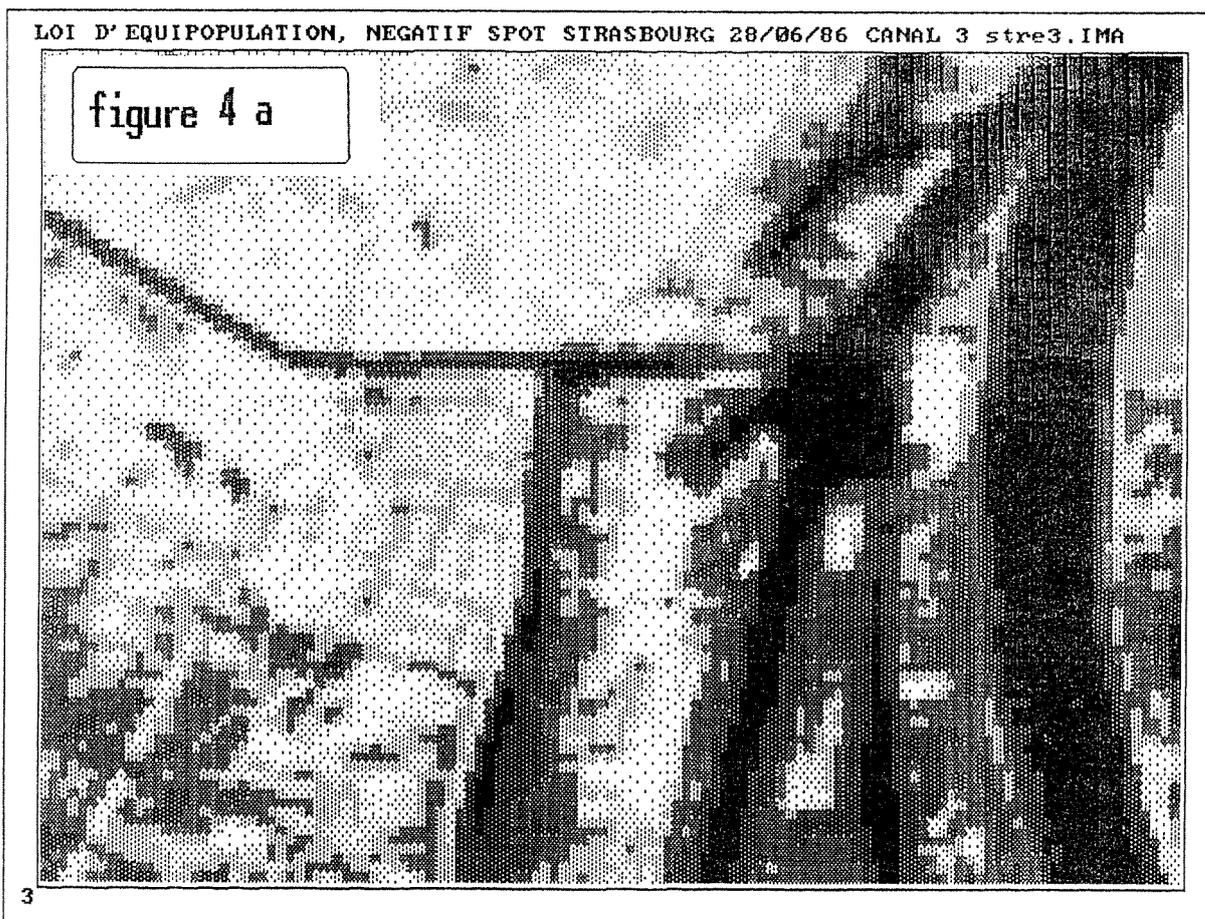


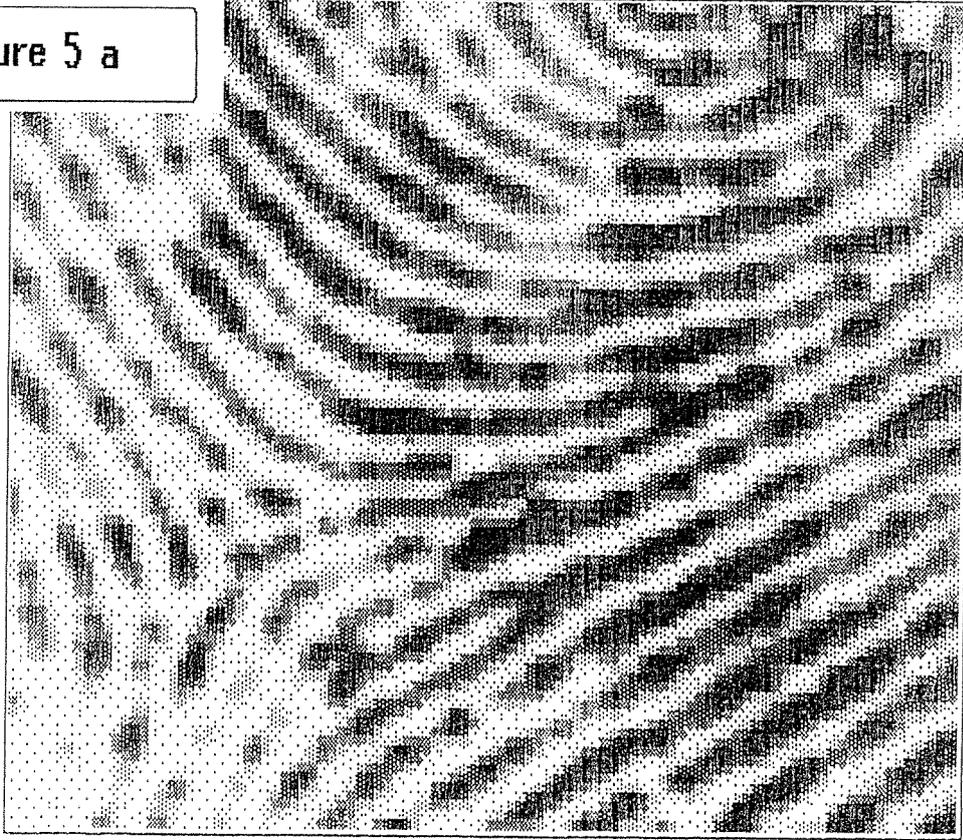
figure 2 e





LOI D'EQUIPOPULATION, NEGATIF EMPREINTES DIGITALES 5

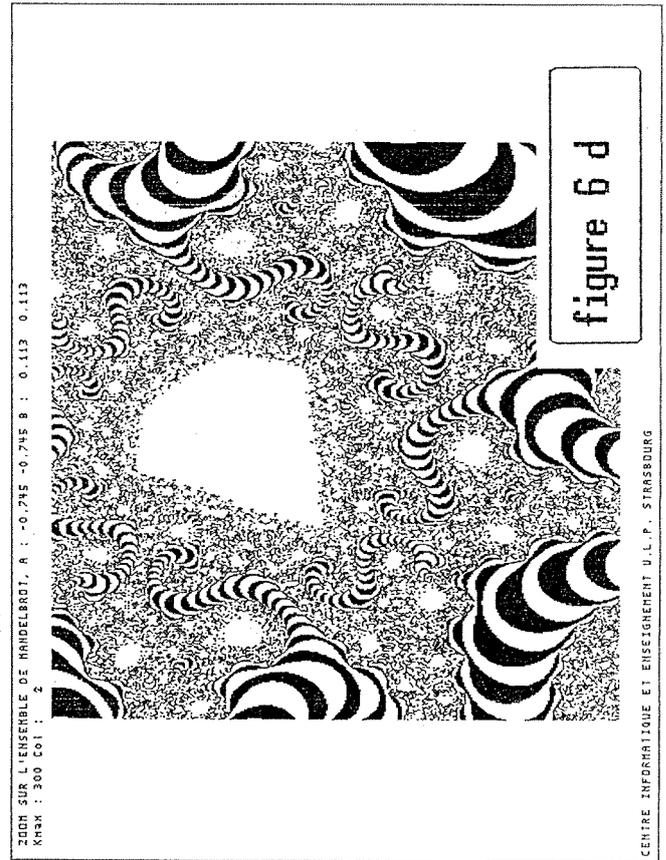
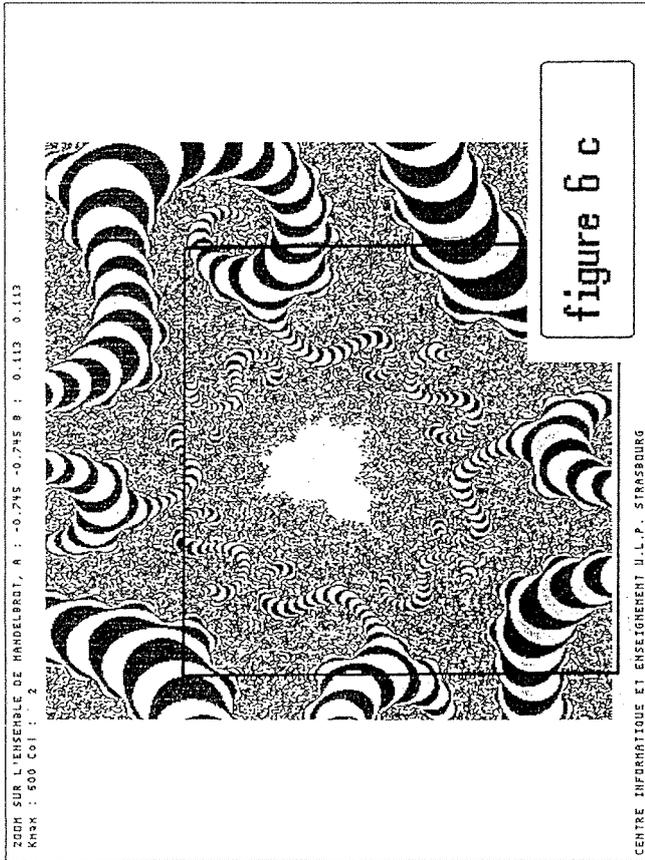
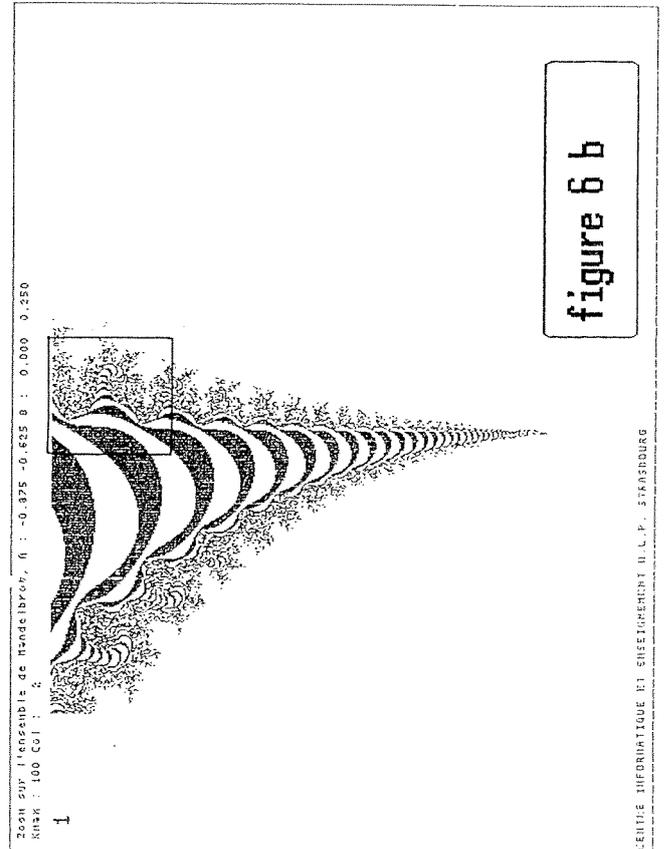
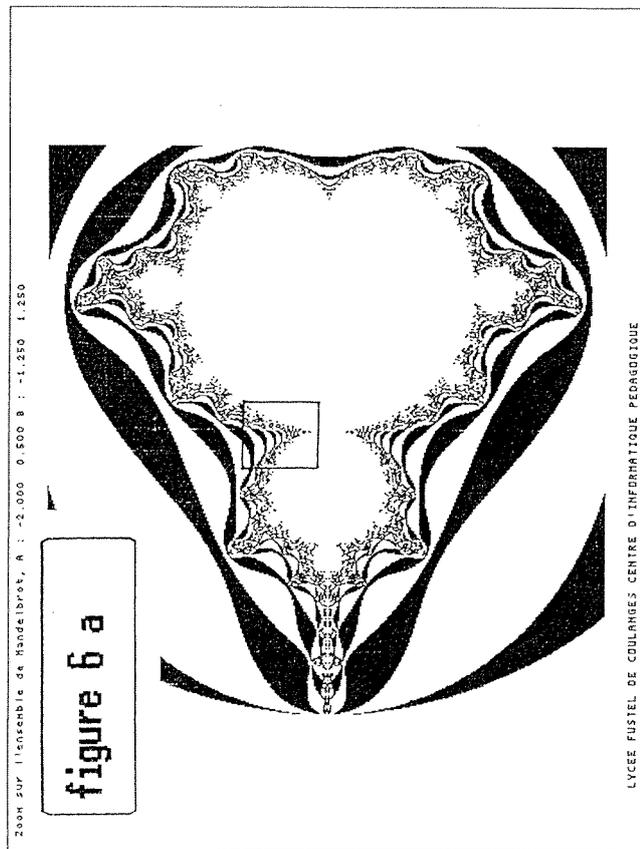
figure 5 a



