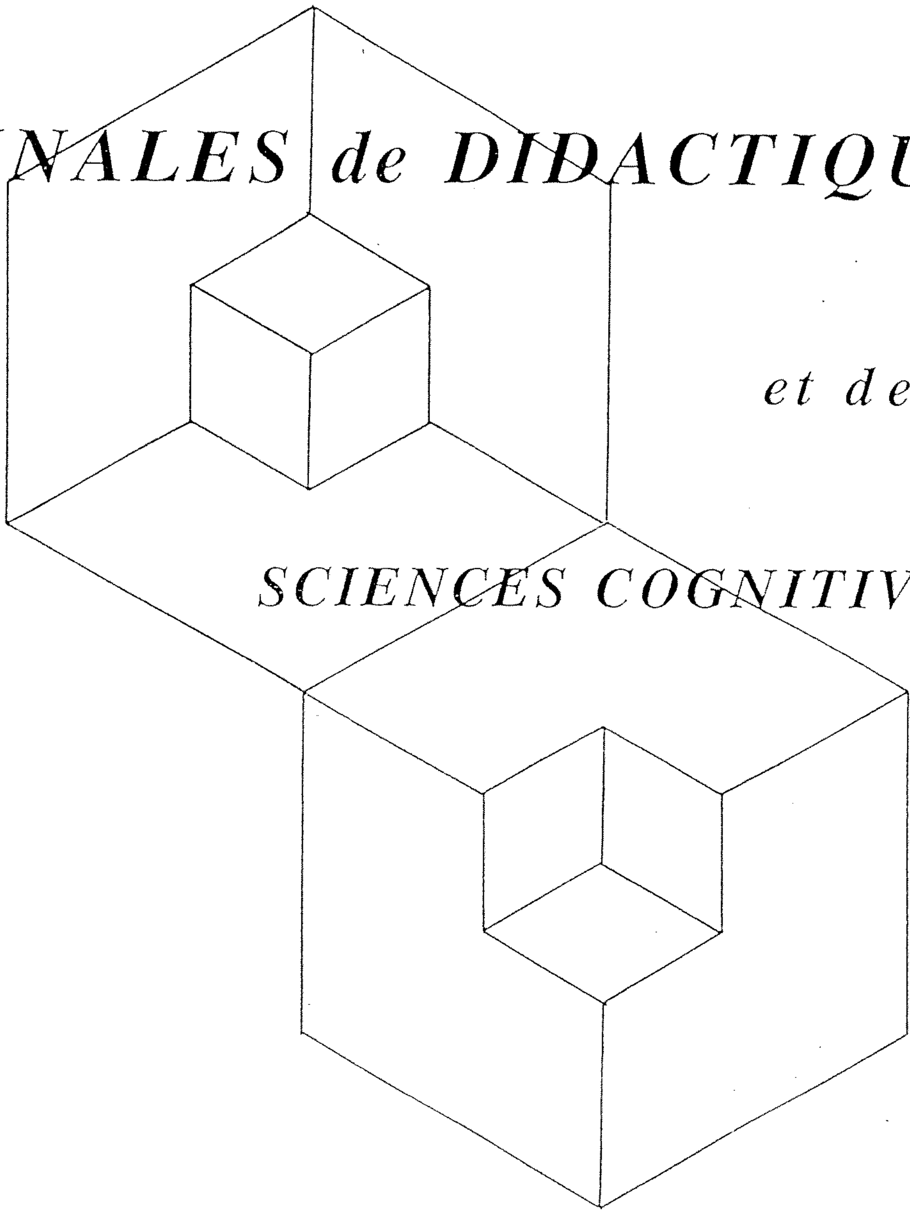
ISSN 0987 - 7576

ANNALES de DIDACTIQUE

et de

SCIENCES COGNITIVES



ULP

IREM
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 03 88 41 64 40
e-mail: bibirem@math.u-strasbg.fr
http://irem.u-strasbg.fr

Vol. 1

Réimpression 1999

Annales de Didactique et de Sciences Cognitives

Publication des travaux du séminaire de Didactique des Mathématiques de Strasbourg

Responsable de la publication : **R. Duval**

I.R.E.M.

F. 67084 STRASBOURG Cedex

Volume 1

ECARTS SEMANTIQUES ET COHERENCE MATHEMATIQUE :

Introduction aux problèmes de congruence

R. Duval.

Substituer une formulation, ou une présentation, à une autre qui lui est référentiellement équivalente est un processus essentiel pour la pensée mathématique. Et cela va souvent à l'encontre d'une condition nécessaire pour qu'il y ait sens dans la pensée naturelle : la continuité sémantique et associative entre les expressions à substituer. La distinction, pour tout ce qui est considéré comme référentiellement équivalent, entre une relation de congruence sémantique et une relation de non-congruence, commande le problème du sens dans la démarche mathématique : elle se trouve corroborée par une variation importante de coût dans le traitement cognitif. Des difficultés apparemment hétérogènes de l'apprentissage mathématique trouvent dans cette perpective une interprétation précise et féconde.

La distinction entre sens et référence "Sinn" et "Bedeutung" s'est révélée être une des plus fécondes pour tous les domaines dans lesquels le rapport à des concepts et à des idées s'effectue par la manipulation de signes, de symboles ou d'expressions [10]. Elle a conduit à bien séparer la signification, laquelle dépend du registre de description choisi, et la référence, laquelle dépend des objets exprimés ou représentés. Par exemple 4/2, (1+1), $\sqrt{4}$,.. sont des écritures qui désignent un même nombre, c'est à dire sont des expressions qui réfèrent à un même objet. Mais elles n'ont pas la même signification puisqu'elles ne relèvent pas du même domaine de description ou du même point de vue : la première exprime le nombre en fonction de propriétés de divisibilité et de rapport, la seconde en fonction de la récurrence de l'unité...Un simple changement d'écriture permet d'exhiber des propriétés différentes du même objet, tout en conservant la référence. La distinction entre sens et référence est étroitement liée au principe de substitution essentiel dans toute démarche de calcul ou de déduction : deux expressions ayant même référence peuvent être remplacées l'une par l'autre, dans une phrase ou dans une formule, sans que la valeur de vérité change.

La distinction introduite par Frege a eu pour effet de privilégier le sens référentiel au détriment de ce que nous appellerons le sens associatif interne (à un domaine, à un registre,

. © *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.7-25) Irem de Strasbourg

à une théorie ou à un contexte). Cela était normal puisque la notion de référence ainsi dégagée soulevait de nouvelles questions sur lesquelles logiciens et linguistes se sont longuement penchés [17, 6]. Mais cela a détourné l'attention d'un problème fondamental, *celui de la possibilité cognitive de la substitution entre deux expressions référentiellement équivalentes*. Cette substitution constitue souvent, pour les individus en situation d'apprentissage ou même de recherche, un saut, entre deux réseaux sémantiques, tel qu'ils n'y pensent pas d'eux-mêmes, et que, si on la leur indique, elle leur paraît arbitraire. En d'autres termes, du point de vue de la constitution objective du savoir, la substitution qui permet de développer calcul et démonstration fonctionne par rapport à la référence. *Mais du point de vue de l'appropriation subjective d'un savoir mathématique la substitution fonctionne d'abord par rapport au sens associatif interne* : tout dépend alors de ce que nous appellerons la **congruence** ou la **non congruence sémantiques des expressions à substituer.** Deux expressions peuvent être synonymes ou référentiellement équivalentes (elles peuvent "vouloir dire la même chose", elles peuvent être vraies ou fausses ensemble) et ne pas être sémantiquement congruentes : dans ce cas il y a un coût cognitif important pour la compréhension.

Entre deux expressions, entre deux présentations d'information, il y a deux relations indépendantes à envisager : la relation d'équivalence référentielle et la relation de congruence sémantique. Deux expressions différentes peuvent être référentiellement équivalentes sans être sémantiquement congruentes. Inversement, deux expressions peuvent être sémantiquement congruentes sans être référentiellement équivalentes. Nous en verrons des exemples plus loin. Le mathématicien examine en priorité l'équivalence reférentielle. Mais cette démarche va souvent à l'encontre d'une *condition nécéssaire pour qu'il y ait sens dans la pensée naturelle :la continuité sémantique et associative entre les expressions à substituer.* Un élève qui ne perçoit pas l'attitude intellectuelle exigée par les mathématiques, fait spontanément de la congruence sémantique la condition nécéssaire, et parfois suffisante, de l'équivalence référentielle. Il trouvera et se satisfaira des substitutions sémantiquement congruentes; en revanche, il resistera aux substitutions non sémantiquement congruentes mais référentiellement équivalentes. Les mathématiques, hormis le domaine du calcul arithmétique élémentaire, apparaissent plus souvent arbitraires que "logiques".

La substitivité des expressions est une propriété inhérente à tout registre sémiotique de présentation d'une idée ou d'une information. Elle permet par exemple le développement du discours au plan du langage naturel : l'emploi de termes synonymes, la possibilité de la paraphrase en sont des modes de fonctionnement. Mais cette substitivité est aussi essentielle dans tout changement de registre sémiotique. Or en mathématique, plus que dans toute autre discipline ces changements sont à la fois importants et fréquents. Il suffit d'ouvrir n'importe quel manuel de n'importe quel niveau pour voir sur une même page le passage d'une phrase à une formule arithmétique ou algébrique, d'un énoncé à une figure géométrique, ou d'une écriture algébrique à un graphique. La démarche mathématique implique une substitivité aussi bien inter-registre qu'intra-registre sur la base d'une invariance de référence. Hormis le rapport d'illustration, entre un texte et une figure, rapport souvent admis comme évident et immédiat, ces changements de registre obéissent à des procédures élémentaires de codage pour passer, par exemple, à une écriture symbolique ou à une représentation graphique, et donc, aussi, pour effectuer le passage inverse vers les registres discursif ou algébrique. Or, là aussi, la substitivité se heurte à des difficultés d'écart sémantique, malgré l'apparente simplicité des règles de correspondance entre registres.

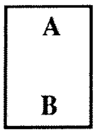
Un des obstacles rencontrés par beaucoup d'élèves dans leur apprentissage des mathématiques tient au fait que l'équivalence référentielle l'emporte sur la congruence sémantique, alors que le fonctionnement spontané de la pensée suit, en priorité, la congruence sémantique. La substitution d'une expression relevant d' un réseau sémantique à une expression d'un autre réseau sémantique apparaît parfois comme un saut difficilement franchissable. C'est la spécificité de ce type de difficulté que nous allons mettre en évidence. Pour cela nous présenterons d'abord quelques expériences psychologiques qui ont montré l'existence de ce phénomène de congruence sémantique; puis nous présenterons sommairement quelques exemples de ce phénomène en mathématiques.

I Coût de la non congruence dans des tâches de vérification

Des expériences sur des situations élémentaires de comparaison entre une image et une phrase décrivant cette image ont mis en évidence la variation de temps de réaction lorsque l'image et l'énoncé sont ou ne sont pas congruents [3].

La position de deux objets A et B, l'un par rapport à l'autre, peut être présentée de deux façons :

icôniquement **et** **discursivement**



A est au dessus de B
B est au dessous de A

Si on se limite à l'image ci-dessus, on remarque tout de suite que nous avons quatre énoncés différents pour exprimer la même situation que celle donnée par l'image : les deux énoncés mentionnés à droite de l'image et les deux énoncés niant les réciproques. On remarque aussi que ces quatre énoncés doivent être distingués de quatre énoncés faux : A est au-dessous de B, etc..
Deux questions se posent :

- la reconnaissance de l'équivalence référentielle, ou de la non équivalence référentielle entre la présentation icônique et la présentation discursive a-t-elle un même coût pour chacune des huit expressions ?

- le sens de la comparaison, de l'image à la phrase ou de la phrase à l'image, est-il négligeable ?

En admettant que le traitement de la présentation icônique et celui de la présentation discursive passent par un codage propositionnel interne, la comparaison entre l'image et la phrase est en fait la comparaison des deux suites internes respectives. Deux cas alors se présentent :

- *les éléments des deux suites internes peuvent être appariés à une différence près* : elles explicitent les mêmes unités d'information dans le même ordre. Une décision d'équivalence référentielle peut être prise s'il n'y a aucune différence ; et s'il n'y a qu'une seule différence la décision de non équivalence référentielle s'impose. Par conséquent deux suites ne présentant pas le même ordre, ou présentant plus d'une unité différente, ne peuvent pas être appariées à une différence près.

- *les éléments des deux suites ne peuvent être appariés à une différence près* , parce qu'elles n'explicitent pas les mêmes unités ou parce que l'ordre ne correspond pas : il faut alors procéder à la transformation de l'une des deux suites pour les rendre comparables.

Dans le premier cas les deux présentations, l'*image et l'énoncé, sont dites congruentes. Dans le second cas*, les *deux présentations ne sont pas congruentes.* Deux présentations pourront être dites plus ou moins congruentes selon le nombre de transformations nécessaires pour apparier leurs suites internes.

Dans l' exemple ci-dessus nous avons pour les huit énoncés trois variations possibles pour coder la relation entre **A** et **B**:

- une variation de trait sémantique : au-dessus de $\wedge$,au-dessous de $\vee$.
- une variation de point d'ancrage : A sujet, ou B sujet .
- une variation de forme : affirmation, ou négation N.

Pour les huit énoncés possibles, vrais ou faux, relatifs à l'image codée comme **A** $\wedge$ **B**, nous avons donc les huit suites internes suivantes :

		Forme positive			Forme négative		
		Suite interne	Temps	Valeur	Suite inter.	Temps	Valeur
Même ordre	même trait sémantique	**A** $\wedge$ **B** (1)	1783	V	**N (A** $\wedge$ **B)**(5)	2354	F
	trait antonymique	**A** $\vee$ **B** (2)	2077	F	**N (A** $\vee$ **B)** (6)	2499	V
Ordre inverse	même trait sémantique	**B** $\wedge$ **A** (3)	2130	F	**N (B** $\wedge$ **A)** (7)	2614	V
	trait antonymique	**B** $\vee$ **A** (4)	2139	V	**N (B** $\vee$ **A)** (8)	2678	F

Les temps indiqués sont les moyennes, en millisecondes, des temps de réaction enregistrés par Clark et Chase [3]

Sur ce tableau nous pouvons constater que :

- la phrase ayant (1) pour suite interne est congruente à l'image : la reconnaissance de l'équivalence référentielle prend nettement moins de temps que pour les autres phrases,

– la phrase ayant (2) pour suite interne est plus congruente à l'image que la phrase ayant (4) pour suite interne, bien que cette dernière soit référentiellement équivalente à l'image : aussi, tout en étant non référentiellement équivalente à l'image, elle est plus rapidement traitée que la phrase ayant [4] pour suite interne qui, elle, est référentiellemnt équivalente à l'image. La différence entre la suite (1) et la suite (2) peut s'expliquer, selon le modèle de traitement proposé par Clark, par un coût particulier pour une décision de fausseté par rapport à une décision de vérité. Sous cette hypothèse les phrases ayant pour suites interne (1) et (2) sont donc également congruentes : elles peuvent être directement appariées avec l'image à une différence près. On voit d'ailleurs que ces deux phrases prennent moins de temps que toutes les autres, dans une tâche de vérification, bien que l'une soit vraie et l'autre fausse.

– les quatre phrases référentiellement équivalentes (valeur V) présentent, du point de vue cognitif, des écarts sémantiques, écarts dont le coût varie avec le degré de non-congruence.

Ce n'est pas seulement dans la situation de comparaison image-phrase que le phénomène de congruence sémantique joue un rôle important, mais aussi à l'intérieur d'un même registre, et, plus particulièrement dans celui du discours naturel. *Cela apparaît de façon particulièrement nette dans toute situation où il s'agit de répondre à une question.* Si la formulation de la question est congruente à la formulation des informations données dans l'énoncé du problème, et si cette formulation est aussi congruente à une formulation possible de la réponse, cette réponse sera plus rapide que s'il y a non-congruence. Ce phénomène a été mis en évidence par Clark pour les problèmes à trois termes. Ces problèmes sont devenus classiques parce qu'ils faisaient partie d'une batterie de tests d'intelligence, au début de ce siècle, et qu'ils ont été repris par Piaget, lequel en a tiré argument pour affirmer la priorité de l'action sur le langage dans le développement de l'intelligence logique [14 p.7-9,75-76]. Clark a repris ce type de problème en variant systématiquement la formulation :
A est *meilleur* que B, B est *meilleur* que C, lequel est le *meilleur* ?
A est *meilleur* que B, B est *meilleur* que C, lequel est le *pire* ?
A est *pire* ...

La lecture des moyennes géométriques des temps de réaction montre que la réponse est plus rapide lorsque la question est congruente à la deuxième proposition de l'énoncé que lorsqu'elle ne l'est pas, puis lorsque les deux prosositions de l'énoncé sont congruentes entre elles [2] . Ces résultats sont intéressants lorsqu'ils sont rapprochés du décalage entre les réussites aux épreuves de sériation et celles aux problèmes à trois termes. Contrairement à ce que Piaget a supposé pour justifier la priorité de l'action sur le langage, les deux tâches ne sont pas de même nature : il y a des difficultés cognitives propres au discours naturel . Et pour une part non négligeable ces difficultés relèvent de la non-congruence sémantique entre expressions référentiellement équivalentes. Les problèmes à trois termes sont cognitivement plus complexes que les épreuves de sériation.

Le problème de la congruence ou de la non-congruence sémantique de deux présentations d'un même objet est donc celui de la distance cognitive entre ces deux présentations, qu'elles appartiennent ou non au même registre. Plus la distance cognitive est grande, plus le coût de passage d'une présentation à l'autre risque d'être élevé et plus, aussi, ce passage risque de ne pas être effectué ou compris. En d'autres termes *l'équivalence référentielle n'est pas une raison suffisante pour réunir dans un même réseau sémantique,et, a fortiori, pour assurer l'évidence et l'immédiateté de la substitution d'une expression à une autre non-congruente.* Cette difficulté, la majorité des élèves s'y heurte, aux différents niveaux et dans les différents domaines de l'apprentissage mathématique. Et elle est d'autant plus importante qu'elle n'est pas explicitement et systématiquement prise en compte.

II Ampleur de la non-congruence sémantique en mathématique

Pour montrer l'importance de la non-congruence dans l'apprentissage des mathématiques, nous prendrons trois exemples bien connus. Le premier concerne le passage entre la repésentation géometrique de la droite et la représentation symbolique des nombres réels par le recours à une écriture décimale, à une écriture fractionnaire, à des procédures d'encadrement... Le second reste dans le registre du discours naturel : il porte sur la compréhension d'un énoncé de problème. Le troisième se rapporte au passage de l'énoncé d'une relation à l'écriture algébrique de cette relation .

A. *Non-congruence sémantique entre le tracé d'une droite et l'ensemble des nombres réels.*

Pour le mathématicien, l'un des intérêts de la droite est de donner une représentation du continu, propriété spécifique de l'ensemble des réels par rapport à l'ensemble des rationnels qui est seulement dense. De par leur caractère discret et individualisant, les écritures décimales et fractionnaires des nombres réels tendent à occulter cette propriété de continuité : les règles génératives d'écriture des nombres permettent tout au plus de "réaliser" algorithmiquement la densité. Comment passe-t-on, dans l'enseignement, du registre symbolique de l'écriture, registre par excellence de la manipulation des nombres, au registre figuratif de la droite ? Il est, en effet difficile, dans l'enseignement de parler de "droite mathématique " sans se réferer en fait à la représentation figurative d'une droite.

Ce passage s'effectue par la notion de "point". La droite est interprétée comme un "ensemble infini de points" (ensemble infini ayant la puissance du continu) et cet ensemble est en bijection avec l'ensembles des nombres réels : à chaque point correspond un nombre réel. Or c'est justement cette notion de "point" qui fait problème : un ensemble de points sur le registre figuratif est discret, il ne peut être continu. En effet :

1) la figure d'une droite est étrangère à toute représentation de point : son tracé se génère dans un mouvement et la propriété de continuité relève de cette repésentation dynamique (au sens physique).

2) la figure d'un point relève d'une autre procédure de représentation que celle d'une droite: elle est le marquage d'une pure localisation, résultant d'une visée déictique, ou du croisement de deux droites tracées.

3) figurativement, le point se surajoute au tracé de la droite.

4) faire apparaître beaucoup de points sur une droite, c'est faire apparaitre une graduation avec un marquage de plus en plus serré.

5) Il y a un décalage important entre la figure d'un point et la notion géométrique de point. Cette notion est évoquée sans être jamais définie. On glisse sur cette notion parce que toute description oscille entre deux représentations hétérogènes : celle d'un point matériel marquant une *position* et celle de *limite d'un processus en soi illimité* de réduction et

d'évanouissement du point matériel [11,p.156-158]. La première représentation est atomiste, la seconde est dynamique (au sens opératoire) et échappe à toute représentation figurale (à la différence de la représentaton du tracé d'une droite). Il y a donc un écart sémantique irréductible entre ces deux "représentations " que l'on cherche implicitement à réunir pour donner un sens à la notion de point.

De ces cinq remarques il ressort que

- il y a congruence sémantique entre la configuration "droite plus une série de points-position sur cette droite" et un sous-ensemble, aussi grand que l'on veut, des nombres décimaux.
- la propriété de continuité, en tant que différente de la densité, n'a pas exactement le même sens si on la présente à partir de la trace d'une trajectoire ou à partir de l'inaccessibilité d'une limite dans la répétitivité d'un processus d'approche, même si on postule l'équivalence référentielle de ces deux présentations. Or c'est ce que l'on postule effectivement, lorsqu'on met les nombres réels en bijection avec la droite en recourrant nécéssairement pour cela à la notion de point .
- une représentation atomiste est la représentation pertinente *dès que l'on présente* la droite mathématique (un ensemble infini de points) ainsi que l'indéfinissable notion de point *dans le registre figuratif.* La tentative, dans les années 1970, d'éliminer le registre figuratif de l'enseignement mathématique avait l'avantage de contourner inconsciemment tous les obstacles relevant de la non-congruence sémantique, ou tout au moins ceux liés à l'articulation entre le discours naturel et le registre figuratif. Cela était une erreur d'un point de vue cognitif et s'est révélé être un échec. Mais sur cet exemple, comme sur d'autres, cette tentative historique a mis en évidence le fait que le recours à plusieurs registres posait des problèmes, bien qu'il soit nécéssaire.
- la non-congruence sémantique entre la droite et l'ensemble des nombres réels est autrement plus complexe que les exemples que nous allons présenter ensuite, exemples dont nous verrons qu'ils arrêtent déjà des élèves. Comment s'étonner alors de la conclusion d'une enquête récente auprès d'élèves de 17-18 ans : "il est insuffisant de donner l'exemple de la droite pour faire "sentir" aux élèves des propriétés de $\mathbb{R}$ comme celle de "continu", en effet 41% d'entre eux voient en la droite un assemblage de points de type atomique ; et 32% qui peuvent expliciter que $\mathbb{R}$ est en bijection avec la droite ont encore cette vision plutôt atomiste de la droite." [16, p.385].

Ce résultat n'étonnera aucun enseignant. En revanche, l'une des questions posées est surprenante :" Si on *grossissait* avec un microscope électronique (ou avec un ordinateur) la droite, qu'est-ce qu'on obtiendrait *comme dessin "ultime* " (même question pour la parabole)". Et l'auteur de l'enquête précise que cette question "a été posée pour tenter d'approfondir le sens d'une réponse de type géométrique à la première question (comment vous représentez-vous les nombres réels ? Si vous avez une image décrivez-la)" [16, p.381]. La formulation de la question centre très explicitment sur le registre figuratif et plus particulièrement sur la composition du support matériel du tracé de la droite : on espère ainsi un glissement d'image perceptive de la droite comme tracé à une autre image perceptive simplement possible (puisque pouvant être obtenue avec un appareil qui n'est pas à portée de main pour vérification), celle de la droite comme ensemble de points. Mais cette question, ou toute proposition d'enseignement, exploitant cette utilisation du registre figuratif n'est-elle pas un piège? Non seulement elle appelle une interprétation de type atomiste, mais en fait elle a peu à voir avec une image mentale correcte de la droite des réels, puisqu'il y a risque de "mélange entre l'image mentale et l'image perceptive", ou "entre modèle mathématique et modèle physique"! [16, p.382]. Par cette remarque, qui laisse entendre que l'image mentale s'oppose d'une certaine façon à l'image perceptive, ne reconnait-on pas l'écart sémantique entre la droite géométrique, que deux points suffisent à définir et que l'on représente par un tracé continu, et l'ensemble des réels ? N'est-ce pas sur cet écart que l'enseignement devrait en priorité se centrer au lieu de postuler sa réduction du seul fait que l'on définit l'équivalence référentielle ? Une approche entièrement différente, comme celle de la construction point par point d'un cercle à partir du tracé de nombreux rectangles ayant un sommet commun et des diagonales de longueur égale, donne aux élèves l'occasion de commencer à surmonter la non-congruence sémantique entre la continuité d'une droite, ou d'une courbe, et leur interpétation comme "ensemble de points". F. Pluvinage et J-C. Rauscher concluent ainsi les observations faites à propos de cette tâche réalisée par des élèves de 11-12 ans : "serait-il excessif de parler de révélation pour certains ? Peut-être pas, si nous essayons de nous représenter ce que peut être l'enchantement de voir surgir une figure que l'on n'a pas dessinée : on a tiré des traits droits, et voilà qu'apparaît un cercle comme ensemble de points (alors que de dire "un cercle est l'ensemble des points..." n'a jamais suscité une once d'émerveillement)..."[15, p.33]. On remarquera que, dans cette tâche, la continuité perceptive et géométrique de la droite surgit de la figure d'un ensemble de points : il n'y a aucune opération évoquant la décomposition de la continuité en points ou l'individualisation possible de l'un quelconque de ces points comme limite d'intervalles (emboités) de plus en plus petits. De même la signification de la continuité perceptive ne se trouve plus associée au mouvement d'un tracé.

B. *La non-congruence sémantique dans les énoncés de problème* .

Le deuxième exemple va nous rapprocher des situations étudiées dans les expériences psychologiques que nous avons évoquées. Nous reprendrons ici des résultats enregistrés par E. Koleza sur des problèmes de proportionnalité.

A partir d'un énonce aussi simple que "j'ai payé 51 Francs pour 6 kg d'oranges", deux questions sont possibles :
1) Quelle quantité d'oranges aurais-je avec 85 francs ?
2) Combien devrais-je payer pour 4kg d'oranges ?

la première question est congruente à l'énoncé. Elle renvoie directement à l'utilisation de l'opérateur "fonction" : a (kg) coûtent b (F), pragmatiquement présupposé par l'énoncé. La deuxième question en revanche n'est pas congruente à l'énoncé. Elle demande une inversion de l'opérateur "fonction" [12, p.69-70]
Le simple fait de poser la seconde question, au lieu de la première, fait chuter les réussites de de 85% à 61% [12, p.131]. Et lorsque l'énoncé n'impose pragmatiquement aucune opérateur (comme par exemple dans l'énoncé "Une voiture a consommé 28 litres d'essence pour 350 kilomètres"), les élèves qui réussisent choisissent, en très grande majorité, la procédure qui rend l'énoncé congruent à la question. Ainsi deux questions étaient posées :
– combien la voiture a-t-elle consommé aux cent 100 kilomètres ?
– quelle distance la voiture peut-elle parcourir si son réservoir contient au départ 42 litres ?
A la première question les élèves ont calculé : 28l. : 350km = 0,08 l./km. Et à la deuxième question, qui suivait immédiatement, ils ont calculé : 350 : 28 = 12,5 km/l [11, p.135-136].
Tout cela peut être schématisé de la façon suivante [12, p.123]:

énoncé :	pour 4 personnes -----------> 150 gr.
question congruente	pour 6 personnes -----------> ?
question non congrue.	pour ? personnes <---------- 200 gr.

L'opposition du sens des flèches indique un écart de codage pour les suites internes tout à fait analogue à la variation du point d'ancrage dont nous avons vu l'importance plus haut lors de la comparaison image-phrase. Nous avons ici le même phénomène cognitif. L'intérêt de cet exemple par rapport au précédent est de faire apparaître la non-congruence sémantique comme une source de difficultés *indépendante du contenu mathématique* : une tâche mathématique peut être réussie si sa présentation et son déroulement ne demandent aucune transformation entre des expressions, des formulations ou des représentations congruentes, et la même tâche mathématique, donnée avec une variante impliquant une manipulation de données non congruentes, peut conduire à des échecs. Nous verrons ultérieurement que ce point est particulèrement important pour l'heuristique des problèmes de géométrie et pour l'éveil au raisonnement en ce domaine.

C . *Non-congruence entre phrase et formule* .

Le passage d'un énoncé du discours naturel à une expression écrite symboliquement avec des variables, des symboles de relation, ou d'opération, constitue pour beaucoup d'élèves un fossé difficilement franchissable. L'utilisation d'équations du premier degré pour résoudre des problèmes est le lieu traditionnel, et toujours actuel, où les enseignants se heurtent, de façon spectaculaire, à la non articulation des registres de l'expression discursive et de l'écriture symbolique. Déjà les manuels anciens consacraient tout un chapitre sur "les problèmes du premier degré" [1], ou sur"les problème d'algèbre" [13]. En deçà de cette tâche complexe d'utilisation des équations du premier degré, nous voudrions signaler l'effet du phénomène de non-congruence sémantique. Le problème suivant nous servira d'exemple :

Un homme a *23 ans de plus que* son fils, 31 ans *de moins* que son père. La somme des âges des trois personnes est 119 ans. Calculez les âges.
En désignant par x l'âge du père et par y l'âge du fils, nous pouvons écrire la première équation de deux façons différentes :

$x - 23 = y$ c. à d. l'*âge du père moins* 23 est égal à l'âge du fils.
$x = y + 23$ c. à d. l' âge du père est égal à l'*âge du fils plus* 23.

