LA CATASTROPHE DE KEMPE

Jean LEFORT

La première mention écrite du problème des quatre couleurs date du 23 octobre 1852 dans une lettre de A. de MORGAN à HAMILTON. (Le problème est attribué à un dénommé Francis GUTHRIE.)

Mais c'est en 1878 que ce problème acquis une grande notoriété par une communication de CAYLEY à la Société Mathématique de Londres.

En 1879, un avocat londonien, mathématicien amateur, KEMPE, propose une "*démonstration*" et atteint ainsi la célébrité, recevant honneurs et décorations.

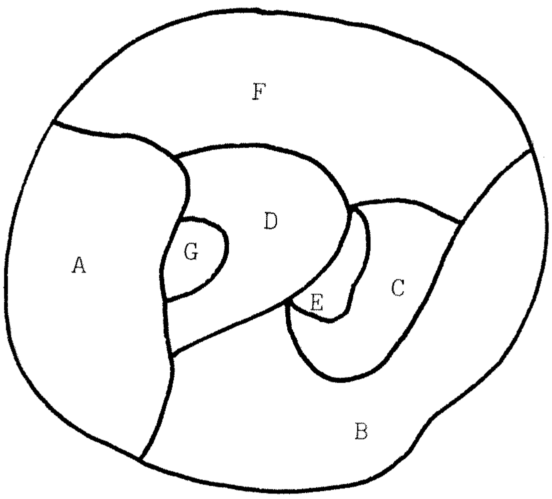
Pour bien comprendre le travail de KEMPE, nous utiliserons un vocabulaire moderne (KEMPE utilisait le langage des cartes qui n'est pas très facile à manier!).

1.— Transformation du problème :

Le problème est :

> *"Démontrer que quatre couleurs sont toujours suffisantes pour colorier une carte plane de façon que deux pays voisins n'aient jamais la même couleur."*

Précisons que chaque pays est d'un seul tenant (on dit connexe) et que deux pays sont voisins s'ils ont une frontière commune (un ou plusieurs points isolés entre deux pays ne permettent pas de les déclarer voisins).

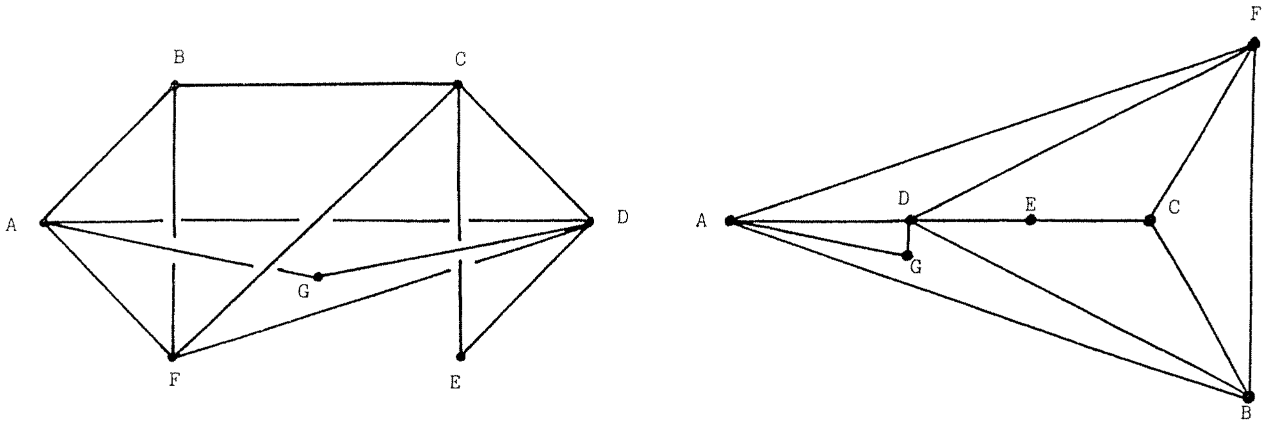


C et D ne sont pas voisins.
E n'est voisin que de D et C.