LOI BINAIRE, POSITIF EMPREINTES DIGITALES 5

figure 5 b





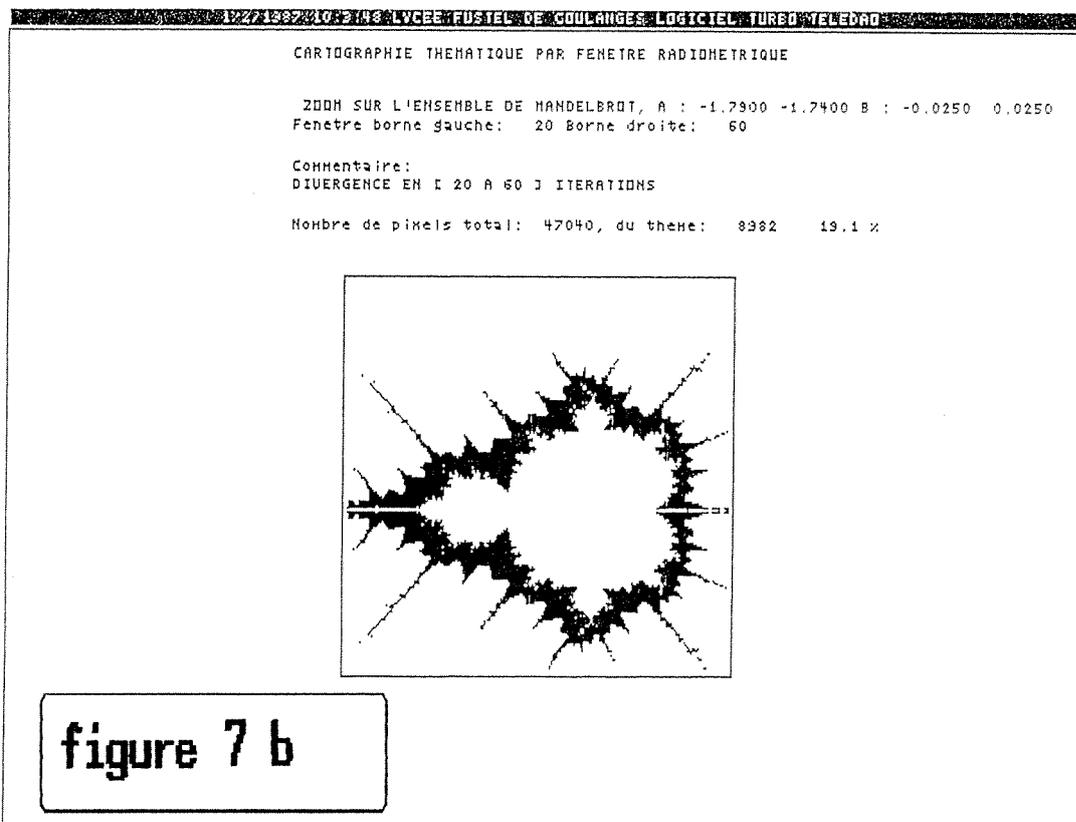
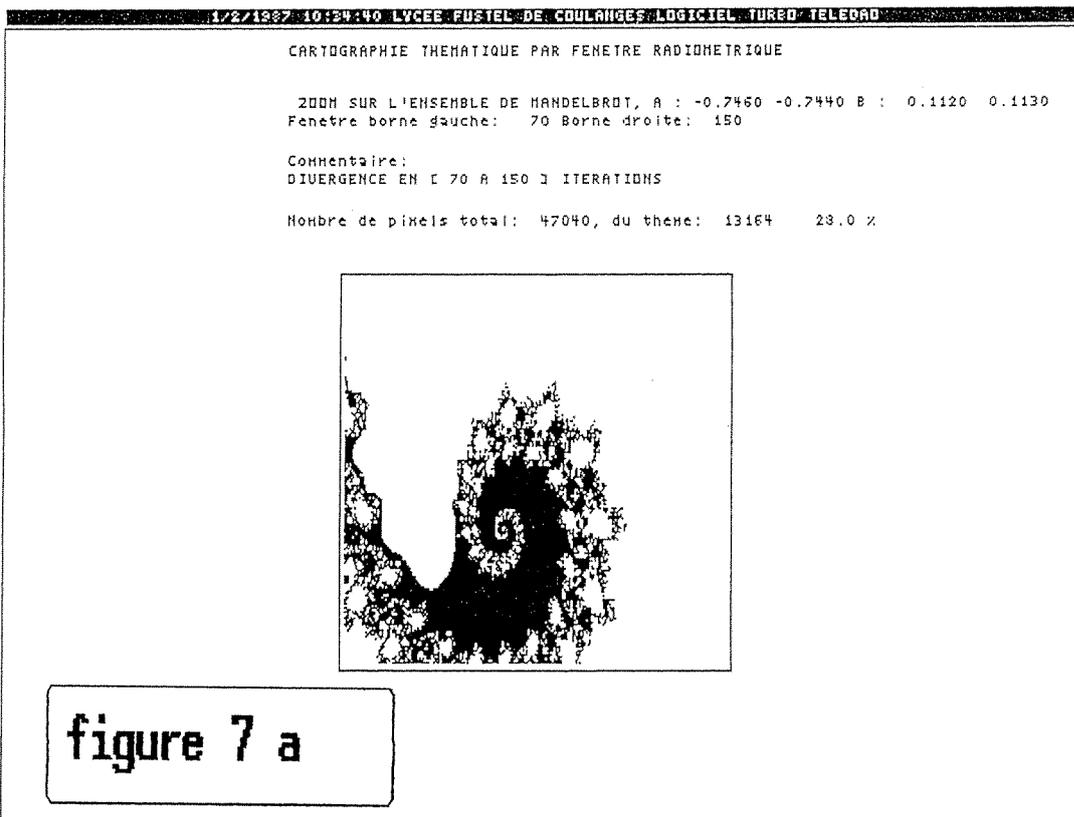
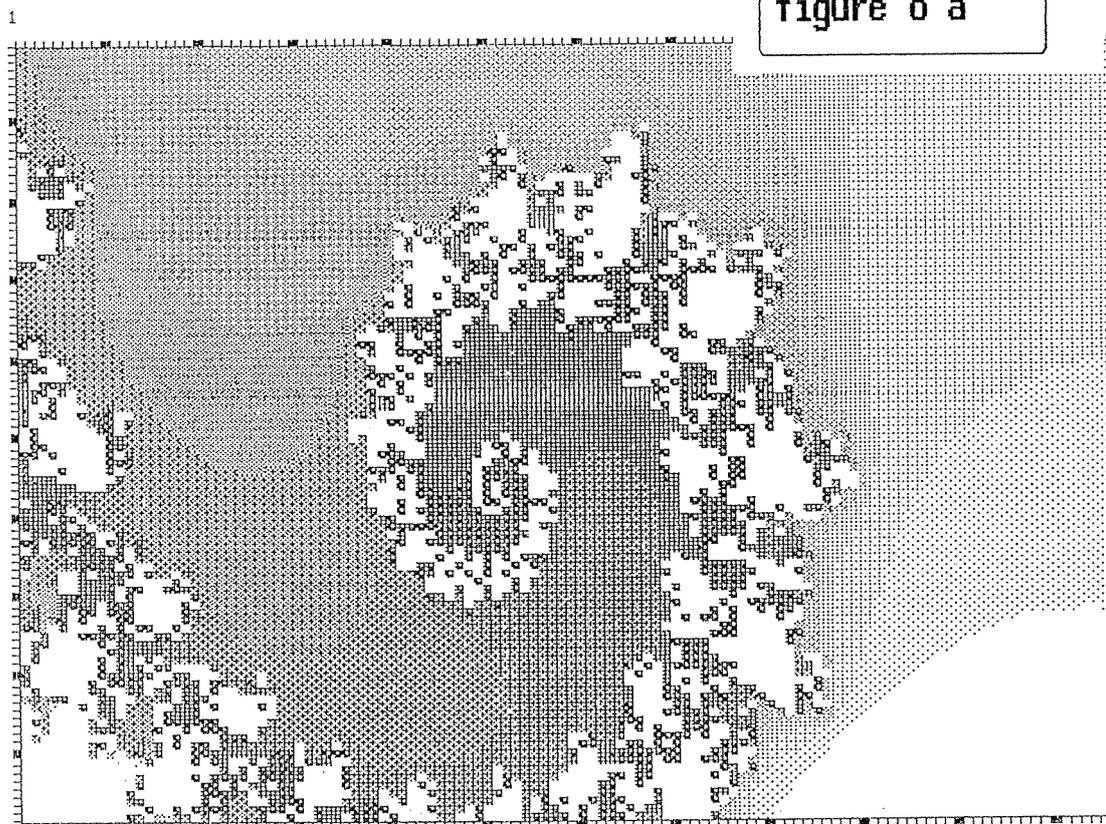


figure 8 a



Histogramme des luminances de l'image

ZOOM SUR L'ENSEMBLE DE MANDELBROT, A : -0.7460 -0.7

EFFECTIFS

$10^3$

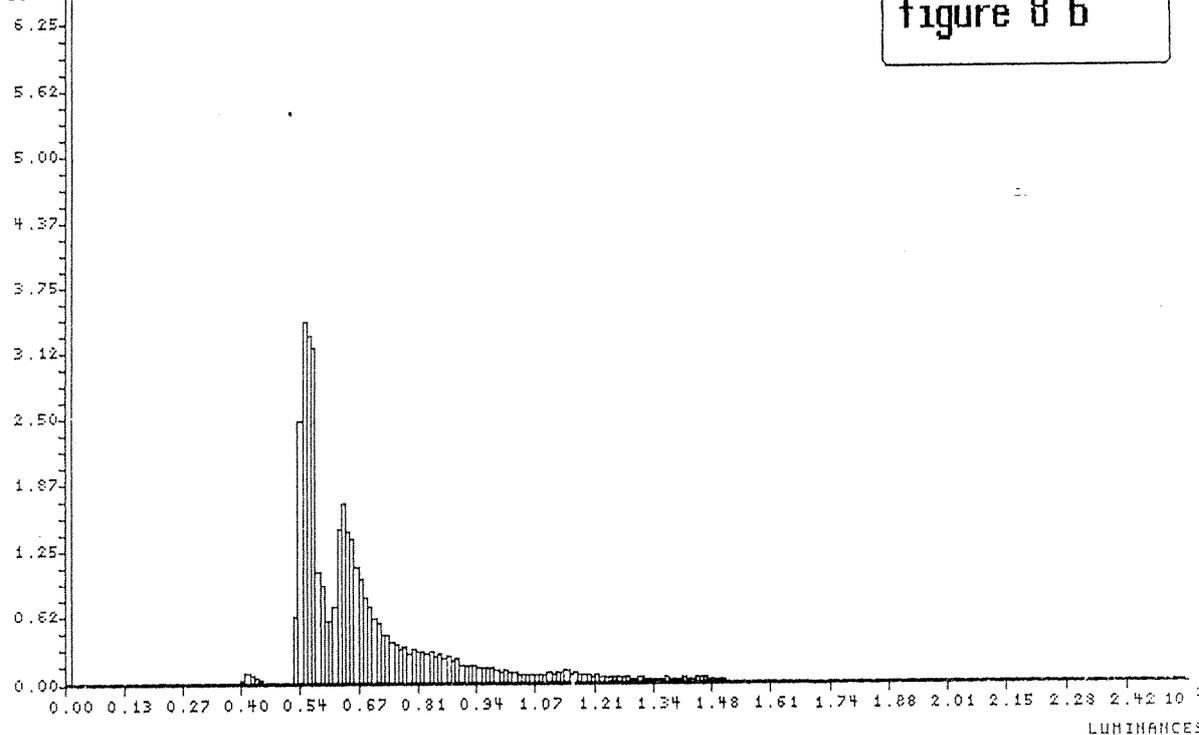
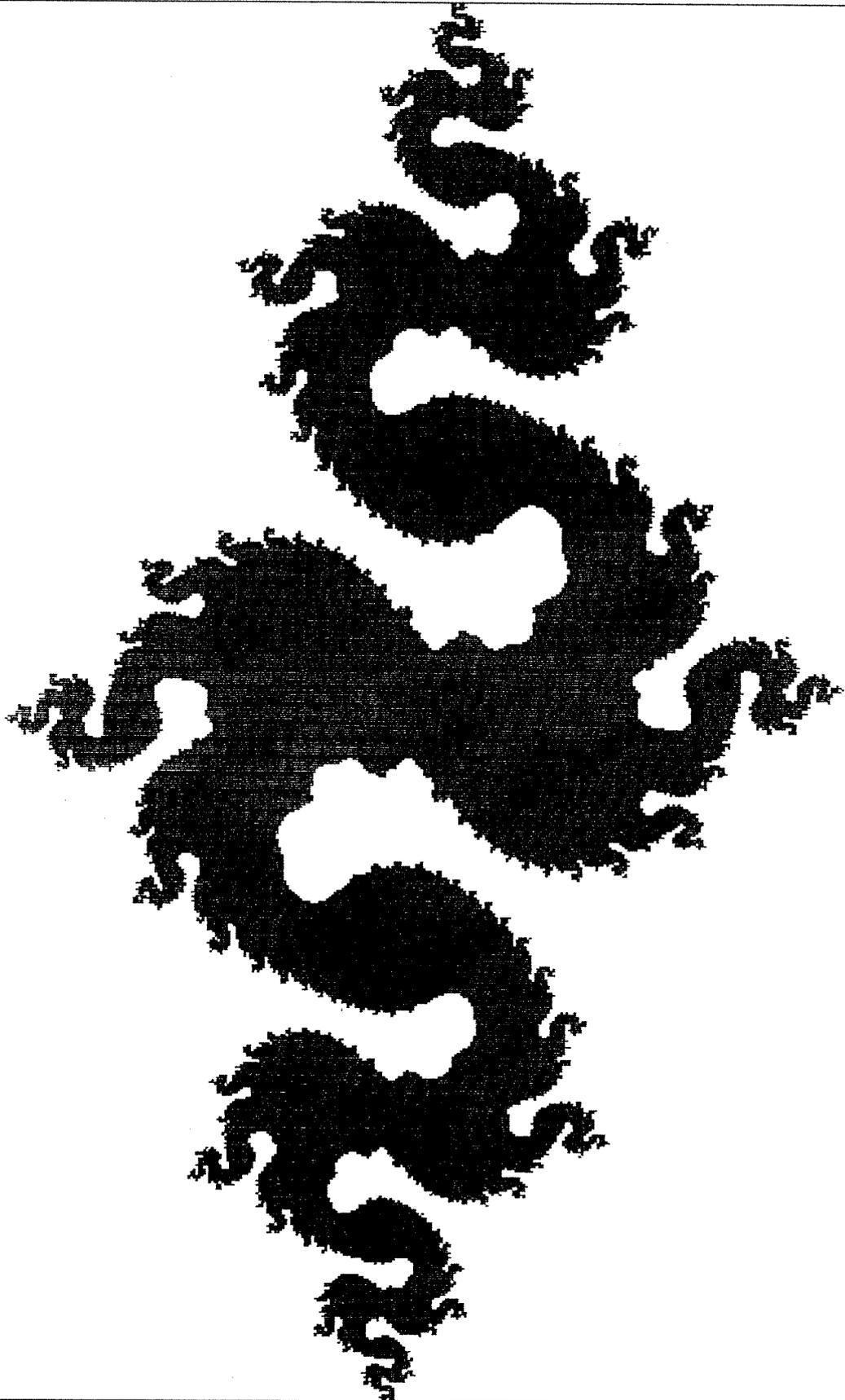