On remarque tout de suite que la paraphrase des deux équations n'est pas congruente à la phrase de l'énoncé : "un père a 23 ans de plus que son fils". En revanche il y a une équation qui est sémantiquement congruente à cette phrase, mais qui ne lui est pas référentiellement équivalente : $x + 23 = y$. En raison de cette congruence, cette équation risque de s'imposer comme la transcription algébrique évidente de la phrase.
Dans un travail ancien, et dans une tâche beaucoup plus simple que l'utilisation des équations du premier degré, nous avions pu observer le poids du phénomène de non-congruence[7]. Il s'agissait de donner l'écriture symbolique correspondant à l'expression discursive d'une opération portant sur des nombres et inversement de paraphraser des écritures symboliques

exprimant aussi une opération entre nombres. Pour l'expression " la somme de deux produits de deux entiers,tous les entiers étant différents", 90% des élèves de 13-14 ans transcrivaient "a.b + c.d ", mais seulement 48% réussissaient à transcrire " a.b + a.c " pour l'expression " la somme des produits d'un entier avec deux autres entiers"! Dans le premier cas il y a congruence puisque les *deux produits symétriquement distribués* autour du symbole de la somme *sont explicitement mentionnés dans la phrase* : d'autres observations montrent en effet que toute formule s'organisant symétriquement de part et d'autre d'un symbole de relation (ou d'opération) central sont mieux appréhendés par les élèves que les autres types de formule. Dans le second cas, en revanche, il n'y a plus congruence puisque les *deux produits symétriquement distribués* autour du symbole de la somme ne sont *plus explicitement mentionnés par l'expression discursive.*

Sans nous étendre davantage sur l'articulation entre le registre de l'expression discursive et celui de l'écriture symbolique, nous terminerons par une anecdote que F. Pluvinage nous a rapportée. Lors d'une séance de travail pour la rédaction d'un manuel, un des participants fait la proposition suivante:
" Si deux fractions ont même dénominateur alors elles s'ordonnent comme leurs numérateurs. *Autrement dit* : Si $a < b$, alors $a/k < b/k$."
Un autre participant refuse alors "autrement dit" et propose de remplacer cette expression par "ainsi","d'où", car le deuxième énoncé n'est pas une simple transposition du premier. Le premier participant mettait l'accent sur l'équivalence référentielle, le second était sensible à la non-congruence sémantique des deux expressions.

III Congruence et fonctionnement cognitif de la pensée .

A la différence du discours en langage naturel, le *discours mathématique* se développe par le fait qu'il *opère principalement par substitution et non par adjonction ou par accumulation* [8, p.45-46,52]. C'est ce qui confère à tout developpement mathématique un ordre linéaire plus strict que pour le développement d'un texte français ordinaire. A chaque pas du raisonnement, du calcul ou de la procédure de résolution, la nouvelle expression ne vient pas compléter ou enrichir les expressions antérieures et les données initiales, comme dans le texte d'une description, celui d'une histoire ou celui d'une discussion. Cette nouvelle expression vient, au contraire, se substituer à l'expression du pas précédent en vertu de définitions, d'axiomes, de théorèmes, de tables d'opérations...*qui sont autant de règles de subtitution* pour le progrès de la pensée à partir des données initiales : dans un développement qui opère par substitution le rapprochement de deux expressions éloignées n'a pas de sens, alors que dans un texte, où l'on opère par accumulation d'informations, de précisions, le rapprochement de deux phrases éloignées peut permettre de saisir la cohérence du discours développé [8, p.80-86]. La substitivité est l'une des caractéristiques fondamentales du fonctionnement cognitif de la pensée mathématique. Et c'est relativement à cette substitivité que les phénomènes de congruence et de non-congruence sémantiques sont importants.

Pour montrer, par exemple, que la somme des angles d'un triangle équivaut à 180°, on trace par un sommet la parallèle au côté opposé. Cet acte présuppose que l'on voie *une droite* comme *un angle de 180* °, c'est à dire que l'on substitue indifféremment l'une à l'autre deux présentations sémantiques différentes. Or, figurativement, un angle c'est un "coin", ou deux segments partant d'un même point : pour voir une droite comme un angle de 180°, il faut lui adjoindre une perpendiculaire. La notion de droite et celle d'angle plat n'appartiennent pas au même réseau de sens associatif interne. Une démarche spécifique favorisant le saut, en faisant prendre conscience de l'équivalence référentielle, est donc nécessaire. C'est d'ailleurs, dans le développement de cette démonstration élémentaire, la seule substitution non-congruente. Cela risque donc, dans une phase d'apprentissage ou de recherche, d'en être le point décisif.

L'utilisation de formules très simples exige aussi cette activité de substitution. Nous avons relevé dans une classe de seconde la difficulté à utiliser la formule : $t = d/v$.
Les élèves avaient le problème suivant : un cycliste parcourt une certaine distance à la vitesse de 18,4 km à l'heure. Quelle est cette distance, sachant qu'il aurait gagné un quart d'heure en roulant à la vitesse de 20 km à l'heure ?
Certains ont posé $t_1 - t_2 = 1/4$, mais se refusaient à remplacer t_1 et t_2 par $d/18{,}4$ et par $d/20$, tout en ayant la formule sous les yeux. Les deux membres n'étaient pas formellement congruents puisque d'un côté nous avions un symbole unique et de l'autre un rapport : malgré l'égalité écrite," d/v" ne signifiait pas pour eux le temps, il ne pouvait donc être substitué au symbole "t" posé comme la variable temps.

La congruence et la non-congruence sémantiques jouent un rôle important dans l'activité de substitution, que cette activité soit inter ou intra-registre. Cela explique pourquoi la cohérence d'un texte mathématique soit d'un autre type que celle d'un texte non mathématique et qu'elle soit, par conséquent, si difficilement accessible à une majorité d'élèves (au moins jusqu'à 16-17 ans et au delà, dans les filières non-scientifiques). Et surtout cela montre que ce qui a été appelé le "jeu de cadres" constitue un objectif, mais peut se heurter à de nombreux obstacles dûs à la non-congruence sémantique [4]. La situation qui a été didactiquement présentée comme exemplaire était une situation dans laquelle la substitution inter-registre et les traitements intra-registres ne se heurtent à aucune difficulté de non-congruence : il s'agit fondamentalement d'un fractionnement homogène de rectangles et de carrés et du codage numérique de leurs différents comptages selon la relation partie-tout. La définition du "cadre " proposée est d'ailleurs étrangère à toute prise en compte d'éventuels écarts sémantiques : "un cadre est formé par des objets mathématiques, par les relations qu'ils ont entre eux, par leurs différentes formulations et aussi par les images mentales qui sont associées à ces objets" [5, p.40]. Et l'auteur précise ensuite que changer de cadre c'est :

– produire différentes formulations pour un problème, ces différentes formulations n'étant pas forcément similaires (c'est-à dire n'étant pas forcément sémantiquement congruentes).
– reconnaître dans une formulation l'emploi d'outils ou de techniques non utilisables dans une autre formulation .

Il apparait donc qu'un cadre est beaucoup plus vaste que ce que nous avons appelé "registre" et que le changement de cadre, qui doit offrir une véritable compréhension mathématique, présuppose le dépassement des écarts sémantiques. Or c'est là que commence, et que s'arrête aussi pour un nombre non négligeable d'élèves, l'apprentissage des mathématiques.

CONCLUSION.

Les signes, les symboles, et aussi tous les éléments icôniques permettant de construire une représentation donnent lieu à deux opérations essentielles pour le fonctionnement de la pensée: l'association et la substitution.

L'association se fait, de façon interne, selon des liens de contexte et d'appartenance à un même réseau sémantique. Elle se fait aussi,de façon externe, selon des règles de combinaison des signes en expressions ou en configurations, règles qui sont propres au registre sémiotique choisi. On admet en général que la pratique de l'association externe reflète le jeu de l'association interne: cela correspond grossièrement à notre pratique spontanée de la parole, dans le discours quotidien. Dans cette situation, la pratique du discours remplit une fonction d'échange et de communication et non une fonction de traitement et de transformation d'information. Pour qu'un registre sémiotique, y compris celui de la langue naturelle, puisse répondre à cette fonction de traitement, il faut introduire des conditions sémantiques de

substitution par équivalence référentielle. Dans la langue naturelle, cela se fait par le jeu des définitions et des distinctions.C'est de cette manière que la géométrie euclidienne utilise le registre du discours naturel, et a développé dans les possibilités du langage naturel une fonction de traitement. La géométrie euclidienne a culturellement imposé l'image d'un raisonnement "more geometrico" lié au discours. *Ce raisonnement "more geometrico" fonctionne par substitution et non par accumulation ou par adjonction* . Cela implique un saut par rapport au jeu de l'association interne, lequel se fait selon des contextes reconnus et intégrés par le sujet. En ce sens le raisonnement géométrique qui s'exprime à travers les ressources de la langue naturelle, diffère radicalement de l'argumentation [9]. L'argumentation *est un raisonnement qui fonctionne d'abord par accumulation ou par adjonction et non par substitution* . L'argumentation ne présuppose aucune définition, aucun axiome pour ouvrir un ensemble d'équivalences référentielles. Lorsque dans l'argumentation, on recourt à des équivalences référentielles, c'est localement, pour les besoins de "réduire" une affirmation adverse, réelle ou possible : le plus souvent elles sont suggérées et non affirmées ... (sinon elles pourraient être récusées ...).
La logique d'une argumentation relève de l'appréhension de la cohérence globale du discours, et non de la rigueur du pas à pas de la démarche comme dans un raisonnement mathématique. Cette différence de fonctionnement entre le raisonnement mathématique (qui privilégie la substitution et les équivalences référentielles) et l'argumentation (qui garde le principe d'accumulation et la congruence sémantique propre au discours naturel) est importante à prendre en compte pour la didactique des mathématiques... En résumé, tant que l'association externe des signes ou des symboles reste subordonnée au jeu de l'association interne, l'individu ne peut pas se heurter à des problèmes de congruence. Mais dès que l'activité cognitive exige un minimum de traitement (au plan de la langue naturelle cela commence à apparaitre avec la pratique de l'expression écrite) l'association interne doit respecter les contraintes propres au registre de traitement choisi : les problèmes de congruence sémantique deviennent alors primordiaux, surtout lors de l'apprentissage en fin de primaire et dans les Collèges.

Avec les exemples présentés, nous avons privilégié l'examen de congruence pour la substitution inter-registre au détriment de la substitution intra-registre. La première est plus manifestement indépendante du contenu mathématique que la seconde. Mais cela n'implique pas qu'il n'y ait pas de sérieux problèmes de congruence intra-registre ou que ceux-ci soient liés à des difficultés mathématiques de contenu. Bien au contraire. Dans le registre de l'écriture symbolique, écriture qui permet par excellence le jeu de la substitution d'expressions ou de symboles les uns aux autres, les difficultés liées à la non-congruence peuvent être importantes. Mais les problèmes de congruence liés à la substitution inter-registre présentent un intérêt particulier pour l'enseignement général de mathématiques, c'est-à dire pour l'enseignement des mathématiques jusqu'à 16 ans. Non seulement ils constituent le premier "mur" à franchir pour une grande majorité d'élève, et cela ne semble pas sérieusement pris en compte dans l'enseignement et dans la réflexion sur l'enseignement; mais encore apprendre à articuler plusieurs registres de présentation de l'information et apprendre à différencier plusieurs types de fonctionnements cognitifs pourraient être une finalité de l'enseignement des mathématiques qui apparaisse intéressante et utile aux non-mathématiciens.

Comme on le voit, les problèmes de congruence donnent une nouvelle approche à la question du langage en mathématique. Le langage naturel ne peut être opposé,de façon simle et globale, aux langages logico-mathématiques, et aux représentations figurales ou graphiques : la véritable frontière, celle qui arrête beaucoup d'élèves est entre congruence et non-congruence sémantique est dans le jeu de la substitution d'une expression à une autre, ou d'une représentation à une autre. Les deux autres articles ("sur l'approche cognitive des problèmes de géométrie" et "sur graphiques et équations") en fournissent des exemples plus détaillés.

REFERENCES

[1] **Borel E., Montel P.**,1922, *Algèbre (3ème, 2nd,1ère)*, Armand Colin, Paris.

[2] **Clark H.H.**, 1969, Linguistic processes in deductive reasoning, in *Psychological Review,* 76, p.387-404,1969.

[3] **Clark H.H., Chase W.G.**,1972,On the process of comparing Sentences against Pictures, in *Cognitive Psychology* ,3, p.472-517, 1972 .

[4] **Douady R.**, 1984, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* ,Thèse,Paris VII.

[5] **Douady R.**,1985, Interplay between differents settings, in *Proceedings of the ninth Int.Conf.for the Psychology of Mathematics Education,* p.1985

[6] **Ducrot O.**,1972, *Dire et ne pas dire*, Hermann, Paris.

[7] **Duval R.**,1971, La compréhension du langage mathématique par un enfant de 4ème,in *Langage mathématique et formalisation* ,Colloque Inter-Irem, Irem de Bordeaux.

[8] **Duval R.** 1986, *Lecture et Compréhension des Textes*, IREM Strasbourg

[9] **Grize J.B.** 1982, De la logique à l'argumentation - Droz, Genève.

[10] **Frege G.**, 1971, *Ecrits logiques et philosophiques*(trad. Imbert), Seuil, Paris.

[11] **Heath T.L.**(Ed.,Trad.), 1956, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol.I, Doner New-York .

[12] **Koleza-Adam E.**,1987, *Décalages cognitifs dans les problèmes de proportionnalité*, Thèse, Strasbourg.

[13] **Lebossé C.,Hemery C.**,1951, Algèbre,Arithmétique et Géométrie (4ème),Nathan, Paris.

[14] **Piaget J.**,1967, *Le Jugement et le raisonnement chez l'enfant* Delachaux-Nestlé, Neuchâtel.

[15] **Pluvinage F., Rauscher J.C., C. Soumoy,** 1985, *Rapport sur l'expérimentation "Pédagogie Différenciée" conduite en Mathématiques au Collège d'Ostwald en 1984-85* - IREM, Strasbourg.

[16] **Robinet J.**,1986, Les Rééls,quels modèles en ont les élèves ? in *Educational Studies in Mathematics*, 17, p.359-356.

[17] **Quine,W.V.O.,** 1977, *Le mot et la Chose* (trad.Dopp,Gochet), Flammarion, Paris.

DEUX QUESTIONS SUR LES NOMBRES REELS SOULEVEES PAR L'ARTICLE DE R. DUVAL

F. PLUVINAGE

Très raisonnablement, l'auteur de l'article s'en tient au constat sur l'enseignement des mathématiques tel qu'il peut être observé actuellement sur le terrain. Et on ne risque guère de se tromper en avançant que ce constat correspond à la quasi-totalité des présentations des nombres, à travers l'écriture et la position de points sur une droite graduée, proposées dans les classes de collège puis de lycée. Dès lors, il vaut la peine d'aller un peu plus loin, et deux questions méritent en ce sens d'être envisagées. La première est :

“La non-congruence sémantique, entre la droite et l'ensemble des nombres réels écrits, est-elle inscrite dans les mathématiques ?”

Si la réponse à cette première question devait être affirmative, on en resterait là ; mais en concluant négativement, nous sommes amenés à poser une seconde question. On peut, avant même de justifier sommairement le bien-fondé d'une réponse négative à la première question, formuler la seconde de la façon suivante :

“Les apprentissages obligent-ils à passer par une étape où écriture et représentation des nombres semblent incompatibles ?”

Réponse à la première question

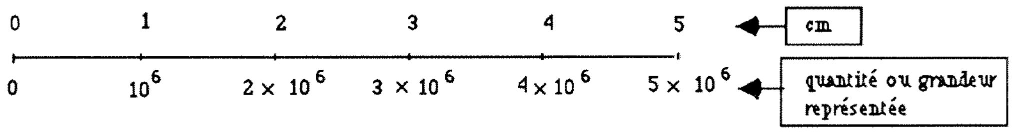
Ce qui est inscrit dans les mathématiques, c'est l'évacuation des aspects purement contingents. La seule idée d'une “théorie mathématique du dessin géométrique sur la feuille de format A4 à petits carreaux tracés en bleu” apparaît risible, même si la dite feuille est un support de choix pour une mine de problèmes.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.27-31) IREM de Strasbourg

Les limitations de la feuille doivent pour le moins pouvoir être choisies arbitraires, de même que celles du réseau, pour que l'on soit en présence d'objets d'études mathématiques. Ainsi l'illimitation est-elle constitutive de la démarche mathématique, comme peut l'attester par exemple un paradoxe aussi ancien que celui d'Achille courant après la tortue. Remarquons toutefois qu'à partir de telles considérations, il a fallu attendre le XIXe siècle pour que l'entreprise d'arithmétisation des nombres réels et le traitement numérique de la continuité puissent être considérés comme menés à bien. Un écart aussi énorme dans le temps marque la présence de difficultés très importantes, dont il serait sans doute utopique de vouloir effacer toute trace lors d'un enseignement.

Mais l'illimitation est à tel point ancrée dans les mathématiques que, si des constructions à base de limites restaient acceptables (et fructueuses), le fait de vouloir enfermer l'infini dans un “sac”, sous la forme d'infini actuel, ne pouvait qu'avoir des conséquences explosives. Inscrits dans la construction cantorienne se trouvaient des paradoxes, dont ceux de Burali-Forti furent parmi les premiers, obligeant à poser une théorie des ensembles, alors même que Cantor n'aurait pas voulu d'axiomes. Mais des axiomes s'imposèrent, impliquant la nécessité de considérer des classes qui ne peuvent pas prétendre à l'appellation d'ensembles. Inévitable dialectique ...

Du même coup, il n'y a aucune objection présentable à l'encontre de la construction que propose par exemple J. Harthong dans l'Ouvert n° 46, mars 1987, IREM de Strasbourg. Cette construction ne fait rien d'autre que de *repousser jusqu'à inacessibilité* le mode de représentation habituel pour des quantités importantes.



Une graduation courante pour le géographe

Un géographe ou un économiste qui veulent représenter la production d'une marchandise (matière première, énergie, ...) sont souvent amenés à utiliser des échelles sur lesquelles l'unité 1 est bien inférieure au seuil des possibilités de représentation. Ainsi, sur la graduation représentée, si nous désignons un point avec la plus grande précision dont nous soyons capable ici, disons de 1/10ème de millimètre, l'incertitude sur la grandeur représentée est encore de l'ordre de $10000 = 10^4$. Dans ce sens, notre point concrèt correspond à une classe d'environ 10000 entiers. Il faut bien dire classe et non pas ensemble, car nous sommes dans l'incapacité de fixer un premier et un dernier : la frontière de notre paquet d'environ 10000 entiers ne peut qu'être imprécise. Certes, 10^6 reste encore un bien "petit" nombre, et une représentation dans laquelle chacun de 10^6 entiers serait discernable est techniquement réalisable. Mais quels que soient notre désir de précision et la finesse de notre équipement, nous rencontrerons toujours des situations comparables à celle-ci, où le repère matériel ne permet pas d'isoler un entier mais désigne toute une classe aux contours imprécis. Dès lors, deux attitudes sont possibles pour être en accord avec l'indispensable illimitation. L'attitude primitive consiste à *idéaliser* le point en lui attribuant une dimension nulle. Mais une attitude plus évoluée est justifiée par la substitution, clairement explicitée dès le XVIIIe siècle, de l'idée d'incertitude à celle d'erreur, remettant en cause l'antique primat des modèles sur les mesures. Dans cette attitude évoluée, l'imprécision ne disparaît pas, mais elle est reléguée à un niveau à jamais inaccessible. Pour que tout aspect contingent puisse ainsi disparaître, il suffit de concevoir *un* entier ontologiquement inaccessible parce que trop grand. Dans l'article de J. Harthong déjà cité, on imagine un tel entier mis à la place de 10^6 dans la graduation représentée ici, et on aboutit alors à la notion de "halo" de la mathématique non-standard. Ce qu'il importe de souligner en tout premier lieu, c'est qu'une construction des nombres réels n'a besoin que du "trop grand pour être accessible", autrement dit de l'inaccessible, et non de l'infini. Au passage, notons l'écart étymologique de ces deux termes ...

En dehors des mathématiques, on peut rencontrer des réflexions comparables, par exemple en cosmologie. Récemment, l'astronome J.P. Parisot (co-auteur avec C. Dumoulin du remarquable traité "d'Astronomie pratique et Informatique", Masson, Paris, 1987) me signalait que la masse totale des objets de l'univers connu, qui est pourtant d'un diamètre dont la mesure en mètres reste insignifiante par rapport à un entier inaccessible, atteint déjà la moitié d'une masse critique au delà de laquelle la vitesse de libération serait supérieure à celle de la lumière. Pour que notre univers soit ainsi un "trou noir", duquel toute échappée de matière serait exclue, il suffit donc que nous n'ayons actuellement repéré dans nos observations que la moitié de ses objets. Quels sens auraient alors des spéculations sur sa finitude ou son infinitude ? Là encore, l'excessivement grand ou excessivement gros peut satisfaire l'imagination la plus débridée.

Réponse à la seconde question

Ce qui s'impose comme une évidence quant à la progression des apprentissages, c'est que la mesure des grandeurs ne peut pas apparaître d'emblée entachée d'incertitude. Il n'est en effet pas possible de spéculer sur des modèles avant d'en avoir éprouvé quelques uns de manière assez solide. De ce point de vue, l'antériorité épistémologique des nombres rationnels présentés comme des fractions, sur les nombres de l'écriture à virgule (ou point décimal) se justifie parfaitement : l'écriture et la lecture de fractions rendent compte directement de procédures de mesures, alors que l'écriture sous forme de chiffres décimaux renvoie directement à des résultats de mesure, indépendamment de toute procédure d'obtention. Quand nous disons “trois quarts”, nous renvoyons à une procédure qui donne d'abord un sens à l'idée de quart puis consiste à considérer trois exemplaires d'un tel quart, pris en quelque sorte comme unité. Il est clair que la signification véhiculée par “zéro virgule soixante quinze”, d'ailleurs mieux perçue sous la forme écrite 0,75, est de nature très différente et relève d'approximations successives : c'est un nombre compris entre zéro et un, qui a 7 pour chiffre des dixièmes et 5 pour chiffre des centièmes. L'existence de nombres irrationnels reste aujourd'hui un “choc” dans les apprentissages mathématiques, alors que celle de nombres non décimaux n'est que l'occasion d'une rencontre avec un processus illimité (ce qui n'est déjà pas mal tout de même), par exemple “la division par 3 qui ne s'arrête jamais”.

Pour des manipulations de mesures de grandeurs, il est clair que, de nos jours comme à l'époque de la mathématique grecque, un début par les longueurs, des aires, des volumes s'impose sur d'autres possibilités, par exemple toutes les mesures sur des circuits électriques. C'est que la description, la représentation et la construction de solides offrent des possibilités d'éprouver le modèle géométrique, alors que des réflexions équivalentes sur le courant électrique seraient très difficiles à organiser d'emblée. Si l'on trouve par exemple 14,2 cm pour la diagonale d'un carré de côté 10 cm, on peut parler d'erreurs, du dessin ou de la mesure. La notion d'incertitude est incontestablement plus subtile, car elle concerne non pas une mesure, mais une famille de mesures.
Mais aujourd'hui, la notion d'incertitude est cependant vite amenée à être gérée si l'on a recours à l'outil informatique. En travaillant sur un écran de 64000 points, ou avec une table traçante ayant un pas de 1/10-ème de millimètre, on est à même de savoir que la perfection d'emploi de l'outil est atteinte pourvu que les écarts introduits restent en dessous d'un seuil de tolérance. Dans ces conditions, l'écriture et la représentation des nombres à l'occasion de

travaux sur de tels matériels ne peuvent en aucune façon apparaître comme "incongrus". Reste cependant l'illimitation, car l'espace de l'écran ou la feuille de papier ne peuvent pas ne pas être prolongés en pensée. La division par 3 précédemment signalée et, avant elle, la simple possibilité d'écriture des nombres entiers dans le système décimal de position procurent des rencontres avec l'illimité.
Nous ne sommes pas sûrs que l'attitude primitive évoquée plus haut : *supprimer l'imprécision,* doive obligatoirement précéder l'attitude évoluée : *repousser l'imprécision à un niveau inaccessible.* Mais il nous semble que l'on ne peut présenter aujourd'hui la première qu'à deux conditions :
– savoir qu'elle n'est qu'une possibilité et pas une obligation mathématique,
– avoir une idée de ses conséquences.

C'est par exemple pour cela que nous trouvons véritablement perverse l'une des questions proposées par J. Robinet (Les réels : Quels modèles en ont les élèves ?, Educ. Studies in Math. n° 17, 1986, page 361). La question est : «Si l'on grossissait au microscope électronique (ou avec un ordinateur) la droite, qu'est-ce qu'on obtiendrait comme dessin "ultime" ? » La question vient à la fin d'une série de quatre, les trois premières questions portant explicitement sur les nombres réels. Or si une droite idéalement mince (de largeur nulle) peut être soumise à "l'ultime grossissement", il devient absurde de l'imaginer graduée. Seuls des sujets formés à l'attitude évoluée pourraient voir dans la question un test de connaissance sensé, et leur réponse serait évidente : on voit apparaître un espace de représentation entièrement noir, parce que complètement occupé par l'image de la droite.

Il est remarquable que, *malgré* l'enseignement, on trouve des productions de dessins auxquelles il ne manque pas grand chose pour être en accord avec cette réponse.

Reproduction (approximative) de figures de l'article de J. Robinet

Il est alors scandaleux de voir ces figures accompagnées d'un commentaire sur le "télescopage entre modèle physique et modèle mathématique". Que dire alors du microscope de la question posée ?

Mais nous préférons terminer en nous posant la question que suscitent naturellement de nombreuses observations de réactions analogues chez des élèves de niveaux scolaires variés : l'attitude évoluée ne serait-elle pas la seule qui procure une stabilité ?

QUESTION DE REPRÉSENTATION ET DE FORMULATION DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLEMES MATHEMATIQUES

G. VERGNAUD

La fonction des signifiants langagiers et symboliques est de favoriser la conceptualisation (identification et objectivation) et de permettre la communication et le débat ; ils jouent en outre un rôle de régulation de l'action dans la résolution de problème. La diversité des signifiants, des signifiés et des référents pose le problème de la congruence sémantique : tous les signifiants ne se valent pas, certains reflètent mieux que d'autres les propriétés du signifié. Les systèmes symboliques sont à la fois une aide à la pensée et un problème à résoudre : la compréhension, la lecture et la production de certains systèmes supposent des opérations de pensée non triviales.

L'analyse des représentations est essentielle pour la recherche en didactique. Mais cette analyse comporte deux versants interdépendants :

- le versant des représentations non explicites, préconceptuelles, et conceptuelles, qui régissent l'action du sujet en situation : choix des éléments à retenir, des buts à atteindre, des procédures et des opérations à utiliser, des combinaisons d'informations et de règles à effectuer.
- le versant des représentations symboliques explicites, langagières et non langagières (graphiques, tableaux, diagrammes, algèbres...) qui expriment les éléments et les procédures que le sujet estime intéressant de retenir, notamment dans la communication avec les autres.

C'est à ce versant que je m'intéresse aujourd'hui, tout en considérant qu'on ne peut pas en parler sans faire référence au premier. Mon exposé comprendra trois parties :

1. L'articulation entre signifiants, signifiés et référents : la question de la congruence signifiant/signifié.
2. La compréhension et l'utilisation des signifiants : quelles opérations de pensée supposent-elles ?

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.33-55) IREM de Strasbourg

3. Les activités langagières et symboliques comme reflets de la pensée et aide à la pensée.

1.Signifiants/signifiés et référents : la question de la congruence signifiant/signifié.

On ne peut pas raisonnablement étudier la formation d'un concept sans considérer trois ordres de choses :
a) l'ensemble des situations de référence qui donnent du sens au concept. Cet ensemble présente en général une certaine diversité ;
b) l'ensemble des propriétés et des relations invariantes que le sujet doit extraire et utiliser pour traiter ces situations. On observe là encore une diversité d'aspects ;
c) l'ensemble des signifiants langagiers et symboliques susceptibles de représenter le concept et ses propriétés, et par voie de conséquence les situations de référence et les opérations de pensée nécessaires pour les traiter.

Alors que le linguiste est davantage tourné vers le rapport signifié-signifiant (b et c), le psychologue qui s'intéresse à la conduite en situation s'intéresse davantage au rapport référent-signifié (a et b), et notamment aux schèmes qui organisent l'action du sujet en situation.

Une première idée importante concerne la diversité de chacun des ensembles : situations, invariants, représentations langagières et symboliques. Il faut étudier et traiter cette diversité.

