

LA CONTINUITÉ

Augustin CAUCHY

N.D.L.R. : Nous donnons ci-après quelques extraits du cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique de CAUCHY.

INTRODUCTION

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude et alors les différentes formules ne présentent plus des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'*une série divergente n'a pas de somme*.

(...)

Mais ceux qui liront mon ouvrage reconnaîtront, je l'espère, que les propositions de cette nature, entraînant l'heureuse nécessité de mettre plus de précision dans les théories, et d'apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues, tournent au profit de l'analyse, et fournissent plusieurs sujets de recherches qui ne sont pas sans importance. Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention.

(...)

CHAPITRE I

DES FONCTIONS RÉELLES

I.— *Considérations générales sur les fonctions.*

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante*; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes*; et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de ces mêmes variables.

Les diverses expressions que fournissent l'Algèbre et la Trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces mêmes variables. Ainsi, par exemple,

$$L(x), \sin x, \dots$$

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x , et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α , la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x + \alpha) - f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x . Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x , fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

décroit indéfiniment avec celle de α . En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un*

LA CONTINUÏTÉ

accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x , fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x , même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x , on dit qu'elle devient alors *discontinue* et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité*.

CHAPITRE II

DES QUANTITÉS INFINIMENT PETITES OU INFINIMENT GRANDES, ET DE LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS.

VALEURS SINGULIÈRES DES FONCTIONS DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS.

I.— *Des quantités infiniment petites et infiniment grandes.*

On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un décroissement constant avec un décroissement indéfini. La surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle donné décroît constamment à mesure que le nombre des côtés augmente, mais non pas indéfiniment, puisqu'elle a pour limite la surface du cercle. De même encore, une variable qui n'admettrait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots,$$

prolongée à l'infini, décroîtrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire, une variable qui n'aurait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \dots,$$

prolongée à l'infini, ne décroîtrait pas constamment, puisque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est alternativement positive et négative.

(...)

CHAPITRE VI

DES SÉRIES CONVERGENTES ET DIVERGENTES.
 RÈGLES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES.
 SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES CONVERGENTES.

I.— *Considérations générales sur les séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s , la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n , savoir u_n , sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n , pour que la série soit complètement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$1, x, x^2, x^3, \dots,$$

qui a pour terme général x^n .

(...)

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s ; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n , les sommes

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots$$

LA CONTINUITÉ

diffèrent de la limite s , et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= u_n, \\ s_{n+2} - s_n &= u_n + u_{n+1}, \\ s_{n+3} - s_n &= u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n , décroisse indéfiniment, tandis que n augmente; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n , les différentes sommes

$$\begin{aligned} &u_n + u_{n+1}, \\ &u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire les sommes des quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \dots,$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

(...)

On indique généralement la somme d'une série convergente par somme de ses premiers termes suivie de points. Ainsi, lorsque la série

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$$

est convergente, la somme de cette série est représentée par

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

En vertu de cette convention, la valeur du nombre e se trouvera déterminée par l'équation

$$(6) \quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots;$$

et, si l'on considère la progression géométrique

$$1, x, x^2, x^3, \dots,$$

A. CAUCHY

on aura, pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité,

$$(7) \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

La série

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par s , et par s_n la somme de ses n premiers termes, on trouvera

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots = s_n + u_n + u_{n+1} + \dots$$

et, par suite,

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \dots$$

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n , on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n^{\text{ième}}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x , cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x , dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$s_n, r_n \text{ et } s$$

sont encore trois fonctions de la variable x , dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α . L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n , une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n , si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉOREME I.— *Lorsque les différents termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x , continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x .*