figure 8 b

YUL19:0.777000 b: 0.125000 K: 30 Bsup: 30 V13.IHR

figure 9



CARTOGRAPHIE THÉMATIQUE PAR FENÊTRE RADIMÉTRIQUE

Courbe de Julia a: -0.2905 b: -0.5868 k: 150 Bsup  
 Fenêtre borne gauche: 20 Borne droite: 44

Commentaire:  
 DIVERGENCE DE C 20 A 44 3 ITERATION

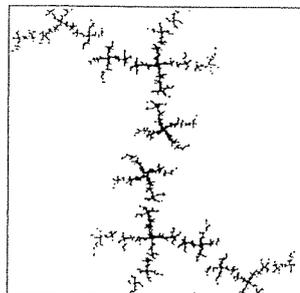


figure 10 a

CARTOGRAPHIE THÉMATIQUE PAR FENÊTRE RADIMÉTRIQUE

Courbe de Julia a: -0.2905 b: -0.5868 k: 150 Bsup  
 Fenêtre borne gauche: 15 Borne droite: 56

Commentaire:  
 DIVERGENCE DE C 15 A 56 3 ITERATIONS

Nombre de pixels total: 57600, du theme: 5300 10.2 %

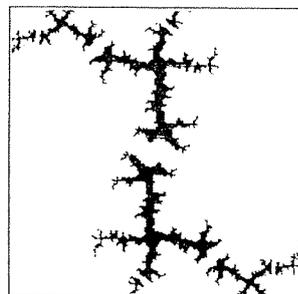


figure 10 b

CARTOGRAPHIE THÉMATIQUE PAR FENÊTRE RADIMÉTRIQUE

Courbe de Julia a: 0.7770 b: 0.1360 k: 150 Bsup  
 Fenêtre borne gauche: 15 Borne droite: 40

Commentaire:  
 DIVERGENCE DE C 15 A 40 3 ITERATIONS

Nombre de pixels total: 57600, du theme: 12957 22.5 %

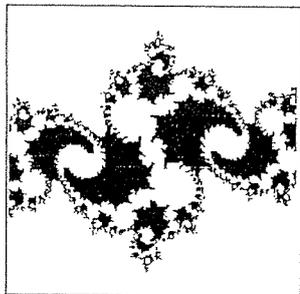


figure 10 c

CARTOGRAPHIE THÉMATIQUE PAR FENÊTRE RADIMÉTRIQUE

Courbe de Julia a: 0.7770 b: 0.1360 k: 150 Bsup  
 Fenêtre borne gauche: 41 Borne droite: 60

Commentaire:  
 DIVERGENCE ENTRE C 41 A 60 3 ITERATIONS

Nombre de pixels total: 57600, du theme: 5129 9.0 %

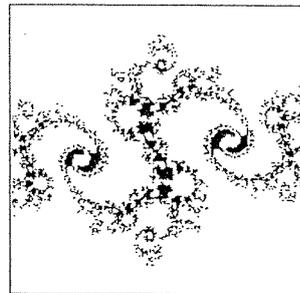


figure 10 d

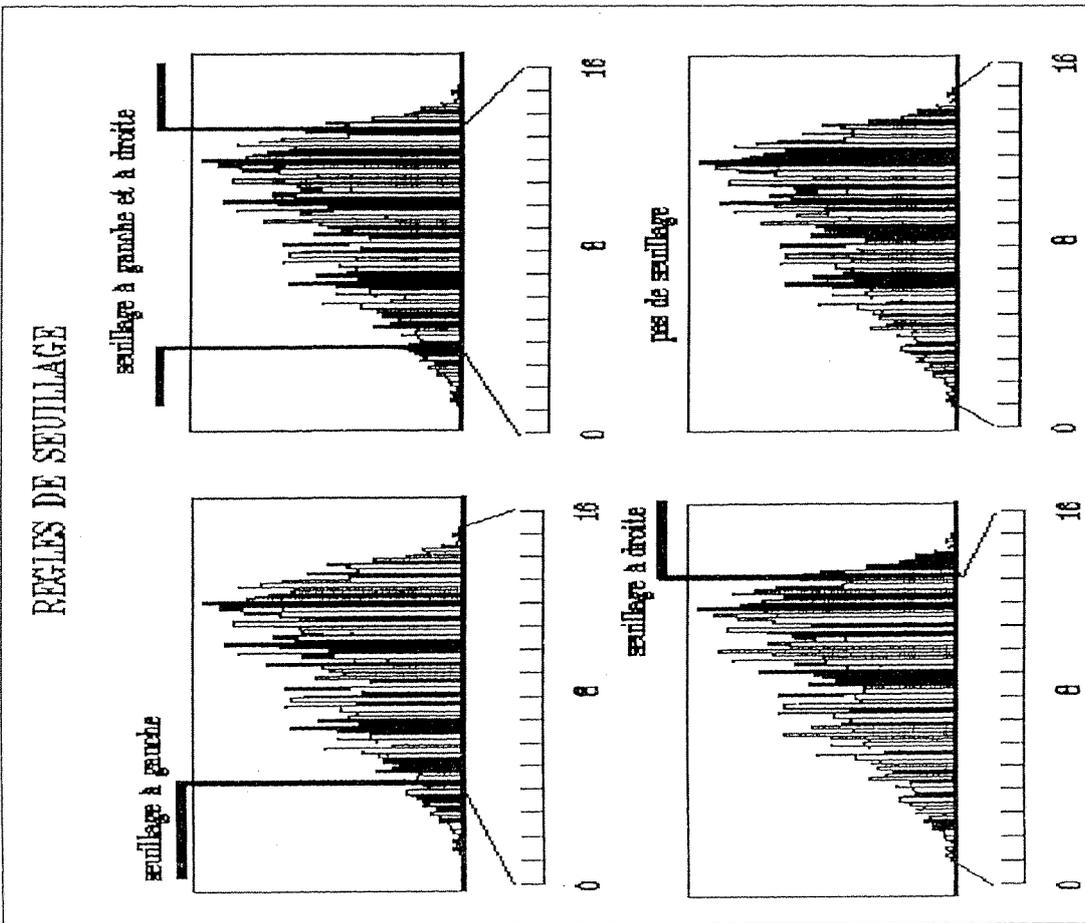


figure 11

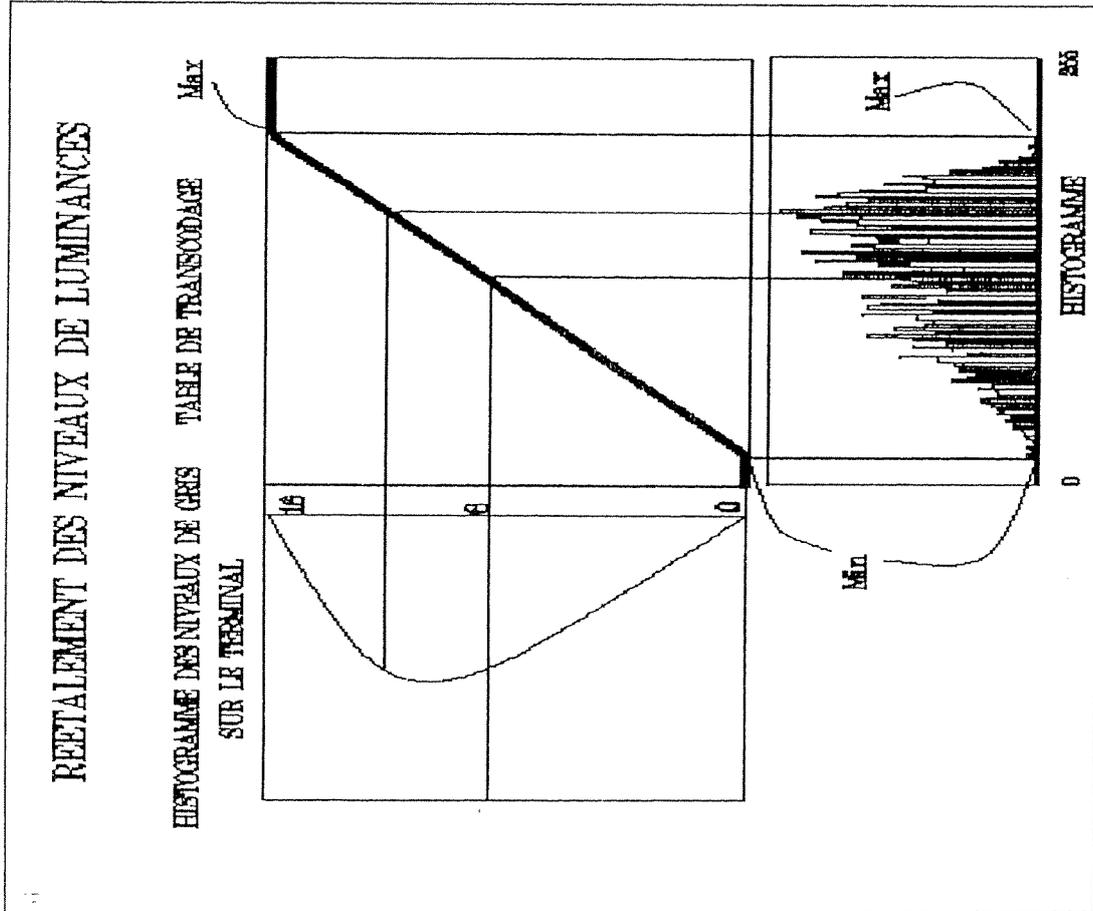


figure 12

# LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Jean LEFORT

## 1.— INTRODUCTION

1) **Au commencement était la droite affine**, munie d'une origine et d'un vecteur unité. Tout allait très bien jusqu'au jour où elle rencontra une compagne... Mathématiquement les choses s'arrangèrent facilement, enfin presque, mais physiquement ce fut autre chose. Pour comprendre la difficulté imaginons ce dialogue futuriste entre un terrien et un extra-terrestre récemment contacté :

**Le terrien** : *“La Terre tourne sur elle-même en un jour. Son unique satellite, la Lune, revient aux mêmes phases tous les 29,53 jours. La Terre tourne autour du Soleil en une année soit 365,2422 jours”*.

