# *GRAPHIQUES ET EQUATIONS :*

## *L'Articulation de deux registres*

**R. DUVAL**

**La lecture des représentations graphiques présuppose la discrimination des variables visuelles pertinentes et la perception des variations correspondantes de l'écriture algébrique. Cette lecture est une démarche d'interprétation globale qui suppose une attitude contraire à la pratique épellative associant un point à un couple de nombres. Une description systématique des variables visuelles à prendre en compte dans la démarche d'interprétation globale est proposée. Les résultats de plusieurs observations montrent que la majorité des élèves de seconde ne les discriminent pas.**

De nombreuses études ont déjà montré les difficultés de lecture et d'interprétation des représentations graphiques cartésiennes. Par exemple, la liaison entre le concept de pente[(1)] et la direction de la droite dans le plan n'est pas le plus souvent effectuée [6]. De même la confusion entre pente et hauteur semble fréquente [3]. On observe aussi l'impossibilité de trouver l'équation d'une droite en partant de sa représentation graphique, même dans les cas les plus élémentaires. Rien que pour les droites, l'articulation entre le registre des représentations graphiques et celui des équations ne semble pas établi même après un enseignement des fonctions affines.

La raison profonde de ces difficultés n'est pas à chercher dans les concepts mathématiques liés aux fonctions affines, mais dans la méconnaissance des règles de correspondance sémiotique entre le registre des représentations graphiques et celui de l'écriture algébrique. En effet, dans l'enseignement et dans certaines études didactiques on s'en tient au passage d'une équation à sa représentation avec construction point par point, et on oublie que *c'est le passage inverse qui fait problème.* Pour effectuer ce passage inverse *l'approche point par point* non seulement est inadéquate mais *constitue un obstacle.*

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
*1 (1988) (p.235-253) IREM de Strasbourg*

*(1) Dans le cadre de cette étude nous nous limiterons aux repères orthonormés. Sinon la notion de pente devrait être remplacée par celle de coefficient directeur.*

Pour le montrer nous allons successivement :

- présenter les *trois traitements hétérogènes* auxquels les représentations cartésiennes donnent lieu.
- expliciter les*variables visuelles pertinentes* qui correspondent aux caractéristiques significatives d'une écriture algébrique.
- illustrer notre analyse par quelques résultats d'une enquête menée à cet effet et aussi par l'explication d'erreurs typiques relevées dans d'autres études.

En l'absence d'une prise en compte des règles sémiotiques de correspondance, les représentations graphiques restent des représentations aveugles pour la majorité des élèves de seconde et au-delà....

## I Les trois traitements des représentations graphiques

Face à une représentation graphique trois démarches très différentes sont possibles : elles ne prennent pas en compte les mêmes données visuelles du graphique et elles ne sont pas commandées par le même type de question.

1) *La démarche de* **pointage.**

C'est par cette démarche que l'on introduit et que l'on définit les représentations graphiques. Par référence à deux axes gradués un couple de nombres permet d'identifier un point (et, inversement, un point se traduit par un couple de nombres). Cette démarche associative reste limitée à des valeurs particulières et à des points marqués dans le plan repéré. Cette démarche est nécéssairement favorisée lorsqu'il s'agit de TRACER le graphique correspondant à une équation du premier degré, celui correspondant à une équation du second degré..., ou de LIRE les coordonnées d'un point intéressant (parce que point d'intersection avec l'un des axes, ou avec une autre droite, parce que maximum,...etc).

2) *Une démarche d'***extension** du tracé effectué.

Cette démarche correspond aux activités d'interpolation et d'extrapolation, lesquelles s'appuient sur ce qu'on a appelé les aspects producteurs et les aspects réducteurs des représentations graphiques [8]. Le plus souvent cette démarche d'extension reste purement mentale : elle ne donne pas lieu à des tracés complémentaires et explicatifs comme un changement local de la graduation des axes pour " agrandir " une partie du tracé.Il faut-souligner que cette démarche d'extension ne s'appuie plus sur l'ensemble fini des points marqués (l'intersection des lignes du papier millimétré, par exemple) comme dans le cas de la démarche de pointage; cette extension s'appuie sur l'ensemble infini des points potentiels, c'est-à-dire sur le fond homogène de la feuille, sur les intervalles entre les points marqués. Mais dans cette démarche, comme dans la précédente, on s'en tient aux données du tracé et on ne prend pas en compte les variables visuelles pertinentes de la représentation graphique. De même le traitement reste orienté vers la recherche de valeurs particulières, sans que l'on ait à s'arrêter sur la forme de l'écriture algébrique.