Une deuxième idée essentielle concerne l'importance de ce que j'appelle, après Piaget, les **invariants opératoires** : objets, propriétés, relations. C'est en effet le mérite de Piaget que d'avoir montré que l'objet-biberon n'est pas donné tout-à-fait pour le bébé mais que celui-ci élabore cet objet par le jeu de certaines coordinations visuo-motrices (main-oeil, bouche) et à travers un ensemble de situations, notamment de transformations spatiales (éloignement, retournement, disparition...). De même la conservation du cardinal d'une collection, ou de la masse d'une boulette de pâte à modeler n'est pas non plus donnée toute faite à l'enfant de 6 ans. Il faut étendre ce concept d'invariant à un grand nombre d'aspects du réel, notamment parce qu'il est essentiel dans le processus de conceptualisation (mathématique, physique ou autre...) du réel. Le concept de théorème-en-acte est issu tout droit de cette problématique.

Une troisième idée importante est que, si un concept ne se forme pas dans un seul type de situation, une situation ne s'analyse pas non plus à l'aide d'un seul concept, et que l'étude des filiations et des ruptures du développement cognitif de l'enfant demande qu'on prenne en charge un ensemble relativement large de situations, de concepts et de représentations symboliques : c'est ce que j'appelle un champ conceptuel.

Ces idées sont loin d'être comprises par nos collègues anglo-saxons. L'idée d'invariant n'est guère comprise par les psychologues même par ceux qui prétendent être cognitivistes ; l'idée de champ conceptuel non plus : par exemple, les chercheurs qui s'intéressent aux concepts de fraction et de rapport, ou à la proportionnalité, étudient les uns indépendamment de l'autre. Le concept de schème lui-même n'est pas bien compris, en dépit du fait que certains concepts comme ceux de frame, de script, de format, sont assez proches de celui de schème. Il leur manque l'aspect fonctionnel et dynamique : le schème organise la conduite évolutive du sujet en situation. C'est une totalité dynamique, une organisation invariante de la conduite pour un ensemble de situations. Invariante ne signifie pas stéréotypée : ni la marche (schème sensori-moteur), ni le traitement d'une équation algébrique de tel ou tel type (schème intellectuel) ne sont des stéréotypes.

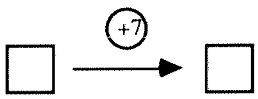
Alors que Piaget ne cherchait pas à analyser le schème en ses éléments, il est utile aujourd'hui de distinguer des éléments constitutifs distincts, bien qu'articulés entre eux :
- des invariants opératoires qui permettent d'extraire l'information pertinente de la situation et de la traiter ;
- des inférences qui forment la partie proprement actuelle du traitement de l'information ;
- des règles d'actions qui permettent d'engendrer la suite des actions du sujet en fonction de la situation et du déroulement des évènements ;
- des anticipations et prédictions (anticipations explicites) qui permettent à la fois de finaliser l'action et de contrôler la pertinence de la représentation.

Le signifié est fondamentalement constitué de schèmes, lesquels comportent une certaine conceptualisation du réel, qui reste le plus souvent implicite. C'est cette fonction de conceptualisation implicite que remplissent les invariants opératoires, avant de devenir, grâce au langage et aux autres symbolisations, des concepts explicites.

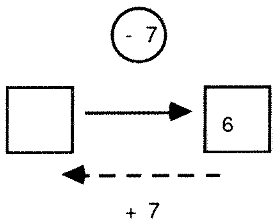
L'exemple le plus simple d'aide à la conceptualisation de situations complexes fournie par un système de signifiants, me paraît être celui des structures additives et, à l'intérieur des structures additives, celui de la représentation par un diagramme sagittal de la relation état initial-transformation-état final.

Ce n'est pas tant pour les problèmes de recherche de l'état final que le diagramme sagittal apporte quelque chose.

Dans le problème :
Pierre avait 5 billes. Il joue une partie et gagne 7 billes. Combien en a-t-il maintenant ? les élèves du cours élémentaire n'ont guère de mal à comprendre la relation qui unit ce qu'on cherche aux données. Et ceux qui ont des difficultés ne sont guère aidés par le diagramme :



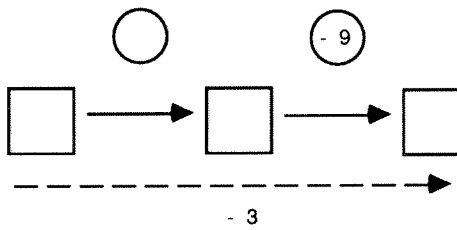
Par contre, dans le problème :
Robert vient de perdre 7 billes en jouant avec Pierre. Il en a maintenant 6. Combien en avait-il avant de jouer ?
les mêmes élèves sont décontenancés et ne savent pas comment opérer. Faire une addition alors qu'il y a une perte est même d'une certaine manière, contre-intuitif.



Ce diagramme présente alors l'avantage de bien marquer état initial, état final et transformation (symboles différents, place différente) et de permettre de symboliser l'opération d'addition par une inversion de la transformation directe, faisant retour de l'état final vers l'état initial.

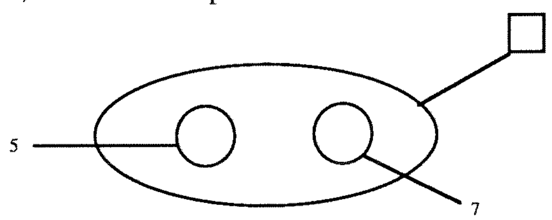
Cette aide à la conceptualisation est également sensible, pour des élèves plus âgés, lorsqu'ils ont à traiter la composition et la décomposition de transformations.

Jean Paul a joué deux parties ; il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a perdu 9 billes. En tout il en a perdu 3. Que s'est-il passé à la première partie ?



Dans ces exemples, l'élève est amené à distinguer entre transformations, positives ou négatives (symbolisées par un rond), et états, toujours positifs ou plutôt sans signe (symbolisés par des rectangles). Il est amené à repérer le sens du déroulement temporel, de gauche à droite, et à comprendre que rajouter les billes perdues dans le problème Robert, revient à remonter le temps.

En fait la représentation symbolique que je viens d'utiliser permet ces distinctions ; ce n'est pas le cas des diagrammes de type Euler-Venn qui permettent assez bien de représenter le problème Pierre, et en même temps sa situation.



mais qui ne fournissent, pour le problème Robert, qu'une représentation **de la solution** (la même que ci-dessus), mais **pas du problème** : parce que ce système de signifiants ne permet pas de représenter les transformations négatives.

On peut faire remarquer que le diagramme d'Euler-Venn est adéquat pour représenter la composition additive d'éléments de même nature (composition binaire de cardinaux), mais pas la composition d'éléments de nature différente (opération unaire d'une transformation s'appliquant à un état). Les problèmes de conceptualisation sous-jacents sont donc profonds. Or on sait maintenant, depuis les travaux de Gelman et Gallistel (1978) et de Fuson (1983) que la conception du jeune enfant de l'addition et de la soustraction est celle d'une quantité qui s'accroît ou qui décroît. C'est une conception de type opération unaire.
Cette conception, qui ne reflète bien qu'une petite partie des situations d'addition et de sous-

traction, doit être modifiée pour permettre l'extension des opérations d'addition et de soustraction à des situations différentes. Cela suppose à chaque conquête, des opérations de pensée spécifiques. Quel concours les signifiants apportent-ils à ces opérations de pensée ?

Pour la recherche de l'état initial, il existe un théorème-en-acte

$$F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$$

qui exprime la nécessité d'inverser la transformation. Ce théorème est exprimé dans le diagramme sagittal par l'inversion de la flèche et le changement de signe de la transformation.

Passons aux structures multiplicatives, avec une opération arithmétique simple : 4×5 ou 5×4.
Un gâteau coûte 4 francs. Combien coûtent 5 gâteaux ?
On peut envisager de représenter l'opération soit comme une loi binaire, soit comme une opération unaire.

- loi binaire : $4 \times 5 =$ on ne comprend pas très bien pourquoi en multipliant des francs par des gâteaux on obtient des francs et pas des gâteaux.

-opération unaire, 2 cas : $4 \rightarrow \square$

$5 \rightarrow \square$

il faut là encore un signifiant particulier pour comprendre les différences.

$$\begin{tikzcd}
\text{gâteau} & \text{coût} \\
1 \arrow[r, dashed, "\times 4"] \arrow[d, "\times 5"'] & 4 \arrow[d, "\times 5"] \\
5 \arrow[r, dashed, "\times 4"'] & \square
\end{tikzcd}$$

On s'aperçoit en particulier que les deux opérations unaires ne sont pas équivalentes en tous points. La première, verticale, relie entre elles des grandeurs de même nature, et le théorème-en-acte correspondant est le suivant :

$$f(n \times 1) = n\, f(1)$$

cas particulier de $\quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

La seconde, horizontale, relie entre elles des grandeurs de nature différente (des gâteaux et des francs) et le théorème-en-acte correspondant est :

$$f(x) = ax$$

Dans la première solution (5 fois 4 francs), "5 fois" représente un scalaire ; tandis que dans la seconde solution, où l'on part de 5 gâteaux, la multiplication par 4 représente la multiplication par une grandeur-quotient : "4 francs par gâteau". Ainsi les enfants rencontrent le problème de l'analyse dimensionnelle dès le CE2. Et la commutativité 5 x 4 = 4 x 5 ne va pas de soi.
Prenons le calcul de l'aire d'une chambre de 5 m de long et de 4 m de large. L'opération 5 x 4 a évidemment une autre signification que dans les cas précédents puisqu'il s'agit d'un produit explicite.

Voici encore un autre exemple : 50 enfants partent en colonie de vacances pendant 28 jours. Pour préparer leur départ, ils cherchent dans une documentation quelle consommation il leur faut prévoir. Pour le sucre ils utilisent 3,5 kg de sucre par semaine pour 10 enfants. Quelle quantité de sucre leur faut-il acheter pour la colonie pour toute la durée du séjour ?

Supposons qu'un enfant de CM2 ou de sixième fasse le raisonnement suivant :
5 fois plus d'enfants, 4 fois plus de temps $\Rightarrow$ 20 fois plus de sucre.
La multiplication 5 x 4 a une autre signification encore. Elle exprime, en acte, un théorème concernant les fonctions bilinéaires.

$$f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \lambda_2 f(x_1, x_2)$$

Ce théorème n'est jamais enseigné aux enfants. Pourtant on le voit fonctionner spontanément dans le raisonnement de certains enfants, pour certaines valeurs numériques simples, et pour des domaines familiers de l'expérience. Il y a là les prémices de la bilinéarité.

On pourrait utiliser divers systèmes de signifiants pour représenter cette connaissance. Par exemple, une formule analogue à $A = L \times l$ (aire = longueur x largeur)

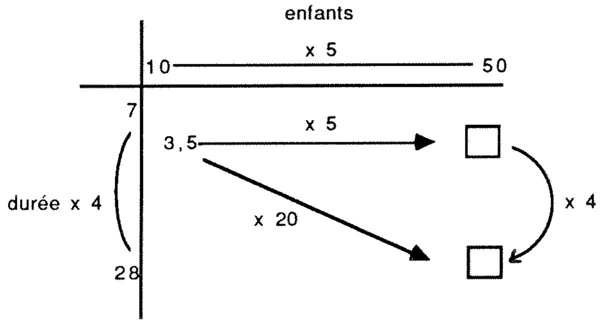
$$C = k \times E \times J$$

(consommation = k x nombre d'enfants x nombre de jours).

La présence de k vient ici du fait que la valeur unitaire f(1,1) n'est pas égale à 1 comme c'est le cas dans le système métrique : il n'y a en effet aucune raison pour que la consommation de sucre par enfant et par jour soit égale à 1. Le système métrique a été construit justement pour que, le plus souvent possible, on ait des produits sans coefficient.

Or une formule comme A = L x l peut être lue de manière très variable, selon le niveau de conceptualisation dont disposent les élèves. A la fin de l'enseignement élémentaire et au début du collège, elle est lue principalement comme un moyen de calculer l'aire quand on connaît la longueur et la largeur, éventuellement comme un moyen de calculer la longueur ou la largeur, jamais comme la reconnaissance de la double proportionnalité de l'aire par rapport à la longueur quand la largeur est constante, et à la largeur quand la longueur est constante. Or cette lecture est en fait la vraie raison de la formule.

On peut se poser la question de savoir si une autre représentation symbolique permettrait de mieux saisir cette relation de double proportionnalité, qui est essentielle à la compréhension de la formule.



Quand l'enfant fait l'inférence : “5 fois plus d'enfants, 4 fois plus de temps ⇒ 20 fois plus de sucre” il utilise en fait la bilinéarité de la consommation par rapport au nombre d'enfants et à la durée du séjour :

- par rapport au nombre d'enfants : 5 fois plus d'enfants ⇒ 5 fois plus de sucre ;
- et par rapport au temps : 4 fois plus de temps ⇒ 4 fois plus de sucre.

Le diagramme commutatif constitue une représentation symbolique du théorème-en-acte utilisé par l'enfant.

$$f(5 \times x_1, 4 \times x_2) = 5 \times 4\ f(x_1, x_2)$$

comme $f(x_1, x_2)$ est connu et égal à 3,5 kg, le tour est joué.

Il n'est pas aisé de parler de ce théorème sous cette forme à des élèves de 6e et de 5e, alors que la lecture et l'utilisation du tableau de double proportionnalité ne soulève pas de grosses difficultés au début du collège, ni même à la fin de l'école élémentaire, pour des valeurs numériques et des rapports simples, et pour des grandeurs familières.

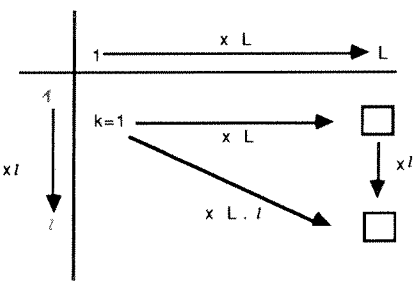
Le tableau met en évidence, d'une part l'indépendance des variables nombre d'enfants et nombre de jours, d'autre part la structure de double proportionnalité : on peut par exemple utiliser deux lignes pour mettre en évidence que, à durée constante, la consommation est proportionnelle au nombre d'enfants, et utiliser deux colonnes pour mettre en évidence que, à nombre d'enfants constant, la consommation est proportionnelle à la durée.

La question psychologique et didactique cruciale ici est évidemment la suivante : **quelles propriétés du signifiant représentent quelles propriétés du signifié** ? Si l'on veut s'attaquer au problème des rapports, dans la pensée, entre signifiant et signifié, il faut se poser cette question : **qu'est-ce-qui est représenté des concepts en jeu ? par quoi ?**

Tout à l'heure, sur l'exemple des structures additives, j'ai montré qu'il n'y avait pas de moyen simple, avec les diagrammes ensemblistes, de représenter les transformations négatives, ni d'ailleurs de représenter l'inversion d'une transformation positive. Ici par contre on utilise des propriétés isomorphes du signifiant et du signifié pour mettre en évidence des relations relativement complexes.

Revenons maintenant à l'exemple de l'aire de la pièce. C'est évidemment la même structure que celle que nous venons de voir du point de vue de la double proportionnalité (non pas de la continuité évidemment) :

- longueur et largeur sont des grandeurs indépendantes ;
- l'aire est proportionnelle à la longueur quand la largeur est constante ; et à la largeur quand la longueur est constante ;
- f(1,1) = k



Il se trouve que, dans le système métrique, on a choisi les unités de telle manière que k = 1. Cela simplifie les calculs. Mais il n'en était pas de même dans les systèmes de mesure anciens, et l'aire n'en était pas moins proportionnelle au produit de la longueur par la largeur.

La bilinéarité n'est évidemment pas liée au système métrique. De même que Brousseau a souvent dénoncé le fait que l'association étroite de l'enseignement des décimaux à celui de système métrique pouvait engendrer ou conforter certaines conceptions erronées des élèves, je ne suis pas loin de penser que la facilité trop grande qui nous est donnée avec le système métrique pour traiter des produits, peut nous empêcher de voir la structure profonde de la bilinéarité et de la trilinéarité. Je pense également qu'il est aberrant de ne pas parler, au niveau du collège, des fonctions de plusieurs variables.

La COPREM s'est préoccupée de ces questions, sans aller assez loin dans la réflexion ; d'ailleurs il n'y a pas beaucoup de recherches. Je me contenterai de citer celles que j'ai faites en LEP, avec des élèves de la section “dessin technique bâtiment”. Ces élèves ont des difficultés en mathématiques. J'ai travaillé avec eux en partant de situations comportant des données nombreuses et de nombreuses questions possibles. Ces situations permettaient de considérer des relations de proportionnalité simple : ciment, sable, gravier, coût de chaque ingrédient, béton, volume, longueur de semelle (fondation), etc... et l'on pouvait aussi considérer des relations de proportionnalité double : production et coût de la main d'oeuvre en fonction du nombre d'ouvriers et du nombre de jours de travail.

L'usage de tableaux s'est avéré d'une grande efficacité pour placer les données et les différentes questions qu'on peut se poser, extraire les relations fonctionnelles et comprendre les différents types de composition de fonctions, pour extraire également les relations scalaires et éventuellement mettre en évidence certains raisonnements dits “additifs” qui expriment l'isomorphisme additif :

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$

ou l'isomorphisme entre combinaisons linéaires :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Ces tableaux aident beaucoup, y compris dans la formulation de questions et dans la clarification du statut des différents éléments de l'énoncé comme nous le verrons plus loin.

a) Quel est le prix du ciment nécessaire à la fabrication des fondations d'un F4 ?
“Prix du ciment” renvoie à une colonne, “un F4” renvoie à une ligne.

b) Quelle quantitié de ciment faut-il acheter pour fabriquer la semelle de 6 F4 et de 10 F4 ?
“Quantité de ciment” renvoie à une colonne, “semelle de 6 F4” renvoie à une ligne (sous-question b_1) et “semelle de 10 F5” renvoie à une autre ligne (sous-question b_2).

			Masse				Coût			
	Longueur de semelle	Béton en m3	Ciment	Sable	Gravier	Béton	Ciment	Sable	Gravier	Béton
F 3										
F 4	52,5						a			
6 F4			b1							
F 5	71									
10 F5			b2							

c) Combien faut-il de jours à 5 ouvriers pour fabriquer les fondations de 10 F5 et 6 F4, soit 1025 mètres linéaires de semelle ?
"1025 mètres linéaires" est une production ; c'est une donnée qui se situe à l'intérieur du tableau ; "50 ouvriers" se situe dans une marge ; "combien de jours" est une question qui se situe dans l'autre marge.

		Nombre d'ouvriers
	1	5
1	k	
Nombre de jours		Production 1025
c		

Les tableaux de proportionnalité simple et multiple ont en outre le mérite de faire ressortir ce qui est commun à des relations prises dans des contextes très différents : prix, vitesse, masse volumique, électricité, chaleur massique, consommation, production. Ils permettent ainsi l'abstraction de leur strucutre commune.
Une question s'impose évidemment. Qu'en serait-il de la réussite et de l'échec en mathématiques si l'on recourait à bon escient, dès l'école élémentaire et au collège, à des représentations symboliques comme celles que j'ai évoquées pour les structures additives et les structures multiplicatives ? Il y a là matière à de nombreuses recherches. Il faut aussi être prudent : les difficultés conceptuelles des élèves peuvent être balayées par la simple utilisation d'une représentation symbolique pertinente ? Cependant beaucoup d'éléments permettent de penser qu'on peut aider les élèves de manière significative, surtout si on travaille dans la longue durée. Il faut pour cela recourir, à toutes les étapes du développement conceptuel de l'enfant, aux signifiants les mieux aptes à représenter les propriétés et les relations que les enfants ont du mal à extraire, à transformer et à composer.

2° La compréhension et l'utilisation des signifiants : quelles opérations de pensée supposent-elles ?

Je vais maintenant tenir un discours apparemment contradictoire avec ce que j'ai dit jusqu'à maintenant. Ce n'est pas une véritable contradiction mais elle peut être perçue comme telle.

Mon exemple sera celui de la représentation de données numériques et quasi-numériques (des dates de naissance par exemple) sur une droite : représentation qui a évidemment beaucoup à voir avec la construction du concept de **droite numérique**.
Dans l'expérience que je vais raconter, nous avons utilisé quatre types de données, et nous avons travaillé avec des élèves de CM2, de 6e et de 5e : deux classes par niveau :

- des poids de bébés à la naissance (y compris des prématurés comme vous pouvez le contater) ;
- des lancers de javelot ;
- des âges d'enfants ;
- des dates de naissance.

Le tableau 1 résume les données en question.

Données utilisées pour les quatre tâches du pré-test et du post-test

TABLEAU 1

	Non temporel		Temporel	
Origine proche	Alain	800 grammes	Anne	8 mois
	Barbara	1 kg et 700 grammes	Bernard	1 an et 7 mois
	Claude	1 kg et 900 grammes	Catherine	1 an et 11 mois
	Denis	3 kg et 100 grammes	Daniel	3 ans et 1 mois
	Eric	3 kg et 450 grammes	Evelyne	3 ans et 4 mois et 1/2
	Fabienne	3 kg et 700 grammes	Franck	3 ans et 7 mois
	Guy	4 kg et 400 grammes	Gabriel	4 ans et 4 mois

	Echelle 1cm pour 100 grammes		Echelle 1 cm pour 1 mois	
	Aurélien	67 m et 75 cm	Alice	15 juillet 1967
	Bruno	67 m et 90 cm	Béatrice	30 novembre 1967
	Carlos	68 m et 10 cm	Caroline	2 janvier 1968
Origine en dehors de la famille	David	68 m et 95 cm	Dominique	20 décembre 1968
	Etienne	70 m et 10 cm	Emilie	3 janvier 1970
	Fabrice	70 m et 55 cm	Fanny	13 mai 1970
	Gérard	70 m et 60 cm	Gaston	31 mai 1970

Le plan d'expérience utilise deux variables principales :

1° La chronologie et la durée par opposition à des longueurs et des masses ; l'hypothèse étant que les variables temporelles pouvaient induire des difficultés spécifiques.

2° La possibilité ou l'impossibilité de placer à la fois les données et l'origine sur la même bande de papier, compte-tenu de l'échelle proposée aux enfants, et de la longueur de la bande (60 cm).

Une préexpérience nous avait permis de faire l'hypothèse que ces variables pouvaient jouer un rôle important.

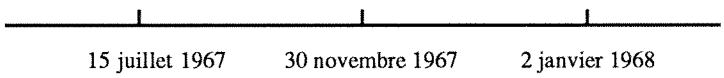
Il est clair qu'en prenant 1 cm pour 100 grammes, on peut placer sur la bande à la fois l'origine et le poids des bébés, tandis qu'en prenant 1 cm pour 10 cm, on ne peut pas placer à la fois l'origine et les lancers de javelot. Même chose pour les dates de naissance, à cette remarque près que la notion d'origine, pour les dates de naissance, pose encore davantage de problèmes : année zéro, 1900, 1960 ?

Nous avons recueilli environ 600 protocoles d'enfants (300 au prétest, 300 au post-test). Parmi ces protocoles, j'ai dû sélectionner 60 exemples différents les uns des autres pour illustrer la variété des protocoles produits par les enfants et des idées auxquelles cette tâche les incite. Certains protocoles, obtenus au prétest, manifestent clairement le fait que les enfants ont été pris à froid. Mais on retrouve les mêmes catégories au post-test qu'au prétest, ce qui signifie à mes yeux que les interprétations et les obstacles rencontrés ne sont pas anecdotiques. Les protocoles les plus curieux sont cependant plus fréquents au prétest qu'au post-test.

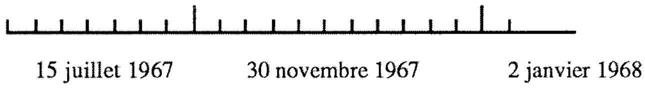
La séquence didactique de 5 ou 6 séances d'une heure, qui est intervenue entre les deux tests, a été construite de telle manière qu'elle permette aux élèves de prendre conscience progressivement des relations mathématiques en jeu dans cette tâche et de dépasser les interprétations surprenantes que nous avions pu observer au prétest.

Le progrès entre le prétest et le post-test est important, mais des difficultés subsistent, pour la majorité des élèves, notamment dans les situations pour lesquelles il n'est pas possible de placer à la fois l'origine et les données sur la même bande. Il s'agit d'une difficulté conceptuelle durable. Nous allons voir pourquoi.
Partons des deux protocoles suivants :

Protocole A



Protocole B

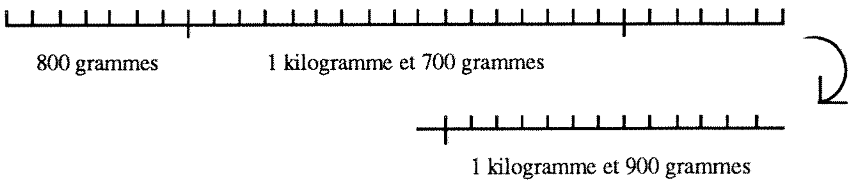


Dans le protocole A, l'élève place à intervalles réguliers (tous les 10 cm environ), et dans l'ordre, la suite des dates de naissance. Il se contente d'utiliser les propriétés d'ordre de l'espace pour représenter les propriétés d'ordre des données.

Dans le protocole B, l'élève représente par un segment de 7 unités la première date (15 juillet 67), puis par un segment de 11 unités la date du 30 novembre 67, placé bout à bout avec le précédent, puis par un segment d'1 unité la date du 2 janvier 68, etc… L'enfant représente donc le numéro d'ordre du mois (nième) par un segment de n unités. Il tronque les données en ne tenant compte ni du jour ni de l'année ; il confond ordinal et cardinal, évènement et durée (si la ligne représente une durée, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour ces enfants) ; enfin, il ne représente pas l'inclusion des 7 mois (qui séparent juillet du début de l'année) dans les 11 mois (qui séparent novembre du début de l'année).

Ce protocole pourrait paraître anecdotique si l'on n'avait observé des phénomènes analogues avec les autres types de données. Par exemple pour les poids de bébés, on observe plusieurs protocoles comme le suivant, que nous qualifions de "bout à bout".

Protocole C

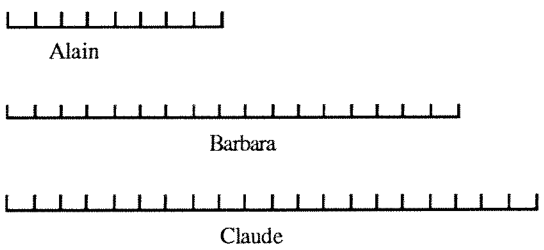


C'est donc une certaine conception de la représentation bout à bout des données qui a conduit les élèves à rechercher dans les dates de naissance, une partie des données qui pourrait jouer cette fonction. C'est le mois qui a été retenu le plus souvent.

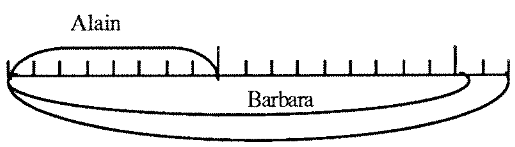
Dans le cas des lancers de javelot c'est la partie centimètres.
D'ailleurs, les enfants font parfois du bout à bout avec la seule partie décimale des poids de bébés. Parfois aussi ils changent d'échelle pour avoir plus de place.

Le premier problème que doivent surmonter les élèves est celui du principe d'inclusion. Dans les rapports entre signifiants et signifiés, le "bout à bout" a le mérite d'exprimer la biunivocité. Lorsque le segment correspondant à la première donnée est inclus dans le segment représentant la seconde donnée, l'enfant perd la biunivocité et il doit utiliser des marques supplémentaires. Il peut d'ailleurs s'en tirer de plusieurs manières :

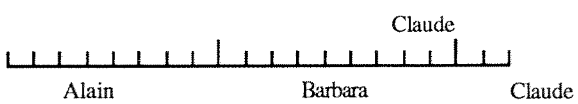
Protocole D



Protocole E



Protocole F



Evidemment le protocole D est très commode car il conserve la biunivocité signifié-signifiant tout en prenant un point de départ commun. Le protocole E est le plus fréquent et correspond à ce que nous pouvions escompter. Mais il est lourd dans sa présentation car il faut beaucoup de marques pour éviter les ambiguïtés. Le protocole F, pour sa part, est beaucoup plus sobre, mais il est ambigü car on ne sait pas si le segment correspond à Barbara part du début de la ligne ou seulement du point d'arrivée d'Alain comme dans le bout à bout.

Quelle conquête intellectuelle supplémentaire faut-il à l'enfant pour aller au-delà ?

C'est la **ponctualisation**, c'est l'utilisation de la bijection entre segments emboîtés et points d'arrivée : cela permet que l'information **distance à l'origine** soit résumée par le point d'arrivée du segment. Ce qui est segment représentant une donnée numérique doit devenir point ; les segments emboîtés deviennent alors des points parfaitement distincts. Mais ceci suppose évidemment le concept d'origine commune.

Quand on y réfléchit, il ne va pas de soi d'associer un nombre à un point, car un point a une mesure nulle ; dans la logique des élèves, qui consiste à utiliser les propriétés mesurables du signifiant-espace, seules les longueurs (et les aires ou les volumes) se prêtent naturellement à la mesure ; pour associer un nombre à un point, il faut une construction intellectuelle.
La situation se complique encore lorsqu'on ne peut pas placer l'objet sur la bande de papier, à cause du choix de l'échelle, comme dans le cas des lancers de javelot, et celui des dates de naissance.