**L'extra-terrestre** : *“La Vlor tourne sur elle-même en un omuz. Son unique satellite Ralor revient aux mêmes phases tous les 15,21 omuz. La Vlor tourne autour de l'Omuz en 243,37 omuz ou en un sluv”*.

**Le terrien** : *“Un jour fait 24 heures”*.

**L'extra-terrestre** : *“Un omuz fait 13 rusk ...”*.

Passionnant, et ça peut durer longtemps, sans compter les difficultés de traduction. Il y a cependant une manière de résoudre ce problème de communication, c'est d'envoyer une série de tops périodiquement et de donner la mesure de la période, ou bien d'utiliser un phénomène naturel comme les pulsars, ou encore dire que *“la seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133”*, ce qui est la définition légale de la seconde adoptée en 1968. Cette définition n'avait pas pour but de faciliter le dialogue avec d'éventuels extra-terrestres (\*), mais de se passer de la référence au jour qui présente des irrégularités, légères mais peu prévisibles. Pour le commun des mortels, la seconde reste selon l'ancienne définition la 86400<sup>e</sup> partie de la journée.

2) **Où tout se complique quand on veut des multiples et des sous multiples**. Après cette extrapolation futuriste, revenons en arrière sans toutefois revenir au commencement. Pour compter le temps, l'homme préhistorique a dû tout d'abord compter les jours. C'est un phénomène qui paraît périodique, qui s'analyse facilement malgré les nuages et les orages les plus noirs. Malheureusement, le jour est une petite unité, une vie humaine voit passer plusieurs milliers de journées. Et il faut savoir compter jusque là ce qui n'était pas le lot de nos ancêtres qui

---

© L'OUVERT 52 (1988)

(\*) Le kilogramme est toujours défini à partir du prototype en platine irridié du Pavillon de Breteuil à Sèvres.

n'étaient pas encore gaulois.

Après s'être adressé au Soleil pour les jours, l'homme s'est adressé à la Lune pour mesurer le temps en mois (\*\*). La catastrophe c'est que la Lune a la mauvaise habitude de baguenauder sur son orbite qu'elle parcourt une fois en 29 jours 6 heures ... l'autre fois en 29 jours 20 heures ... et même en prenant une moyenne cela ne fait pas un compte rond : 29,530588 jours. La Lune a cependant un avantage, c'est que les phases sont bien tranchées et que l'on sait où l'on en est.

Bien sûr on pourrait continuer à s'adresser au Soleil pour avoir l'année comme multiple du jour. Si la régularité de l'année est bien meilleure que celle de la lunaison, cela ne fait toujours pas un compte rond en jours : 365,2422 ... jours. Sans compter que cette fois-ci, sauf dans les régions à saisons bien marquées il est difficile de préciser à quel moment de l'année on se trouve. Pensez aux régions tropicales par exemple.

J'ai dit, plus haut, que le jour est une petite unité. J'ai dû me tromper. Combien de jours faut-il pour faire cuire un œuf à la coque? 0,002! Voyez-vous les romains ou les égyptiens en train de calculer un tel nombre? Il faut donc partager le jour, c'est-à-dire créer des sous-multiples. Pour cela il faut décider quand il commence et quand il finit. Des esprits naïfs pourraient croire que c'est la même chose, mais pendant longtemps le jour ce fut quand il faisait jour; c'est pourtant bien clair! Sinon c'est la nuit! Donc le jour commence au lever du soleil et finit à son coucher. Sous nos latitudes la longueur du jour est plutôt élastique et la droite affine citée au début du paragraphe hurle au scandale; laissons la hurler. Au début on divisait le jour et la nuit en trois périodes chacun et puis quand les instruments de mesure se sont affinés les subdivisions ont augmentées et on a enfin décidé de regrouper jour et nuit en une même journée qui commençait suivant les peuples soit au lever soit au coucher du soleil. Les journées ne sont toujours pas égales, mais cela s'améliore. Le repérage du passage du Soleil au méridien, le milieu du jour, midi, est bien plus précis, mais beaucoup plus délicat et il faut être astronome et travailler la nuit pour trouver un avantage à changer de date au milieu du jour!

---

(\*\*)

en français mois	}	même racine que mesurer	{	moon	= lune.
en espagnol mes	}	même racine que	{	Mond	
en anglais month	}		}		
en allemand Monat	}				

Date	Durée de la journée entre deux		
	Lever	Méridien	Coucher
20–21 mars	23 h 58 min	24 h 59 min 42 s	24 h 02 min
21–22 juin	24 h 00 min	24 h 00 min 12 s	24 h 00 min
22–23 sept	24 h 02 min	23 h 59 min 36 s	23 h 58 min
21–22 déc	24 h 00 min	24 h 00 min 30 s	24 h 01 min

### 3) Au commencement était ... mais où était donc le commencement ?

Car enfin si j'ai parlé de droite affine, j'ai beaucoup discoursu sur l'unité et très peu sur l'origine. Si l'on a vu qu'à l'intérieur d'une journée il existe quelques moments naturels de début et qu'il en est de même dans une lunaison ou une année, il n'y a aucune raison de dire : *nous sommes en 1988 ou en 1408 ou en 5748 ou en 1706 ...* (il s'agit ici d'années mais d'une part elles n'ont pas toutes la même longueur, et d'autre part l'origine n'est pas la même!). Il faut donc se décider pour fixer un zéro quelque part et comme le zéro est d'invention tardive on se contentera de la fixation du 1.

Mais curieusement quand un peuple se décide à compter, il ne commence jamais à *zéro* ni à *un* mais démarre à un nombre quelconque et se rattache à un autre compte. Par exemple l'ère chrétienne date de 532 (calendrier julien) et l'an 1 a été rattaché à l'an 753 de Rome ... Le fait d'ignorer le zéro entraîne qu'il est difficile de décimaliser l'année; 1988,25 correspond-t-il sensiblement au 1er avril 1989 ou au 1er avril 1988? Nous verrons ce qu'il en est.

Finalement on comprend que les différentes civilisations aient eu des difficultés à faire de jolis calendriers. Avec des maîtres aussi barbares que le Soleil et la Lune qui ne réussissent pas à se mettre d'accord entre eux (\*\*\*) :

$$\begin{aligned}
 \text{une année} &= 12,368267 \dots \text{lunaisons} \\
 &= 365,242199 \dots \text{jours} \\
 \text{une lunaison} &= 29,530588 \dots \text{jours} \dots
 \end{aligned}$$

Il faut rendre ce mérite aux civilisations d'avoir trouvé des solutions relativement simples au décompte du temps. Nous verrons que ces solutions sont purement mathématiques. Il ne sera donc pas étonnant de trouver chez différents peuples des solutions identiques bien que ces peuples ne se soient pas concertés.

---

(\*\*\*) Soyons prudents! Un théologien cité par P. COUDERC a affirmé qu'avant le déluge les lunaisons avaient 30 jours et les années 360 jours soit exactement 12 lunaisons. Mais la comète envoyée par DIEU pour provoquer le déluge a bouleversé cette harmonie. Pauvres pêcheurs que nous sommes!

## 2.— UN CALENDRIER VRAIMENT UNIVERSEL

Nous avons vu que la façon la plus naturelle de mesurer le temps consiste à compter les jours. Un tel *calendrier* existe, il a été imaginé par Joseph-Juste SCALIGER, philosophe français né à Agen en 1540 et mort à Leyde en 1609. Les détails en sont donnés dans son traité sur la chronologie “*De emendatione temporum*” publié en 1583.

*“Je voudrais ici faire un aparté. J’ai déjà utilisé, dans mon discours, des dates sans les préciser. On aura compris qu’il s’agit pour “les plus récentes” de dates du calendrier grégorien depuis 1582 pour ce qui était alors la France. Par conséquent 1540 est une date du calendrier julien, 1583 une du calendrier grégorien. Mais ceci reste très théorique et j’aurais l’occasion d’y revenir. Je suppose néanmoins que le lecteur n’est pas complètement ignorant en ce qui concerne les calendriers et qu’il ne m’en voudra pas d’avoir un discours qui n’est pas d’une cohérence interne parfaite. ”*

SCALIGER considère comme origine le lundi 1er janvier -4712 à midi en temps universel (il s’agit ici du calendrier julien avec une année 0). Le choix de cette origine qui semble parfaitement arbitraire se comprendra parfaitement quand j’aborderai le calendrier julien. Patience cher lecteur! Je fais toutefois remarquer que SCALIGER parlait du lundi 1er janvier -4713 puisqu’il ne considérait pas d’année zéro. C’est d’ailleurs cette dernière date que l’on trouve dans les éphémérides du bureau des longitudes tandis que Paul COUDERC cite la première dans son ouvrage “*Le Calendrier*”.

Ensuite, à partir de cette origine on compte les jours les uns à la suite des autres à partir de zéro. Le jour zéro finit le 2 janvier -4712 à midi ... etc ... Ainsi le 1er janvier 1988 à midi commence le jour 2.447.162. Rassurez-vous je n’ai pas fait le calcul; ce genre de renseignements se trouve dans les éphémérides. On précisera qu’il s’agit du jour julien (JJ ou JD en anglais).

Pour être plus exact il s’agit de cycle. Une période d’un cycle dure 7980 années juliennes (ce nombre est le produit de 28, période du cycle dominical, 19, période du cycle de Méton, et 15, nombre d’années de l’indiction; j’expliquerai ces cycles plus tard). Quand je dis que le 1er janvier 1988 commence le 2 447 162<sup>e</sup> JJ il s’agit du jour du cycle actuel, cycle qui finira le lundi 1er janvier 3268 julien à midi ou le lundi 23 janvier 3268 grégorien. Les astronomes sont décidément de sacrés optimistes quand à l’avenir de l’homme.

Ce sont surtout les astronomes qui utilisent la période julienne. Très prisé déjà par KÉPLER, ce calendrier permet une comparaison facile du temps écoulé entre deux dates. De plus si on sait faire la conversion entre un JJ et la date dans un calendrier quelconque on peut comparer les calendriers entre eux. Les chronologistes apprécient beaucoup cet aspect.

Depuis 1973 on utilise aussi une autre origine qui est le 17 novembre 1858

## LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

(calendrier grégorien) 0 h TU (c'est quand même plus pratique de changer de date à minuit — tout au moins en Europe occidentale — quand on n'est pas travailleur de nuit). Ce nouveau repère est le jour julien modifié (MJ Date en anglais). Certains lecteurs se posent la question du choix du 17 novembre 1858, d'autant plus qu'il s'agit d'un mercredi : pourquoi pas le 1er avril ? Quel événement mémorable a donc eu lieu ce jour là ? D'autres lecteurs restent cois, ne s'étonnant plus de rien devant l'avalanche de nombres que je leur présente. Tout s'éclaire si je précise qu'on passe de JJ à MJD par soustraction de 2 400 000,5 jours. Bien sûr, il y a quand même une demi-unité balladeuse et il est bien clair qu'un tel calendrier se doit d'être décimal.

Je devine maintenant un petit malin qui annonce qu'il n'y a plus qu'à compter en hecto jours ou en kilo jours et affirmer que 2 400 000 jours valent 2,4 Mégajours. Eh bien non ! Le multiple le plus usuel est le **siècle julien** qui vaut 36 525 jours. Non ! Ce n'est pas n'importe quoi ! Un petit instant de réflexion montre qu'il s'agit de 100 fois 365 jours un quart. Le siècle julien ayant toujours le même nombre de jours contrairement un siècle grégorien (voir plus loin).

Il est d'usage assez commun de regrouper les jours par période de 7, dite semaine. Cette semaine nous vient des chaldéens via les hébreux, mais elle n'est pas universelle. Grecs, égyptiens, chinois, qui n'étaient pourtant pas des sans-culottes, comptaient en décades. Voilà des gens raisonnables dont nous aurions dû suivre l'exemple plutôt que de nous en moquer en parlant de "*calandes grecques*". Si on veut parler du nom d'un jour julien qui commence à midi, il faut absolument préciser l'heure. Pour la première moitié, il est facile de voir qu'il suffit de faire la division par 7 et d'étudier le reste. On a alors la correspondance suivante :

reste	0	1	2	3	4	5	6
jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche

Pour la deuxième moitié du jour julien il suffit d'ajouter une unité au reste. Pratiquement, si on connaît l'instant exact d'un événement, on l'exprime en jour julien décimal, on ajoute 0,5, on prend la partie entière puis le reste de la division par 7 de cette partie entière ! D'où le programme :

$$\begin{array}{r}
 \text{instant JJ} \\
 + 0,5 \\
 \text{reste de la} \\
 \text{division par} \\
 7
 \end{array}$$

En ce qui concerne le MJD c'est encore plus facile puisqu'il suffit de chercher le reste de la partie entière de la date dans la division par 7 mais de se reporter alors au nouveau tableau de correspondance ci-dessous.

reste	0	1	2	3	4	5	6
jour	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche	lundi	mardi

Evidemment, ici aussi, il eût été plus agréable de commencer avec le lundi comme cela avait été fait pour le JJ. Voilà les ennuis des changements arbitraires (ou presque) d'origine!