Figure 1

© L'OUVERT 50 (1988)

Choisissons **un** point à l'intérieur de chaque papys (et non pas sur la frontière) et relions par un arc de courbe deux points si et seulement si ces deux points sont choisis dans deux pays voisins. Nous obtenons ainsi un graphe (fig. 2) dont les points sont les **sommets** et les arcs de courbe les **arêtes**.



Graphe de la figure 1
avec croisements.

Graphe de la figure 1
sans croisements.

Figure 2

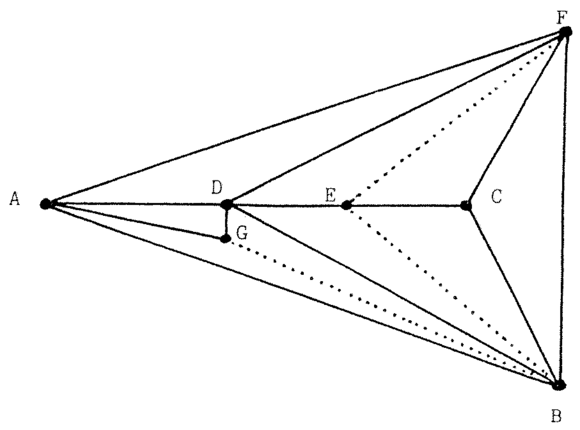
Il est clair qu'on peut toujours s'arranger pour que deux arêtes distinctes n'aient en commun qu'un sommet ou plus. On dit qu'il s'agit d'un graphe planaire.

Le problème des quatre couleurs peut être reformulé ainsi : "*démontrer que quatre couleurs sont suffisantes pour colorier les sommets d'un graphe planaire de façon que deux sommets reliés par une arête ne soient pas de la même couleur*".

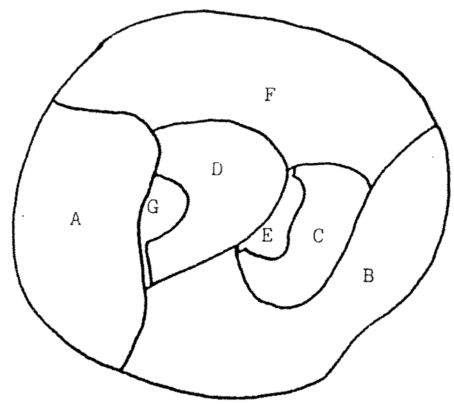
Remarque : un graphe délimite dans le plan un certain nombre de régions appelées **faces**. Chaque face est bordée par au moins trois arêtes. Si il y en a plus de trois, on peut toujours ajouter des arêtes pour se ramener au cas où il y a exactement trois arêtes autour de chaque face. On obtient alors un graphe **triangulé**.

Il est clair que si on a démontré le théorème des quatre couleurs pour un graphe triangulé, il est alors démontré pour tout graphe.

En langage des cartes, ajouter une arête revient à modifier légèrement les frontières de chaque région.



Triangulation de la figure 2 par ajout de 3 arêtes.



Carte de la figure 1 légèrement modifiée pour correspondre au graphe triangulé ci-contre.

Figure 3

2.— La relation d'EULER et ses conséquences.

Si on note S, A et F le nombre de **S**ommets, **A**rêtes et **F**aces d'un graphe (ne pas oublier de compter une face pour l'extérieur du graphe), on a :

$$S - A + F = 2.$$

Si le graphe est triangulé, chaque face est bordée de trois arêtes et chaque arête sépare deux faces; donc : $3F = 2A$ ce qui prouve que

$$A = 3S - 6.$$

Théorème : Tout graphe planaire triangulé possède au moins un sommet auquel n'aboutissent pas plus de cinq arêtes.

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il y ait au moins six arêtes arrivant en chaque sommet; comme chaque arête a deux sommets extremité, on a

$$6S \leq 2A = 6S - 12$$

ce qui est contradictoire.