Prenons le cas des lancers de javelot : il faut raisonner sur des segments emboîtés à partir d'un point qui n'est pas sur la feuille ; ou bien il faut raisonner à la fois sur le nombre comme point et le nombre comme segment : le point A et le point B pour 67,75 m et 67,90 m ; le segment AB pour la différence, qui permet de placer le point B quand on a placé le point A.
En résumé, on peut dire que les trois grands principes que l'enfant doit comprendre et maîtriser pour lire et placer des données numériques ou quasi numériques sur la droite sont les suivants :
- le principe d'inclusion des segments représentant les données ;
- la ponctualisation des données, qui permet de résumer l'information sous une forme lisible grâce au concept d'origine commune ;
- la représentation des différences entre données comme des intervalles entre points.

Cette dernière opération de pensée est la plus difficile : au post-test, l'épreuve des lancers de javelot a été réussie par moins de 50 % des élèves de 5e et par un pourcentage beaucoup plus faible encore des élèves de 6e et de CM2.

Pour les dates de naissance, la réussite est encore moins bonne, en dépit du fait que nous avons considéré comme acceptables des protocoles dans lesquels l'ordre des mois est correctement représenté par une suite des points. En fait, dans ces protocoles, aucun statut n'est donné aux intervalles : le 15 juillet 1967 est placé sur le point juillet comme le 30 novembre 1967 sur le point novembre, et comme le 13 mai 1970 et le 31 mai 1970 sur le même point. Seules les propriétés d'ordre du signifiant et du signifié sont utilisées : la suite des points représente une suite des classes d'équivalence (dates du même mois) ; l'ordre temporel n'est que partiellement représenté, la durée ne l'est pas.

Cette idée que l'utilisation d'un système de signifiants suppose des opérations de pensée non triviales est une idée générale. On pourrait faire le même type de recherche sur les tableaux et les diagrammes fléchés, et sur toute autre représentation symbolique ; on découvrirait certainement des difficultés insoupçonnées, même si elles sont sans doute moindres que dans le cas que je viens de décrire. Pour l'algèbre par contre, on sait bien que certains élèves rencontrent de grosses difficultés. Quand on sait l'importance donnée aux représentations graphiques dans l'enseignement, on ne peut que s'interroger sur la signification que leur accordent certains élèves. Claude Janvier a par exemple montré dans sa thèse que des élèves de seconde ou première ne lisent que les coordonnées entières et ne donnent pas de statut à ce qui se trouve entre deux entiers : par exemple ils ne sont pas capables de donner correctement l'abscisse correspondant au minimum de la fonction si ce minimum se trouve entre 2 et 3 ; ils donnent la valeur entière la plus proche. Dans ces conditions, la question de la continuité peut difficilement avoir du sens pour eux.

Pour conclure cette partie, je ferai encore une remarque. La droite, les points et les segments, l'origine et les abscisses forment un système qui permet de représenter des nombres. Pour les élèves du début du collège, c'est essentiellement un outil. Par l'usage répété qui en est fait et par le statut qui lui est socialement donné en classe, cet outil peut devenir un objet au sens que Régine Douady donne à ce qu'elle appelle la dialectique outil-objet : un nouveau concept est d'abord un outil, qui répond à certains problèmes pratiques et théoriques, ici un problème de représentation ; puis il devient un objet, aussi réel qu'un objet matériel, qui entretient des relations avec les autres objets, et est ainsi à son tour source de nouveaux problèmes. La droite numérique est un concept-objet directement issu du concept-outil que nos élèves ont eu à utiliser. Elle suppose une construction plus laborieuse que ne le pensent la plupart des enseignants.

3. Activités langagières et symboliques : reflets de la pensée et aides à la pensée.

Si maintenant on aborde le problème du langage naturel avec la problématique que je viens de développer, il est possible de poser à son propos les deux questions que j'ai soulevées pour les autres types de signifiants :

- quelle aide le langage naturel apporte-t-il à la pensée, c'est-à-dire à la conceptualisation et à la résolution de problème ?
- quelles opérations de pensée la compréhension et l'utilisation des énoncés demande-t-elle ?

Vastes questions que je ne suis nullement en mesure de traiter, mais pour lesquelles je voudrais seulement fournir quelques illustrations.
Les signifiants langagiers qui représentent une même relation mathématique sont parfois d'une grande diversité. Prenons l'exemple de l'expression de la valeur unitaire dans la proportion simple

$$f(1) = a$$

Voici quelques expressions :

- les gâteaux coûtent 4 francs chacun (ou chaque)
- les gâteaux coûtent 4 francs l'un (ou la pièce, ou pièce)
- un gâteau coûte 4 francs
- chaque gâteau coûte 4 francs
- papa a donné deux bonbons à chaque enfant
- papa a distribué deux bonbons par enfant
- maman roule à 120 kilomètres à l'heure (ou kilomètres / heure).

Arrêtons-nous un moment sur ces exemples. L'unité est exprimée de plusieurs manières : chacun, chaque, la pièce, l'heure. Parfois elle est partiellement éludées : pièce, heure. Le quotient de dimension est parfois exprimé : par enfant, à l'heure. Parfois il ne l'est pas. Dans le cas de l'expression kilométres/heure c'est même une expression de type produit (kilogramme / mètre, kilomètre / voyageur) qui est utilisée pour désigner un quotient.

Prenons encore un exemple : - un passager sur trois paie plein tarif.

Cet énoncé n'est pas compris comme l'expression d'une proportion par la plupart des élèves de sixième. Il faut prendre conscience des difficultés que peuvent rencontrer les élèves pour comprendre la signification d'une expression langagière pourtant familière aux adultes. Il ne faut jamais considérer que les choses vont de soi.

Je voudrais terminer cet exposé par quelques exemples concernant la formulation. Ces exemples sont empruntés à l'expérience que j'ai conduite dans une classe de 1ère année de BEP et dont j'ai déjà parlé plus haut. L'une des premières phases de l'expérience, après qu'un certain nombre d'informations aient été fournies aux élèves, a consisté à leur demander de formuler des questions qui pouvaient avoir un sens compte-tenu de ces données et du projet de construire sur un chantier des maisons de différents types F3, F4, F5, F6. Les informations portaient sur les proportions de gravier, de sable et de ciment nécessaires pour faire un mètre cube de béton, et sur les prix.

Le nombre de questions susceptibles d'être posées est très grand. Aussi l'objectif était-il pour nous de voir si les élèves étaient capables de générer ces questions de manière relativement systématique et de voir leurs liens de dépendance. En fait, nous avons aussi été très intéressés par les problèmes de formulations qu'ils ont alors rencontrés.

En ce qui concerne l'engendrement des questions, nous avons observé effectivement que certains élèves adoptaient très rapidement un esprit de système et généraient toutes les questions soit pour un type de maison, (ou un certain nombre de telles maisons) : quantité de matière, coût de chaque matière, prix de revient, etc... ou bien au contraire toutes les questions concernant la même variable, par exemple le prix du sable, pour chacune des différentes possibilités : un F4, un F5, six F6, un mètre cube de béton, telle longueur de semelle, etc... Ainsi les deux variables d'énoncé possibles dans une structure de proportion simple étaient-elles systématiquement soumises à variation : ces élèves ont donc su utiliser des classes paradigmatiques au sens que la linguistique distributionnelle donne à ce terme.

Pour ceux qui avaient abordé spontanément cette variation paradigmatique,

Quelle	quantité de sable	pour	un F4
	quantité de gravier	pour	un F5
	quantité de ciment	pour	un F6
	dépense de sable	pour	n F4
	dépense de gravier	pour	p F5
	dépense de ciment		
	dépense de béton		
			s mètres de semelle
			m mètres cubes de béton

il était relativement aisé de placer dans les colonnes du tableau que nous avons vu plus haut, des lettres correspondant à chacune des questions ainsi étiquetées ; pour les autres élèves, le tableau s'est avéré un moyen efficace de reconnaissance des éléments pouvant être soumis à variation. Le nombre de questions possibles étant très grand, certains élèves ont proposé de mettre des indices aux lettres pour indiquer de quelle question il s'agissait. On mesure ainsi l'usage intéressant d'un signifiant de type tableau pour la proportion simple, dans sa double fonction d'organisation des données et des questions d'une part, de recherche et d'explicitation des procédures de calcul d'autre part.
Dans cette phase de formulation des questions, on observe évidemment des difficultés dans les différents groupes d'élèves : par exemple des formulations redondantes comme dans les énoncés suivants :

- A combien sera évalué le coût de ...
- Combien coûtera le prix...

On assiste alors à un véritable travail collectif de reformulation des questions : dans un groupe de trois élèves par exemple, les questions proposées individuellement par chacun des élèves étaient reprises au compte du groupe tout entier. Elles subissaient alors des transformations de manière à être plus "présentables". Une formulation privée, pour devenir une formulation publique, subit un certain nombre de transformations de syntaxe, de style, de suppression de la redondance ou de réduction de l'ambiguïté.

Prenons quelques exemples :

A combien reviendra le tout en mètres cubes de béton ?

Cette fois, il y a deux idées de question en une seule : "reviendra" renvoie au prix, "mètres cubes" renvoie à la quantité de matière. Cette question évoluera vers deux formulations distinctes.

- quel sera le prix total pour le béton ?
- combien faudra-t-il de béton pour l'ensemble des maisons ?

Autre exemple, relatif à la formulation d'un quantificateur universel :

- pour les semelles **de toutes les maisons**
- pour **toutes les semelles**
- nécessaire à la construction **des semelles**
- nécessaire à la construction **de l'ensemble des semelles.**

Tous ces exemples illustrent un travail spécifique sur le signifiant langagier, qui est significatif du processus de conceptualisation fait en situation par les élèves.

Le terme de "semelle" pose lui-même la question de la formation d'un concept abstrait puisque, la section des semelles étant constante (60 x 40), on peut résumer l'information concernant une semelle par sa longueur. On exprime ainsi un volume par une longueur. Bien que les élèves aient appris cela, y compris pour le calcul de la longueur dans les coins de la maison, on mesure leur inhabileté à travers leurs formulations :

- la longueur totale... (hésitation)
- la longueur totale... (un autre ajoute) des semelles
- pour toutes... de longueur... de semelles
- la longueur totale des semelles pour l'ensemble de toutes les maisons.

Le dernier énoncé fournit le maximum de redondance et pour les semelles et pour la quantification.

Un dernier exemple montre au contraire la non-reconnaissance d'un invariant :
- calculer la masse volumique d'une semelle en béton pour un F4, pour un F5, etc...

Les élèves auteurs de cet énoncé sont très satisfaits d'utiliser le concept de masse volumique, mais ils en font indûment une variable.

La pensée ne fonctionne pas bien sans signifiants, ce qui ne veut pas dire qu'elle n'existe pas sans signifiants. Les signifiants produits par les élèves en situation peuvent être à la fois un reflet de la pensée et une aide à la pensée : désigner une propriété ou une relation pertinentes, exprimer une inférence, annoncer ce qu'on va faire, accompagner ce qu'on fait par le langage, annoncer ce qu'on devrait trouver. Vygotski avait déjà exprimé certaines de ces fonctions du langage il y a 50 ans, notamment la fonction du langage dans la planification et le contrôle de l'action.

Daniele Morange a recueilli des protocoles très intéressants sur la résolution des problèmes de type additif au début de l'école élémentaire et sur les différentes fonctions du langage que je viens d'évoquer.

CONCLUSION

J'ai cherché au cours de cet exposé à donner beaucoup d'exemples, parce que ce sont les exemples qui permettent de comprendre la nature des questions théoriques posées. Pour le sujet qui m'occupe aujourd'hui, ces questions théoriques sont difficiles : elles concernent le rôle des signifiants dans la conceptualisation du réel et la résolution de problèmes. Mais elles n'ont de sens que si on n'identifie pas la pensée avec son expression et si, en même temps, on reconnaît que l'expression par des signifiants joue un rôle dans la pensée.

Ce rôle peut être recherché soit dans l'explicitation et l'objectivation après coup de propriétés et de relations déjà utilisées dans l'action (et donc présentes dans les schèmes de résolution utilisés par les élèves). Il peut aussi être recherché dans le travail qui permet l'élaboration de nouvelles propriétés et de nouvelles relations qui seront ensuite, et seulement ensuite, utilisées dans l'action. La didactique est amenée à utiliser ces deux processus, soit en désignant et en analysant ce que sait faire l'élève (ses théorèmes-en-acte), soit en le conduisant à travers une représentation symbolique ou langagière pertinente à prendre conscience d'une relation qu'il n'avait jusque-là jamais aperçue.

La représentation symbolique, la formulation sont alors un détour utile, un instrument de traitement des situations. On les voit parfois fonctionner comme tels, lorsque les élèves pour résoudre un problème difficile, accompagnent spontanément le processus de résolution par des dessins ou des activités langagières.

Certains enseignants transforment alors ce détour spontané en exigence scolaire, et demandent aux élèves le diagramme correspondant ou l'explicitation correspond à la solution recherchée. On s'aperçoit alors que la représentation symbolique ne joue plus son rôle et qu'elle devient simplement une exigence de plus du contrat didactique, à laquelle les élèves satisfont après coup, après avoir déjà trouvé la solution.

La gestion de la fonctionnalité des représentations symboliques et langagières n'est pas chose aisée. Ce qui est utile et fonctionnel aujourd'hui peut être inutile demain et incompréhensible hier.. Cela concerne évidemment les exemples que j'ai donnés. Aussi bien ma conclusion sera-t-elle prudente. Oui les tableaux et les diagrammes sont utiles, oui les explicitations langagières sont utiles ! Mais on ne peut y recourir sans s'interroger sur les conditions dans lesquelles elles sont didactiquement pertinentes.

REFERENCES

BROUSSEAU G. Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en Didactique des mathématiques. 1981, 21, 37-127.

DOUADY R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseigenment des mathématiques. Une réalisation dans le cursus primaire. Thèse de doctorat d'état, université Paris VII, 1984.

FUSON K.C. - HALL J.W. The Acquisition of Early Number Word Meanings : A Conceptual Analysis and Review. In Ginsburg M.P. (Ed), The Development of Mathematical Thinking. Academic Press, 1983.

GELMAN R. - GALLISTEL C.R. The child's understanding of number. Cambridge, Masszchusettes, Harvard University Press, 1978.

JANVIER C. The interpretation of complex cartesian graphs representing situations, studies and teaching experiments. Ph. D. Dissertation University of Nottingham, 1978.

MORANGE D. Thèse en préparation, 1987.

VERGNAUD G. L'enfant, la mathématique et la réalité, Berne, Peter Lang 1981.

VYGOTSKI. Langage et Pensée. Paris, Editions Sociales, Messidor, 1986.

APPROCHE COGNITIVE DES PROBLEMES DE GEOMETRIE EN TERMES DE CONGRUENCE

R. DUVAL

En dehors des tâches de construction, les figures de géométrie donnent lieu à trois formes d'appréhension : l'appréhension perceptive, l'appréhension opératoire et l'appréhension discursive. Le caractère heuristique des figures dépend de l'appréhension opératoire ; mais toutes les figures ne sont pas congruentes à la situation géométrique qu'elles sont supposées représenter. L'appréhension discursive est inséparable de la double référence à un réseau sémantique d'objets mathématiques et à une axiomatique locale. L'analyse de ces deux formes d'appréhension ouvre des perspectives non seulement pour une classification des problèmes de géométrie, mais aussi, pour une autre approche des activités géométriques par les élèves.

Les problèmes de géométrie présentent une grande originalité par rapport à beaucoup d'autres tâches mathématiques qui peuvent être proposées aux élèves.

D'une part, leur résolution exige une forme de raisonnement *qui implique la référence à une axiomatique locale mais qui se déroule dans le registre de la langue naturelle.* Cette forme de raisonnement conduit à développer un type de discours qui *fonctionne par substitution, comme si'il s'agissait d'un langage formalisé,* alors que l'on reste dans un registre où le discours se contruit, de façon naturelle, par association et par accumulation. Or, dans ces deux modes de fonctionnement la cohérence ne repose pas sur les mêmes règles d'organisation du discours. Les problèmes de géométrie exigent donc une forme d'expression qui ne se laisse pas analyser par l'opposition souvent faite entre langue naturelle et langages formalisés. R. Thom avait déjà attiré l'attention sur cette caractéristique de la géométrie : elle est "un *intermédiaire* naturel, et peut-être irremplaçable, *entre la langue usuelle et le langage formalisé"* [12 p.232].

D'autre part, l'heuristique des problèmes de géométrie réfère à un registre de représentations spatiales qui donne lieu à des formes d'interprétation autonomes. Parmi ces interprétations nous distinguerons : l'appréhension perceptive, l'appréhension opératoire, l'appréhension discursive et l'appréhension séquentielle des figures. L'appréhension séquentielle est explicitement sollicitée dans les tâches de construction ou dans les tâches de description ayant pour but la reproduction d'une figure donnée.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1 (1988) (p.57-74) IREM de Strasbourg*

Les orientations didactiques de ces dernières années ont accordé une certaine importance à ces tâches, dans l'espoir de mieux préparer les élèves à la forme de raisonnement que les problèmes de géométrie exigent. En revanche, les trois premières formes d'appréhension ne sont pas toujours clairement distinguées. Elles sont même confondues lorsqu'on affirme que les figures constituent "un donné intuitif sous-jacent" , ou "un support à l'intuition au cours de la recherche" [12 p.228, 2 p.35].
Pourtant la résolution des problèmes de géométrie et l'entrée dans la forme de raisonnement que cette résolution exige dépend de la *prise de conscience de la distinction,voire de l'opposition, entre les trois premières formes d'appréhension des figures.* Mais cela ne constitue encore qu'un aspect de la démarche géométrique. Il y en a un autre qui concerne le statut d'"intermédiaire naturel" du raisonnement géométrique : celui-ci ne fonctionne pas comme l'argumentation de la pensée naturelle bien qu'il utilise les ressources du langage naturel. Une analyse des fonctions cognitives sous-jacentes à l'activité de démonstration en géométrie apparaît donc nécessaire pour la conduite même de l'enseignement. Dans les pages qui suivent nous n'en présenterons qu'une toute première approche.

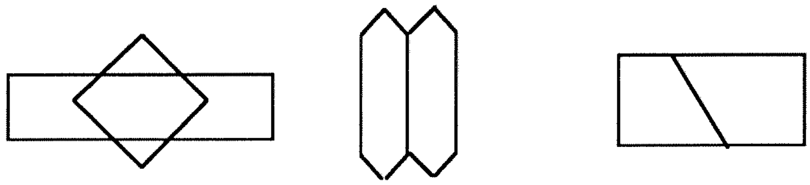
I. Appréhension perceptive des formes et interprétation figurale d'une situation géométrique.

N'importe quelle figure dessinée dans le contexte d'une activité mathématique fait l'objet de deux attitudes souvent contraires : l'une immédiate et automatique, l'appréhension perceptive de formes, et l'autre, contrôlée et relevant d'un apprentissage, l'interprétation discursive d'éléments figuraux. Ces deux attitudes se trouvent souvent en opposition parce que *la figure montre des objets qui se détachent indépendamment de tout énoncé* et que *les objets nommés par l'énoncé des hypothèses ne sont pas nécessairement ceux qui apparaissent spontanément.* En outre, la distinction entre les hypothèses et ce qui peut en être déduit n'a aucun sens quand on s'en tient à l'appréhension perceptive de la figure. Le problème des figures géométriques est tout entier dans ce décalage entre l'appréhension perceptive et une interprétation nécessairement commandée par des hypothèses.

A) Une loi de traitement régissant l'organisation perceptive des figures.

Une figure est une organisation d'éléments d'un champ perceptif non homogène, constituant un objet qui se détache du champ. Selon le nombre de leurs dimensions, ces éléments peuvent être des points, des traits ou des zones. Les points et les traits se

caractérisent respectivement par leur aspect discret ou continu. Les zones se caractérisent par leur forme, c'est à dire par leur contour : un trait fermé, ou une suite de points, suffisent pour détacher une zone d'un champ homogène. Pour nous limiter ici au cas dans lequel les éléménts figuraux sont des traits, l'organisation perceptive d'une figure suit la loi de clôture ou de continuité : lorsque différents traits forment un contour simple et fermé, ils se détachent comme figure sur fond.
Ainsi les trois figures rangées ci-dessous de gauche à droite apparaissent prioritairement comme :
— la superposition de deux formes, un carré et un rectangle
— un assemblage de deux formes qui se touchent
— le partage d'une forme, un rectangle, en deux parties.



Cette loi de clôture ou de continuité a une grande importance dans les figures habituellement présentées aux élèves. D'une part elle provoque une certaine résistance à l'oubli de la forme qui apparaît au profit des traits organisés en une forme perçue (ou seulement de certains des traits); d'autre part elle exclut d'autres réorganisations moins simples et empêche ainsi de voir d'autres formes. Le décalage entre l'interprétation discursive d'une figure, exigée par une situation géométrique, et l'appréhension perceptive trouve, en grande partie, son origine dans cette loi d'organisation perceptive.

B) Deux exemples de la primauté exclusive de l'appréhension perceptive.

1. Considérons les trois figures suivantes:

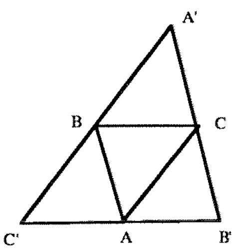


Fig. I

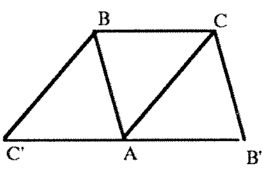


Fig. II

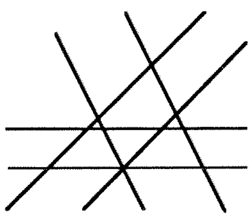


Fig. III

La figure **I** apparaît comme un triangle inscrit dans un autre triangle, ou comme un petit triangle "posé" sur un plus grand triangle. La figure **II** ressemble à deux parallélogrammes "qui se recouvrent (sous certaines conditions que nous décrirons plus loin) ou à un livre ouvert aperçu de biais. La figure **III** apparaît comme une superposition de bandes, ou comme un réseau de droites parallèles.

La figure **I** a été proposée à des élèves de 3ème (14-15 ans) avec l'énoncé suivant :
A'C' et AC
A'B' et AB sont parallèles
B'C' et BC
Montrer que A est le milieu de B'C'.

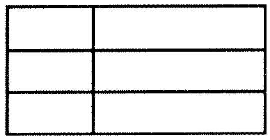
Juste avant cette question, le même problème avait été posé avec la figure **II** qui est la sous-figure utile. Et l'énoncé fournissait les hypothèses non plus en indiquant l'existence de droites parallèles mais celles de parallélogrammes. Autrement dit, dans la question préalable, l'appréhension perceptive de la figure **II** donnait les objets auxquels l'énoncé réfère. En revanche la figure **III** aurait été la figure sémantiquement la plus congruente pour l'énoncé mentionnant l'existence de droites parallèles : l'énoncé parle de droites parallèles et la figure montre un réseau de droites.

Le passage de la présentation sémantiquement congruente du problème (figure **II** et hypothèses mentionnant des parallélogrammes) à la présentation non sémantiquement congruente (figure **I** montrant des triangles et hypothèses mentionnant des droites) a entraîné une chute très nette dans le taux des réussites [6 p.75-78] :
— de 42% à 18% quand la figure II avait la même orientation que la figure I,
— de 34% à 11% quand la figure II n'avait pas la même orientation que la figure I.

Autrement dit, *plus de la moitié des élèves ayant réussi le problème dans sa version sémantiquement congruente ne reconnaissaient plus ce problème présenté aussitôt après dans une version sémantiquement non congruente.*

2. Le deuxième exemple, au contraire, est un cas dans lequel il y a congruence sémantique entre la figure et l'énoncé, mais dans lequel cette congruence, qui privilégie l'appréhension perceptive, va presque imposer un traitement mathématique du problème au détriment d'autres traitements possibles.

N.Balacheff a proposé la question " combien y a-t-il de rectangles dans cette figure? "



Présentant ce problème, il remarque :"la résolution de ce problème dépend de façon essentielle des conceptions que l'on a des objets à démontrer et *de l'analyse faite de la figure* (c'est nous qui soulignons)". Sur cette figure, les rectangles peuvent être considérés comme éléments d'un pavage, comme intersection de deux bandes, comme ensemble de quatre points ou comme ensemble de segments. Et N.Balacheff constate : "en fait c'est le premier type de solution qui domine dans les observations cliniques que nous avons faites avant comme pendant l'expérience elle-même. *Vraisemblablement* parce qu'elle correpond à une approche perceptive de la figure..."[1 p.280-281]. Le choix de ce type de solution était tout à fait prévisible : la loi de clôture et de continuité impose l'appréhension perceptive d'un grand rectangle partagé en rectangles plus petits. De plus la formulation de la question venait renforcer cette appréhension perceptive de la figure.

Ces deux exemples montrent qu'une figure géométrique garde une structuration perceptive autonome : les objets qui apparaissent peuvent alors être différents du type d'objets que la situation géométrique exige de voir. Ils rappellent aussi que les élèves s'en tiennent, en grande majorité, à l'appréhension perceptive : *ceux-ci ne soupçonnent pas qu'une figure ne doive être regardée qu'à travers ou en fonction de propriétés ou de conditions formulées comme hypothèses.* Cela se remarque dans leur attitude devant un problème : ils lisent l'énoncé, construisent la figure et, ensuite, se concentrent sur la figure sans revenir à l'énoncé. Cet oubli, ou cet abandon, de l'énoncé marque l'absence de cette attitude que nous avons appelée l'interprétation discursive des figures. C'est pourquoi les problèmes qui sont accessibles à ces élèves sont ceux dont l'énoncé est sémantiquement congruent avec la figure construite ou à contruire. Mais cela n'est encore qu'une condition nécessaire. La congruence sémantique ouvre ou ferme l'entrée dans le problème ; elle n'est pas suffisante pour sa recherche. Pour élucider cet aspect plus essentiel, il nous faut considérer non plus l'appréhension perceptive de la figure mais son appréhension opératoire.

II. Appréhension opératoire des figures et démarche heuristique.

Toute figure peut être modifiée de plusieurs manières. On peut soit la partager en plusieurs parties qui sont comme autant de sous-figures, soit l'inclure dans une autre figure dont elle devient alors une sous-figure : cette modification est une *modification méréologique*, elle se fait en fonction de la relation entre partie et tout. On peut aussi l'aggrandir, la diminuer, ou la déformer : cette modification est une *modification optique*, elle transforme une figure en une autre, appelée son image. Cette transformation, qui est réalisable par un jeu de lentilles ou de miroirs, peut conserver la forme de départ ou l'altérer. On peut enfin la déplacer ou la faire tourner par rapport aux repères du champ dont elle se détache : cette modification est une *modification positionnelle*, elle ne concerne que l'orientation et la place de la figure dans son environnement (généralement le plan fronto-parallèle). Chacune de ces modifications est réalisable physiquement, graphiquement ou mentalement. Mais, à la différence d'une procédure de construction, le mode choisi pour la modification d'une figure est neutre : il ne change ni l'appréhension ni l'analyse qui peut en être faite. *En revanche le type de modification choisi fait apparaître des possibilités de traitement sans rapport les unes avec les autres*. Le partage d'une figure en sous-figures permet, par exemple, de mettre en évidence des égalités d'aire tandis que le fait de considérer une figure comme l'aggrandissement d'une autre permet de voir un centre d'homothétie. L'**appréhension opératoire des figures** est une appréhension centrée sur les modifications possibles d'une figure de départ et par suite sur les réorganisations perceptives que ces modifications entraînent. Pour chaque type de modification il y a plusieurs opérations (voir le tableau de la page suivante). *La productivité heuristique d'une figure*, dans un problème de géométrie, *tient au fait qu'il y a congruence entre l'une de ces opérations et un des traitements mathématiques possibles du problème posé.*

Si on peut toujours associer une figure à une situation géométrique décrite, les figures n'ont pas nécessairement dans chaque situation une productivité heuristique . Cela pour deux raisons très différentes.

La première, sur laquelle nous ne nous arrêterons pas ici, est la non-congruence entre le traitement mathématique et l'appréhension opératoire. Presque tous les problèmes mettant en jeu des propriétés d'homothétie présentent cette difficulté. En effet l'appréhension opératoire appropriée à ce genre de problèmes serait celle liée aux modifications optiques : deux figures égales peuvent apparaître l'une plus petite et l'autre plus grande selon le repère choisi, et, inversement, deux figures de grandeurs différentes peuvent apparaître comme deux figures égales mais placées à des distances différentes d'un centre de visée [5 p. 250,254]. Ici l'appréhension opératoire se fait selon la dimension de profondeur exactement comme lorsque nous regardons une photographie. Or les traitements mathématiques des problèmes d'homothétie exigent qu'on se limite à des opérations dans le plan,

par exemple des translations, et que l'on fasse abstraction de la mise en perspective selon la dimension de profondeur. En revanche, dans la construction d'un centre d'homothétie, l'appréhension opératoire permet d'anticiper et d'organiser, sans aller à l'encontre de contraintes propres au traitement mathématique. Rien d'étonnant alors à ce que la construction d'un centre d'homothétie pour deux figures soit une tâche triviale, tandis que les problèmes exigeant plus qu'une reconnaissance ou qu'une construction s'avèrent difficiles. Les obstacles rencontrés par les élèves pour l'utilisation des transformations en géométrie plane tiennent aussi à la non-congruence entre le traitement mathématique du problème et l'appréhension opératoire de la figure [4 p.52-53].
La deuxième raison concerne les cas où il y a congruence entre l'appréhension opératoire et un traitement mathématique du problème. Différents facteurs peuvent jouer pour faciliter ou au contraire pour occulter l'appréhension opératoire de la figure qui conduit à la solution du problème posé. De ces facteurs dépend le fait que les élèves "voient " rapidement ou "ne voient pas" l'opération figurale suggérant un traitement mathématique. Nous indiquerons plus loin, dans l'exemple de l'opération de reconfiguration intermédiaire, certains de ces facteurs. Naturellement, si l'on veut initier la grande majorité des élèves à la géométrie, ce type de problème et le jeu des facteurs de visibilité doit tout particulièrement retenir l'attention.