... (à suivre).

---

ESPÉRANCE DE VIE

Dans son article sur le paradoxe de GUMBEL, J. LEFORT utilise une définition de l'espérance de vie qui n'est pas celle des démographes. Pour ces derniers, le calcul se fait de la façon suivante :

On choisit une période de référence  $P$  (en général, pour les populations humaines, une année; par exemple du 1/1/87 au 31/12/87) et on divise la population en tranches d'âges de même durée que  $P$  (ici, un an). Pour chacune de ces tranches d'âge, on observe la proportion de décès durant  $P$ . L'espérance de vie telle que la calculent les démographes, est définie comme la vie moyenne d'une population fictive dans laquelle le taux de décès pour chaque tranche d'âge serait exactement celui qu'on a observé. En d'autres termes, c'est l'espérance (au sens probabiliste) de vie, calculée sous l'hypothèse que les taux de décès à chaque tranche d'âge resteront dans l'avenir égaux à ce qu'ils étaient durant  $P$ .

Ceci n'ôte rien aux problèmes soulevés par le paradoxe de GUMBEL.

M. EMERY

# LA DÉMONSTRATION : CALCUL ET/OU RAISONNEMENT

Jacques LUBCZANSKI

N.D.L.R. : Les exercices proposés sont plus ou moins faciles et on ne s'étonnera pas de chercher longuement certains d'entre eux (en particulier le premier). Dans le prochain numéro, J. LUBCZANSKI proposera des éléments de solution accompagnés de notes historiques.

Voici quelques exemples de principes de raisonnement, pris dans l'histoire des mathématiques, et qui permettent, chacun, la démonstration d'une propriété classique de l'ellipse.

En outre, chacun de ces principes a pu, longtemps après qu'il ait été utilisé, être formalisé et justifié par un calcul.

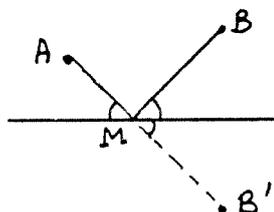
Mais a-t-il fallu attendre cette justification pour être certain de leur validité?

## A.— LE PRINCIPE DE HERON D'ALEXANDRIE (1<sup>er</sup> s. ap. J.-C.)

*“Pour aller d'un point A à un point B, la lumière suit le plus court chemin”.*

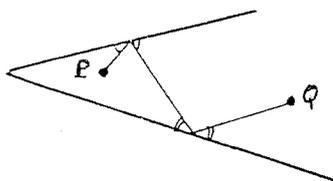
**Conséquence** : lors de la réflexion lumineuse sur un miroir plan, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

En effet, le plus court chemin de A à B, en passant par un point M du miroir est celui pour lequel A, M et B' sont alignés, B' étant le symétrique de B par rapport au miroir : car alors  $AM + MB = AM + MB'$  est minimal. L'égalité des angles s'ensuit.



**Corollaire** : Pour trouver le plus court chemin, après réflexion, de A à B, il suffit de réaliser l'égalité des angles d'incidence et de réflexion.

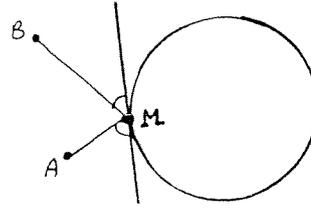
**Exemple 1 :**



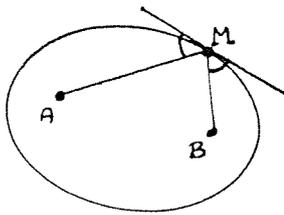
Recherche du plus court chemin après deux réflexions.

**Exemple 2 :**

Réflexion sur une courbe : c'est en fait la réflexion sur la tangente à la courbe.



**Exercice 1 :** Déterminer  $M$  connaissant  $A, B$  et le cercle.



**Application à l'ellipse :** Soit une ellipse de foyers  $A$  et  $B$ .

Pour tout point  $M$  de l'ellipse,  $AM + MB$  est constant; donc tout point  $M$  de l'ellipse réalise le plus court chemin de  $A$  à  $B$  après réflexion sur la courbe. Donc les deux rayons  $AM$  et  $BM$  font des angles égaux avec la tangente.

En d'autres termes, la tangente est bissectrice (extérieure) de l'angle  $\widehat{AMB}$ .

**Remarque :** si l'ellipse est un cercle (foyers confondus), on retrouve la propriété d'orthogonalité entre la tangente et le rayon.

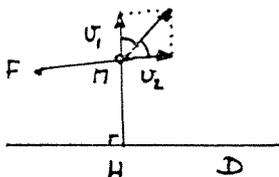
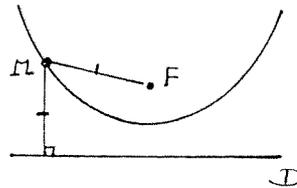
**B.— LE PRINCIPE DE GILLES PERSONNE DE ROBERVAL (1602–1675)**

*“Lorsqu'un point se déplace sur une ligne de niveau, la direction de sa vitesse est telle... qu'il y reste!”*

**Exemple :** Considérons la parabole de foyer  $F$  et de directrice  $D$ .

Pour tout point  $M$  de la parabole, on a l'égalité  $MF = d(M, D)$ .

Donc si  $M$  se déplace sur la parabole, il doit se rapprocher (ou s'éloigner) autant de  $F$  que de  $D$ .

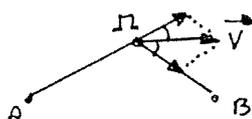
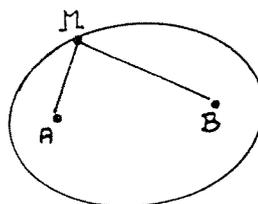


En langage moderne, les deux composantes  $v_1$  et  $v_2$  de la vitesse de  $M$  ont même module : il s'ensuit que la vitesse de  $M$  est dirigée selon la bissectrice de  $\widehat{FMH}$ , ainsi donc que la tangente.

**Application à l'ellipse :** Si  $A$  et  $B$  sont les foyers, pour tout point  $M$  de l'ellipse, on a :

$$MA + MB = \text{cte.}$$

Donc si  $M$  se déplace sur l'ellipse, il doit s'éloigner autant de  $A$  qu'il s'éloigne de  $B$  (et vice versa).

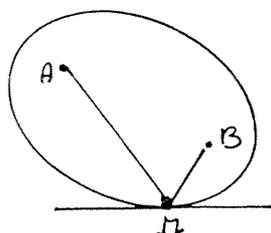
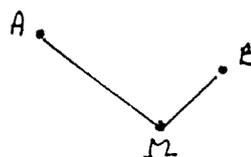


De la même façon que pour la parabole, on en conclut que la tangente est bissectrice de l'angle  $\widehat{AMB}$ .

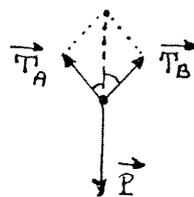
### C.— UN PRINCIPE D'ÉQUILIBRE STATIQUE

Considérons une masse  $M$  pouvant glisser sur un fil inextensible  $AB$ .

A l'équilibre,  $M$  est au plus bas : la tangente en  $M$  à l'ellipse de foyers  $A$  et  $B$  est donc horizontale.



Les tensions du fil en  $M$  sont égales en module, et leur somme doit équilibrer le poids, vertical.

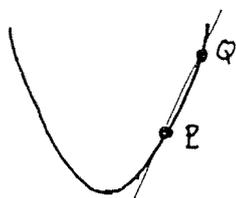


Il s'ensuit que la normale  $\vec{P}$  est bissectrice (intérieure) de l'angle  $\widehat{AMB}$ .  
Et donc que la tangente est aussi bissectrice.

**Exercice 2 :** Pourquoi les tensions sont-elles égales en module ?

### D.— LE PRINCIPE DE SHERLOCK HOLMES

“Quand vous avez éliminé ce qui est impossible, ce qui reste, même peu probable, doit être la vérité”.



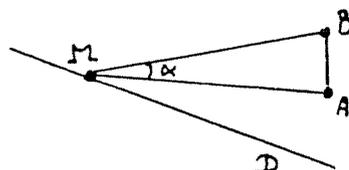
**Exemple élémentaire :** on cherche la pente de la tangente à la parabole  $y = x^2$  au point  $P(1, 1)$  (on suppose qu'on ne sait pas dériver...).

Si  $Q(1+h, (1+h)^2)$  est un autre point de la parabole, la pente de  $(PQ)$  n'est sûrement pas la bonne.

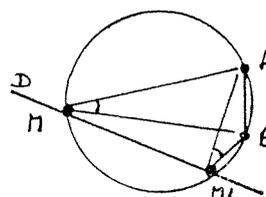
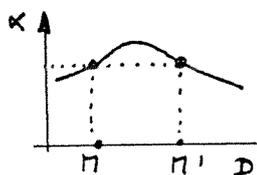
Or elle vaut  $\frac{(1+h)^2-1}{1+h-1} = 2 + h$  avec  $h \neq 0$ .

Donc, si  $h \neq 0$ ,  $2 + h$  n'est pas la pente de la tangente en  $P$ . S'il y a une réponse au problème, ce ne peut donc être 2. Élémentaire, cher WATSON ...

**Exemple géométrique :** un footballeur se déplace en ligne droite. A quel moment doit-il tirer? En d'autres termes, étant donné une droite  $D$  et deux points  $A$  et  $B$ , quel est le point  $M$  de  $D$  qui maximise la valeur  $\alpha$  de l'angle  $\widehat{AMB}$ ?



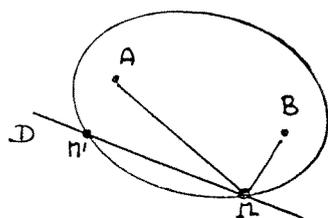
L'angle varie avec  $M$  : donc si,  $M$  étant fixé, on peut trouver  $M'$  qui donne la même valeur de  $\alpha$  que  $M$ , le point  $M$  est à rejeter.



Or la construction géométrique d'un tel point  $M'$  est facile, pourvu que le cercle  $AMB$  coupe  $D$ .

Conclusion : le seul point  $M$  possible est celui où le cercle  $AMB$  est tangent à  $D$ .

**Exercice 3 :** Construction géométrique de  $M$ ;  $A, B$  et  $D$  étant donnés.

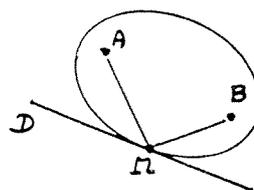


**Application à l'ellipse :**  $A, B$  et  $D$  étant donnés, on cherche le point  $M$  de  $D$  qui minimise la somme  $MA + MB$ . Tous les points  $M$  tels que l'ellipse de foyers  $A$  et  $B$ , passant par  $M$ , recoupe  $D$  en  $M'$  sont à rejeter, puisqu'alors  $MA + MB = M'A + M'B$ .

## LA DÉMONSTRATION : CALCUL ET/OU RAISONNEMENT ?

Le seul point pouvant répondre à la question est celui pour lequel l'ellipse de foyers  $A$  et  $B$  est tangente à  $D$  en  $M$ .

Dans les cas où c'est géométriquement possible (c'est-à-dire quand  $A$  et  $B$  sont hors de  $D$ , et du même côté), ce point est solution.



On sait alors, d'après le principe de Héron, que les angles d'incidence et de réflexion sont égaux...

**Exercice 4 :** Etant donnés trois points  $A, B$  et  $C$ , montrer que si  $M$  réalise le minimum de la somme  $MA + MB + MC$ , alors l'ellipse de foyers  $A$  et  $B$  passant par  $M$  est tangente au cercle de centre  $C$  passant par  $M$ .

En déduire la valeur des angles  $\widehat{AMB}, \widehat{BMC}, \widehat{CMA}$ , puis une construction à la règle et au compas de  $M$ .

### Sources bibliographiques :

*Mathématiques et formes optimales* – S. HILDEBRANDT & A. TROMBA – Belin (1986).

*Initiation à la géométrie* – F. BORCEUX – Ciaco (1986).

*Les mathématiques et le raisonnement plausible* (\*) – G. POLYÀ – Gauthier-Villars (1958).

*Calculus : an historical approach* – W.- M. PRIESLEY – Springer (1979).

---

## VOUS ÊTES FANA DES PAVAGES DE PLAN

Vous pouvez lire “*Tilings and patterns*” de GRÜNBAUM et SHEPHARD, 700 pages en anglais : une somme sur la question : toutes les démonstrations et un nombre impressionnant d'exercices pour occuper vos loisirs. A recommander pour un 2<sup>e</sup> cycle de fac.