3) *Une démarche d'***interprétation globale** *des propriétés figurales*

L'ensemble tracé/axes forme une image qui représente un "objet" décrit par une expression algébrique.Toute modification de cette image qui entraîne une modification dans l'écriture de l'expression algébrique correspondante détermine une variable visuelle pertinente pour l'interprétation du graphique. Il est donc importarnt d'identifier toutes les modifications pertinentes possibles de cette image, c'est-à-dire de voir les modifications conjointes de l'image et de la forme de son écriture algébrique. Cela relève d'une analyse de congruence entre deux registres de présentation d'un objet ou d'une information. Avec cette démarche *nous ne sommes plus en présence de l'association "un point-un couple de nombres", mais de l'association " variable visuelle de la représentation-unité significative de l'écriture algébrique "*. Lorsqu'il s'agit de partir de la représentation graphique pour retrouver, par exemple, l'équation correspondante, ou pour utiliser le concept de pente ou celui de direction, c'est cette démarche d'interprétation globale qui devient nécessaire. Car le recours à la démarche de pointage devient ici totalement inopérant puisque, par définition, il détourne l'attention de toutes les variables visuelles. Et la pratique systématique de la démarche de pointage ne peut favoriser la démarche d'interprétation globale. Comme cette démarche est généralement négligée *dans l'enseignement*, car elle relève d'une analyse sémiotique des registres visuel et algébrique, on comprend que la majorité des élèves reste en deçà d'une utilisation correcte des représentations graphiques.

## II Variables visuelles et unités symboliques significatives.

Une analyse de congruence exige la discrimination des unités significatives propres à chaque registre de présentation ainsi que l'examen des transformations implicites éventuelles requises pour changer de registre.

La discrimination des unités significatives propres à une expression algébrique est relativement évidente. Il y a :

les symboles relationnels ( < , > , = ,.....)
les symboles d'opération ou de signe ( + , -- )
les symboles de variable
les symboles d'exposant,de coefficient et de constante.

Dans une expression algébrique chaque symbole correspond généralement à une unité significative. Il y a cependant des unités significatives dont les symboles sont omis : le coefficient 1, le caractère " positif " des coefficients plus grands que zéro. Ainsi on n'écrit pas $y = +1x$, en revanche on écrit $y = -2x$. Le rappel de cette trivialité est important lorsqu'il s'agit de mettre en correspondance les variables visuelles pertinentes du graphique et les unités significatives de l'écriture algébrique.

La discrimininination des propriétés figurales d'une représentation graphique est, en revanche, moins évidente. En reprenant certaines des variables visuelles définies par Bertin [1 pp 186-189], et en en précisant d'autres, nous distinguerons deux variables générales et trois variables relatives aux cas où le graphique est un tracé simple (droite ou parabole).

Les deux variables générales sont :

– l'implantation de la tache, c.à d. ce qui se détache comme figure sur fond : un *trait* ou une *zone*.
– la forme de la tache : le trait tracé, qu'il délimite ou non une zone, est droit ou est courbe. S'il est courbe il est ouvert ou fermé.

Les trois variables particulières correspondent à une simple modification de la configuration trait-tracé/axes orientés. Nous allons ici nous limiter au cas où le trait tracé est une droite. Une analyse tout à fait similaire peut être effectuée pour le cas où le trait tracé est une courbe ouverte comme la parabole. Les trois variables particulières sont :

| **Variables visuelles** | **Valeurs des variables visuelles** |
|---|---|
| – le sens d'inclinaison du tracé : | - le trait *monte* de la gauche vers la droite<br>- le trait *descend* de la gauche vers la droite.<br>**Remarque** : la référence gauche droite est le sens normal du parcours visuel d'une page écrite en caractères latins). |
| – les angles du tracé avec les axes : | il y a *partage symétrique* du quadrant traversé<br>- l'angle formé avec l'axe horizontal est ***plus petit*** que celui formé avec l'axe vertical<br>- l'angle formé avec l'axe horizontal est ***plus grand*** que celui formé avec l'axe vertical.<br>**Remarque** : lorsque la droite tracée ne passe pas par l'origine,il suffit de déplacer l'axe vertical, par exemple, jusqu'au point d'intersection de la droite avec l'axe horizontal. |
| – la position du tracé par rapport à l'origine de l'axe vertical : | - le tracé coupe l'axe y *au dessus* de l'origine<br>- le tracé coupe l'axe y *au dessous* de l'origine<br>- le tracé coupe l'axe y *à l'origine.* |