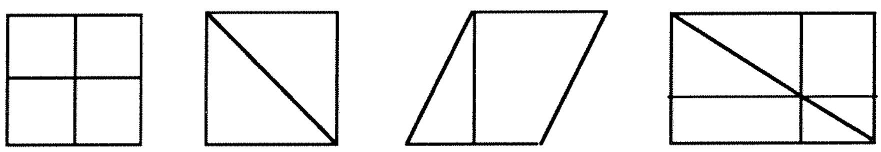
Le tableau suivant donne une idée de la richesse et de la complexité de l'appréhension opératoire des figures.

Type de modification configurale	**Opérations constituant la productivité heuristique**	**Facteurs jouant sur la visibilité**
Modifications méréologiques	Reconfiguation intermédiaire Plongement	- Caractère convexe ou non convexe des parties élémentaires
Modifications optiques	Superposabilité Anamorphose	- Recouvrement partiel - Orientation
Modifications positionnelles	Rotation Translation	- Stabilité des repères du champ perceptif pour le support des figures

Ne pouvant décrire et analyser, dans le cadre de cet article, tout le champ de l'appréhension opératoire, nous allons nous limiter à l'étude de l'opération de reconfiguration intermédiaire. Elle intervient dans les premiers problèmes de géométrie qui peuvent être proposés aux élèves, ceux dont la résolution ne requiert pas l'utilisation d'un corpus explicite de définitions et de théorèmes.

A) L'opération de reconfiguration intermédiaire.

Une modification méréologique est une modification qui fait apparaître une forme comme un tout fractionnable en parties homogènes ou en parties hétérogènes. Dans un fractionnement homogène, les parties obtenues ont la même forme que le tout : le quadrillage constitue la modification méréologique la plus familière. Dans un fractionnement hétérogène, les parties obtenues n'ont plus la même forme que le tout : par exemple le partage d'un quadrilatère en deux, trois ou quatre triangles. Ces modifications se traduisent graphiquement par l'adjonction d'un ou plusieurs traits à la figure de départ. Elles peuvent être réalisées physiquement par des actions de découpage ou de pliage. Ainsi les quadrilatères suivants peuvent être partagés de différentes manières :



homogène hétérogène homogène & hétérogène

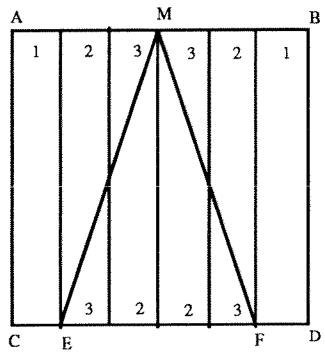
L'intérêt du fractionnement d'une figure (ou de son examen à partir des parties élémentaires qui y apparaissent) est qu'il donne lieu à l'opération de reconfiguration intermédiaire. *En effet les parties élémentaires obtenues par fractionnement peuvent être regroupées en plusieurs sous-figures, toutes incluses dans la figure de départ.* Cette opération permet donc d'enclencher immédiatement des traitements tels que la mesure d'aires, par sommation des parties élémentaires, ou la mise en évidence de l'équivalence de deux regroupements intermédiaires.

B) Trois exemples de résolution par reconfiguration intermédiaire .

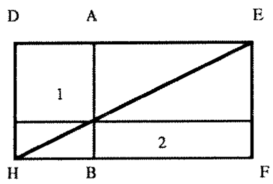
Dans les trois situations suivantes, le recours à l'opération de reconfiguration intermédiaire constitue une approche naturelle du problème posé.

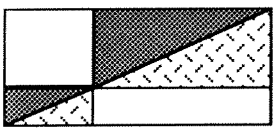
1) Faire la partition d'un carré en trois parties égales, à partir du milieu du côté AB.

Un élève de 5ème a de lui-même effectué le fractionnement du carré en six bandes égales. Puis il a expliqué l'égalité des reconfigurations intermédiaires [AMEC,MFE, MBFD] en indiquant du doigt les parties élémentairesrespectivement égales entre elles. Les difficultés ont commencé lorsqu'il lui a fallu écrire la solution expliquée [7 p.409].

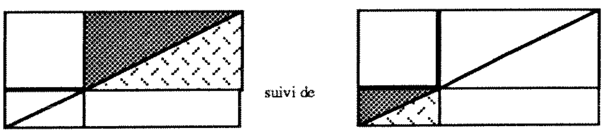


2) Le problème d'Euclide : montrer l'égalité des parties 1 et 2 quelle que soit la postion du segment AB.





Ce problème peut être résolu par le retranchement, aux triangles DEH et EHF, de deux configurations intermédiaires non convexes et égales, ou par le retranchement successif de 2 parties élémentaires égales.



Les deux démarches ont été observées chez des élèves de CM2 (10-11ans) et de 5ème (12-13 ans) [10].

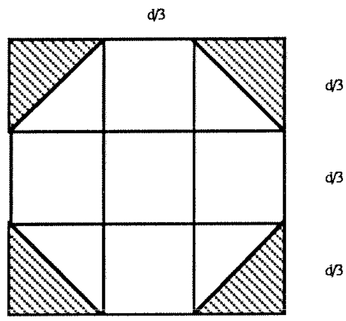
3) La première approximation connue historiquement (période Babylonienne) de l'aire du cercle repose aussi sur cette opération de reconfiguration intermédiaire [8].

On calcule l'aire du regroupement des parties non hachurées

soit $7\left(\frac{d}{3}\right)^2$

Il n'y a plus alors qu'à effectuer la réécriture et l'approximation suivante :

$\frac{7}{9}d^2 \times \frac{9}{9} = \frac{63}{81}d^2 \simeq \left(\frac{8}{9}d\right)^2$



Dans ces problèmes l'opération de reconfiguration intermédiaire constitue la productivité heuristique de la figure. On pourrait regrouper tous les problèmes dans lesquels cette opération est congruente à un traitement mathématique possible en une classe de problèmes directement accessibles aux élèves, parce que ne requièrant de façon explicite la mise en oeuvre d'aucune définition et d'aucun théorème.

La reconfiguration intermédiaire n'est pas la seule appréhension opératoire liée aux modifications méréologiques. Il y a aussi le plongement. Cette opération s'appuie sur une modification méréologique inverse de celle impliquée dans la reconfiguration intermédiaire : un triangle, par exemple, devient un morceau de parallélogramme.La figure est, en quelque sorte, plongée et dépliée dans le plan. B.Betinelli la décrit ainsi : " on prolonge ce qui peut l'être, c'est à dire les côtés des pièces dessinées"[3]. Et il présente cette appréhension opératoire comme une "vision plus profonde" que la simple appréhension perceptive.

C) Facteurs jouant sur la visibilité de l'opération.

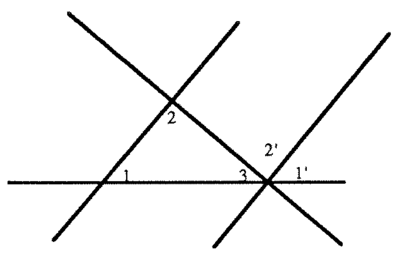
Sur unr figure donnée l'opération de reconfiguration intermédiaire peut être effectuée de plusieurs façons. Différents facteurs influent sur le discernement de l'application pertinente de cette opération. Nous en distinguerons quatre :

1) Le fait que le fractionnement de la figure en parties élémentaires soit donné au départ ou qu'il doive être trouvé. Ainsi dans l'exemple du premier problème le fractionnement du

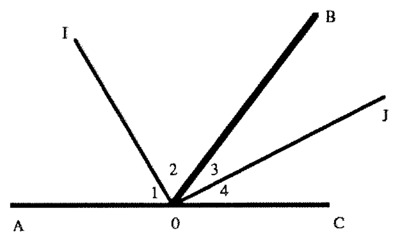
carré en bandes égales pourrait être indiqué : il n'y aurait donc aucune recherche préalable à la mise en oeuvre de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

2) Le regroupement pertinent des parties élémentaires forme une sous-figure qui est *convexe ou non convexe.* Une sous-figure non convexe est plus difficile à détacher de la figure qu'une sous-figure convexe, car la loi perceptive de l'unité de contour n'est plus respectée[10].

3) Le regroupement pertinent peut exiger que l'on substitue des parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère. Pour montrer, par exemple, que la somme des angles d'un triangle fait 180°, on reconfigure les angles du triangle en un angle plat : cette reconfiguration exige la *substitution des parties élémentaires* 1' et 2' respectivement à 1 et à 2.



4) Le fait qu'une même partie élémentaire doive entrer simultanément dans deux regroupements intermédiaires à comparer. C'est ce que nous avons appelé dans un autre travail l'obstacle du *dédoublement des objets* [7]. Ce facteur n'est pas négligeable dans le problème suivant : IO et JO étant respectivement les bissectrices des angles AOB et BOC, quelle est la valeur de l'angle IOJ ? Pourquoi ?



Les parties élémentaires 2 et 3 entrent simultanément dans deux regroupements intermédiaires : IOJ et AOB pour la partie élémentaire 2, IOJ et BOC pour la partie élémentaire 3. Nous avons pu observer que cela constituait un réél obstacle pour certains élèves : ils ne pouvaient voir et comprendre qu'un même objet puisse être en même temps dans deux regroupements posés comme différents puisqu'on cherchait à les comparer.

Le caractère non convexe d'un regroupement intermédiaire, la nécéssité de recourir à des parties élémentaires auxiliaires ou le dédoublement d'une même partie sont autant de facteurs qui diminuent la visibilité de l'opération de reconfiguration intermédiaire. L'occultation résultant de la présence de ces facteurs se traduit par le fait que l'on va chercher plus ou moins longtemps sans avancer dans la solution du problème. Il semble que dans des problèmes de ce type (problèmes dans lesquels l'opération de reconfiguration intermédiaire est congruente avec un traitement mathématique) la différence entre les élèves se fasse d'abord sur la résistance à l'occultation de l'appréhension opératoire et non sur l'opération figurale. Certaines observations semblent montrer que l'élève qui cherché longtemps sans rien voir met en oeuvre, dès qu'il voit, les mêmes procédures que l'élève qui a vu et trouvé tout de suite. *Et cela aussi rapidement* [10].

Il importe donc de *ne pas confondre*, dans l'analyse cognitive d'un problème de géométrie, *la productivité heuristique de la figure et la visibilité des opérations liées à cette productivité*. La productivité heuristique dépend de la congruence entre une opération et un traitement mathématique possible. En revanche, la visibilité de la figure est extrinsèque aux traitements mathématiques : le fait d'apercevoir ou de ne pas apercevoir, sur une figure, la reconfiguration intermédiaire pertinente ne signifie rien quant à la possibilité d'appliquer cette reconfiguration lorsqu'elle est aperçue. Dans l'état actuel des observations, il semble que le principal obstacle des problèmes de géométrie présentant une congruence entre l'appréhension opératoire et un traitement mathématique possible, tienne à la visibilité, apparement aléatoire selon les individus, des opérations figurales. Cela nous renvoie-t-il à un facteur d'aptitude spatiale ? Cela semble pour l'instant difficile à avancer : car tous les tests intervenant dans la détermination d'un tel facteur sollicitent essentiellement soit des tâches du type puzzle soit l'identification de la représentation plane d'un objet tridimensionnel soumis à des rotations [11 p.314-317,348-349]. Même lorsqu'elle implique des translations ou des rotations, l'appréhension opératoire des figures est d'une autre nature car elle ne se limite pas à une manipulation perceptive de formes.

III Appréhension discursive d'une figure et Démonstration

En examinant le problème de congruence entre figure et énoncé d'une part, entre figure et traitement mathématique d'autre part, nous avons passé sous silence le problème du statut des figures géométriques. En fait, elles ne constituent pas un registre de traitement autonome analogue, par exemple, à celui des représentations graphiques cartésiennes. C'est qu'en effet les propriétés pertinentes et seules acceptables d'une figure géométrique dépendent chaque fois de ce qui est énoncé comme hypothèse. Cela implique une *subordination de l'appréhension perceptive à l'appréhension discursive*, et par voie de conséquence *une restriction de l'appréhension perceptive* : une figure géométrique ne montre pas d'abord à partir de son tracé et de ses formes, mais à partir de ce qui en est dit. Cette subordination de l'appréhension perceptive à l'appréhensiuon discursive peut être considérée comme une théorisation de la représentation figurale : la figure géométrique devient, en quelque sorte, un fragment de discours théorique. Les éléments et les propriétés qui apparaissent sur la figure n'ont que le statut et la certitude des assertions correspondantes dans le discours géométrique, lequel est commandé par des définitions,des axiomes et des théorèmes déja établis. *La même figure*, du point de vue perceptif, *peut donc être une figure géométrique différente* si l'on modifie l'énoncé des hypothèses.
La compréhension de cette théorisation des figures géométriques, dans lequel leur appréhension perceptive doit être subordonnée à leur appréhension discursive, constitiue l'un des seuils d'accés à la démonstration. Il est bien connu que les élèves trouvent inutile, et parfois absurde, de démontrer une propriété qui "se voit" sur la figure! De même beaucoup d'élèves ont parfois du mal à ne pas confondre les hypothèses et ce qui est à démontrer. Moins que d'un cercle vicieux , il s'agit là d'une instabilité analogue à celle de certaines figures que l'on voit alternativement en creux ou en relief sans pouvoir en fixer l'interprétation. On pense généralement que, pour contourner cette résistance ou cette instabilité, il faille proposer des problèmes dans lequel le résultat apparaisse incertain. Mais en procédant de cette manière on laisse subsister l'obstacle sans donner aux élèves l'occasion d'en prendre conscience et de le surmonter : celui de la théorisation laquelle introduit, dans l'évidence et l'homogénéité synoptiques de l'appréhension perceptive des figures, une différenciation de nature discursive et axiomatique. Le statut spécifique d'une figure en géométrie reste alors entièrement ignoré.

C'est cette appréhension discursive des figures qui différencie radicalement les tâches de démonstration et les tâches de construction. *Et cette appréhension discursive est d'une toute* *autre nature que la description d'un procédure de construction que l'on exige parfois en plaçant les élèves dans une situation de jeu de message.*

Dans une tâche de construction la figure est d'une certaine façon indépendante de tout énoncé. L'appréhension perceptive peut servir de registre de contrôle pour juger d'une exécution acceptable ou non de la tâche. Son statut n'est donc pas le même que dans une tâche de démonstration. Certes l'exécution impose des contraintes qu'il n'est pas toujours possible de contourner par approximations successives d'un tracé. *Mais ces contraintes ne sont en rien comparables à des hypothèses.* Car elles sont propres à chaque figure et elle ne changent qu'en fonction du registre d'éxécution : règle et compas pour une réalisation sur papier ou liste d'intructions de base pour réalisation sur écran. Pour un registre d'éxécution donné les contraintes propres à une figure ne changent pas : cela constitue l'autonomie des figures par rapport au discours géométrique. En revanche c'est exactement le contraire qui se passe avec les hypothèses. Un même figure peut illustrer des situations géométriques différentes, c'est-à-dire des situations dans lesquelles les hypothèses de départ ne sont pas les mêmes.

La formulation d'instructions permettant à un tiers (humain) de construire une figure est elle-même étrangère à une appréhension discursive des figures. Elle exige surtout trois choses communes à toute tâche de rédaction d'un texte :
— ne donner, dans la mesure du possible, qu'une instruction par phrase
— éviter toute ambiguité dans l'énoncé de chaque instruction
— définir un cadre de référence autonome qui permette une description explicite de tout ce qui, dans une interaction directe, est simplement montré.
De ces trois exigences, la seconde est naturellement celle qui a le plus retenu l'attention.Toute imprécision, toute analyse insuffisante des possibilités de sens de la formulation donnée sont sanctionnées, ou sont sanctionnables, par une réalisation différente de celle attendue. La nécessité d'une terminologie précise et commune, celle de références indépendantes du contexte perceptif particulier où l'on se trouve surgissent du conflit ainsi créé. Mais l'activité de construction et son produit , la figure perceptible, sont la fois source et contrôle de la formulation des instructions. L'ordre des instructions reproduit simplement la succession découverte dans l'activité de construction : au plan du discours, il n'a d'autre cohérence que celui d'"enrichir" et de compléter un objet. On reste dans le genre de la description. L'appréhension discursive d'une figure exigée par une tâche de démonstration privilégie au contraire l'articulation des énoncés, leur statut et leur

compatibilité interne. *En fait, la véritable repésentation correspondant à une tâche de démonstration, en géométrie, ne serait pas une figure mais un réseau sémantique de propriétés et d'objets* ! C'est relativement à la représentation d'un tel réseau que la distinction du statut des énoncés (hypothèses, proposition à démonter, propositions utilisables) et l'importance de l'ordre des énoncés peuvent prendre tout leur sens pour les élèves. Naturellement l'élaboration de telles représentations est complexe et très peu de tentatives ont été faites jusqu'à présent pour développer ce type de représentation. Mais sans le recours,implicite ou explicite, à ce typre de représentation il ne peut y avoir d'appréhension discursive des figures. *L'appréhension discursive d'une figure équivaut à plonger, selon les indications d'un énoncé, une figure géométrique particulière dans un réseau sémantique à la fois plus complexe et plus stable.*

On voit donc apparaître, d'un point de vue cognitif, une différence importante entre la rédaction d'une liste d'instructions pour la construction d'une figure et la rédaction d'une démonstration. Dans un cas la linéarité du discours reflète simplement la séquence des pas successifs d'éxecution : la formulation peut être inutilement explicite, insuffisament explicite ou non adaptée, elle ne peut être contradictoire. Les énoncé sont des ordres et non des assertions. Dans l'autre cas, la linéarité du discours n'est pas préalablement donnée, elle est à organiser à partir d'un réseau de relations conceptuelles : la formulation peut alors être non cohérente ou explicitement contradictoire.

Conclusion

L'existence d'*une triple appréhension* de ce qui est, du point de vue de la représentation graphique, *la même figure* montre la complexité des problèmes de géométrie apparemment les plus simples.
Selon qu'elle est congruente, ou non, à l''énoncé du problème, l'appréhension perceptive des figures peut avoir un rôle facilitateur ou inhibiteur sur la compréhension du problème posé.
Si elle est congruente à un traitement mathématique possible du problème posé, l'appréhension opératoire joue un rôle heuristique important dans la résolution du

problème.

Il y a enfin l'appréhension discursive des figures : dans ce qu'elle a de spécifique elle implique une neutralisation de l'appréhension perceptive. *Lorsqu'il y a congruence entre l'appréhension opératoire et un traitement mathématique possible du problème, l'appréhension discursive peut être négligée* : la rédaction du problème prend une forme de démonstration, mais, d'un point de vue cognitif, cette rédaction ne diffère d'une formulation d'instructions exigée dans un jeu de messages. *Mais lorsqu'il n'y a plus congruence entre l'appréhension opératoire et un traitement mathématique possible. l'appréhension discursive devient nécessaire* . Les élèves se trouvent alors affrontés à une véritable tâche de démonstration.

On voit donc qu'il y a une très grande hétérogénéité cognitive entre des problèmes de géométrie mathématiquement très proches, ou sollicitant les mêmes connaissances. une catégorisation cognitive des problèmes est indispensable non seulement pour pouvoir interpréter les performances et les productions observées sur un problème mais aussi pour aborder ce qui a été appelé "un apprentissage de la démonstration". Il apparaît qu'il faille distinguer trois niveaux de problèmes en géométrie :

1) Celui des problèmes pour lesquels il y a congruence entre une appréhension opératoire de la figure et un traitement mathématique possible. A ce niveau, une appréhénsion discursive explicite n'est pas nécessaire.

2) Celui des problèmes pour lesquels l'appréhension discursive est au contraire nécessaire, soit parce qu'il n'y a plus congruence soit parce qu'elle est explicitemnt demandée comme justification théorique.

3) Celui des problèmes qui exigent, en plus d'une appréhension discursive, le recours à des schèmes formels logiques spécifiques tels que le raisonnement par l'absurde, le dilemme ou raisonnement disjonctif, le raisonnement par contraposition,...[9 p.103-104]. Naturellement pour chacun de ces niveaux d'autres distinctions doivent être prises en compte. Mais cela relève d'une classification des problèmes, laquelle déborde le cadre de cette approche.

"L'apprentissage de la démonstration" a été envisagée,dans l'enseignement, avec des problèmes du second niveau. Sans reprendre ici une analyse développée plus loin par A.L. Mesquita et J.C.Rauscher, nous nous contenterons de mentionner plusieurs conditions qui apparaissent nécéssaires pour rendre les problèmes du second niveau pleinement accessibles à la majorité des élèves :

— une pratique systématique des problèmes du premier niveau.

— la prise de conscience de l'opposition entre appréhension perceptive et appréhension discursive

— la constitution en un réseau sémantique de toutes les connaissances qui peuvent être sollicités par une démonstration. De ce point de vue la représentation d'un réseau de propriétés constitue un registre peut-être plus indispensable que le tracé ou que la construction de figures.

— la prise de conscience du décalage entre une déduction et une argumentation développée dans le cadre de la pratique naturelle du discours. Car les connecteurs argumentatifs de la langues naturelle ont un sens et un emploi qui ne correspond pas souvent à l'articulation déductive de deux énoncés dans un cadre donné par des définitions et des axiomes.

Tout cela revient à dire que l'activité cognitive de démonstation est moins simple et moins homogène que son produit, la démonstration exposée à autrui. On ne peut assimiler l'activité de démonstration au raisonnement dans la mesure où, par ce terme, on désigne la production d'arguments, l'inférence constament sollicitée dans la compréhension de n'importe quel discours, ou encore l'interprétation qui permet de saisir un changement de registre...L'activité de démonstration ne peut surgir qu'au point de convergence de nombreuses fonctions cognitives. Favoriser le développement de toutes ces fonctions serait peut-être une voie plus rapide et plus fructueuse pour l'enseignement que celle qui propose des procédures imitables pour simuler ou reproduire une activité de démonstration. Il n'y a peut-être pas de transition progressive et graduée vers l'exigence et la pratique des démonstrations, car il restera toujours un seuil à franchir d'une description, d'une argumentation, ou d'une construction à une démonstration. Mais la compréhension de ce qu'est une démonstration est liée à la prise de conscience de la différence entre ces multiples activités discursices et représentatives.

REFERENCES

[1] **Balacheff N.**, 1982, Preuve et démonstration en mathématiques au collège, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3,3, p.262-306.

[2] **Bessot D.**, 1983, Problèmes de représentation de l'espace, *Enseignement de la Géométrie*, Bulletin Inter-Irem, 23, p.33-40.

[3] **Betinelli B.**, 1984, *Jeux de forme Forme de jeux*, Besançon, Irem.

[4] **Burgaud C.**, 1983, Quelques exemples d'utilisation des transformations en géométrie plane Obstacles rencontrés chez les élèves, *Enseignement de la Géométrie*, Bulletin Inter-Irem, 23, p.52-56.

[5] **Coren S., Porac C., Ward L.M.**, 1979, *Sensation and Perception*, Academic Press, New-York.

[6] **Dupuis C., Duval R., Pluvinage F.**, 1978, Etude sur la stabilité de la géométrie en fin de troisième, in *Géométrie au premier cycle*, tome II, A.P.M.E.P., p.65-99.

[7] **Duval R.**, 1983, L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques, in *Educational Studies in Mathématics*, 4, p.385-414.

[8] **Edwards C.H.**, 1979, *The historical Development of Calculus*, Springer

[9] **Glaeser G.**, 1971, *Mathématiques pour l'élève professeur*, Paris , Hermann.

[10] **Mesquita A.**, Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie, à paraître.

[11] **Pellegrino J.W. Kail Jr.**, 1982,Process Analyses of Spatial Aptitude,in *Advances in the Psychology of human intelligence*,ed. by J. Sternberg, Hillsdale, Lawrence Erlbaum .

[12] **Thom R.**, 1972, Les Mathématiques "Modernes": une erreur pédagogique et philosophique , *L'age de la science*, III,3, p.225-242.

PROBLEMES DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE AU COLLEGE

C. LABORDE

Cet exposé présente quelques problèmes que connaît actuellement l'enseignement de la géométrie au collège :
- les liens parfois conflictuels entre la géométrie enseignée et les savoirs géométriques issus de l'environnement physique et culturel
- les connaissances spontannées des élèves
- les moyens que l'on peut mettre en œuvre dans l'enseignement pour faire évoluer ces connaissances spontannées à propos d'un exemple de processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème.

La recherche en didactique des mathématiques cherche à analyser les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage et à les comprendre de façon objective, en essayant d'exclure, comme toute recherche scientifique, les présupposés et les idées préconçues. Tâche qui n'est pas si facile, alors qu'un chercheur en didactique est bien souvent aussi un enseignant avec ses opinions issues de son expérience. Certes les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage sont d'une grande complexité, ils mettent en jeu des comportements humains et ils ne se laissent enfermer, ni dans une axiomatique, ni dans un ensemble de théorèmes.

Le caractère scientifique de la recherche en didactique se traduit par un effort d'explicitation des hypothèses prises, par un souci de dégager les variables qui permettent de caractériser un phénomène, enfin par le rôle attribué à l'expérimentation. Comme l'a souvent répété Glaeser (1979), l'expérience est à prendre au sens que lui donnait le biologiste français Claude Bernard, ce n'est pas une simple observation qui nous donne à voir les faits tels que la nature nous les montre, une expérience fait suite à une analyse théorique, elle permet d'éprouver la solidité de cette analyse.Dans l'expérimentation le chercheur ne subit pas les faits, il en a préparé l'apparition par le choix de conditions appropriées et si les faits prévus n'apparaissent pas, c'est l'analyse théorique qui est à remettre en cause.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.75-93) IREM de Strasbourg

Mon exposé présentera quelques aspects des recherches en didactique dans le domaine de la géométrie et particulièrement à propos de la notion de symétrie orthogonale sur laquelle travaille un groupe de chercheurs grenoblois (J.F. Bonneville, M. Dupraz, D. Grenier, M. Guillerault et moi-même).

Un processus d'enseignement d'un savoir engage un enseignant, des élèves, ce savoir. Il a pour objectif de faire passer l'élève d'un état initial de connaissance par rapport au savoir en question à un état final souhaité. La construction et le contrôle d'un tel processus exige
- que l'on détermine les caractéristiques du savoir à enseigner
- que l'on connaisse l'état initial des connaissances de l'élève, leurs modes d'évolution possibles
- que l'on construise les moyens par lesquels on va permettre la transmission et l'acquisition de ce savoir.

Quels contenus d'enseignement en géométrie?

Les savoirs à enseigner ne sont pas les savoirs des mathématiciens. Ils subissent une transformation pour être rendus accessibles aux apprenants, pour pouvoir être insérés dans la logique d'un cursus qui s'étend sur plusieurs années, processus que Chevallard appelle *transposition didactique* (Chevallard, 1985). Mais la détermination des contenus "officiels" d'enseignement se fait non seulement en fonction des savoirs savants au sein de la communauté des mathématiciens mais aussi en fonction des savoirs culturels et sociaux de la société au sein de laquelle a lieu le projet éducatif.

Cette double origine des contenus d'enseignement s'est exercée dans le cas de la géométrie de façon souvent conflictuelle, le plus souvent une dichotomie a été établie entre l'étude de l'espace d'une part et **une** géométrie des mathématiciens d'autre part : d'un côté l'étude des rapports de l'homme avec l'espace, qui recouvre les problèmes de perception, de représentation des objets physiques dans l'espace ainsi que la modélisation des actions et des opérations sur ces objets; de l'autre côté la géométrie en tant que lieu privilégié d'une rationalité poussée à son point d'excellence.
La géométrie enseignée trouve en effet sa source à la fois dans la géométrie développée au cours du temps par les mathématiciens et dans les savoirs culturels et sociaux, issus de pratiques diverses (arpentage, architecture,...) mettant en jeu l'espace physique dans lequel vit l'homme.

Historiquement la méthode déductive est apparue en géométrie et cette méthode de la géométrie est devenue la méthode des mathématiques parce que l'ordre géométrique est "véritable" comme l'écrit Pascal (1657, opuscule "de la méthode des démonstrations géométriques, c'est à dire méthodiques et parfaites").

Les démonstrations ont ainsi été opposées aux procédés d'obtention des figures. La démonstration parce qu'elle procède de règles d'une logique intangible est considérée comme indépendante des figures. En revanche les figures sont le résultat de procédés de construction liés au sujet qui les produit. Cette dichotomie entre le savoir et le savoir-faire, le mathématicien et l'ingénieur, issue de l'école grecque persiste longtemps. On la retrouve ainsi au XVIIe et XVIIIe siècles dans les différentes dénominations entre les ouvrages de géométrie classique (les Eléments d'Euclide) et les nombreuses géométries pratiques qui traitent de problèmes d'arpentage, de toisé, d'architecture et qui souvent donnent des procédés de construction sans justification et même parfois approchés sans qu'il soit fait mention de ce caractère approché.