Plus modestement, pour 25 F, vous commandez le numéro spécial “*Symétrie*” du ‘Plot’. En vente à la bibliothèque de l'IREM (uniquement pour les personnes résidant en Alsace). Des idées pour animer vos classes de la 4<sup>e</sup> à la terminale.

---

(\*) Disponible à la Bibliothèque de l'I.R.E.M.

# RÉFLEXIONS SUR L'APPRENTISSAGE DE LA DÉMONSTRATION EN GÉOMÉTRIE DE 4<sup>e</sup> AUTOUR D'UN LOGICIEL

M.-A. EGRET – D. GUIN – G. KUNTZ – G. MÉTIVIER – N. VOGEL

avec la participation de R. DUVAL

## I.— EXPOSÉ DES MOTIFS ET RAPIDE HISTORIQUE DU DÉVELOPPEMENT DU PROJET

Notre projet est de faire l'expertise d'un logiciel d'aide à la démonstration en géométrie en classe de 4<sup>e</sup>. Il ne s'agit pas de réaliser un logiciel de démonstration automatique, mais d'aider l'élève en difficulté à structurer son raisonnement et de lui proposer, si nécessaire, des heuristiques en vue de la résolution du problème.

Cela nous conduit à réfléchir, d'une part à la manière dont on résout un problème de géométrie, d'autre part à la manière dont on enseigne la démonstration en classe de 4<sup>e</sup>:

— nous avons retrouvé la notion d'heuristique (\*) à propos des performances exigées d'un logiciel : il ne peut être question, pour des raisons de temps, d'explorer systématiquement et en aveugle toutes les situations et tous les théorèmes disponibles. Obtenir un logiciel performant exige l'utilisation de stratégies de résolution.

— l'implantation informatique nécessite l'explicitation de tout ce qui est implicite (le non-dit). Nous avons donc été amenés à mettre en lumière des démarches faisant appel à des "évidences" ou "réflexes" (qui ne le sont pas pour des élèves!).

Ainsi donc la définition d'un cahier des charges pour un logiciel d'aide à l'apprentissage de la démonstration nous a fait découvrir certaines raisons de la complexité de cet apprentissage pour les élèves. L'intelligence artificielle, par sa logique propre, nous a obligés à repenser notre manière d'enseigner. Elle nous a fait ressentir la très grande difficulté du problème. Elle a créé une dynamique en soulevant des problèmes relevant de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques, et suscité la création d'un groupe P.A.F. ("Elaboration de situations d'enseignement favorisant l'introduction de la démonstration en géométrie") et des expérimentations dans les classes (R. DUVAL – M.A. EGRET (à paraître)).

En effet :

— en psychologie cognitive, le projet est de modéliser le comportement humain :

\* exprimer précisément des modèles de fonctionnement,

---

© L'OUVERT 52 (1988)

(\*) heuristique : vient du grec "euriskai" : trouver. Qualifie tout ce qui sert à la recherche de la solution sans forcément aboutir (connaissance stratégique).

\* les mettre en œuvre pour simuler le comportement.

— en intelligence artificielle :

\* il s'agit de faire réaliser par des systèmes artificiels des tâches qu'exécute le système cognitif humain

\* il est donc nécessaire d'intégrer à la machine des modèles formels du fonctionnement humain et des dispositifs matériels pour la mise en œuvre (C. BONNET et al., 1986).

— dans l'activité de démonstration géométrique, l'élève n'utilise pas d'algorithmes. Il met en œuvre des procédures moins sûres, mais qui peuvent aboutir rapidement grâce aux heuristiques. C'est à la mise en évidence de telles heuristiques que nous nous attacherons car elles sont nécessaires à la réalisation d'un tutoriel intelligent. Mais de plus, cette mise en évidence présente un grand intérêt en ce qui concerne la didactique des mathématiques : doit-elle être objet d'enseignement ? Répondre à cette question nécessite d'expérimenter pour valider les hypothèses émises sur le fonctionnement cognitif dans l'activité de démonstration. Réciproquement, nous verrons que la didactique des mathématiques fournit des éléments nécessaires à la modélisation du fonctionnement cognitif (figures prototypes, réseaux etc. . .).

## II.— LES DIFFÉRENTS TYPES DE CONNAISSANCES ET LEUR DIFFICULTÉ SPÉCIFIQUES

Après avoir simulé les processus de lecture et compréhension d'un énoncé (D. GUIN - F. ROUSSELOT, 1986, 1987), nous poursuivons l'étude du fonctionnement cognitif dans la démarche démonstrative : cette étude ne peut être abordée sans différencier les différents types de connaissances entrant en jeu dans l'activité de résolution de problème. La démonstration géométrique nécessite de trouver un chemin entre les hypothèses et la conclusion (connaissance stratégique, heuristique). Mais, pour cela, il faut savoir :

— mettre en évidence des statuts des propositions de l'énoncé : hypothèses, conclusion (connaissances déclaratives). La connaissance déclarative d'une définition ou d'un théorème est insuffisante pour comprendre l'activité de démonstration qui nécessite une représentation opératoire du théorème (*cf.* ci-après figures prototypes);

— savoir appliquer correctement un théorème en fonction des hypothèses, ce qui nécessite une connaissance sous forme procédurale des théorèmes ou définitions;

De plus, il faut séparer deux tâches souvent confondues dans les problèmes de géométrie : la découverte de la solution ou de son idée, et l'organisation déductive des énoncés. La première tâche relève de l'heuristique, la seconde relève de l'organisation et de la mise en forme. Ces tâches sont différentes et ne font pas appel au même type de compréhension.

### a) Connaissances procédurales

Elles consistent à savoir appliquer correctement un théorème dans une situation particulière donnée :

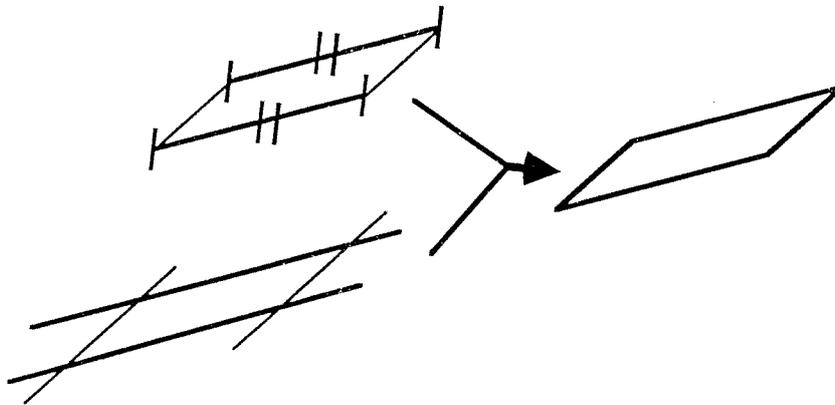
— vérifier qu'on a les hypothèses du théorème dans la situation particulière donnée,

— savoir exprimer la conclusion dans la situation particulière donnée.

**i) définition, théorèmes et représentations à l'aide de figures prototypes**

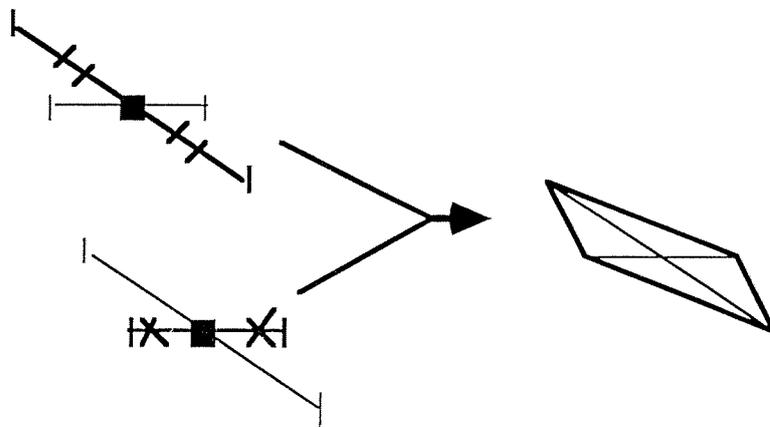
Les expérimentations que nous avons menées mettent en évidence l'association de plusieurs figures prototypes associées aux définitions et théorèmes : nous utilisons souvent dans la recherche d'une démonstration une représentation des théorèmes sous la forme d'une figure caractéristique à rechercher dans une figure. Ces représentations reflètent l'appréhension opératoire des figures nécessaires à la démarche heuristique que nécessite la démonstration (R. DUVAL, 1988). Voici quelques exemples :

**Théorème (Rlongueur) :** Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, ce quadrilatère est un parallélogramme :

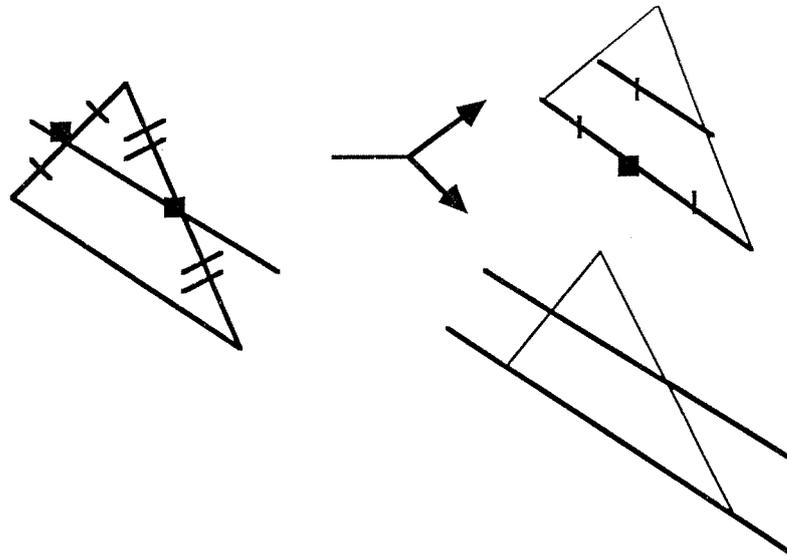


**Remarque :** la notion de parallélisme est rendue par des couleurs (ici par des traits renforcés).

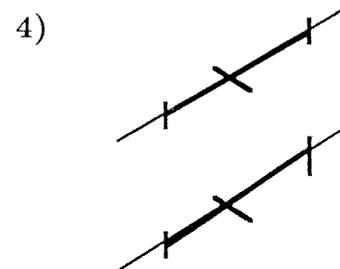
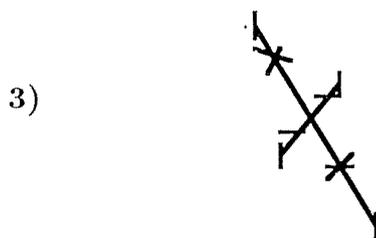
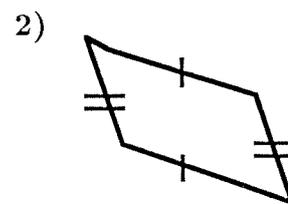
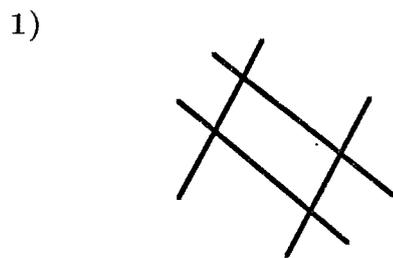
**Théorème (Rdiagonale) :** tout quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.



**Théorème des milieux (milieu) :** La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté. La longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.



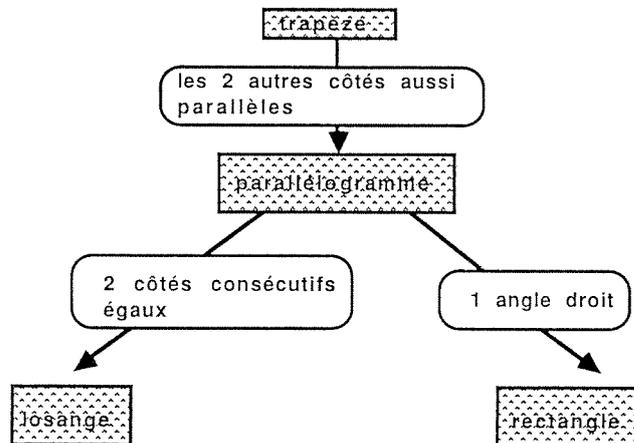
Dans les représentations des théorèmes, nous avons mis en évidence des représentations non équivalentes du point de vue cognitif. Voici les quatre figures prototypes associées au parallélogramme :



ii) réseaux sémantiques des objets géométriques

- les nœuds sont des objets géométriques,
- les arcs sont étiquetés par des propriétés.