La première des trois variables visuelles particulières peut donc prendre deux valeurs, la seconde peut en prendre trois et la troisième aussi trois. Nous avons omis deux cas, ceux dans lesquels la droite est parallèle à l'un des deux axes : il n'y a plus à prendre en compte les valeurs des variables précédentes, il suffit de lire la valeur du point d'intersection de la droite avec l'autre axe.

A chacune de ces huit valeurs des variables visuelles particulières correspond une unité significative dans l'écriture algébrique de l'équation de la droite : ce qui importe dans l'écriture y = ax + b, c'est le coefficient a et la constante b.

| **Variables visuelles** | **Valeurs** | **Unités symboliques correspondantes** | |
|---|---|---|---|
| – sens d'inclinaison : | trait montant<br>trait descendant | coefficient >0<br>coefficient < 0 | absence du symbole –<br>présence du symbole – |
| – angles avec les axes : | partage symétrique<br>angle *plus petit*<br>angle *plus grand* | coefficient = 1<br>coefficient < 1<br>coefficient > 1 | pas de coefficient écrit |
| – postion sur l'axe y : | coupe au dessus | on ajoute une constante | signe + |
| | coupe au dessous | on soustrait une constante | signe – |
| | coupe à l'origine | pas de correction additive | |

A la simple lecture de ce tableau, limité au cas des droites, nous pouvons faire les remarques suivantes :

1) Le *concept de pente*, algébriquement traduit par le coefficient, *recouvre deux unités significatives différentes*, l'une définie par rapport au signe et l'autre par rapport à l'entier 1. Et ces deux unités significatives correspondent à deux variables différentes, respectivement le *sens de l'inclinaison* et *l'angle. Il n'y a pas congruence entre la direction de la droite dans le plan repéré et le coefficient qui détermine cette direction dans l'écriture de l'expression algébrique.* Car dans toute valeur de coefficient donnée (2,1/2,-2..) il faut dégager deux propriétés distinctes, relativement à 0 et relativement à 1.

2) Le coût très inégal des passages entre écriture symbolique et représentation graphique apparait ici de façon précise. Pour aller de l'écriture symbolique à la représentation graphique, on peut se contenter de la seule démarche de pointage : on donne des valeurs particulières à x, sans avoir à se préoccuper de leurs propriétés, pour trouver des couples de nombres, c'est à dire des points. Mais pour aller de la représentation graphique à l'écriture algébrique cela n'est plus possible : *il faut identifier chacune des valeurs des variables visuelles et les intégrer toutes.* Autrement dit le passage de la représentation graphique à l'écriture algébrique relève d'une interprétation globale. A la différence de la démarche de pointage, ou même de celle d'extension représentative, la démarche d'interprétation exige que l'on centre son attention sur un ensemble de propriétés et non plus sur des valeurs particulières prises une à une.

3) On voit que pour les droites non parallèles aux axes *il y a seulement 18 représentations graphiques qui soient différentes visuellement de façon significative* . A chacune de ces représentations correspond une équation particulière :

| **sens de l'inclinaison** | **angle** | **position** | **exemples** |
|---|---|---|---|
| > 0 | = 1 | rien | y = x |
| | | + | y = x + 1 |
| | | - | y = x - 1 |
| | > 1 | rien | y = 2x |
| | | + | y = 2x + 1 |
| | | - | y = 2x - 1 |
| | < 1 | rien | y = 1/2 x |
| | | + | y = 1/2 x + 1 |
| | | - | y = 1/2 x - 1 |
| < 0 | | | |

dans le cas de parallélisme à l'un des deux axes,il y a disparition de la variable référant à cet axe.

