APPROCHONS π AVEC UNE ERREUR DE 1/40 000 000 000

Yves PIRAT

N.D.L.R. : Il est toujours possible de construire à la règle et au compas une approximation aussi bonne que l'on veut d'un réel, π par exemple. La précision devient vite illusoire dès que le nombre de reports d'instrument s'élève. (Il n'est pas si évident que ça de construire effectivement un hexagone régulier!) Il est par contre intéressant de concevoir une construction raisonnable en temps et en dimension. En ce sens le travail de M. PIRAT est original et peut donner des idées d'application en classe.

L'affaire est claire et sans appel : la quadrature parfaite du cercle est impossible à réaliser, et tenter d'apporter du nouveau dans ce domaine ne présente plus aucun intérêt... si l'on en croit les mathématiciens de haut vol!

Mais il en faut davantage pour décourager les chercheurs amateurs!

Elaborer une formule d'approximation n'est pas un exploit si j'en juge par la facilité avec laquelle j'ai découvert les suivantes (et bien d'autres dont je vous fais grâce) :
— avec une faible erreur sur la 9^e décimale : $\sqrt{10}-\frac{76,7}{3708}$; $\sqrt{5}+1-\frac{821}{8690,1}$;
— avec une faible erreur sur la 8^e décimale : $4\sqrt{5}-4\sqrt{2}-\frac{0,5833}{4}$; $2\sqrt{5}-1-\frac{41,979}{127}$.

Mais l'élaboration d'une formule relativement simple donnant une valeur π' très approchée de π (avec 10 décimales justes) et menant à une construction géométrique facile, relève du casse-tête! Je ne vous imposerai donc pas la lecture de la genèse de cette découverte :

$$\pi' = \sqrt{40} - \frac{9,548888}{3} = 3,1415926536701 \cong \pi - 0,0000000000804$$

c'est-à-dire avec une erreur relative de 1/40 000 000 000 qui bat à plate couture le 1/30 000 000 cité par WARUSFEL. Pour donner une idée plus concrète de cette précision, je vous signale que si cette formule était utilisée pour carrer le cercle moyen de la Terre (diamètre : 12 730 km), l'erreur absolue avoisinerait 1 mm sur le périmètre et 32 ares sur la superficie. Ce qui est vraiment peu, on en conviendra.

Mise à part cette précision, la construction que je propose est d'autant plus intéressante qu'elle détermine deux lieux géométriques originaux. En effet, après avoir construit la formule à partir d'un cercle quelconque (C), vous pourrez obtenir en quelques secondes le carré correspondant à n'importe quel autre cercle, et inversement. Ce qui fournit un immense avantage sur toutes les formules de π utilisées dans l'industrie!

QUELQUES EXPLICATIONS

Remarque préliminaire

On remarque que l'on peut écrire :

$$\pi' = \sqrt{40} - \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{5}\right) - \frac{2,19 \times 5,23}{12,5}.$$

Graphiquement, on notera

$$\mathrm{PI} = \frac{5}{3} + \frac{3}{5} \quad ; \quad \mathrm{IA} = \frac{2,19 \times 5,23}{12,5} \quad \mathrm{PA} = \frac{9,548888}{3}.$$

Problème à résoudre

Après avoir tracé un cercle (C) quelconque, **dont le rayon R servira d'UNITÉ dans tout ce qui suit**, il faudra construire $OP(= OA - PA)$ qui égale $\pi' R$, c'est-à-dire voisin de la moitié de la circonférence de (C). Il suffira de partager OP en 2 pour obtenir $OP/2$ côté du carré correspondant, **en périmètre**, au cercle (C). Puis il faudra construire $OS = R\sqrt{\pi'}$ côté du carré correspondant, **en superficie**, au cercle (C). Dans toutes ces constructions, fort simples comme vous le remarquerez, les proportions ne seront pas respectées pour des raisons évidentes de place.