Voici par exemple un extrait de celui du parallélogramme :



Les connaissances procédurales sont malheureusement en général intimement mêlées dans l'enseignement à la recherche du chemin qui mène à la conclusion ! Il est souhaitable de séparer les deux types d'activité dans un premier temps : cela facilitera, sans doute, la "compréhension des règles du jeu" de la démonstration. Les connaissances procédurales peuvent s'acquérir par des jeux où l'on donne un certain nombre de règles : les élèves pourront écrire l'arbre des transformations possibles pour un objet donné. Ensuite seulement, on leur demandera de trouver un chemin pour aller d'un objet donné à un autre objet donné : nous abordons maintenant les connaissances stratégiques.

b) Connaissances stratégiques et heuristiques

Les bons élèves possèdent ces règles qui orientent la recherche vers des pistes pertinentes. Face à un énoncé, ils éliminent *a priori* toute une partie de la base de connaissances à la lumière des hypothèses : ils savent déjà ne pas avoir à l'utiliser au cours de la démonstration. Ces règles sont rarement enseignées, car elles ne sont en général même pas explicitées. L'enseignement des mathématiques est trop déclaratif : on se contente souvent d'exposer les définitions, puis les théorèmes, les démonstrations sans justifier le choix des théorèmes utilisés. La justification du choix apparaît très rarement dans le corrigé qui est, en général, la mise en forme de la démonstration. Nous considérons que :

- la découverte de la solution nécessite la recherche d'un plan (\*\*),
- les heuristiques sont des aides à la recherche d'un plan.

**Remarque :** les heuristiques n'aboutissent pas forcément à la solution contrairement à un algorithme.

Si nous exprimons d'une manière assez précise le fonctionnement de l'activité de démonstration, nous pourrions réaliser un système ayant une structure de

---

(\*\*) Plan : un chemin possible entre les hypothèses et la conclusion.

contrôle basée sur cette modélisation. De plus, nous formulons l'hypothèse que l'enseignement des méthodes apportera une aide sensible aux élèves (J. ROGALSKI, 1987).

**Exemples :** Voici quatre heuristiques fréquentes. Dans les deux premières, il s'agit de rechercher et identifier dans la figure des figures extraites, des figures prototypes. L'identification d'une figure extraite ou prototype comprend deux étapes :

- exhiber la figure,
- vérifier qu'elle a le statut de figure extraite ou prototype.

1. Si le but en cours est de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, alors essayer l'identification d'une figure prototype Défpar "*côtés parallèles 2 à 2*", ou d'une figure prototype Rlongueur "*côtés opposés 2 à 2 de même longueur*" cf. p. 34, ou d'une figure prototype Rdiagonale "*diagonales de même milieu*" cf. p. 34, ou d'une figure prototype Rparlon "*côtés opposés parallèles de même longueur*".

2. Si le but en cours est de démontrer qu'un point  $X$  est milieu d'un segment  $[YZ]$ , alors essayer :

- l'identification d'une figure prototype diagonale "*dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu*", dont l'une des diagonales est  $[YZ]$  et le centre  $X$ ,
- l'identification d'une figure prototype Rmilieu "*réciproque du théorème des milieux*", dans laquelle  $[XY]$  est un côté.

Plus généralement :

3. Rechercher dans la figure des figures extraites ou prototypes qui ont quelque chose en commun (ex. : parallélogrammes ayant une diagonale en commun, triangles ayant un côté commun, etc. . .).

4. Enrichir la figure par des constructions, par exemple :

- si l'on ne peut appliquer les heuristiques ayant pour but parallélogramme, construire les diagonales et leur intersection et essayer d'appliquer l'heuristique correspondante,
- si les heuristiques n'ont pas abouti dans un triangle rectangle, compléter la figure pour obtenir un rectangle et essayer d'appliquer celles du rectangle.

**c) Organisation déductive des énoncés : représentation sous forme de réseau sémantique d'une démonstration.**

i) L'organisation déductive des énoncés dépend d'une ou plusieurs opérations de substitution. Chaque opération s'effectue à partir des *énoncés d'entrée* (soit les hypothèses, soit d'autres énoncés obtenus par substitution) selon une *règle de substitution* (un théorème, une définition, etc. . .). L'organisation de ces opérations donne la structure profonde de la démonstration (R. DUVAL – M.-A. EGRET (à paraître)).

ii) La représentation de la structure profonde de la démonstration sous forme de réseau sémantique donne aux élèves le moyen de prendre conscience de ce

qu'est une démonstration et de contrôler leur propre discours. Lorsqu'ils rédigent la solution du problème, ils trouvent alors d'eux-mêmes les expressions et les connecteurs pour :

- d'une part, exprimer le statut des énoncés,
- d'autre part, articuler les énoncés.

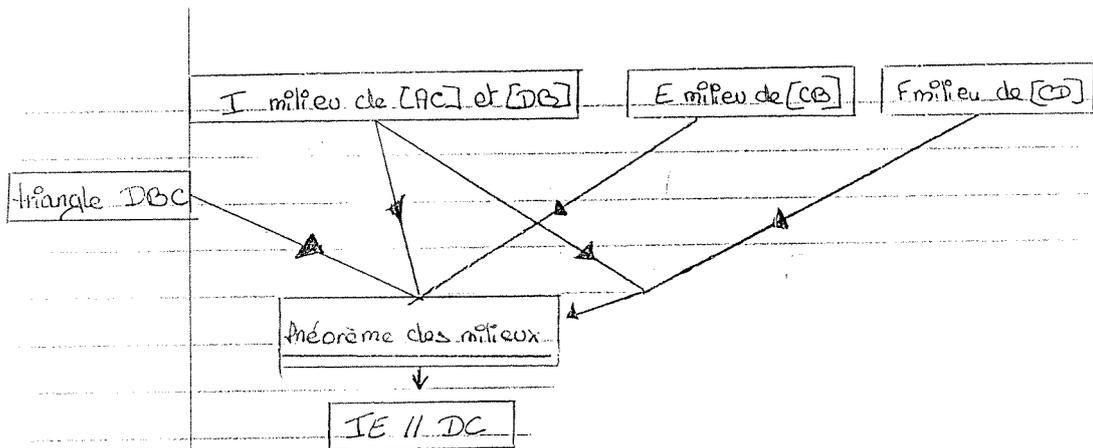
Voici les principes du réseau sémantique d'une démonstration :

- les nœuds sont des assertions (ex. :  $IE \parallel DC$ ,  $IEFC$  parallélogramme etc...), les couleurs différencient leur statut (hypothèses, conclusion, figures extraites);
- les arcs sont étiquetés par des noms de figures prototypes correspondant aux définitions et théorèmes.

**Exemple :**

*Énoncé du problème :*  $ABCD$  est un parallélogramme de centre  $I$ .  $E$  et  $F$  sont les milieux de  $BC$  et  $CD$ . La droite  $EF$  coupe  $AC$  en  $M$ . Montrer que  $M$  est le milieu de  $EF$ .

*Un extrait du réseau d'un élève :*



Ce réseau sera une aide fondamentale pour la mise en forme de la démonstration.

*Un extrait du texte proposé par cet élève :*

“Pour trouver qu'un point est le milieu de deux segments cela peut être les diagonales d'un parallélogramme. Il suffit que je prouve que  $IE \parallel FC$  et  $IF \parallel CE$ .

Il suffit d'appliquer le théorème des milieux dans le triangle  $DBC$ . On sait que  $E$  est le milieu de  $BC$  mais il nous faut un autre milieu. Ce sera  $I$  milieu de  $DB$  puisque  $I$  est l'intersection des diagonales d'un parallélogramme et qu'elles se coupent en leur milieu. Donc on peut appliquer le théorème des milieux. Dans le triangle  $DBC$ , la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui passe par le milieu du côté opposé, cette droite est parallèle au troisième côté. Je suis sûr que  $IE \parallel FC...$ ”

Le réseau sémantique est une représentation proposée aux élèves qu'ils utilisent à

leur convenance. Il ne peut être objet, en tant que tel, d'enseignement.

### III.— FLASH SUR LE DICTIONNAIRE

Pour faire des démonstrations, l'élève a besoin d'une base de connaissances. Le logiciel doit donc lui permettre de consulter les définitions, théorèmes et propriétés, un peu comme dans une encyclopédie. Pour chaque objet, il y a une dizaine de rubriques qui reprennent les idées mises en évidence précédemment, par exemple :

- définition avec différentes représentations, animations des figures;
- théorèmes avec exemples et contre-exemples animés. Etude systématique des réciproques et de l'effet de l'absence d'une des entrées du théorème;
- figures extraites, figures prototypes, sur-figures;
- arbre des spécialisations et des généralisations de l'objet, sous forme de réseau sémantique (*cf.* ci-dessus les réseaux sémantiques des objets géométriques).

La partie expertise de ce module est presque achevée. Pour une réalisation informatique, la représentation orientée objet est particulièrement bien adaptée. Le logiciel HYPERCARD (Macintosh) donne actuellement la possibilité d'une réalisation rapide de ce module par des non spécialistes. Encore faut-il obtenir des décharges effectives . . . pour un logiciel qui tournerait sur un matériel non disponible dans les années à venir dans l'Education Nationale!

### CONCLUSION

Durant l'expérimentation en classe, nous avons observé que l'appropriation de la démonstration, avec ces méthodes, par des élèves de 4<sup>e</sup> suscite un changement d'attitude complet à l'égard de la géométrie : un véritable plaisir et beaucoup d'intérêt. Le raisonnement, en géométrie plus particulièrement, nécessite de la rigueur; c'est une activité intellectuelle gratifiante parce qu'exigeante. Nous sommes donc inquiets de voir qu'on envisage parfois de supprimer la démonstration au collège au profit d'autres activités moins contraignantes.

Les conséquences essentielles de ce travail sur notre enseignement sont d'une part la mise en évidence de méthodes, d'autre part l'explicitation, en classe, des heuristiques. Il reste, cependant, à approfondir une phase essentielle : comment apporter une aide efficace à la recherche d'un plan sans le fournir explicitement? Notre réflexion pédagogique sera alors suffisamment avancée pour qu'une équipe d'informaticiens passe à une réalisation concrète. Dans ce but, nous avons élaboré un cahier des charges tenant compte, d'une part, des résultats mis en évidence, d'autre part, des lacunes constatées dans d'autres travaux sur ce sujet (D. GUIN et al. (à paraître)).

La réalisation d'un tutoriel intelligent nécessite d'explicitier des savoirs que l'on n'expliciterait pas spontanément :

- les différents types de connaissances;
- des représentations;
- des savoir-faire;
- des connaissances stratégiques.

Cette explicitation ne doit-elle pas être réinvestie dans l'enseignement? Nous pensons que d'une part, il faut poursuivre cette étude théorique et les expérimentations dans les classes menées par des enseignants de l'IREM et des chercheurs en didactique des mathématiques afin de mettre au point une modélisation de cette activité cognitive. D'autre part la réalisation concrète d'un projet aussi ambitieux ne semble possible que si une équipe d'informaticiens y collabore.

Cette recherche nécessite donc un travail simultanément dans trois domaines : intelligence artificielle, psychologie cognitive et didactique des mathématiques. Elle permet d'entrevoir à l'avenir la possibilité de réaliser un logiciel véritablement utile aux élèves en difficulté, mais indépendamment de ce but initial, les retombées nombreuses des réflexions dans toutes les directions indiquées justifient, à elles seules, les efforts entrepris, malgré les moyens très faibles de l'équipe (1 heure en heures supplémentaires par membre de l'équipe). Les résultats actuels qui ont fait l'objet de publications et de communications dans des colloques justifieraient l'obtention de décharges effectives pour poursuivre, dans de bonnes conditions, cette recherche.

## BIBLIOGRAPHIE

BONNET C. – HOC J.-M. – THIBERGHEN G. (1986).– *Psychologie et intelligence artificielle et automatique.*– Ed. P. Mardaga.

DUVAL R. (1988).– *Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruences.*– in “*Annales de didactique et de sciences cognitives*”, Vol. 1, p. 57–75.– Ed. IREM de Strasbourg.

DUVAL R. – EGRET M.-A. (à paraître).– *La fonction discriminative des réseaux sémantiques dans la démarche démonstrative en géométrie.*– in “*Annales de didactique et de sciences cognitives*”, Vol. 2.– Ed. IREM de Strasbourg.

GAUD D. – GUICHARD J.-P. (1984).– *Apprentissage de la démonstration (géométrie de 4<sup>e</sup>).*– in “*Petit x*”, n° 4, p. 5–25.– Ed. IREM de Grenoble.

GUIN D. avec la collaboration du groupe IREM I.A. de Strasbourg (à paraître) : *Réflexions critiques sur les logiciels d'aide à la démonstration – Elaboration d'un cahier des charges.*– in “*Annales de didactique et de sciences cognitives*”, Vol. 2.– Ed. IREM de Strasbourg.

GUIN D. – ROUSSELOT F. (1986).– *Un système expert résolvant des problèmes de géométrie (4<sup>e</sup>) – Recherche en vue de la réalisation d'un programme E.A.O.*– in “*Actes du colloque Intelligence Artificielle*”.– Publication du Laboratoire C.-F. Picard.