Cette séparation entre une géométrie de l'espace liée au sujet et une géométrie théorique s'est traduite en France dans les contenus d'enseignement jusqu'en 1986 par une rupture entre une géométrie d'observation, mettant en jeu le tracé de figures et l'usage d'instruments destinés aux élèves les plus jeunes et une géométrie de la déduction pour les élèves plus âgés. Ainsi, dans les programmes de 1977, la géométrie ne commence qu'en 4ème (élèves de 13 ans) en même temps que l'apprentissage de la démonstration, alors que dans les classes précédentes n'est prévue qu'une "observation d'objets physiques et géométriques" qui "n'est pas à proprement parler une activité mathématique" comme le précisent les commentaires officiels des programmes.

Or Pluvinage et Rauscher (1986) ont pu observer que la perception peut gêner l'analyse de la figure en unités adaptées pour un traitement comme celui consistant à donner des instructions permettant de tracer cette figure; "dire par exemple d'un élève qu'il ne voit pas revient souvent à dire qu'au contraire il se laisse piéger par la vision" écrivent Pluvinage et Rauscher.

D'autre part, parce qu'un objectif à long terme de l'enseignement est bien l'apprentissage de la géométrie de la déduction, les objets géométriques introduits dans l'enseignement avant l'apprentissage de la démonstration sont justement ceux sur lesquels opéreront plus tard les démonstrations. Leur introduction ne répond donc qu'à une nécessité interne à l'enseignement et non pas à la construction par l'élève de connaissances spatiales. La question se pose de savoir si pour les élèves les objets géométriques de l'observation sont les mêmes que ceux de la démonstration et s'ils peuvent réinvestir leurs connaissances issues de l'observation lorsqu'ils s'engagent dans la phase déductive (Balacheff, 1985).

Une difficulté du passage d'une géométrie d'observation à une géométrie de déduction réside aussi dans le nombre très restreint de traitements mis en œuvre dans l'enseignement et du nombre limité de compétences développé de ce fait chez les élèves; en particulier les traitements débouchant sur un tracé sont généralement défavorisés au profit de ceux débouchant sur un texte (Pluvinage, Rauscher, ibid.); on retrouve là la résistance aux constructions géométriques signalée plus haut.

La séparation entre géométrie pratique et géométrie des mathématiques est très apparente dans l'histoire de la symétrie orthogonale en tant qu'objet d'enseignement. La symétrie est un objet culturel profondément implanté dans les civilisations fortement influencées par la civilisation grecque ancienne. Il suffit de regarder les temples grecs et les différents monuments classiques occidentaux pour en être persuadé. Et pourtant elle n'apparaît que tardivement dans les programmes d'enseignement, d'abord de façon incidente dans la deuxième moitié du XIX ème siècle pour des calculs de volume de polyèdres, puis plus nettement dans les programmes de 1923 avec le statut de transformation géométrique parce que justement elle l'avait acquis à la fin du XIX ème siècle en mathématiques. Jusqu'encore au XVIIIème siècle la symétrie est définie comme un terme d'architecture, de jardinage ou de réthorique : "le rapport, la proportion, la régularité des parties nécessaires pour composer un beau tout." (Encyclopédie de Diderot, d'Alembert), harmonie comparée à celle du corps humain qui a d'ailleurs servi longtemps de modèle et d'étalon de mesure dans les arts.

En France, l'objet d'enseignement symétrie en tant que transformation du plan a connu une ampleur particulière avec les programmes des années 1970 et s'est maintenu jusqu'à cette année (octobre 1986) à tel point qu'une fois donnée la définition du symétrique d'un point il paraissait inutile à certains manuels de préciser les symétriques de figures usuelles, une figure n'étant après tout qu'un ensemble de points. On pouvait même lire parfois : la figure transformée d'une figure donnée dans une symétrie orthogonale est l'ensemble des transformés de la figure initiale.

Avec les programmes entrés en vigueur cette année pour la classe de 6ème, cette dichotomie semble s'estomper pour laisser la place à des liens plus dialectiques entre construction et démonstration, savoir social et savoir mathématique : il ne s'agit plus tant de démontrer les propriétés d'invariance de certains éléments mais à partir de manipulations, dessins, mesures, constructions, dégager et utiliser des propriétés caractéristiques.

Les connaissances des élèves et leurs modes d'évolution

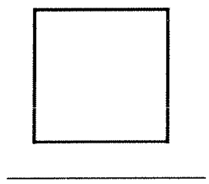
Les conceptions des élèves

Nous travaillons à partir d'une hypothèse constructiviste de la formation des connaissances selon laquelle tout individu en situation d'apprentissage construit ses propres conceptions des contenus sur lesquels porte l'apprentissage. Ces conceptions sont la résultante de conceptions initiales existant éventuellement déjà avant l'enseignement et de l'enseignement même. On peut penser qu'en géométrie du fait que l'élève vit dans un espace qu'il utilise dans la vie quotidienne, il possède des connaissances spatiales avant tout enseignement. La notion de symétrie culturellement implantée, comme je l'ai dit, n'est pas inconnue des élèves lorsqu'ils l'abordent en mathématiques.

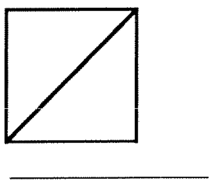
Ces conceptions, connaissances, sont fragmentaires, parfois partiellement erronées. On l'admet aisément dans le cas de conceptions initiales ou "spontanées". Par exemple, du fait de l'importance du modèle fourni par le corps humain, la symétrie orthogonale est d'abord perçue de façon privilégiée comme d'axe vertical.

Mais suite à un enseignement, le caractère local, partiellement erroné de ces conceptions peut continuer d'être présent et nous prenons comme hypothèse que les connaissances des individus n'atteignent jamais un seuil définitivement stable mais qu'elles sont susceptibles de modifications sous l'influence d'autres connaissances ou expériences mettant en cause certaines des caractéristiques des connaissances disponibles. Un des objectifs de l'enseignement est d'arriver à contrôler les caractéristiques des connaissances construites par les élèves.

Le caractère incomplet de ces connaissances est mis à jour lors de la résolution de problèmes. Ces connaissances permettent de résoudre correctement certains problèmes mais ne fonctionnent plus ou fonctionnent mal sur d'autres problèmes.
Ainsi au début d'un enseignement de la symétrie, les élèves envisagent souvent la symétrie comme une isométrie conservant l'orientation. Dans une tâche de construction du symétrique, cela conduit à une réponse exacte dans le cas 1 et à une réponse fausse dans le cas 2 (Gallou-Dumiel, 1985).



cas 1

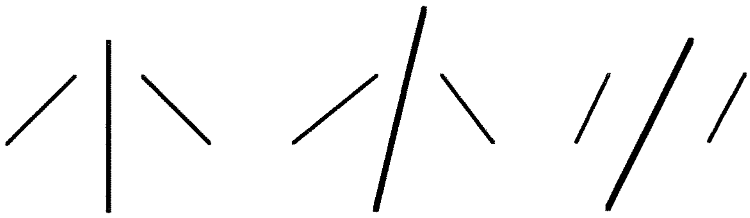


cas 2

Différentes recherches qui ont eu pour objectif de dégager les conceptions des élèves à propos d'une notion donnée ont en général pris pour objet d'analyse les réponses d'élèves à des problèmes. Par exemple dans le cas de transformations géométriques, comme translation, rotation, symétrie, des recherches ont porté sur le respect ou le non respect des invariants d'une transformation par les élèves : conservation des longueurs (Thomas, 1978, Kidder, 1978), conservation des propriétés d'incidence (Thomas) dans des tâches de construction du transformé d'une figure donnée ou dans une tâche de comparaison entre figure objet et figure image.
Certaines de ces recherches ont dégagé des **variables** dont dépendent les tâches données aux élèves telles que leur modification entraîne un passage de réponses correctes à des réponses erronées ou même des stratégies de réponse différentes. Donnons un exemple.

De nombreux élèves savent construire le symétrique d'un segment par rapport à un axe vertical, en plaçant les points correspondants dans la transformation sur des droites horizontales perpendiculaires à l'axe. Lorsque l'axe est oblique, ils ont recours à ces mêmes lignes de rappel horizontales alors qu'elles ne sont plus perpendiculaires à l'axe. On peut en induire que c'est la propriété pour deux points symétriques d'être sur une même horizontale qui est utilisée par les élèves et non pas la propriété d'orthogonalité à l'axe (Grenier, 1985).

Cette propriété donne une réponse correcte dans le cas de l'axe vertical et erronée dans le cas de l'axe oblique.



Dans le cas où la figure objet coupe l'axe, les stratégies des réponses changent; elles consistent par exemple à ne considérer qu'une partie de la figure objet située dans un demi-plan déterminé par l'axe et à ne construire que sa transformée ou à construire de façon séparée la transformée de chacune des deux parties de la figure situées de part et d'autre de l'axe.

On a ainsi pu mettre en évidence à propos de cette tâche de construction que suivant
- la complexité de la figure objet (segment, triangle, polygone, ...)
- la pente de l'axe de symétrie par rapport aux bords de la feuille
- la position de la figure objet par rapport à l'axe (distance, intersection vide ou non)

le taux de réussite des élèves et leurs stratégies de réponses changent considérablement (Grenier, 1985, Hart, 1981, Schultz, 1978, 1983).

De façon plus générale ont pu être mises en évidence des variables relatives au type d'espace et d'objets sur lesquels portent les problèmes, variables qui ont une incidence sur les conceptions des élèves et le traitement qu'ils font des objets géométriques engagés dans le problème.

- la taille de l'espace

On peut distinguer trois espaces dans lesquels les problèmes ne se posent pas de la même façon parce qu'ils ne mettent pas en jeu les mêmes possibilités de contrôle (Brousseau, 1983b).

.le micro-espace, l'espace des objets que l'on peut déplacer sur une table

.le méso-espace, entre O.5 et 50 fois la taille du sujet; les déplacements y sont coûteux.

.le macro-espace qui met en jeu des problèmes de repérage et d'orientation. La mesure d'une distance y est plus coûteuse que celle d'un angle.

La géométrie enseignée travaille uniquement sur le micro-espace qui induit des représentations très fortes chez les élèves. Ainsi deux droites sécantes "doivent" se couper sur la feuille de papier; les relations entre objets "doivent"être visibles sur la feuille. Il est difficile de travailler en classe en dehors du micro-espace mais par des contraintes au niveau du matériel proposé on peut le simuler comme l'a fait par exemple Grecia Galvez (1985) qui a travaillé à la fois sur le macro-espace et sur des simulations en classe avec des élèves mexicains de l'école primaire à propos du déplacement en milieu urbain.

- **la direction**
  L'espace ou le plan ne sont pas isotropes pour l'enfant, du moins en Occident. Dans le plan de la feuille de papier, les directions horizontales et "verticales" sont privilégiées par les élèves. Un angle droit à côtés obliques est moins bien reconnu que s'il est à côtés horizontal et vertical (Fisher, 1978, Zykova, 1969). Les expérimentations que nous avons faites en classe montrent de même que la symétrie orthogonale est mieux perçue lorsque l'axe est vertical

Quels moyens pour permettre l'acquisition de nouvelles connaissances par les élèves ?

Comme il a été dit plus haut, on a pu constater que les stratégies de réponse fournies par les élèves dépendent du choix des problèmes auquels ils sont confrontés. Des variables ont ainsi été dégagées dont les changements de valeur entraînent des modifications importantes dans les stratégies de réponses des élèves. Grâce à des choix adéquats des valeurs de ces variables on peut donc bloquer le fonctionnement de stratégies connues des élèves et les mettre en situation d'en utiliser de nouvelles faisant appel à des connaissances non mobilisées par les stratégies antérieures ou permettant la construction de nouvelles connaissances. Dans le domaine de la géométrie ces variables concernent le type d'espace et les objets engagés dans le problème. La modification du fonctionnement des connaissances en situation-problème peut aussi être obtenue en jouant sur deux autres caractéristiques de la situation :

- les **contraintes** liées au matériel permis (instruments de tracé, de mesure,...) (on peut aussi considérer que ce sont des variables de la situation)

- la **finalité** de la situation.

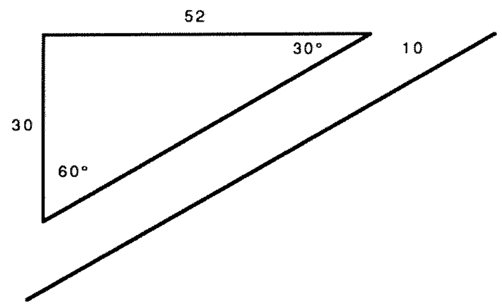
Le choix des contraintes permet de modifier le type de contrôles possibles de la part de l'élève et donc la nature et la signification des connaissances qu'il investit dans le problème. Prenons un exemple simple.

Le pliage selon une droite permet
- de décider si deux figures sont symétriques par rapport à une droite
- ou de trouver l'axe de symétrie d'une figure
- ou de construire le symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.

Dans tous ces cas la réponse est obtenue par la seule observation; elle relève uniquement d'une activité immédiate de perception. En revanche si l'on empêche le pliage ou le retournement par un artifice quelconque (matériau rigide ou inamovible), les problèmes précédents requièrent pour leur solution l'utilisation de propriétés de la symétrie orthogonale (équidistance de l'axe de points symétriques, conservation des longueurs,...). La transformation d'une simple situation d'observation, sans question pour l'individu qui observe, en un problème dans lequel il engage ses connaissances repose dans ce cas sur des contraintes rendant moins immédiates les décisions à prendre parce que des contrôles de type perceptif ont été empêchés. Ce sont les **savoirs géométriques** qui jouent alors le rôle **d'éléments de contrôle et d'instruments de décision.**

Il paraît important de dresser un répertoire d'actions permises par chaque type de matériel et celles rendues impossibles pour associer à chaque problème en fonction du matériel utilisé les connaissances les plus efficaces pour résoudre le problème. En effet le même problème suivant les contraintes choisies peut conduire à l'utilisation de propriétés différentes(cf. plus bas).
Exemple : construire la droite de symétrie d'un trapèze isocèle (i) avec une règle graduée (ii) avec seulement une règle non graduée (iii) avec une règle non graduée et une équerre.

De la même façon construire le symétrique d'une figure rectiligne donnée par rapport à un axe, telle celle de la page suivante, ne met pas en jeu les mêmes propriétés suivant que l'on dispose
- d'une feuille de papier, d'un crayon, d'une règle graduée et d'une équerre
- d'un micro-ordinateur avec la tortue LOGO ne pouvant que se déplacer dans une direction donnée d'une longueur donnée et tourner d'un angle donné.



Dans le deuxième cas la solution la moins coûteuse revient à construire le contour de la figure symétrique en utilisant les angles de la figure initiale. Par ce type de dispositif la notion d'angle prend l'importance qu'elle possède dans le macro-espace et qu'elle a en général perdu dans l'espace de la feuille de papier avec les instruments usuels où les propriétés d'incidence sont plus efficaces (Gallou-Dumiel, 1985). On retrouve aussi le fait qu'en jouant sur les contraintes de la situation on peut simuler le macro-espace.

Un exemple de processus d'enseignement

Présentons l'exemple des trois premières phases d'un processus d'enseignement de la notion de droite de symétrie que nous avons construit et réalisé en classe de 6ème avec l'intention de jouer sur les tâches et sur les contraintes pour modifier les connaissances des élèves.
L'objectif des premières phases était d'apprendre aux élèves à utiliser les propriétés de la droite de symétrie d'une figure pour la construire.

Une première phase de diagnostic

Dans une première phase nous avons cherché à connaître les conceptions initiales des élèves de la classe à propos de la notion de droite de symétrie en leur demandant individuellement par écrit de dire si chacune des figures qu'ils avaient reçues admettait une droite de symétrie et si c'était le cas de tracer à main levée la droite de symétrie. L'étude des productions des élèves a montré essentiellement la présence des aspects erronés suivants (pour certains élèves) :
- les seules droites de symétrie tracées sont verticales (cf. les aspects historiques de la symétrie)
- les droites de symétrie sont les droites qui partagent la figure en deux parties "identiques" le concept d'identique recouvrant aussi bien des parties de figures se déduisant par translation, demi-tour ou symétrie orthogonale.

A partir de ce constat, un premier objectif du processus d'enseignement était de déstabiliser ces conceptions erronées.

Deuxième phase : déstabilisation des conceptions erronées

On a donc posé à nouveau la tâche de construction à main levée de la droite de symétrie si elle existe; les figures étaient tracées sur du carton pour que tout pliage soit empêché et que la tâche constitue ainsi effectivement un problème pour les élèves. Dans les figures proposées figuraient les figures, sources d'erreur chez les élèves : une figure pouvant être décomposée en deux "moitiés identiques" mais ne présentant pas de symétrie orthogonale (plume d'oiseau), figures possédant une symétrie centrale mais non orthogonale (différents parallélogrammes), figures ayant plusieurs droites de symétrie (triangle équilatéral, rectangle, segment, deux points), figures ayant une ou des droites de symétrie obliques par rapport aux bords de la feuille (triangle équilatéral, segment, deux points, rectangle) ou horizontale (deux cercles tangents).

L'organisation du travail dans la classe a été choisie pour favoriser les interactions sociales dans la classe et en particulier la mise en évidence de contradictions et ceci en deux étapes :

- d'abord les élèves travaillaient par groupes de quatre pour cette tâche et le groupe devait se mettre d'accord sur une réponse commune pour chaque figure; la compostion des groupes n'avait pas été faite au hasard, mais de façon à privilégier la discussion. La tâche individuelle de tracé de droites de symétrie donnée en début du processus d'enseignement avait permis de répertorier les conceptions de chacun des élèves (relativement à la tâche); on a fait en sorte que dans un groupe soient présents des élèves ayant manifesté des conceptions différentes.

- ensuite un débat entre les groupes était organisé sous le contrôle de l'enseignant; chaque groupe envoyait un représentant au tableau exposer sa réponse; en cas de désaccord entre ces réponses, le représentant de chacun des groupes devait pouvoir défendre la solution du groupe en l'argumentant. On ne peut garantir que l'issue d'un tel débat se fasse de façon satisfaisante sur le plan des mathématiques si l'enseignant ne le gère pas. C'est lui qui finalement peut mettre en évidence les aspects erronés d'une solution sur laquelle toute la classe serait d'accord; c'est lui qui peut intervenir pour que soit reconnue une solution correcte non reconnue comme telle par la classe. Un débat ne se règle pas seulement sur des bases rationnelles mais aussi relationnelles, et s'il se règle sur des bases rationnelles, il se peut qu'il débouche sur un accord mathématiquement faux parce que une même conception erronée est partagée par l'ensemble des élèves.

Cette deuxième phase se terminait donc par un débat entre groupes dont la conclusion était tirée sous contrôle de l'enseignant. Le rôle de l'enseignant ne se bornait pas à cela, il récapitulait ensuite les aspects importants à retenir de l'activité dans une phase *d'institutionnalisation* en insistant sur le fait que les propriétés ainsi soulignées par lui seraient réutilisées dans la suite. Dans le cas présent étaient soulignées par l'enseignant les propriétés suivantes :

- une droite de symétrie est une ligne droite
- il y a des droites de symétrie non "verticales"
- des figures peuvent présenter plusieurs droites de symétrie
- une droite de symétrie passe par le milieu de deux points symétriques (propriété en général reconnue et utilisée par tous les élèves)
- elle est orthogonale à la droite joignant deux points symétriques (propriété non utilisée par tous et dans tous les cas restant implicite, même si elle est utilisée).

La tâche de tracé à main levée n'exige pas un usage analytique de ces propriétés mais plutôt un respect global de celles-ci. Il suffit que la droite de symétrie passe "au milieu" de la figure et qu'elle ne soit pas trop "penchée" par rapport à la droite joignant deux points homologues.

Troisième phase : utilisation analytique des propriétés de la droite de symétrie

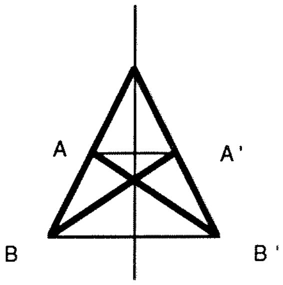
Une troisième phase était donc nécessaire pour que ces propriétés soient mises en œuvre de façon plus opératoire; il fallait concevoir des situations-problèmes dans lesquelles elles étaient les instruments de solution. La propriété du milieu étant privilégiée par les élèves, il nous fallait construire des tâches rendant impossible son emploi et exigeant au contraire l'usage des autres propriétés moins présentes chez les élèves : orthogonalité, invariance des points de la droite de symétrie, équidistance des points de la droite de symétrie de toute paire de points symétriques. C'est le jeu sur les variables des figures et sur les contraintes de la tâche (instruments fournis) qui l'a permis.

Les élèves savaient utiliser quatre instruments : la règle graduée, la règle non graduée, l'équerre et le compas.

Quelles sont les actions permises par chacun de ces instruments ?

La **règle graduée** permet de prendre le milieu de deux points, donc de connaître un point de la droite de symétrie dès que l'on connaît une paire de points symétriques. **Deux paires de points symétriques** permettent donc de construire la droite de symétrie si l'on dispose d'une règle graduée. C'est uniquement **la propriété du milieu** qui est mise en œuvre.

La **règle non graduée** permet de tracer la droite passant par deux points et d'obtenir le point intersection de deux droites. Elle ne permet que la mise en œuvre de **propriétés d'incidence.** Elle permet de construire la droite de symétrie dans la mesure où l'on connaît deux de ses points obtenus en tant qu'intersection; c'est le cas si l'**on connaît deux paires de points symétriques ne formant pas un rectangle** grâce à la construction suivante.



C'est la propriété d'appartenance à la droite de symétrie de l'intersection de deux segments symétriques qui est uniquement mise en œuvre.

Le compas permet de tracer des points équidistants d'un point donné et d'obtenir ainsi des points à égale distance de deux points donnés comme intersection de deux arcs de cercle. **Une paire de points symétriques** permet donc de déterminer au moins deux points de la droite de symétrie. C'est la **propriété d'équidistance** des points de la droite de symétrie de toute paire de points symétriques de la figure qui est mise en œuvre. Pour tracer effectivement la droite de symétrie, il faut ensuite une règle.

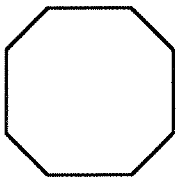
L'équerre dans son usage non dégénéré c'est à dire dans un usage non réduit à celui de tracer des droites, permet de tracer une droite perpendiculaire à une autre droite passant par un point donné. L'équerre ne permet dans son usage non dégénéré que de trouver **la direction de la droite de symétrie**; elle doit être **associée avec un autre instrument** pour permettre la construction de la droite de symétrie. La **propriété d'orthogonalité** est alors utilisée conjointement avec une autre propriété.

Dans chacun de ces cas il faut exhiber au moins une paire de points symétriques ce qui nécessite **une anticipation de la position de la droite de symétrie**. La tâche précédente de tracé à main levée peut constituer une aide à cette anticipation. Si ces points symétriques sont en évidence sur la figure, c'est à dire déjà marqués, cela nécessite leur reconnaissance. S'ils ne sont pas tracés, ils doivent être eux aussi le résultat d'une construction exigeant encore la mise en œuvre de propriétés de la symétrie. Notons que ce deuxième cas est beaucoup plus difficile pour les élèves car il demande non seulement une étape de construction supplémentaire mais une étape de construction d'éléments nouveaux par rapport à ceux donnés dans l'énoncé, exigence rare dans le déroulement coutumier d'une classe de ce niveau.

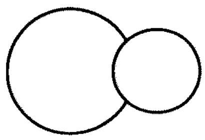
On a demandé aux élèves de tracer avec les instruments fournis les droites de symétrie de figures données sur du carton rigide. L'organisation sociale du travail était la même que dans la phase précédente. Les figures et instruments fournis étaient les suivants :

instruments **figures**

groupe de figures 1 règle graduée et équerre

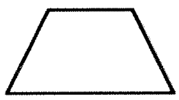


octogone

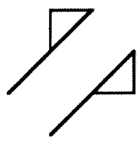


cercles sans leur centre

groupe de figures 2 règle **non** graduée et équerre

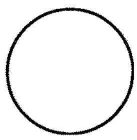


trapèze isocèle

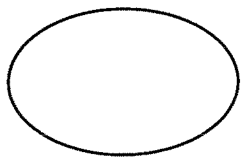


drapeaux

groupe de figures 3 règle **non** graduée et compas



cercle sans centre



ellipse avec centre

groupe 1

Tracer chacune des droites de symétrie de l'octogone pouvait être réalisé uniquement avec la règle graduée en utilisant deux paires de sommets symétriques (propriété du milieu) ou avec la règle graduée et l'équerre en utilisant une paire de sommets symétriques et l'orthogonalité au côté correspondant (propriété du milieu et orthogonalité).
En revanche la doite de symétrie des deux cercles ne pouvait être tracée qu'en utilisant à la fois la règle graduée et l'équerre en tant que perpendiculaire à la corde commune des deux cercles en son milieu

groupe 2

Pour les deux figures deux solutions se présentaient
- l'usage exclusif de la règle en utilisant les deux intersections de deux paires de segments symétriques (propriétés d'incidence)
- l'usage de la règle et de l'équerre en déterminant un point de la droite de symétrie par des propriétés d'incidence et sa direction par orthogonalité au segment joignant deux points symétriques.

Dans le groupe 1 et 2 les paires de points symétriques n'étaient qu'à reconnaître.

groupe 3

Le tracé de droites de symétrie du cercle s'obtient avec le compas et la règle simple en utilisant les propriétés d'équidistance de deux points quelconques qu'on choisit sur le cercle. Il faut donc savoir au préalable que deux points quelconques du cercle sont symétriques.
Le tracé d'une droite de symétrie de l'ellipse avec le compas nécessite la détermination d'un point autre que le centre déjà donné. Ce point est obtenu par équidistance de deux points symétriques de l'ellipse. Mais ces points sont eux-mêmes à construire en tant que points équidistants du centre de l'ellipse. Ce dernier cas est donc particulièrement complexe par les allers et retours qu'il exige entre points de l'ellipse et points de la droite de symétrie.

Finalité des situations

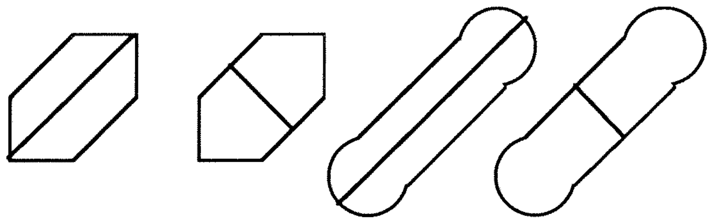
Les problèmes donnés aux élèves que nous avons cités jusqu'à présent relèvent de ce que l'on pourrait appeler une **géométrie de l'action** : le produit de l'activité est une construction. Les connaissances investies dans le problème permettent des prises de décision mais n'ont pas à être explicitées. L'apprentissage d'une connaissance exige de plus de savoir l'expliciter et éventuellement la désigner dans un langage connu des autres. Mais la formulation d'une connaissance pose d'autres problèmes que ceux de l'usage implicite de cette dernière même si les deux catégories de problèmes sont liées (Laborde, 1982). Je renvoie ici à la théorie des situations didactiques développée par G. Brousseau à propos de l'apprentissage en situation scolaire de connaissances mathématiques : l'acquisition d'une connaissance exige des phases dans lesquelles cette connaissance sert à prendre des décisions, des phases de formulation et de communication dans lesquelles la connaissance est formulée à l'intention d'autrui pour apporter des informations à cet autrui, des phases de validation dans laquelle la connaissance est utilisée pour justifier les décisions prises ou les énoncés tenus sur les objets mathématiques en jeu.

Reconnaître ou savoir construire la droite de symétrie d'une figure ne relève pas du même fonctionnement des connaissances que la désigner à l'aide de l'expression "droite de symétrie" ou décrire en mots les étapes de sa construction. "Droite du milieu" ou "droite qui partage le rectangle en deux" sont des expressions souvent employées par les élèves pour désigner une droite de symétrie du rectangle. Elles sont comprises par d'autres élèves mais elles sont aussi parfois interprétées comme renvoyant à une diagonale du rectangle. Une **situation de communication** entre élèves du type de la suivante permet leur prise de conscience de cette ambiguité et de la nécessité d'un langage commun. C'est la situation qui a été utilisée dans la quatrième phase du processus d'enseignement présenté plus haut.
A et B sont deux partenaires d'un jeu. A (resp. B) désigne un groupe de deux élèves dans la situation que nous avons réalisée (ce pourrait être un seul élève) ou un groupe plus grand d'élèves. A a une feuille de papier sur laquelle est dessinée une figure avec une droite de symétrie tracée dans une autre couleur que celle de la figure même. B a une feuille de papier sur laquelle est tracée une figure semblable de dimensions différentes mais sans droite de symétrie. Les deux partenaires ne se voient pas mais ils savent qu'ils ont des figures semblables de dimensions différentes et que la figure de A possède un élément supplémentaire. La tâche de A consiste à décrire cet élément supplémentaire dans un message écrit destiné à B pour que B puisse le reconstruire sur sa figure uniquement à l'aide du message.

Cette situation exige soit l'explicitation des propriétes de la droite de symétrie, soit l'emploi de l'expression "droite de symétrie". C'est la conjugaison de la finalité de communication et du choix des variables qui conduit à cette nécessité.