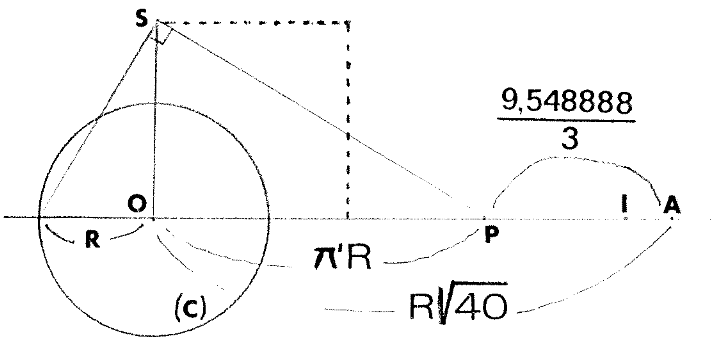

Figure 1

La figure 1 montre la situation à laquelle il faut aboutir. J'ai conservé exceptionnellement l'unité R, que l'on ne retrouvera plus dans les figures suivantes.

Pour parvenir à la figure 1, nous allons construire successivement les divers éléments qui interviennent dans la formule.
Si l'affaire est simple, puisqu'elle ne fait appel qu'à des connaissances scolaires (PYTHAGORE et surtout THALÈS), elle sera un peu longue, mais cela se justifie par la précision à laquelle il faut aboutir.

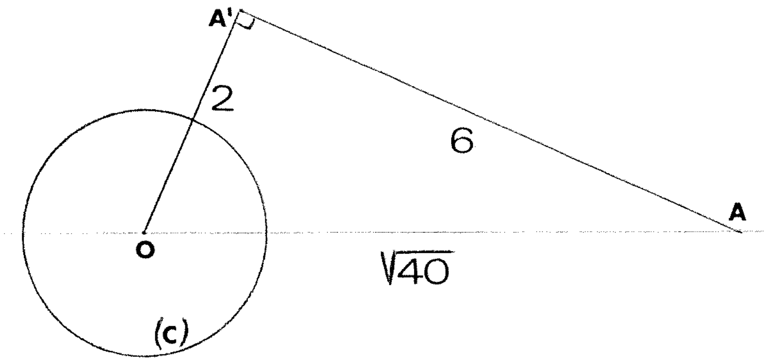

Figure 2
Construction de $OA = \sqrt{40}$ sur une droite quelconque
passant par le centre O du cercle (C).

Il suffit de construire le triangle $OA'A$, rectangle en A'. A noter que 2 égale en fait $2R, 6 = 6R, \sqrt{40} = R\sqrt{40}$.

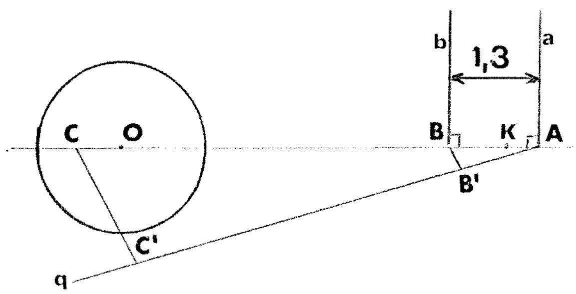

Figure 3
Construction d'un élément dont nous aurons besoin dans la suite.

Tracer Aq quelconque. Placer les points B', C' et C tel que $AB' = 1$, $AC' = 5$, $AC = 6,5$. La relation $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} donne AB = 1,3$. Placer K tel que $BK = 1$. Mener, en A et B les perpendiculaires (Aa) et (Bb) à OA.

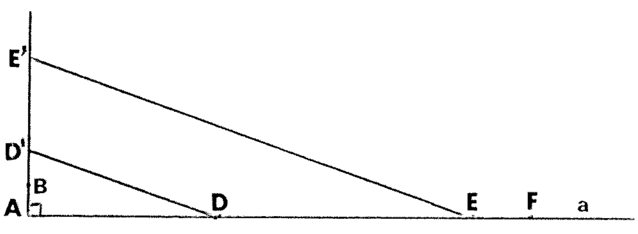

Figure 4
Construction de $AF = 2,19$

Placer E', D' et E tel que $AE' = 5, BD' = 1, AE = 1,5$. La relation $\frac{AD}{AE} = \frac{AD'}{AE'}$ donne $AD = 0,69$. Placer F tel que $DF = 1,5$ donne $AF = 2,19$.