Une présentation explicite et systématique des variations visuelles significatives non seulement centre l'attention sur la correspondance entre représentation graphique et écriture algébrique,mais elle permet de trouver directement l'expression algébique de propriétés géométriques : perpendicularité ou parallélisme de deux droites par exemple. Il suffit en effet de *pratiquer la démarche expérimentale la plus classique : faire varier une unité significative de l'écriture en gardant toutes les autres constantes et voir ce qui se passe dans l'autre registre* ( ou faire varier chaque variable visuelle en gardant les deux autres constantes et voir les modifications d'écriture). Ainsi, par exemple, l'opposition entre $y = x$ et $y = - x$ s'articule dans l'unité d'une image visuelle, et cette image se prête à des modifications qui ont leur contrepartie algébrique immédiate.

Cette analyse ne se limite pas évidemment au cas des droites. Pour revenir aux deux variables générales, mentionnées plus haut, nous pouvons indiquer les correspondances suivantes :

| **Variables visuelles** | **Valeurs** | **Unités symboliques corresp.** |
|---|---|---|
| – implantation de la tache : | - zone | >,<,... |
| | - trait | = |
| – forme de la tache : | -trait droit | exposant de la variable = 1 |
| | -trait courbe | exposant de la variable > 1 |

En tenant compte de la forme implicite ou de la forme explicite de l'écriture des fonctions nous pourrions intégrer d'autres caractéristiques visuelles importantes, comme le caractère ouvert ou fermé des courbes...(1) Sans développer ici cette analyse, nous pouvons simplement relever que ces variables générales, à la différence des variables particulières, correspondent à une modification intrinsèque de l'image.

Malgré les apparences une telle approche de l'articulation entre représentation graphique et écriture algébrique est absente des perspectives d'un enseignement mathématique. Ou-

*(1) Ces possibilités d'extension de l'analyse de congruence nous ont été suggérées par F. Pluvinage*

vrons, par exemple, un manuel récent qui frappe par la variété et par la richesse de ses représentations graphiques. Ce manuel présente un "herbier des fonctions usuelles" [7 p.323] dans lequel on semble mettre en avant l'articulation des deux registres, graphique et algébrique.

Mais, en regardant de près, on s'aperçoit que si la position du tracé et le sens de son inclinaison sont pris en compte, la variable visuelle de l'angle du tracé est omise. En outre, les deux unités significatives de la pente dans l'écriture de l'expression algébrique ne sont pas distinguées. Autrement dit la discrimination des variables visuelles et leur mise en relation avec les unités symboliques correspondantes sont en fait ignorées. L'écriture générale : $y = ax + b$ est utilisée comme la base initiale de travail et non comme le terme d'une intégration cognitive résultant de la démarche expérimentale que nous évoquions plus haut.

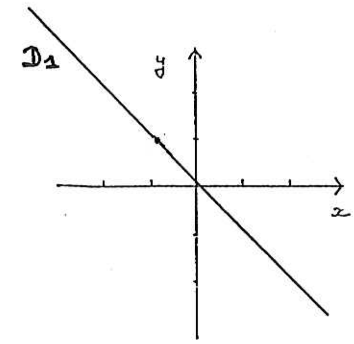
## III Le syncrétisme de la perception des représentations graphiques chez les élèves.

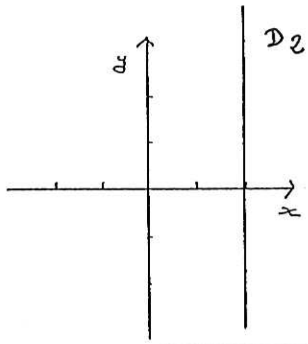
Il ne peut y avoir d'utilisation correcte des représentations graphiques cartésiennes sans discrimination explicite des variables visuelles pertinentes et sans une correspondance systématiquement établie entre les valeurs de ces variables et les unités significatives de l'écriture algébrique. En méconnaissant la spécificité et l'importance de la démarche d'interprétation globale, l'enseignement ne peut atteindre l'objectif d'une utlisation correcte des graphiques cartésiens par la majorité des élèves de seconde (15-16 ans), et les recherches didactiques se privent du moyen de comprendre la raison profonde des erreurs constatées.