3.— L'idée de KEMPE

Il s'agit de raisonner par récurrence sur le nombre N de sommets. Il est clair que le théorème des quatre couleurs est vrai pour $N \leq 4$. Supposons le théorème vrai pour N; soit alors un graphe comportant $N+1$ sommets. Soit S_0 un sommet auquel n'aboutissent pas plus de cinq arêtes. Supprimons S_0. On obtient un graphe à N sommets auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Toute l'astuce consiste à colorier les voisins de S_0 avec trois couleurs au plus. Cela est certainement possible si en S_0 n'aboutissent que trois arêtes (ce qui laisse une quatrième couleur disponible). Mais il faut un peu d'astuce si y aboutissent quatre ou cinq arêtes.

Toute personne qui a déjà essayé de colorier la carte des départements français avec quatre couleurs, sait bien qu'il faut parfois reprendre tout le coloriage pour éviter des impossibilités.

Voici l'astuce de recoloriage de KEMPE :

a) S_0 a quatre voisins :

Soient a, b, c, d les quatre voisins, coloriés respectivement en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

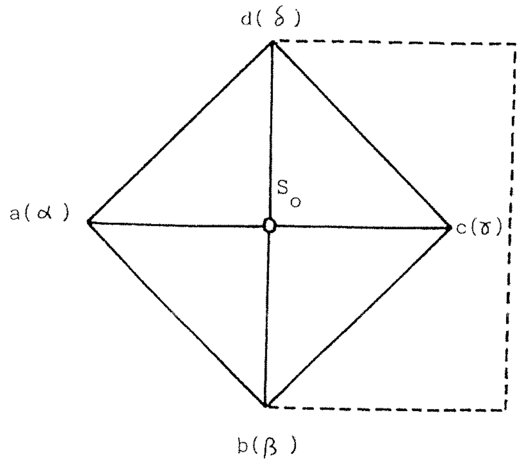


Figure 4

Essayons de faire disparaître la coleur δ en d en recoloriant d en β. Si on change δ en β sur d il faudra changer β en δ sur tous les voisins de d et continuer ainsi de proche en proche. On finira bien par s'arrêter. De deux choses l'une, ou bien b n'a pas été touché par ces échanges et la couleur δ est alors libre pour S_0 (fig. 4) ou bien b a été touché et sa couleur est alors δ et il semble qu'on n'ait rien gagné. Mais dans ce dernier cas, c'est qu'il est apparu une chaîne de sommets alternativement de couleur β et δ joignant b à d (fig. 4). Il suffit alors de jouer sur les couleurs α et δ pour voir qu'il ne peut pas y avoir de chaîne de sommets alternativement de couleur α et δ joignant a et c. Il est alors possible de modifier α en δ sur a puis δ en α sur les voisins de a... en étant sûr de n'avoir pas à modifier δ en c (en raison de la présence d'une chaîne $\beta - \delta$ entre b et d).

b) S_0 a cinq voisins

A une symétrie près, on se trouve dans la situation de la figure 5.

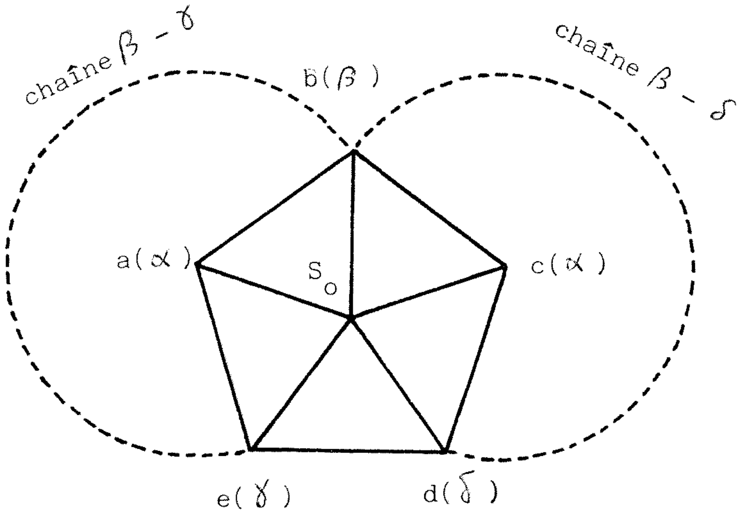


Figure 5

Essayons de supprimer la couleur β en b en la remplaçant par δ. Cela nécessite de changer β et δ chez tous les voisins de b ...etc ... Si on ne touche pas à la couleur de e, c'est gagné et on peut colorier S_0 en β. Sinon c'est qu'il existe une chaîne entre b et e de sommets alternativement de couleurs β et δ (fig. 5). On peut alors tenter le coup en échangeant β et δ à partir de b. Si on ne touche pas à d, c'est gagné, sinon c'est qu'il existe une chaîne entre b et d de sommets alternativement de couleurs β et δ (fig. 5).