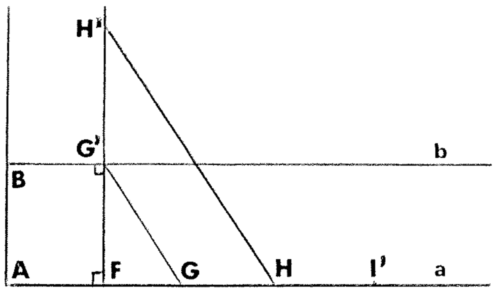

Figure 5
Construction de $AI = 5,23$

Mener, en F, la perpendiculaire Ff à Aa, qui coupe Bb en G'. Placer les points H et H' tels que $FH = 2$ et $FH' = 2,5$. La relation $\frac{FG}{FH} = \frac{FG'}{FH'}$ donne $FG = 1,04$. Placer I' tel que $GI' = 2$ et $FI' = 3,04$. Donc $AI' = 2,19 + 3,04 = 5,23$.

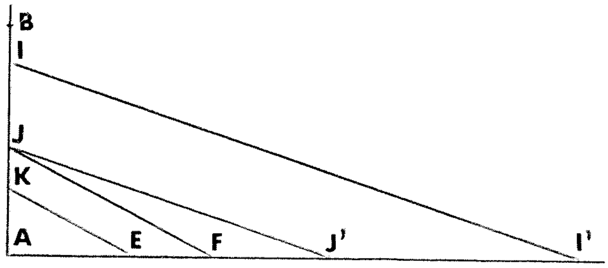

Figure 6
Construction de $AI = 2,19/5 \times 5,23/2,5 = 13,74444/15$

Placer J' tel que $AJ' = 2,5$. La relation $\frac{AJ}{AK} = \frac{AF}{AE}$ donne $AJ = 2,19/5$. La relation $\frac{AI}{AJ} = \frac{AI'}{AJ'}$ donne $AI = AJ \times \frac{AI'}{AJ'}$ d'où $AI = 2,19/5 \times 5,23/2,5$.

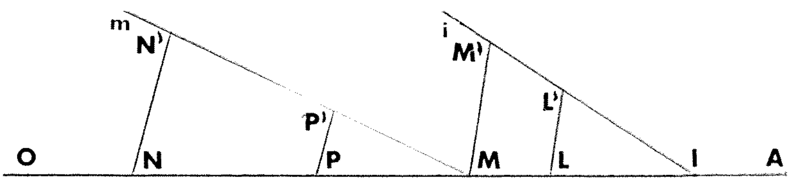

Figure 7
Construction de $IP = 34/15$

Tracer Ii quelconque. Placer L, M' et L' tels que $IL = 1, IM' = 5, IL' = 3$. La relation $\frac{IM}{IL} = \frac{IM'}{IL'}$ donne $IM = 5/3$. Tracer Mm quelconque. Placer N, P' et N' tels que $MN = 1, MP' = 3, MN' = 5$. La relation $\frac{MP}{MN} = \frac{MP'}{MN'}$ donne $3/5$. Donc $IP = 34/15$.