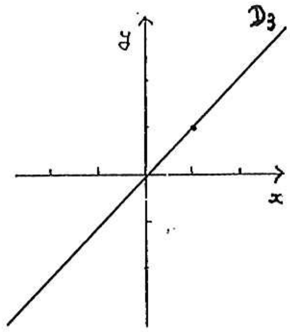
### 1 *Variables visuelles particulières et représentation des droites*

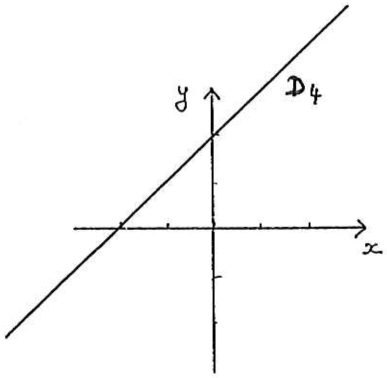
Pour illustrer l'importance et la nature des difficultés rencontrées par la majorité des élèves, voici une courte épreuve de reconnaissance proposée à trois classes de seconde, l'année dernière au cours du premier trimestre (cfr.page suivante). On remarquera les différences avec la question du test sur les graphes de Kerslake, retenue par Herscovics dans son étude sur la construction de ce signification pour les équations linéaires [6 p.375]... La question du test n'est pas significative puiqu'elle ne propose aucune discrimination entre des droites dont les valeurs de variables visuelles sont communes sauf une, et puisqu'elle ne propose pas simultanément un choix entre plusieurs expressions algébriques proches. Sans discrimination de toutes les valeurs visuelles et des variations d'écriture correspondantes, il n'y a pas à proprement parler de reconnaissance d'une droite ou de son équation.

On désigne pas $x$ l'abscisse et par $y$ l'ordonnée d'un point M du plan repéré. Indiquer à quelle expression algébrique (E1, E2, ... ou E10) chacune des droites D1, D2 ... D5 correspond.




| | |
|---|---|
| E 1 : $y \geqslant x$ | E 6 : $y = x+2$ |
| E 2 : $y \geqslant x$ | E 7 : $y = x-2$ |
| E 3 : $y = x$ | E 8 : $y = 2x$ |
| E 4 : $y = -x$ | E 9 : $y \geqq x+2$ |
| E 5 : $y = 0$ | E 10 : $x = 2$ |

R E P O N S E S

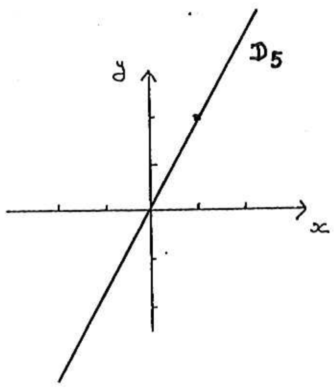
La droite D1 correspond à l'expression: ................

" D2 " " ..................

" D3 " " ..................

" D4 " " ..................

" D5 " " ..................



Sur un total de 105 élèves,

| | | | |
|---|---|---|---|
| 75 | ont correctement associé | $y = x$ | à D3 |
| 59 | | $y = -x$ | à D1 |
| 68 | | $x = 2$ | à D2 |
| 26 | | $y = x + 2$ | à D4 |
| 39 | | $y = 2x$ | à D5 |

59 ont trouvée et donc discriminé $y = x$ et $y = -x$

23 $y = 2x$ et $y = x + 2$

16 ont réussi les cinq items

14 ont échoué aux cinq items

Parmi les erreurs dominantes nous avons relevé :

– 21réponses $y = x$ pour D1. Ces élèves n'ont pas associé l'inclinaison descendante du tracé au symbole " - " du coefficient.

– 23 réponses $y = -x$ pour D4. Ces élèves ne retiennent que la propriété figurale de l'intersection de D4 avec la branche négative de l'axe x.

– 14 réponses $y \geq x$ pour D5. Ces 14 élèves s'efforcent de traduire le fait que dans la quadrant supérieur droit chaque valeur de y est plus grande que la valeur de x. Ces élèves s'en tiennent manifestement à une démarche de pointage : on prend plusieurs points sur la droite, on passe aux couples de nombres associés à ces points et on s'efforce de définir une relation caractérisant ces couples.