Mais s'il existe une chaîne $\beta - \delta$ entre b et e et une chaîne $\beta - \delta$ entre b et d, il n'existe pas de chaîne $\alpha - \delta$ entre a et d et de chaîne $\alpha - \delta$ entre c et e. On peut donc tranquillement recolorier a en δ et modifier en conséquence les voisins de a, puis recolorier c et δ avec les mêmes modifications sur les voisins. La couleur α est alors libre pour σ_0.

5.— La catastrophe de KEMPE.

Ce n'est qu'en 1890 que HEAWOOD montra la faille dans le raisonnement de KEMPE. Mais HEAWOOD n'obtînt ni décorations, ni honneurs pour ce travail.

C'est en modifiant l'allule de la figure 5 que l'on trouve la faille (voir fig. 6).

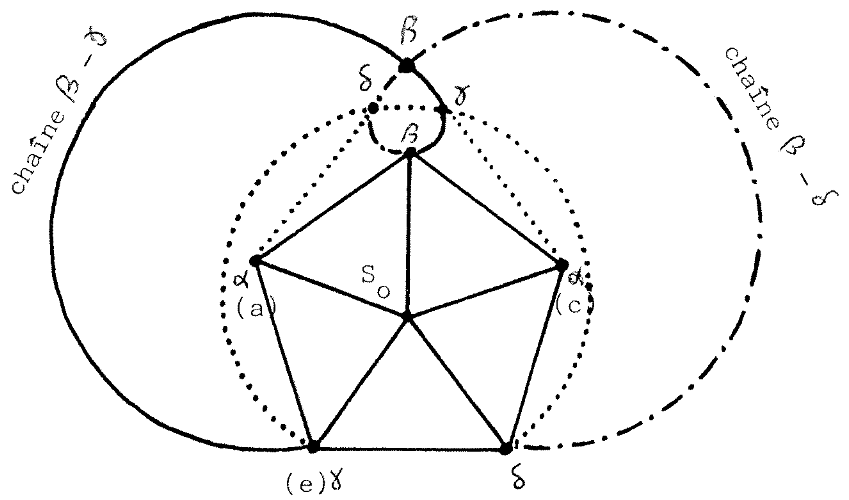


Figure 6

L'échange $\alpha - \delta$ à partir de a permet l'apparition horrible d'une chaîne $\alpha - \delta$ entre c et e ne permettant pas de poursuivre le raisonnement.

Si les chaînes $\beta - \delta$ et $\beta - \delta$ se croisent, dès qu'on effectue l'échange entre α et δ à partir de a on peut faire apparaître une chaîne $\alpha - \delta$ entre c et e, ne permettant plus de continuer le beau raisonnement de KEMPE. C'est catastrophique!

En fait HEAWOOD n'avait pas tout démoli. Le raisonnement de KEMPE permet de montrer que cinq couleurs suffisent. Mais il a fallu attendre 1976 pour que le théorème soit effectivement démontré.

"*Un bon géomètre raisonne juste sur une figure fausse*". Ce dicton est comme tous les autres : il n'est que partiellement vrai. La catastrophe dans le raisonnement de KEMPE montre l'importance de la figure juste pour aider le raisonnement. On reconnaîtra qu'ici, vu l'infinité des cas de figure, KEMPE avait de bonnes excuses, d'autant plus qu'il ne connaissait pas le langage des graphes (ce qui montre une fois de plus l'intérêt d'une bonne notation).

Bibliographie :

Revue du Palais de la Découverte — n° spécial 12 (janv. 1978) "*Le théorème des quatre couleurs*" (*).

(*) Disponible à la Bibliothèque.