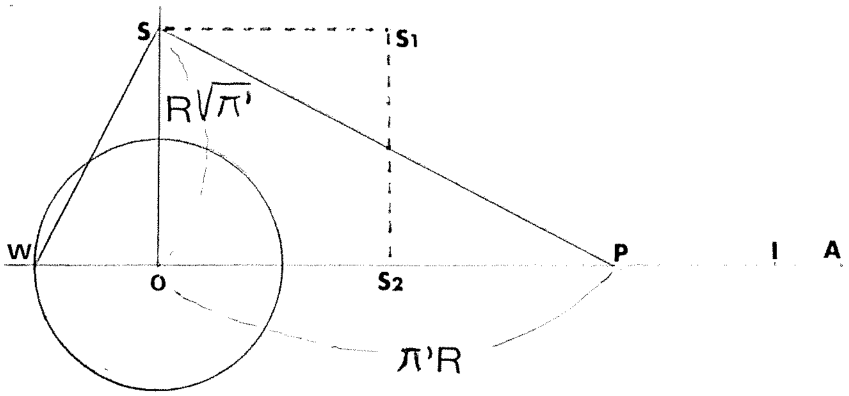

Figure 8

Après avoir construit $OS = R\sqrt{\pi'}$, nous serons parvenus à la figure 1

Nous savons que $OA - AP = OP = \pi' R$. Donc $OP/2$ est le côté du carré correspondant, **en périmètre**, au cercle (C). Construire le triangle WSP, rectangle en S. Comme $WD = 1$, la hauteur $OS = R\sqrt{\pi'}$ est le côté du carré OSS_1S_2 correspondant, **en superficie**, au cercle. En effet : Superficie de $(C) = \pi R^2$; superficie du carré $= \pi' R^2$.

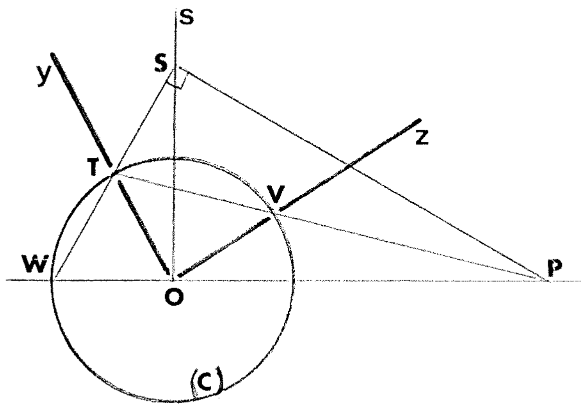

Figure 9

Construction des lieux géométriques qui permettent de trouver immédiatement les côtés des deux carrés correspondant à un cercle quelconque, et inversement.

WS coupe le cercle (C) en T. TP coupe le cercle (C) en V. La demi-droite Oy (OT prolongé) est le lieu géométrique des points T. La demi-droite Oz (OV prolongé) est le lieu géométrique des points V.

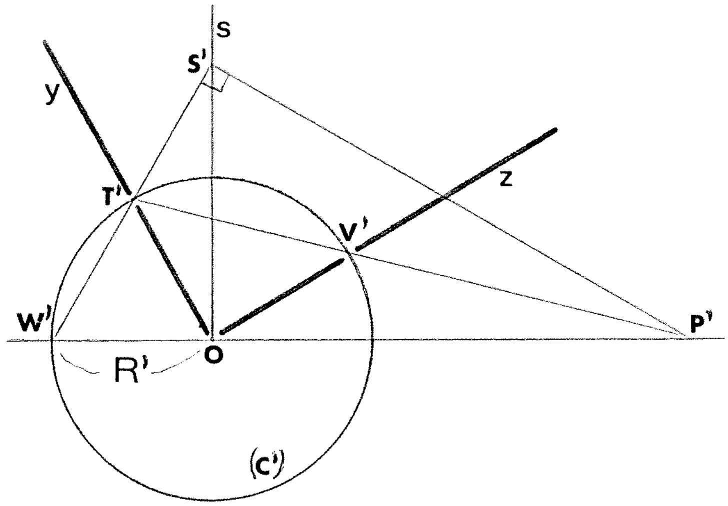

Figure 10

Utilisation des lieux géométriques

Soit un cercle quelconque (C') de rayon R' que Oy et Oz coupent respectivement en T' et V'. Le prolongement de $W'T'$ coupe Os en S'. $OS' = R'\sqrt{\pi'}$. $T'V'$ prolongé coupe OA en P_1. $OP_1 = \pi' R' = 1/2$ circonférence de (C'). A noter que P_1 peut être déterminé autrement : soit en construisant le triangle $W'S'P_1$, rectangle en S', soit en construisant $S'P_1$ parallèle à SP. On comprend dès lors facilement que l'on peut effectuer l'opération inverse : obtenir instantanément le cercle correspondant à un carré donné.