Nous avons fait passer cette épreuve de reconnaissance dans deux autres classes de seconde après un enseignement des fonctions affines et nous avons enregistré les résultats suivants, pour un total de 60 èlèves :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 47 | ont correctement associé | $y = x$ | à D3 |
| 48 | | $y = -x$ | à D1 |
| 49 | | $y = 2$ | à D2 |
| 24 | | $y = x + 2$ | à D4 |
| 27 | | $y = 2x$ | à D5 |

15 ont trouvé $y = x + 2$ et $y = 2x$
14 ont réussi les cinq items.

Dans les deux populations 1/4 seulement des èlèves distinguent $y = x+2$ et $y = 2x$, et *moins d'un élève sur cinq réussit les cinq items.* Mais le résultat le plus spectaculaire est que sur les 165 élèves de seconde ayant passé cette épreuve, *seulement 99 c'est à dire 60% voient une différence de sens d'inclinaison de la droite associée à la différence entre* $y = x$ et $y = -x$.

Nous n'allons pas épiloguer sur ces résultats. Ils montrent de façon brutale le fossé qui sépare la démarche de pointage et la démarche d'interprétation globale. Cette dernière exige une discrimination de toutes les variables visuelles pertinentes, ce qui n'est ni requis ni induit par la construction des droites à partir de leur équation. Et, sans cette démarche d'interprétation globale, il n'y a pas d'utilisation des graphiques possible pour donner une valeur intuitive à l'écriture algébrique, pour exprimer analytiquement des propriétés géométriques, ou, a fortiori, pour interpréter des graphiques dont les axes représentent des grandeurs hétérogènes (temps, distance parcourue, vitesse, etc,...).

## 2 *Variables visuelles générales et représentation des relations*

Hajri a proposé des situations élémentaires dans lesquelles il faut prendre en compte les variables générales.

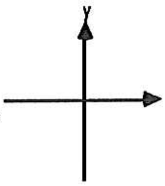
Il a demandé à des élèves de 3ème et de seconde de hachurer sur un plan repéré :

- l'ensemble des points qui ont une abscisse positive
- l'ensemble des points qui ont une ordonnée négative
- l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe
- l'ensemble des points dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse.

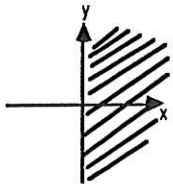
Nous avons repris ce type de tâche en le modifiant. Ayant hachuré sur le plan repéré les zones correspondantes aux expressions ci-dessus, nous avons demandé de choisir parmi plusieurs expressions algébriques, $y = x$, $y > x$, $y < x$, $y = -x$, $xy \geq 0$, $x > 0$, $y < 0$, ... celles représentées par chacune des zones hachurées. Ce type de tâche a été proposé à des élèves de seconde. Nous avons aussi proposé les questions posées par Hajri en introduisant la variation suivante : devant l'importance de l'échec enregistré dans le travail d'Hajri pour l'expression "l'ensemble des points dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse" nous avons proposé deux versions, l'une avec la droite $y = x$ tracée et désignée par son équation (Ligne D' de la page suivante), l'autre sans aucune indication comme dans le questionnaire d'Hajri (ligne D de la page suivante). Nous n'avons pas pris en compte les problèmes de frontière, c'est-à-dire la différence entre $y > x$ et $y \geq x$. Voici les résultats que nous avons enregistré pour 105 élèves de seconde.

A

Hachurer l'ensemble des points qui ont une abscisse positive



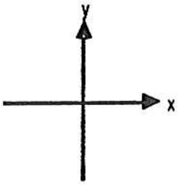

67%



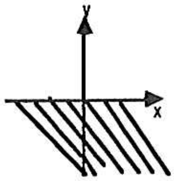

$x > 0$ 51%

B

... qui ont une ordonnée négative



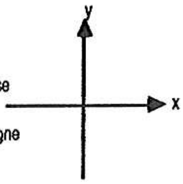

67 %



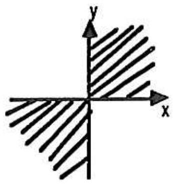

$y < 0$ 61%

C

... dont l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe



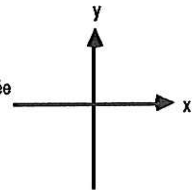

56 %



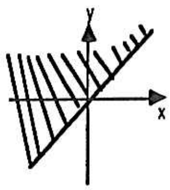

$xy > 0$ 25%

D

... dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse



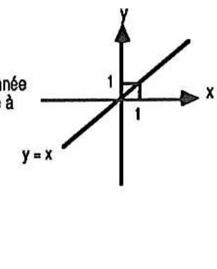

19 %



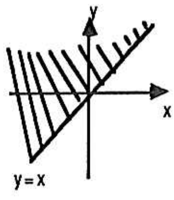

$y > x$ 25 %

D'

... dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse




38 %




$y > x$ 38 %

Sur le premier type de tâche (la moitié gauche du tableau ci-dessus) nous enregistrons le même ordre de réussite et donc les mêmes écarts de réussite que chez Hajri [4, p. 95-96]. Si nous comparons les écarts de réussite entre les deux types de changement de registre demandés, nous remarquons que :

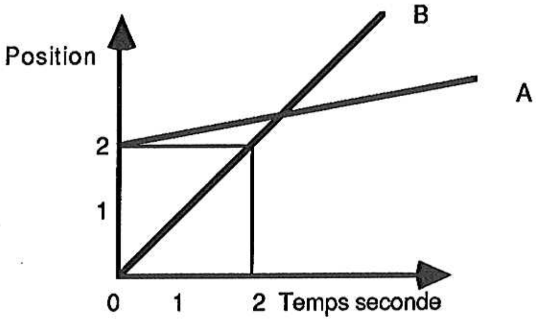
– Il y a congruence sémantique pour les cas A et B dans les deux tâches : l'expression discursive, la représentation graphique et l'écriture algébrique donnent la même information à partir des mêmes éléments identificateurs : abscisse positive (branche positive de l'axe x), ordonnée négative (branche négative de l'axe y). Ces présentations qui relèvent de trois registres différents sont congruentes. Les réussites pour les quatre questions sont du même ordre de grandeur.

– Il y a encore congruence sémantique pour la première tâche du cas C, mais *plus du tout pour la seconde*. Pour reconnaître l'équivalence de la présentation algébrique avec les deux autres présentations, il faut reconvertir la base du codage de l'expression : il faut passer par l'équivalence "branches de même signe ⇔ le produit des coordonnées est positif". Quand on passe de la première à la deuxième tâche, le taux de réussite chute de plus de moitié.

– Il n'y a plus de congruence sémantique dans le cas D : la relation n'est plus exprimée discursivement ou algébriquement en fonction des éléments identificateurs du graphique (branche positive de l'axe x, ...). Le taux de réussite est donc très bas. En revanche quand on réduit la non-conguence comme nous l'avons fait avec la version D', le taux des réussites double.

### 3 *L'interprétation des des graphiques représentant des grandeurs hétérogènes.*

Dans [1 p.371-372 ], J. Clement signale l'erreur type "prendre la hauteur pour la pente" dans la situation suivante:




à l'instant t = 2secondes, la vitesse de l'objet A est-elle plus grande, moins grande ou égale à la vitesse de l'objet B ?"

Les observations et les analyses précédentes nous éclairent sur ce type d'erreur souvent mentionné :

1) la formulation de la question oriente vers une démarche de pointage. Si la question avait été formulée de façon à centrer l'attention sur la prise en compte d'intervalles et non sur la position de deux points pour x= 2, la proportion de ce type d'erreur pourrait diminuer : durant les deux premières secondes, est-ce la vitesse de l'objet A qui a le plus augmenté, ou celle de l'objet B ?

2) Mais là n'est pas la raison profonde de ce type d'erreur. Si l'on revient à notre analyse des variables visuelles, on remarque que la hauteur d'un point par rapport à l'axe vertical n'est pas une valeur figurale pertinente : l*a hauteur résulte des valeurs prises par deux variables visuelles différentes,* à savoir l'angle du tracé et la position du tracé. Et sur le graphique ci-dessus, *la comparaison des angles des tracés A et B ne pouvait être faite qu'en neutralisant les valeurs différentes de position.* Ce que révèle cette erreur type n'est pas d'abord la difficulté du concept de pente, mais l'absence de discrimination des variables visuelles pertinentes dans le registre même des représentations graphiques.