GUIN D. – ROUSSELOT F. (1987).– *Aide à la recherche d'une démonstration (géométrie de 4<sup>e</sup>).*– in “*Actes du colloque E.A.O.*” (Cap d'Agde), p. 429–438.

ROGALSKI J. – SAMURCAY R. (1987).– *Enseigner des méthodes.*– in “*Cahier de didactique des mathématiques*”.– Ed. Paris VII.

## A VOS STYLOS

### PROBLÈME 4

#### Enoncé

Trouver tous les réels  $a > 0$  tels qu'il existe dans l'espace euclidien usuel muni d'un repère orthonormé, un cube de côté  $a$  et dont les sommets ont toutes leurs coordonnées entières.

**Solution** (M.- P. MULLER, J. MULLER, E. EHRHART)

Il existe trois vecteurs à composantes entières, deux à deux orthogonaux, de même longueur  $a$ . Le théorème de PYTHAGORE appliqué à l'un d'entre eux montre que  $a^2$ , somme de trois carrés, est un entier. Le volume  $a^3$  du cube, produit mixte des trois vecteurs, se calcule par un déterminant à éléments entiers, et est donc aussi entier. Ainsi  $a = \frac{a^3}{a^2}$  est rationnel; comme son carré est entier, un raisonnement classique (décomposition en facteurs premiers) montre qu'il est entier.

Et si  $a$  est entier, le cube construit sur les vecteurs  $\vec{ai}, \vec{aj}$  et  $\vec{ak}$ , où  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sont les vecteurs unitaires des axes, a tous ses sommets à coordonnées entières.

M.- P. MULLER généralise cette démonstration au cas d'un espace de dimension finie impaire quelconque.

E. EHRHART fait référence à un article donnant tous les cubes entiers. A ce sujet, nous donnons ci-après un texte écrit il y a quelques années par A. VIRICEL.

### CUBES ENTIERS

On appelle cube entier un cube dont tous les sommets ont des coordonnées entières dans un repère orthonormé. Après avoir donné deux familles de cubes entiers, E. EHRHART dans '*L'Enseignement Mathématique*' signale la propriété : "L'arête de tout cube entier est mesurée par un entier" qu'il établit et pose le problème :

"Trouver tous les cubes entiers".- *Ens. Math.*, t. V, fasc. 2, 1959

On peut, par une translation convenable, amener un des sommets d'un cube entier en l'origine  $O$ .

On se bornera donc à considérer des cubes dont  $O$  est un sommet. Ils sont déterminés par leurs trois sommets  $A, B, C$  les plus proches de  $O$ . Le tableau des coordonnées de ces trois points permet de trouver les coordonnées des sommets autres que  $O, A, B, C$ .

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \left( \begin{array}{ccc} 642 & 120 & 544 \\ 320 & 600 & -510 \\ -456 & 590 & 408 \end{array} \right) \end{array}$$

Ci-dessus un exemple de matrice carrée  $\mathcal{M}_k$  déterminant un cube ( $K$ ).

L'étude suivante comprend deux parties :

1° On peut passer d'un cube entier quelconque  $K$  à tout cube entier  $K'$  par la chaîne des transformations : une homothétie, deux symétries/plan, une homothétie.

2° On peut déterminer tous les cubes entiers à partir de l'un d'eux.

### Première partie

Soient deux cubes entiers ( $K$ ) et ( $K'$ ) d'arêtes respectives  $n$  et  $n'$ . D'après le théorème d'EHRHART,  $n$  et  $n'$  sont des entiers. Soit  $p$  leur P.P.C.M.

L'homothétie  $(O, \frac{p}{n})$  donne de ( $K$ ) l'image ( $K_1$ ) d'arête  $p$ .

L'homothétie  $(O, \frac{p}{n'})$  donne de ( $K'$ ) l'image ( $K'_1$ ) d'arête  $p$ .

( $K_1$ ) et ( $K'_1$ ) sont des cubes isométriques ayant un sommet commun  $O$ . Précisons dans ( $K_1$ ) un trièdre trirectangle  $OA_1B_1C_1$  et dans ( $K'_1$ ) un trièdre trirectangle  $OA'_1B'_1C'_1$  de même sens.

On peut passer de ( $K_1$ ) à ( $K'_1$ ) par une certaine rotation  $\mathcal{R}$  d'axe  $\Delta$  passant par  $O$ .  $\Delta$  est l'intersection du plan médiateur  $\mathcal{A}$  de  $A_1A'_1$ .

$\Delta$  est l'intersection du plan médiateur  $\mathcal{B}$  de  $B_1B'_1$ .

Ces plans,  $\mathcal{A}$  normal à  $\overrightarrow{A_1A'_1}$ ,  $\mathcal{B}$  normal à  $B_1B'_1$ , ont dans leurs équations, comme coefficients de  $x, y, z$ , des nombres proportionnels aux projections entières de  $\overrightarrow{A_1A'_1}$  ou de  $\overrightarrow{B_1B'_1}$ .

$\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  déterminent un faisceau de plans contenant  $\Delta$ .

Si  $a_1x + a_2y + a_3z = 0$  est l'équation de  $\mathcal{A}[(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3]$ ,

si  $b_1x + b_2y + b_3z = 0$  est l'équation de  $\mathcal{B}[(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{Z}^3]$ ,

$\alpha(a_1x + a_2y + a_3z) + \beta(b_1x + b_2y + b_3z) = 0[(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2]$  est l'équation d'un plan  $P_1$  de ce faisceau.

Soit  $A_2$  le symétrique de  $A_1$  pour  $P_1$ .  $A_2$  a des coordonnées, sinon entières, du moins rationnelles.

Le plan  $P_2$  médiateur de  $A_2A'_1$  a une équation à coefficients rationnels qui peuvent être rendus entiers.

Les plans médiateurs des trois côtés du triangle  $A_1A_2A'_1$  ont en commun une droite. Cette droite appartient aux plans médiateurs de  $A_1A_2(P_1)$  et de  $A_1A'_1(\mathcal{A})$ . C'est la droite  $\Delta$  qui appartient donc au 3<sup>e</sup> plan.

Ainsi, la rotation  $\mathcal{R}$  est donc le produit des deux symétries/plan, pour  $P_1$  et pour

$P_2$  et on a montré que :

$$K \xrightarrow{\text{Hom}(O, \frac{p}{n})} K_1 \xrightarrow{\text{Produit de Sym}/p_1 \text{ et Sym}/p_2 \text{ ou rotation } \mathcal{R}} K'_1 \xrightarrow{\text{Hom}(O, \frac{p'}{p})} K'$$

### Deuxième partie

A partir d'un cube quelconque ( $K$ ), dont  $O$  est un sommet et dont la matrice caractéristique a pour éléments des nombres "petits" de préférence, on est sûr d'obtenir tout cube entier ( $K'$ ) dont  $O$  est un sommet.

Considérons l'ensemble des couples de plans  $P_1$  et  $P_2$  dont les équations sont de la forme  $ux + vy + wz = 0$  ( $u, v, w$ )  $\in \mathbb{Z}^3$ .

Le couple particulier défini dans la première partie est inclus dans cet ensemble.

Soit ( $K$ ) défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et six entiers  $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$  ( $\alpha, \beta, \gamma$ )  $\in \mathbb{Z}^3$ , ( $a, b, c$ )  $\in \mathbb{Z}^3$ .

1° Appliquons à ( $K$ ) l'homothétie ( $O, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ ).

2° Appliquons à ( $K_1$ ) la symétrie/plan pour  $P_1$  d'équation  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ .

La matrice de cette symétrie est :

$$\mathcal{M}P_1 = \begin{pmatrix} \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta & \gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2 & -2\beta\gamma \\ -2\alpha\gamma & -2\beta\gamma & \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

On agit sur chacune des colonnes de ( $K_1$ ) ce qui revient à faire le produit par  $\mathcal{M}P_1$  de la matrice de ( $K_1$ ).

3° Appliquons au symétrique de  $K_1$  pour  $P_1$  la symétrie/plan pour  $P_2$  d'équation :  $ax + by + cz = 0$ . La matrice de cette symétrie est :

$$\mathcal{M}P_2 = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 - a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & c^2 + a^2 - b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & a^2 + b^2 - c^2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

4° Terminons par l'homothétie ( $O, a^2 + b^2 + c^2$ ).

Les deux homothéties ont pour effet de débarrasser les calculs des diviseurs :  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, a^2 + b^2 + c^2$  et de substituer aux deux matrices  $\mathcal{M}P_1$  et  $\mathcal{M}P_2$  les matrices  $\mathcal{M}'P_1$  et  $\mathcal{M}'P_2$  qui sont les facteurs entre parenthèses de  $\mathcal{M}P_1$  et de  $\mathcal{M}P_2$ .

Ainsi pour obtenir la matrice caractéristique d'un cube entier, il suffit d'appliquer à la matrice de  $(K)$  (c'est la matrice unité) le produit  $\mathcal{M}'P_2 \times \mathcal{M}'P_1$ .

Ce produit représente donc la matrice (\*) caractéristique de tout cube entier.

$$\begin{pmatrix} (b^2 + c^2 - a^2)(\beta^2 + \gamma^2 - a^2) + 4ab\alpha\beta + 4aca\gamma & -2\alpha\beta(b^2 + c^2 - a^2) - 2ab(\beta^2 + d^2 - \beta^2) + 4ac\beta\gamma \\ -2ab(\beta^2 + \gamma^2 - d^2) - 2\alpha\beta(ac^2 + a^2 - b^2) + 4bc\alpha\gamma & 4ab\alpha\beta + (c^2 + a^2 - b^2)(\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 4bc\beta\gamma \\ -2ac(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 + 4bc\alpha\beta - 2\alpha\gamma(a^2 + b^2 - c^2)) & 4ac\alpha\beta - 2bc(\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2) - 2\beta\gamma(a^2 + b^2 - c^2) \end{pmatrix}$$

Les matrices  $\mathcal{M}P_1, \mathcal{M}P_2, \mathcal{M}P_2 \times \mathcal{M}P_1$  sont des matrices d'isométrie. Les deux premières correspondent aux antidéplacements; la troisième aux déplacements.

Les matrices  $\mathcal{M}'P_1, \mathcal{M}'P_2, \mathcal{M}'P_2 \times \mathcal{M}'P_1$  sont à un facteur numériques près, des matrices d'isométrie. Il en est de même des matrices caractéristiques de tous les cubes entiers. Il en résulte que le produit matriciel des matrices de deux cubes entiers est la matrice du cube entier.

D'autre part, l'arête du cube obtenu après les quatre transformations est :  $(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ . On peut décomposer le carré de ce produit en trois premières sommes de trois carrés. En substituant à la matrice finale sa transposée, on obtient trois autres sommes de trois carrés égales à  $(a^2 + b^2 + c^2)^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2$ .

---

### PROBLÈME 5

(proposé par A. JEANNIN et X. RELIQUET)

**Énoncé :** Vrai ou faux?

Si  $F$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  et si  $E_1 \dots E_n$  sont des sous-espaces vectoriels de  $F$  tels que  $E_1 \cup \dots \cup E_n = F$ , alors l'un au moins des  $E_i$  est égal à  $F$ .

Donner une démonstration ou un contre exemple.

**Indication**

C'est vrai par récurrence sur  $n$ .

---

(\*) Les deux premiers termes de cette matrice se trouvent sur la présente page de gauche, le troisième terme figure sur la page ci-contre.

$$\begin{pmatrix} (b^2 + c^2 - a^2)(-2\alpha\gamma) + 4ab\beta\gamma - 2ac(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \\ 4ab\alpha\gamma(c^2 + a^2 - b^2)(-2\beta\gamma) - 2bc(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \\ 4ac\alpha\gamma + 4bc\beta\gamma + (a^2 + b^2 - c^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \end{pmatrix}$$

---

### PROBLÈME 6

#### Énoncé

Pour  $\epsilon > 0$ , soit  $\mathcal{M}^\epsilon$  l'ensemble des matrices  $3 \times 3$ , à coefficients positifs ou nuls, telles que la somme de chaque colonne soit 1 et que l'une au moins des lignes ait tous ses coefficients plus grands que  $\epsilon$ . Montrer que si  $(M_n)_{n \geq 1}$  est une suite dans  $\mathcal{M}^\epsilon$ , le produit infini

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \times \dots$$

converge. La limite est-elle toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} ?$$

---

DEVOIR DE VACANCES :

### EXERCICES EN ISOMETRIE

L'isométrie mène à tout!  
Une boîte de fromage...



Inclinez le buste latéralement, puis poussez vers le haut avec le bras tendu, paume tournée vers le ciel, et enfoncez vers le bas avec le bras tendu, paume tournée vers le sol. Changez de côté. Forcez à chaque fois sur la position.

Comptez au moins dix secondes sur la position forcée et expirez lentement durant l'exercice.

Recherchez, pendant tout ce temps, l'étirement maximal.