La finalité de communication est assurée par le fait qu'une activité de B est subordonnée aux informations transmises par A; B a besoin des informations données par A pour mener l'activité de tracé. Comme A et B sont partenaires, A a intérêt à veiller à la qualité de ses informations et de leur expression pour que B réussisse à l'activité de tracé.
Le choix des dimensions différentes pour les figures de A et de B empêche A de transmettre la position de la droite de symétrie au moyen de mesures et l'oblige soit à la désigner par droite de symé-

trie soit à expliciter les propriétés de cette droite. Le choix de figures possédant aussi une symétrie centrale oblige de plus A à expliciter les propriétés d'orthogonalité pour ne pas produire un message ambigu, dans lequel l'élément décrit pourrait aussi bien être une droite de symétrie qu'une droite "partageant la figure en deux parties égales" c'est à dire passant par le centre de symétrie.
Les figures utilisées ont été les suivantes :



De la construction théorique à la pratique dans la classe

Il se produit toujours des décalages entre un processus d'enseignement conçu sur le papier et sa réalisation en classe. Ces décalages nous obligent à revenir sur notre cadre théorique d'analyse. Il semblerait qu'ils soient essentiellement de deux origines, correspondant à des aspects insuffisamment pris en compte dans la théorie :
- la prise en compte trop restreinte des différences entre élèves
- la trop faible analyse a priori du rôle de l'enseignant dans le processus.

Les constructions de processus d'enseignement en didactique travaillent actuellement avec un élève générique et ne tiennent compte des différences entre élèves que pour créer des contradictions sociales entre élèves dont l'issue n'est pas assurée. Lorsqu'une activité est donnée en classe, il se produit des différences de rythme importantes entre élèves. Quelle décision doit prendre l'enseignant : attendre que tous aient terminé ou passer à l'activité suivante avant que certains aient fini. Dans la construction d'un processus, on fait l'hypothèse implicite que tous les élèves en sont au même point à la fin d'une phase avant d'aborder la phase suivante. On fait aussi l'hypothèse que les périodes d'institutionnalisation faites par l'enseignant sont unificatrices du savoir en classe mais nous ne savons rien de la manière dont les élèves les comprennent. Peut-être les effets en diffèrent-ils d'un élève à l'autre ?

Avant de réaliser une séquence d'enseignement, on essaie de prévoir les grandes décisions qu'aura à prendre l'enseignant en prévoyant différents comportements d'élèves. Mais des comportements non attendus se produisent en nombre d'autant plus grand que la séquence n'a encore été réalisée qu'un petit nombre de fois. L'enseignant a toujours à prendre des décisions à chaud dans des situations non prévues et ces décisions peuvent orienter le déroulement de la séquence d'une manière

déterminante. Là encore la didactique fait l'hypothèse implicite trop grossière d'un enseignant générique et stable (même par rapport à lui-même).
Ces pistes sont à explorer; on peut penser que la répétition d'un même processus avec analyse des décalages entre prévisions et réalisations et allers et retours entre l'analyse et la mise en pratique permettront de progresser.

REFERENCES

Balacheff N., 1985, Processus de preuve et situations de validation, *Rapport de recherche IMAG-LSD*, n° 528

Brousseau G., 1983a, Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **4**. 2, p. 164-98

Brousseau G., 1983b, Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, IMAG, LSD, Université de Grenoble, année 1982-83, n° 45, p. 183-227

Chevallard Y., 1985, *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble

Fisher N., 1978, Visual Influences of figure orientation on concept formation in geometry, in *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts*, Ed. Lesh R., Mierkiewicz D., ERIC SMEAC, p. 307-21

Gallou-Dumiel E., 1985, *Symétrie orthogonale et angles*, Thèse de 3ème cycle, Institut Fourier, Grenoble

Galvez G., 1985, *Une proposition pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire*, Thèse, Centre d'investigation de l'IPN, Mexico

Glaeser G., 1979, Neue Richtungen in der mathematikdidaktischen Forschung Frankreichs, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, pp.131-7, Hermann Schrödel Verlag KG

Grenier D., 1985, Middle school pupils conceptions about reflection according to a task of construction, *Proceedings of the ninth conference for the psychology of mathematics education*, p.183-8

Hart K., 1981, *Children's understanding of mathematics : 11-16*, Alden Press, Oxford, London and Northampton

Kidder F.R., 1978, Conservation of length : a function of the mental operation involved, in *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts*, Ed. Lesh R., Mierkiewicz D., ERIC SMEAC, p. 213-27

Laborde C., 1982, *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse d'état, IMAG, Université de Grenoble

Pluvinage F., **Rauscher J.C**, 1986, La géométrie construite mise à l'essai, *Petit x*, n° 11, pp.5-36

Schultz K., **Austin J.D.**, 1978, Variables influencing the difficulty of rigid transformation during the transition between the concrete and the operational stages of cognitive development, in *Rcent Research concerning the development of spatial and geometric concepts*, Ed. Lesh R., Mierkiewicz D., ERIC SMEAC, p. 191-211

Schultz K., **Austin J.D.**, 1983, Directional effects in transformation tasks, *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, p. 95-101, March 1983

Thomas D., 1978, Students' understanding of selected transformation geometry concepts, in *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts*, Ed. Lesh R., Mierkiewicz D., ERIC SMEAC, p. 177-93

Vergnaud G., 1981, Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **2**.2, p. 215-31

Vergnaud G., 1982, Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education : some theoretical and methodological issues, *For the Learning of Mathematics*, 3.2, November 1982, p. 31-41

Zykova V.I., 1969, The psychology of sixth grade pupils' mastery of geometric concepts, in *Soviet Studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, Vol. 1, Standford University, School Mathematics Study Group, p. 149-88.

SUR UNE APPROCHE D'APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION

A.L. MESQUITA et J.-C. RAUSCHER

Inspirés par une approche méthodologique de la démonstration proposée par Gaud et Guichard (1983 et 1984) et par une application de cette méthodologie en classe de 4ème et 3ème, nous soulevons quelques questions concernant les finalités et l'apprentissage de la démonstration.

La démonstration a eu, jusqu'à présent, une place importante dans l'enseignement de la géométrie en France, à partir de la classe de 4ème (élèves de 13-14 ans). Malgré cela, la démonstration a un statut ambigü, dans les cours de mathématiques. Elle n'a pas vraiment un statut scolaire: elle n'est pas un objet d'enseignement par elle-même, elle est accessible par imitation, aucun temps ne lui est spécifiquement alloué.

"Généralement on fait des démonstrations devant les élèves, on demande ensuite de faire pareil. On sait les difficultés rencontrées". (Compte-rendu du groupe Premier Cycle, Journées Nationales APMEP, 1979).

En fait, les finalités de la démonstration ne sont pas clairement établies. La démonstration peut être utilisée comme un instrument de validation de théorèmes; pourtant la nécessité d'un tel instrument n'est pas en général perçue par les élèves: il s'agit la plupart des fois d'une ratification de propositions antérieurement énoncées.

Indépendamment des problèmes de la place dans l'enseignement au collège, la démonstration soulève 2 grands types de questions : celles relevant de la **nature** et celles relevant de la **procédure**.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.95-109) IREM de Strasbourg

Nous incluons dans le premier groupe les questions en rapport avec la nécessité d'une démonstration, le statut des différents énoncés constituant une démonstration (axiomes, théorèmes déjà démontrés, définitions, hypothèses, conclusions), bref, avec le statut de la démonstration elle même. Dans le deuxième groupe, nous avons les questions procédurales liées à une méthodologie qui permette d'effectuer une démonstration dans un cadre préalablement fixé, et de la rédiger. Les enseignants de mathématiques en collège sont toujours confrontés aux difficultés de l'apprentissage de la démonstration. Dans les classes à partir de la 4ème, la plupart des élèves sont bloqués devant tout exercice classique de géométrie demandant de démontrer, ou de prouver, ou de justifier. Dans ce domaine les professeurs ont souvent l'impression, très désagréable, que les élèves qui savent démontrer le savent de façon naturelle et qu'on n'arrive pas à l'apprendre à ceux qui ne savent pas.

En fait, quelles sont les **difficultés** que l'on observe chez les **élèves** et quelles sont les difficultés de l'**enseignant** pour apporter une aide dans cet apprentissage ?

Les difficultés des élèves

En observant à travers sa production et ses réactions une population d'élèves confrontée à l'exercice classique que consiste à produire une démonstration on peut distinguer deux pôles autour desquels les élèves se regroupent:

> **pôle 1** : Il regroupe ceux qui ont compris de quoi il retourne. Ils savent distinguer ce qui est à demontrer des éléments qu'on peut faire intervenir pour raisonner (propriétés, hypothèses). Ils ont produit une ou plusieurs fois un raisonnement correct mais peuvent "sécher" devant un nouveau problème. Ce ne sont pas nécessairement les élèves les plus volubiles. Ils ne parlent ou n'écrivent que lorsqu'ils sont assurés d'une articulation correcte du raisonnement. L'exercice a un sens pour

eux. Bref, ces élèves ont saisi la nature d'une démonstration, même s'ils ont des difficultés d'ordre procédural pour trouver et rédiger une démonstration.

pôle 2 : Il regroupe les élèves qui produisent un discours mêlant les hypothèses, la conclusion, les constatations visuelles prouvant ainsi qu'ils n'ont pas encore fait leur la nécessité et les règles d'une démonstration en géométrie. Pour ces élèves, les difficultés sont liées soit à la nature de la démonstration, soit aux méthodes à employer.

Les difficultés de l'enseignant

Comment aider au mieux les élèves des deux pôles ? Le problème est que toutes les aides classiques (exposé-corrigé de la démonstration, guidage par un dialogue à visée maïeutique) semblent échouer : les élèves du pôle 2 n'intégrent pas la nécessité de la démonstration, c'est le maître qui en reste propriétaire exclusif contre son gré; pour les élèves du pôle 1 c'est aussi le maître qui les désaisit de la tâche qu'ils avaient à accomplir et mène la démonstration à leur place. Bien au contraire d'un progrès, de ces aides semble parfois résulter un mimétisme qui s'attache à un semblant qui n'a rien de logique même s'il en revêt le langage. En général, on cache aux élèves **la partie heuristique du travail**, n'en restituant que le produit final rédigé alors que l'essentiel des difficultés se situe déjà en amont de cette tâche.

D'où notre interêt pour l'étude de Gaud et Guichard. Confrontés à un vaste échec des élèves face à la démonstration, Gaud et Guichard ont essayé de mettre en oeuvre des stratégies d'apprentissage de la démonstration. Ces stratégies d'apprentissage se centrent sur des aspects procéduraux de la démonstration, en particulier en essayant d'éclaircir des aspects heuristiques. L'un d'entre nous -Jean-Claude Rauscher- a appliqué dans ses classes de 4ème et 3ème une méthodologie inspirée par celle de Gaud et Guichard, dans l'espoir de pouvoir apporter une aide efficace à ses élèves.

Deux hypothèses de travail de Gaud et Guichard ont attiré notre attention. Une de ces hypothèses est la reconnaissance de difficultés de plusieurs ordres dans une démonstration: la recherche et la rédaction d'une démonstration ont leurs difficultés spécifiques. D'où la séparation, proposée dans leur méthodologie, de ces 2 moments. "La difficulté d'une démonstration est double: logique et rédactionnelle. Il est donc bon de séparer les deux moments au niveau de l'apprentissage" (p.7).
En fait, dans la plupart des classes, la rédaction d'une démonstration se fait en même temps que sa recherche, en accumulant des obstacles heuristiques, de recherche d'une démonstration et d'articulation des raisonnements, à des critères stricts de mise en forme et d'organisation d'une rédaction.

L'autre hypothèse est l'importance donnée aux méthodes de démonstration et à l'explicitation de ces mêmes méthodes en classe. "L'important, en géométrie de 4ème, c'est la méthode. Donc le choix des exercices doit être guidé par les méthodes mises en jeu (comment démontrer que...)." (p.7).

Pour Gaud et Guichard, la démonstration devient donc un objet d'enseignement par elle-même, avec l'explicitation de méthodes normalement utilisées et avec la pratique d'exercices d'application de ces méthodes, développant le savoir-faire des élèves. Cette importance se traduit par la mise en évidence de méthodes souvent utilisés en géométrie, et la création, par les élèves, de fichiers "méthodologiques".

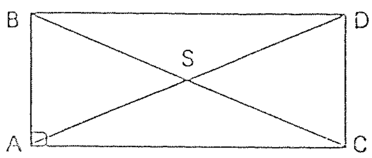
Leur méthodologie vise l'appropriation par les élèves de certaines formes de raisonnement déductif, comme le raisonnement par conditions suffisantes: à partir des conclusions, le but est de trouver des énoncés qui l'impliquerait et ainsi successivement, jusqu'à rencontrer les hypothèses de départ.[1]

(1) Notons que Gaud et Guichard se sont centrés en certaines formes de raisonnement déductif, récurrent, en excluant volontairement le raisonnemnt par l'absurde ou par contraposition, pas exemple.

Sur une approche d'apprentissage de la démonstration

Nous mentionnons ici un exemple cité par Gaud et Guichard:

> ABC est un triangle rectangle en A. S est le milieu de [BC] et D le symétrique de A par rapport à S.
>
> Démontrons que ABCD est un rectangle.



Une première étape de recherche de la démonstration, après l'identification des données (hypothèses/ conclusions) consiste à "faire faire [aux élèves] cette recherche en leur faisant reconstituer eux-mêmes l'organigramme de la démonstration au moyen de pièces de puzzles qu'ils fabriquent eux-mêmes". (p. 10).

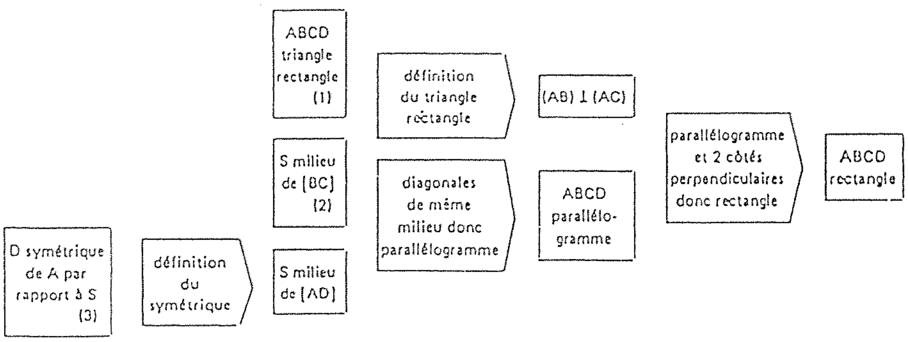
En utilisant la disposition suivante:

Données :	Conclusion :
ABC triangle rectangle en A (1)	
S milieu de [BC] (2)	ABCD rectangle
D symétrique de A par rapport à S (3)	

(p.11)

"Partant de la conclusion, il [l'élève] cherche les étiquettes [...] permettant d'avoir cette conclusion: il en choisit une, en guidant son choix: il compare les hypothèses mises en jeu dans l'énoncé et celles de son exercice mises en évidence sur sa figure et écrites sur ses étiquettes. Il essaie et remonte ainsi petit à petit la chaîne". (p. 11).

Pour pouvoir démontrer que ABCD est un rectangle, les élèves utilisent le fichier méthodologique, et choisissent, face aux données dont ils disposent, quel est la manière la plus appropriée. Et ainsi successivement. A la fin les élèves devront aboutir à un diagramme du type suivant :



(p.12)

"Par la réalisation concrète et pas à pas de son organigramme, l'élève voit où il en est de sa refléxion, peut controler ce qu'il a fait, oublier pour un temps ce qu'il a fait pour se consacrer au nouveau problème à résoudre" (p. 11); dans ce cas, par exemple, le nouveau problème serait vérifier que ABCD est un parallèlogramme.

Après la recherche de la démonstration, sa rédaction sera faite, à partir d'une transcription de l'organigramme.

Une application de la méthodologie de Gaud et Guichard

Les éléments essentiels que nous avons retenus de cette méthodologie pour travailler avec nos élèves sont les suivants:

* constitution d'une liste d'énoncés et de méthodes disponibles en géométrie.(1)
* analyse des énoncés d'exercices en dressant la liste d'hypothèses et la conclusion.
* recherche récurrente de l'articulation logique à partir de la conclusion.

Au cours de ce travail quelles ont été les réactions des élèves et quels ont été les progrès constatés ?

Les élèves qui avaient déjà compris de quoi il retournait dans une démonstration de géométrie, c'est-à-dire, les élèves du premier pôle *n'ont pas eu de difficulté particulière à entrer dans le jeu.* A noter quand même quelques réactions d'étonnement devant cette proposition de recherche récurrente jugée inutile. Mais la plupart se sont appropriés de cet outil pour la recherche de la solution et pour la rédaction lesquelles s'en sont apparement trouvées facilitées. Ainsi les confusions entre un énoncé et sa réciproque ont-elles diminuées.

Par contre pour *les élèves qui n'avaient pas compris* la nature d'une démonstration -ceux du deuxième pôle- *cette méthode a apporté peu de progrès car elle même évidemment n'a pas été comprise.* Dans un sens direct, ou dans un sens récurrent la démonstration reste un

(1) *Précédamment, les élèves avaient été mis en contact avec des exercices amenant à conjecturer et argumenter (problèmes de dénombrement par exemple).*

objet mystérieux. A noter néanmoins l'un ou l'autre élève qui s'est exclamé: "mais c'est absurde, on peut faire cela à l'endroit". Peut-on interpréter cette exclamation comme une compréhension et une intégration globale de la notion de démonstration par l'effet de la procédure mise en place?

Une première conclusion a été que cette méthodologie permet surtout des progrès aux élèves qui connaissent déjà les règles en jeu dans une démonstration. Très rares sont ceux qui acquierent cette conscience à travers elle, bien que ce ne soit pas à exclure dans quelques cas.

La méthode apporte donc une aide à une partie seulement du travail heuristique qui est à accomplir par les élèves.

Il nous semble que la méthodologie proposée aide - une fois identifiées les hypothèses et les conclusions, et le "stock" de théorèmes dont l'utilisation est permise- à établir une articulation logique entre les hypothèses et la conclusion, et, dans une 2ème phase, à effectuer la rédaction de la démonstration.

Il reste d'autres questions importantes où se posent de grandes obstacles didactiques liées à la nature de la démonstration, comme l'identification des hypothèses et des conclusions, le stock de théorèmes à utiliser. Dans ces questions la méthodologie de Gaud et Guichard nous semble insuffisante. Nous avons donc été incités à chercher des techniques de maîtrise de l'apprentissage de la démonstration qui faciliteraient la appropriation de l'enjeu. Ces questions sont, à notre avis, des préalables à l'apprentissage de la démonstration, et à l'utilisation de la méthodologie de Gaud et Guichard.

Quelques refléxions sur la démonstration...

Nous soulevons maintenant quelques unes de ces questions, résultantes de refléxions sur le travail de Gaud et Guichard, et de l'application en classe de leur méthodologie.

1) Finalités de la démonstration;

2) Rôle de la figure;
3) Explicitation des hypothèses.

1) Finalités de la démonstration

Dans le travail de Gaud et Guichard nous rencontrons une phase de sensibilisation à la démonstration. Cette phase se base sur les illusions d'optique amenant à un certain discrédit de la perception. Autrement dit, le message sous-jacent est celui de l'incertitude résultant de la vue et donc de la nécessité d'une approche d'autre type pour pouvoir faire des affirmations. "Il faut alors donner les "raisons" et pour cela utiliser les propriétés connues dont on dressera la liste au fur et à mesure. Dans ce cas on vise la démonstration comme outil de preuve." (p.9)

Il nous semble que l'apparition de la démonstration comme issue dans ce type de situations ne constitue pas une activité suffisament motivante pour un éveil à la démonstration.

En fait, dans la plupart des propositions à démontrer proposées par Gaud et Guichard la démonstration viendra, au plus, ratifier des affirmations, voire des connaisssances acquises par d'autres procédures. La démonstration apparaît alors comme un discours superflu: elle n'aura pas le statut de "outil de preuve" attendu par Gaud et Guichard.

Des situations que nous avons utilisées ailleurs (Mesquita, à paraître) nous semble plus appropriées à saisir la nature d'une démonstration. Nous avons travaillé avec des situations où les démarches de découverte et de démonstration peuvent être simultanées, c'est-à-dire, où les démarches pour découvrir une conjecture sont suffisantes pour la démontrer. Autrement dit, plusieurs conjectures étaient possibles et seules des démarches de démonstration pouvaient faire le tri parmi ces conjectures. Dans ce type de situations, où il s'agissait de comparer des aires de 2 rectangles, la démonstration a simultanément une fonction de choix et de preuve. Sa finalité y apparaît plus nettement; son utilité est perçue. La démonstration, au lieu d'être une forme de discours scolaire, vide de sens, est alors remplacée par une autre conception, celle d'instrument d'acquisition de connaissances.

Une autre spécificité de la situation que nous avons traitée est la possibilité de recours à des démarches de calcul basées sur la mesure. Mais ces démarches ne sont pas suffisantes non plus pour aboutir à une preuve de la conjecture, et la situation en question permet la confrontation entre ces deux démarches. La démarche de démonstration s'impose alors par son efficacité.

Un autre point de vue abordé par Gaud et Guichard est la question du statut des énoncés.Ils essayent de transmettre en classe le statut que les énoncés (théorèmes, définitions, axiomes) ont pour les mathématiciens. En fait, le statut des énoncés -uniques instruments admis dans la démonstration - est ici placé dans une perspective de droit : il s'agit de donner un pouvoir spécial à certains énoncés, qui sont les seuls instruments qu'on puisse utiliser. Le pourquoi de cette discrimination n'apparaît pas évidente aux yeux des élèves.

2) Le rôle de la figure

Dans une de leurs étapes, Gaud et Guichard mentionnent le dessin de la figure comme une des phases de leur méthodologie. Néanmoins, aucun emphase en est donné, et la réalisation du dessin semble apparaître comme une étape mineure, dans l'approche proposée.

Le rôle de la figure n'est pourtant pas neutre. A une situation peut être en effet associée plus qu'une figure. En d'autres cas, les figures doivent subir des modifications méréologiques (Duval, 1988), c'est-à-dire, des transformations résultantes de l'adjonction de traits sur la figure, préalables à une résolution.

La figure peut être congruente sémantiquement avec le texte du problème (Duval,1988), c'est-à-dire, la figure et le texte peuvent en évidence les mêmes objets, ou non. Le type de raisonnement developpé dans un cas ou dans un autre ne sont pas les mêmes.

D'autre part, la perception de la figure peut avoir une influence dans le type de raisonnement développé. Nous montrons que le rôle joué par la figure peut être une variable importante: ce rôle peut être heuristique, dans le sens qu'il peut conditionner le type de raisonnements développés (Mesquita, à paraître). Le rôle de l'appréhension opératoire de la figure peut conditionner le type de raisonnements développés. Certaines appréhensions peuvent en effet amener à des résolutions plus ou moins immédiates, tandis qu'autres peuvent entraîner des formes de raisonnement plus indirectes.

3) Explicitation des hypothèses

Un des points qui nous semble sous-estimé dans le travail de Gaud et Guichard est celui des potentialités du tracé de la figure, et en particulier en ce qui concerne l'explicitation des hypothèses.

Les observations que nous avons menés (Pluvinage et Rauscher, 1986) suggèrent que "la perception et la capacité de prise en compte des caractéristiques d'un énoncé ou d'une figure sont probablement plus importantes que la connaissance des concepts géométriques et des structures" (p. 9). Ces observations suggèrent encore que la "simple perception de caractéristiques du tracé demande parfois une analyse qui ne s'en tient pas aux apparences"; cela requiert des compétences qui peuvent être développées. Ces compétences se situent à 2 niveaux:

- "au premier niveau, il y a possibilité de procéder à l'**identification**, la **répresentation** ou la **désignation** des objets géométriques en jeu ;

- au second niveau, il y a possibilité de procéder à une exploration des contraintes de la situation (par exemple en traçant plusieurs figures pour les comparer). Ce n'est bien sûr qu'au second niveau que la notion d'hypothèse peut émerger pour les élèves." (pp. 9-10).

Autrement dit, l'activité de tracé de la figure dépasse largement le cadre d'un tracé mécanique, en permettant par l'articulation du tracé de la figure et de la prise en compte des caractéristiques de l'énoncé, l'explicitation de ces mêmes hypothèses.

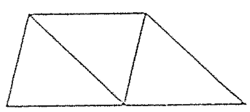
Le tracé de la figure ne doit pas être consideré d'une façon isolée, mais en interaction systématique avec l'énoncé.

Quelles sont précisement les difficultés inérantes aux exercices classiques de géométrie proposant un énoncé décrivant une figure ou une construction suivi d'une proposition plus ou moins suggérée à démontrer ?[(1)] L'élève a à sa charge la production d'une figure. Ce n'est qu'ensuite que vient la démonstration. Or en réalisant sa figure un élève ne prend pas forcément une conscience claire des hypothèses contenues dans l'énoncé. Au fur et à mesure que la figure se réalise, les contraintes de la figure peuvent être oubliées. A leur place peut surgir par la suite l'évocation des constatations visuelles qui ne font pas partie des hypothèses. Ensuite tout naturellement dans ce cas, l'élève a du mal à réaliser que la proposition dont la justification est demandée résulte bien des hypothèses. Ainsi la réalisation d'une figure n'est pas de nature à conduire les élèves à prendre conscience du jeu des contraintes de l'énoncé, s'ils ne l'imaginent pas d'eux-même. L'exercice suivant est un exemple de ce qui peut être envisagé dans ce domaine.
Il s'agit, pour les élèves, de placer les lettres sur une figure donnée pour satisfaire un énoncé donné:

Enoncé :

Partant d'un parallélogramme ABCD, on mène par C la parallèle à la diagonale DB. Cette parallèle coupe en E la droite AB.

Figure :



(1) Dans l'équipe de l'IREM de Strasbourg du "Suivi scientifique des nouveaux programmes", nous avons continué à baliser la piste ouverte par les travaux de l'IREM de Poitiers

Nous l'avons pratiqué en 5ème et 4ème (IREM de Strasbourg, 1987, p. 135). Les élèves ont droit à plusieurs essais. Tenant alternativement compte de l'une ou de l'autre contrainte de l'énoncé, les élèves échouent et prennent conscience qu'il faut réussir à les rendre compatibles. Cette activité préalable facilite, d'après nos observations, les raisonnements ultérieurs où il s'agit d'articuler correctement hypothèses et propriétés, ces dernières étant à choisir dans un lot proposé, comme dans la méthodologie de Gaud et Guichard.

CONCLUSION

L'étude de Gaud et Guichard nous a permis de clarifier pour nous-même certains aspects de la démonstration, et de son apprentissage.

Il nous semble que le travail de Gaud et Guichard est essentiellement **discursif,** dans le sens qu'il s'agit d'agencer, enchaîner convenablement une suite d'énoncés de façon à qu'on prouve, c'est-à-dire, qu'on passe des conclusions aux hypothèses. Le travail sur la démonstration se situe alors au niveau du discours, et de sa soumission à des règles de déduction bien précises. Mais le problème de la démonstration est en grande partie le problème de la construction des structures logiques. Piaget (1978) nous montre que la pensée verbale constitue le dernier palier de la construction de ces structures. La méthodologie de Gaud et Guichard concerne ce dernier palier, et il nous semble que tout un travail basé sur l'action doit se situer en amont d'un travail discursif.

Le travail de Gaud et Guichard, s'il permet une aide d'un point de vue procédural, de liaison des hypothèses aux conclusions, à partir de la conclusion, en utilisant un corpus d'énoncés admis, ne permet pas une entrée dans les questions, plus délicates, qui relevent de la nature d'une démonstration. En fait, leur méthodologie est destiné à quelqu'un qui a déjà compris qu'est-ce que c'est une hypothèse, et une conclusion. Il nous semble qu'un travail préalable pour lequel nous avons évoqué quelques pistes, est nécessaire.

En outre, l'option prise par Gaud et Guichard de centrer leur méthodologie sur un raisonnement du type récurrent, suscite certains doutes. Certes, selon Glaeser (1971), les "élèves abordent moins spontanément la recherche des raisons suffisantes et y réussissent moins bien" (p.108). Cela n'empêche pourtant pas qu"un effort pédagogique particulier s'impose pour développer l'aptitude à raisonner par conditions suffisantes" (p.108). En fait, on peut penser que si on va de A à B, c'est important savoir où est B, et alors établir une stratégie pour atteindre B. Mais c'est aussi indispensable de prendre en compte la position de A. En fait, cette stratégie entraîne un autre problème, qui est celui de la **réduction,** c'est-à-dire, du découpage du problème en sous-problèmes, en principe plus faciles. Et cela pose aux débutants des problèmes eventuellement plus délicats encore que le problème initial.

REFERENCES

APMEP, 1979, Compte-rendu du groupe Premier Cycle, Journées Nationales APMEP.

R. DUVAL , 1988, Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactique et Sciences Cognitives , (p.57-74).*

D. GAUD et J.-P. GUICHARD, 1983, Pour apprendre à démontrer. Publication IREM de Poitiers.

D. GAUD et J.-P. GUICHARD, 1984, Apprentissage de la démonstration, *Petit x, 4,* 5-25.

G. GLAESER, 1971, *Mathématiques pour l'élève professeur,* Hermann, Paris.

IREM de STRASBOURG, 1987, Le développement de compétences pour la géométrie, Suivi scientifique des nouveaux programmes 1986/1987, *Bulletin Inter-IREM, 125-138.*

A.L. MESQUITA, (à paraître), Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie.