Il est également intéressant de remarquer, dans l'expérience de construction de signification des représentations graphiques rapportée par Herscovics, que :

- ce qui est décrit comme une construction intuitive est tout simplement une démarche de pointage [ 6 p.36]

- la construction relationnelle ne prend jamais en compte l'articulation entre les variables visuelles du graphique et les unités significatives de l'écriture symbolique. Le registre de la représentation et celui de l'écriture des formules sont travaillés séparément et de façon syncrétique [6 p.366-371].

Rien d'étonnant alors qu'il y ait échec à la question 3 présentée plus haut, et pourtant non discriminante, lors du test de juin [6 p.376-377]. Cette expérience a ignoré les problèmes spécifiques à l'articulation de deux registres différents d'information.

## CONCLUSION

L'interprétation des représentations graphiques cartésiennes dépend d'une identification précise de *toutes les valeurs des variables visuelles pertinentes* et de la reconnaissance qualitative des unités d'écriture symboliques qui y correspondent. Pour la grande majorité des élèves cet apprentissage ne se fait pas par le seul entraînement à des exercices de construction dans le plan repéré, ni par des tâches de lecture mettant en jeu la règle d'association point-coordonées. La majorité des élèves en reste donc à une approche syncrétique, et inopérante, sans réelle valeur intuitive, des représentations graphiques.

Pour effectuer un apprentissage spécifique, il est important de distinguer deux types de situations où l'on utilise des représentations graphiques :

- celles où le recours aux graphiques reste dans le cadre d'une étude purement mathématique : ce sont alors des relations entre nombres qui sont représentées.

– celles où le recours se fait dans un cadre qui n'est plus seulement mathématique : ce sont alors des relations entre grandeurs de nature différente qui sont représentées (temps, distance, vitesse,...).

Au vu des analyses précédentes, il apparaît qu'un apprentissage de la démarche d'interprétation globale ne peut pas faire l'économie d'une étude purement mathématique. Car c'est dans ce cadre que l'articulation entre valeurs des variables visuelles et propriétés conceptuelles relatives à ces valeurs peut être montrée pour elle-même. La signification des graphiques cartésiens, et pas conséquent leur lecture, dépend de la perception de cette articulation. Lorsque le graphique représente des grandeurs hétérogènes, la démarche d'interprétation globale se double d'une interprétation des grandeurs en présence.
La présentation d'un phénomène physique, économique ou biologique donne peut être un intérêt plus grand pour les graphiques, mais cette présentation ne facilite pas l'appréhension du fonctionnement sémiotique d'un registre, elle la présuppose au contraire.
De ce point de vue le questionnaire sur les graphes utilisé dans l'enquête de K. Hart et repris dans le "Chelsea Diagnostic Mathematics Tests " appelle beaucoup de réserves [5, 2]. Presque toutes les questions se situent dans un cadre non mathématique exigeant l'interprétation de grandeurs hétérogènes, et les rares questions qui se placent dans le cadre mathématique restent en deçà d'une tâche réélle de discrimination des variations visuelles et des variations correspondantes d'écriture. Pour avancer, les recherches sur les représentations graphiques doivent s'engager dans une autre voie.

## *REFERENCES*


[1] **J.BERTIN,** 1977 *La Graphique et le traitement graphique de l'information* Paris Flammarion.

[2] *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests* , NFER-NELSON, 1984.

[3] **J. CLEMENT,** 1985 Misconceptions in Graphing, in *P. M. E. 85,* vol., pp 369-375.

[4] **H. HAJRI,** 1986 *Perception des relations dans le plan repéré* — Thèse 3ème cycle, Publication IRMA, Strasbourg.

[5] **K.M. HART,** 1981 *Children's Understanding of Mathematics : 11-16* Lon don,John Murray .

[6]**N.HERSCOVICS** Constructing Meaning for linear Equations;a problem of Representation, in *R. D. M.* 1980 vol.1.3 pp 351-383.

[7]*Mathématiques 2ème* Paris, Casteilla ,1986.

[8] **J. ROGALSKI,** 1981 Caractères réducteurs et producteurs des représentations graphiques des fonctions. Séminaire de didactique des Ma thématiques, Strasbourg, Décembre.