J. PIAGET, 1978, *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant* (8ème ed.), Delachaux et Niestlé, Paris .

F. PLUVINAGE et J.-C. RAUSCHER, 1986, La géométrie construite mise à l'essai, *Petit x, 11,* 5-36.

POUR UNE ANALYSE MULTI - CRITERES D' ACTIVITES DE PROGRAMMATION EN LOGO

C. DUPUIS, M-A. EGRET, D.GUIN

L'analyse de l'activité de programmation ne peut se faire sans la définition de critères. Les auteurs définissent ces critères et les appliquent aux observations de l'apprentissage du Logo par des élèves de 13-15 ans.

1 . INTRODUCTION .

L'introduction de l'informatique dans l'enseignement , depuis quelques années déjà , a suscité de nombreux travaux de recherche en didactique , psychologie et sciences de l'éducation . On peut y distinguer deux domaines de recherche :

– l'informatique considérée comme une discipline ou l'informatique " **objet** ".
– l'informatique intervenant dans d'autres disciplines ou l'informatique " **outil** ".

Nous nous intéressons ici essentiellement à la première approche : notre étude est axée sur l'informatique **"objet"** et les problèmes que pose, aux élèves, l'apprentissage d'un langage de programmation .

L'analyse des activités de programmation comprend l'analyse a priori des situations-problèmes , de la tâche demandée à l'élève , mais aussi l'analyse a posteriori des stratégies de résolution des élèves . **La définition de critères d'analyse nous paraît indispensable pour la communication et la comparaison des recherches expérimentales menées dans un même domaine .**

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.111- 130) IREM de Strasbourg

Pour une analyse multi-critères d'activités de programmation en Logo

" Plus que les résultats de recherche, ce sont sans aucun doute les méthodes qui peuvent être les plus utiles pour les enseignants , non pas les méthodes de " preuves " des résultats mais plutôt les **méthodes d'analyse des situations** proposées aux élèves , à la fois lorsqu'il s'agit d'introduire des notions et quand il s'agit d'évaluer des acquisitions " (J. Rogalski , 1986) .

Notre propos est de présenter ici , sur une situation et une classe d'élèves , les critères d'analyse que nous avons définis au cours de notre expérimentation . Nous travaillons avec une classe de 4 ème de 19 élèves (13-15 ans) . Les élèves suivent une heure hebdomadaire d'informatique (leur horaire de mathématique est de 4 heures par semaine) . Cette heure supplémentaire est assurée par leur professeur de mathématique . La première partie de l'expérimentation , qui est celle qui nous intéresse ici , a consisté en un enseignement de base du langage Logo , graphique et non graphique , en insistant sur la structuration des programmes .
Un compte - rendu détaillé se trouve dans la brochure Logo 3 . Programmation structurée : Présentation et Analyse de situations (C. Dupuis, M. - A. Egret , D. Guin , 1987) .

Cette étude s'intègre dans un ensemble de recherches de l'IREM de Strasbourg liées à l'introduction de l'informatique dans le système scolaire . Elle a été menée dans le cadre du GRECO " Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques " du CNRS qui coordonne le travail de plusieurs équipes de recherche sur la Didactique des Mathématiques et de l'Informatique .

2 . POURQUOI DES CRITERES D'ANALYSE ?

2 . 1 Qu'est - ce qu'un critère d'analyse ?

L'idée de critère d'analyse , dans une recherche expérimentale en didactique , est proche de celle de variable qualitative avec le sens que lui donnent les statisticiens en analyse des données . Une variable qualitative à modalités est **une application de l'ensemble des individus dans l'ensemble des modalités** . Dans notre recherche , un individu est un programme écrit par un élève . Ce pourrait être aussi un ensemble de programmes écrits par le même élève . La définition de chaque variable - critère et de ses modalités induit une **partition de l'ensemble des individus** et permet donc d'expliciter, au - delà des différences apparentes ou superficielles , ce que certains programmes ont en commun .

2 . 2 Au - delà de la réussite ...

Il n'est guère raisonnable de se contenter d'observer seulement **la réussite ou l'échec** , sauf sur une tâche ponctuelle . D'une part , la réussite peut , en programmation comme en mathématique , être le résultat de stratégies fort différentes . D'autre part , l'échec peut avoir des causes diverses que les critères d'analyse doivent distinguer à partir des indicateurs que sont les productions des élèves .

" Les critères d'analyse ne sont pas fondés sur la proximité de la réponse avec le réalisme graphique de la réponse correcte , mais sur la nature des processus psychologiques en jeu inférée à partir des productions" (P. Mendelsohn , 1985) .

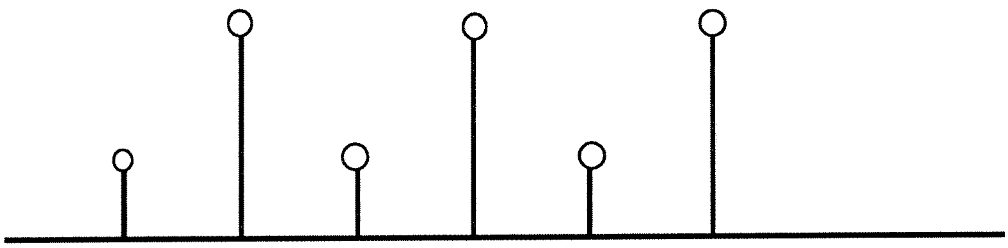
2 . 3 Une analyse multi - critères .

La complexité de la tâche de programmation nécessite la définition de plusieurs critères d'analyse . Chaque critère qui intervient dans l'analyse reflète un des aspects de l'activité.Il faut veiller cependant , à **l'indépendance des critères** qui se traduit par la possibilité, a priori , d'associer n'importe quelle modalité d'un critère donné avec n'importe quelle modalité d'un autre critère pour constituer le **profil d'un individu** .

3 . LA SITUATION .

Nous illustrerons les critères en vous présentant un test individuel , baptisé BALLONS , réalisé au bout de seize heures de pratique active de la programmation . Ce test avait déjà été proposé à des élèves dans des conditions d'expérimentation différentes (J. Hillel , R . Samurçay , 1985) . Nous voulions comparer les résultats pour voir l'impact de notre enseignement de la programmation structurée . Les élèves ont pour consigne d'écrire le programme permettant de réaliser à l'écran un dessin semblable à celui-ci :

****



ATTENTION aux remarques suivantes :

–les distances entre les pieds des tiges sont égales .
– les cercles ont tous le même rayon .
–il y a deux longueurs de tiges .

****

Il est possible d'écrire un programme Logo permettant de réaliser à l'écran ce dessin en pilotant la tortue de façon à ce qu'elle suive fidèlement le tracé . Dans ce cas , on utilise seulement les instructions qui constituent le vocabulaire initial du langage Logo .

Ce type de programme n'utilise pas une des grandes richesses du langage Logo qui est la possibilité de structurer son programme en le décomposant en " procédures " que l'utilisateur définit lui - même : une **procédure** est une suite d'instructions associées par l'utilisateur à un mot qui devient alors le **nom** de la procédure . La réalisation du projet d'ensemble implique la **coordination** des procédures ainsi définies . Nous appelons **interface** une procédure (ou suite d'instructions) intermédiaire définie par l'utilisateur pour réaliser la coordination entre deux procédures .

A titre d'exemple , voici un ensemble de procédures réalisant le projet BALLONS :

Pour illustrer notre propos , nous représenterons les procédures par leur exécution . Plus exactement , il s'agit d'un schéma d'exécution puisque nous faisons figurer les positions initiale et finale de la tortue alors qu'elles ne peuvent apparaître simultanément à l'écran. Dans les schémas d'exécution , nous représentons la tortue par un triangle permettant de visualiser sa position et son orientation :

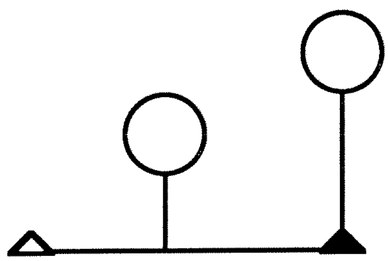
△ **tortue orientée vers le haut**
(cap 0)

▷ **tortue orientée vers la droite**

▽ **tortue orientée vers le bas**

Le projet d'ensemble BALLONS peut être décomposé de la manière suivante :

DESSIN



△ **position initiale**

▲ **position finale**

DESSIN est répété trois fois et suivi de TRAIT :

50

 **: position initiale**

 **: position finale**

```
POUR TRAIT
TD 90
AV 50
TG 90
FIN
```

```
POUR BALLONS
REPETE 3 [ DESSIN ]
TRAIT
FIN
```

Le DESSIN lui - même est décomposé en deux procédures INTERFACE identiques , réalisant les déplacements horizontaux de la tortue et deux procédures BALLON : L dans lesquelles la longueur L de la tige ne sera pas la même .

POUR DESSIN
INTERFACE
BALLON 10
INTERFACE
BALLON 30
FIN

INTERFACE

20

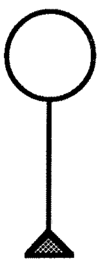
 **: position initiale**

 **: position finale**

<u>POUR INTERFACE</u>
TD 90
AV 20
TG 90
<u>FIN</u>

<u>POUR BALLON :L</u>
AV :L
TD 90
POLY 2 36
TG 90
RE :L
<u>FIN</u>

exemple : BALLON 10



L = 10

 **positions initiale et finale confondues**

La procédure POLY , qui permet d'obtenir un cercle , a un statut particulier car elle a été écrite au préalable dans un autre contexte (voir § 4.2.2.) .

```
POUR POLY :COTE :NB
REPETE :NB [ AV :COTE  TG 360 / :NB ]
FIN
```

L' enseignement préalable était résolument orienté vers la structuration des programmes . Nous avons recherché des situations - problèmes où la structuration soit ressentie non comme une contrainte supplémentaire imposée par l'enseignant mais comme une stratégie économique de résolution du problème .

Dans le test BALLONS , la figure est présentée sans indication de positions initiale ou finale de la tortue ni de décomposition . Aucune consigne supplémentaire n'est donnée . Les choix des procédures de décomposition et de coordination sont donc à la charge de l'élève . Nous voulons observer les stratégies de programmation des élèves et savoir , parmi les outils de programmation mis à leur disposition dans l'enseignement , ceux qu'ils choisiront d'utiliser .

4 . DEFINITION DE SIX CRITERES D ' ANALYSE .

Nous aborderons successivement les stratégies de décomposition , le traitement de la coordination , l'utilisation des procédures POLYGONE pour tracer les cercles , le traitement de la répétition , la décomposition en sous - procédures et l'utilisation de variables .

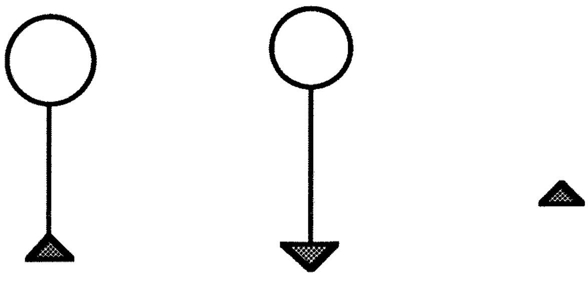
4 . 1 Stratégies de décomposition : le critère ETAT .

L'état de la tortue se caractérise par sa position et son orientation . Nous distinguerons ici trois types de **PRISE EN COMPTE DE L' ETAT DE LA TORTUE A LA FIN** d'une procédure graphique (ou d'une liste d'instructions) destinée à être intégrée à un projet . Ces trois types constituent les trois modalités du critère ETAT .

Première modalité du critère ETAT : " PS " .

A la fin de la procédure , il y a un RETOUR A UNE **POSITION** " STANDARD ". Une position **" standard "** est une position à partir de laquelle la **coordination** de cette procédure avec les autres est **économique** (Il s'agit souvent de la position initiale) . Dans ce cas , il est évident que l'élève a pris en compte l' **état de la tortue** à la fin de la procédure ; la coordination nécessite l'utilisation d' **interfaces** hors de la procédure .

Voici deux exemples de procédures de cette modalité dans la situation du test BALLONS .



positions initiale et finale confondues

Pour réaliser le projet complet , l'élève doit dans ce cas écrire une interface. Les interfaces correspondant respectivement aux deux procédures visualisées ci - dessus peuvent être représentées ainsi :

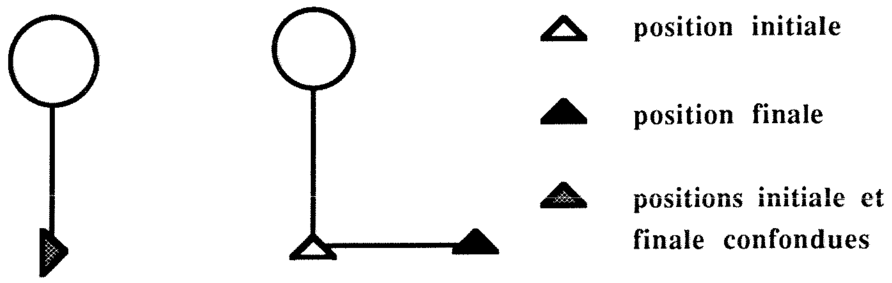
position initiale

position finale

L' utilisation de positions " standard " confère à la procédure un caractère de généralité , d' indépendance du contexte et facilite une éventuelle réutilisation dans d'autres projets .

Deuxième modalité du critère ETAT : " INT " .

L 'INTERFACE EST **INTEGREE** à la procédure . Voici deux exemples de procédures de cette modalité dans la situation du test BALLONS .



Dans ce cas aussi , il est évident que l'élève a pris en compte l'état de la tortue à la fin de la procédure .

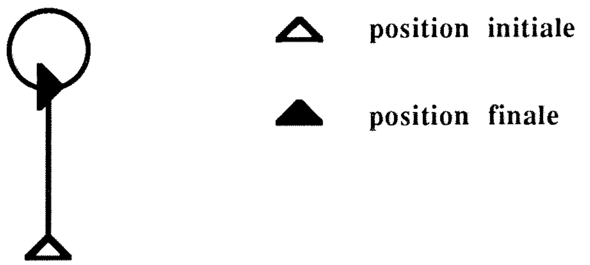
La réutilisation d' une telle procédure dans un autre contexte peut être difficile .

La distinction faite ici entre deux stratégies ne signifie pas pour nous que l'une est la " bonne " et l'autre la " mauvaise " : suivant la situation , l'une ou l'autre peut être la plus économique pour résoudre un problème précis (cf . projet BALLONS) . Mais dans une perspective de travail à long terme et d' **utilisation de procédures hors du contexte** où elles ont été écrites , seul le **retour systématique** à une position **" standard "** est raisonnable .

Troisième modalité du critère ETAT : " SANS " .

AUCUN RETOUR A UNE POSITION " STANDARD " ne figure dans la procédure . Aucun mouvement de la tortue n'est effectué en plus de ceux qui sont nécessaires au tracé .

Voici un exemple de procédures de cette modalité dans la situation du test BALLONS :



4 . 2 Le traitement de la coordination .

Le problème de la coordination des procédures se pose dès qu'il y a décomposition en procédures . La difficulté de la coordination se manifeste ici à deux reprises et de manières fort différentes : d'une part , dans la coordination des procédures résultant de la décomposition que chaque élève a choisie dans ce contexte ; d'autre part , dans la réutilisation , pour tracer les cercles , d'une procédure écrite dans un autre contexte . Cette **différence fondamentale de contexte** nous a conduites à définir deux critères différents :

le critère COORDINATION , qui permet d'analyser le traitement de la coordination entre des procédures de décomposition conçues et écrites dans le contexte où elles sont coordonnées.

le critère COORDINATION HORS CONTEXTE , qui permet d'analyser le traitement de la coordination lors de la réutilisation d'une procédure conçue et écrite dans un autre contexte. Il s'agit ici de la procédure utilisée pour tracer les cercles .

4 . 2 . 1 Le critère COORDINATION .

Les **modalités** du critère COORDINATION sont :

"0" : la coordination des procédures N'EST PAS REALISEE .
"C " : le programme est CORRECT .

Nous distinguerons **deux types d'erreurs** dans la coordination des procédures :

" **ES** " : le programme présente des **erreurs simples** d'interface , comme des erreurs de latéralisation , des erreurs sur la valeur d'un angle ou sur les relations entre des longueurs .
" **EC** ": le programme présente des **erreurs de conception** , comme celles qui résultent d'une conception " image " de la procédure .

Nous désignons par **conception " image "** une identification de la procédure avec le tracé souhaité ou la figure obtenue . L'élève considère la procédure comme un moyen d'obtenir un résultat et non comme une suite d'instructions modifiant (éventuellement) l'état de la tortue . Les premiers programmes des élèves reflètent tous cette conception qui est à rapprocher de leur propre expérience du dessin à la main : pour tracer un trait , il est inutile de savoir où et dans quelle position s'est arrêté le crayon après le tracé précédent .

Cette conception ne peut se repérer uniquement dans l'écriture des procédures . Elle ne peut être observée qu'au moment où l'élève veut coordonner ses procédures . Deux situations sont caractéristiques de cette conception :

- l'élève n'écrit aucune instruction pour coordonner ses procédures alors qu'il n'a pas intégré l'interface aux procédures.

- l'élève écrit une interface supposant un retour à une position "standard" alors qu'il n'a pas fait de retour à une position " standard " .

En principe , le problème de la coordination ne se pose pas si l'élève écrit un programme sans aucune procédure ou instruction , comme REPETE , qui résulte d' une structuration ; mais cette attitude ne s'observe qu'au début de l'apprentissage de la programmation ou pour des programmes très simples . De sorte que , pour ne pas mutiplier les codages , nous utiliserons le critère COORDINATION , par extension dans ce cas rare .

4 . 2 . 2 Le critère COORDINATION HORS CONTEXTE (CHC) .

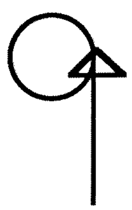
Pour tracer des cercles (approximation par des polygones réguliers) , les élèves disposent de deux procédures écrites dans leurs cahiers:

POLYGONE1 : longueur du coté : nombre de cotés et
POLYGONE2 : longueur du coté : angle .

En effet , nous avions travaillé , lors d'une séance précédente , à l'écriture de procédures permettant de tracer un polygone régulier quelconque , puis un cercle . Tous les élèves ont utilisé l'une ou l'autre des procédures POLYGONE pour tracer les cercles dans la situation BALLONS .

Mais POLYGONE1 et POLYGONE2 sont deux procédures qui ont été conçues, écrites, et exécutées pour répondre à une tâche particulière : le dessin d'un polygone , puis d'un cercle isolé . Les élèves n'avaient pas eu l'occasion de les intégrer dans d'autres projets . Il semble bien que , dans ce cas , la **conception " image "** de la procédure , c'est - à - dire l'identification du cercle avec la procédure POLYGONE , domine chez tous les élèves . Ceci se repère aux faits que :

- Dans la première écriture de leurs programmes BALLON , **aucun élève n'a écrit d' interface** entre les procédures de la tige et du cercle . Leurs cercles étaient donc tous **tangents** à la tige , puisque la position initiale et finale de la tortue est tangente au cercle.



- Au moment de l'exécution , la réaction générale a été la surprise . Les élèves ne s'étaient pas posés la question de la **coordination** à cet endroit alors que tous se préoccupaient de coordination entre **leurs** procédures BALLON .

Ces problèmes de **prise en compte de l'état de la tortue** à la fin de la procédure et de **coordination** ne sont donc pas exactement de même nature que ceux qui se posent entre deux procédures qui ont été conçues et écrites pour être coordonnées . La coordination d'une procédure écrite dans un autre contexte peut nécessiter un retour en arrière sur la procédure et un enrichissement de la conception de cette procédure .

C'est pourquoi le problème des cercles est traité à part . Tous les autres critères sont observés **en dehors de la procédure éventuellement utilisée pour tracer les cercles** . Les modalités du critère CHC figurent dans l'annexe 1 .

4 . 3 Un critère pour la répétition .

L'élève peut choisir d'utiliser ou non l'instruction REPETE . S'il l'utilise , il doit déterminer la séquence à répéter et le nombre de répétitions . Mais là encore il a un choix car le traitement de la répétition peut se faire de la manière suivante :

liste d'instructions puis REPETE [la même liste d'instructions] .

Ce type d'écriture de la répétition , que nous avons observé au début de l'apprentissage , est encore présent dans ce test : il persiste donc assez longtemps . Il correspond au **modèle spontané** que les élèves ont de la répétition : **faire une action et recommencer** .

Dans un contexte un peu différent, C. Laborde, N. Balacheff, et B. Mejias (1985) ont aussi observé cette forme de répétition qu'ils rapprochent de " la langue naturelle , dans laquelle la mention de la répétition peut se faire après coup par une expression telle que *continuer ainsi de suite* ".

Les modalités du critère REPETE figurent dans l'annexe 1 .

4 . 4 Deux critères d'utilisation .

SP : Utilisation d'AU MOINS UNE SOUS - PROCEDURE .

" OUI "
" NON "

Ce critère ne recoupe pas les autres , puisque l'élève peut choisir d'écrire tout son programme dans une seule procédure , quitte à écrire plusieurs fois une même suite d'instructions . **L' absence de sous - procédure est rarement associée à la réussite** d'ensemble d'un projet complexe .

VAR : Utilisation d'AU MOINS UNE VARIABLE pour désigner une longueur .

" OUI "
" NON "

Si une variable est utilisée pour désigner une longueur , par exemple la longueur de la "tige" , il est possible de **réutiliser** la même liste d'instructions pour les deux sortes de ballons .

5 . MISE EN OEUVRE DES CRITERES .

Les résultats de l'analyse suivant ces critères sont présentés dans le tableau de l'annexe 2.

5 . 1 Pertinence des modalités des critères .

Certaines modalités des critères , possibles a priori dans cette situation , n'ont pas été observées . La modalité SANS retour à une position standard du critère ETAT n'est pas observée , tous les élèves ayant pris en compte la position finale de la tortue suivant l'une ou l'autre des stratégies position standard ou interface intégrée . Il n'y a pas non plus d'erreurs de conception dans la coordination des procédures .

Ce phénomène peut être considéré comme un résultat positif de l'enseignement , car l'absence de retour à une position standard et la conception " image " de la procédure ont été observées chez ces mêmes élèves au cours de l'apprentissage .

5 . 2 Profils des individus .

Parmi les huit élèves pour lesquels la **coordination** des procédures est **correcte** , l'instruction REPETE est bien utilisée et les cercles sont bien placés , on trouve **toutes les combinaisons** possibles des critères VARiable et ETAT : certains ont utilisé des variables, d'autres n'en ont pas utilisées ; les uns ont écrit des procédures avec retour à une position " standard " , les autres avec interface intégrée . Mais tous ces élèves ont utilisé au moins une sous - procédure .

Si l'on ne tient pas compte de la position du cercle par rapport à la tige , quatre élèves de plus ont écrit un programme " Correct " . Mais parmi eux , une élève n'a pas utilisé de sous - procédure et un autre n'a pas utilisé l'instruction REPETE .

Si nous croisons les critères **SP : utilisation** d'au moins une sous - procédure et **Coordination** restreint aux modalités Correcte ou non - Correcte , nous obtenons :

Coordination correcte

		Oui	Non
SP	**Oui**	11	4
	Non	1	3

La **décomposition** du problème en sous - procédures est **liée à la réussite** d'ensemble puisque sur douze élèves qui ont réussi la coordination , onze d'entre eux ont utilisé des sous - procédures . Cependant la liaison n'est pas statistiquement significative au seuil habituel de 5 % puisque la probabilité , à marges constantes , d'obtenir un élève (ou zéro) ayant réussi sans utiliser de sous - procédure est 0,117 soit près de 12 % .

Deux modalités du critère REPETE a priori possibles (XC et FC) sont absentes mais si l'on considère séparément les deux codes , toutes les modalités sont présentes . L'élève qui n'a pas utilisé l'instruction REPETE , tout en ayant un programme correct , a décomposé en procédures et préfère écrire trois fois les noms de ses procédures .

De fait , la situation n'était pas suffisament complexe pour qu'il soit **absolument nécessaire** , pour réussir , d'utiliser des **variables** , des **sous - procédures** ou même l'instruction REPETE . Pour les variables , il est clair que leur utilisation , qui reste difficile pour les élèves , n'était pas significativement plus économique que l'écriture de procédures sans paramètre .

6 . CONCLUSION .

La grande variété de profils des individus avec seulement dix - neuf élèves et une seule tâche de programmation confirme notre hypothèse de **phénomène multidimensionnel** impliquant une analyse croisant plusieurs critères . Une analyse multi - critères , menée sur plusieurs productions d'un même élève , permet d'enrichir le profil de l'élève en dégageant ses stratégies personnelles de programmation et leur évolution . C'est à cela que nous travaillons actuellement .

La validité de tels critères sera réellement établie si d'autres enseignants ou chercheurs intéressés par ce domaine les mettent en oeuvre dans d'autres situations avec d'autres élèves et en tirent profits et critiques . Nous espérons avoir apporté notre modeste contribution à la grande tâche de la communicabilité des recherches expérimentales .

ANNEXE 1: Modalités des critères CHC et REPETE .

Coordination Hors Contexte :

" **0**" - Aucun cercle n'est tracé .
" **C** " - Les cercles sont correctement placés aux bouts des tiges : l'interface est correcte .
" **T** " - Les cercles sont tangents aux tiges : l'interface est absente.
" **A** " - Les cercles ne sont ni tangents , ni corrects : l'interface est incorrecte.

REPETE un nombre de fois [une liste d'instructions] :

Nous allons définir un critère codé sur deux colonnes , le premier code indique si lenombre de répétitions est exact , le second si la liste d'instructions répétée est correcte ou non .

premier code:

" **0** " : aucune instruction REPETE n'est utilisée .

" **C** " : l'instruction REPETE est utilisée et le nombre de répétitions est correct .

" **F** " : l'instruction REPETE est utilisée et le nombre de répétitions est faux .

" **X** " : l'instruction REPETE est utilisée mais avec une structure du type: [liste d'instructions] puis REPETE [la même liste d'instructions].

deuxième code :

" **0** " : pas de liste .

" **C** " : la liste d'instructions répétée est correcte .

" **F** " : la liste d'instructions répétée est fausse .

Ceci fait que l'on peut obtenir les codes **00** , **CC**, **CF** , **FC** , **FF** , **XC** et **XF** pour ce critère .

ANNEXE 2

Les réponses analysées ici sont les programmes modifiés par les élèves après une exécution

CRITERES :	CHC	S P	VAR	ETAT	COor -dination	REpète
ELEVES :						
STé+DAV+KLA	C	OUI	NON	PS	C	CC
SEB	C	OUI	OUI	PS	C	CC
ALI+CAR+NAT	C	OUI	NON	INT	C	CC
MAR	C	OUI	OUI	INT	C	CC
SAR	T	OUI	NON	INT	C	CC
SAB	A	OUI	NON	PS	C	CC
CYR	C	OUI	OUI	PS	C	00
ALE	T	NON	NON	INT	C	CC
FLO	T	NON	NON	INT	ES	CF
GIL	T	NON	NON	INT	ES	XF
KAR	C	OUI	OUI	INT	ES	CF
RAC	T	OUI	NON	PS	ES	CF
REG	T	OUI	OUI	PS	ES	FF
CHR	T	OUI	NON	INT	0	00
MAG	0	NON	NON	INT	ES	CF

Dans ce tableau , nous avons regroupé dans une même ligne les élèves qui correspondaient aux mêmes modalités des critères ; cela ne signifie pas que leurs programmes étaient absolument identiques . Lorsque l'élève ne définit pas formellement de procédure mais utilise un REPETE [une liste d'instructions] , le critère ETAT est observé sur la liste d'instructions .

REFERENCES

DUPUIS C. , EGRET M. - A. , GUIN D. (1987) : Logo 3 . Programmation structurée : Présentation et Analyse de situations , Brochure I.R.E.M. de Strasbourg .

HILLEL J. , SAMURÇAY R. (1985) : Analysis of a LOGO environment for learning the concept of procedures with variables , Research supported by Quebec Ministry of Education , FCAC Grant EQ 2539 .

LABORDE C. , BALACHEFF N., MEJIAS B. (1985) : Genèse du concept d'itération : une approche expérimentale , Enfance , Vol. 2 / 3 , pp. 223 - 239 .

MENDELSOHN P. (1985) : L'analyse psychologique des activités de programmation chez l'enfant de CM 1 et CM 2 , Enfance , Vol. 2 / 3 , pp. 213 - 221.

ROGALSKI J. (1986) : Pour une pédagogie de l'informatique , Enseignement public et informatique , N° 42 , pp. 105 - 109 .

ACQUISITION DE STRUCTURES CONDITIONNELLES :

effet des prérequis logiques et des représentations du dispositif informatique.

J. ROGALSKI

This paper presents some issues concerning the interaction between prerequisites in logic and mental representations of the "informatical device" in acquisition of conditional structures in programming. A study was conduced with 10th grade students (15-16 years old), in the phase of "computer literacy". It is shown that knownledge in logic is necessary but not suficient to insure acquisition. A subject's model based on a specific form of "presupposition" (the PRES-model) may explain why students get difficulties in managing the communication with an informatical device and dont use efficiently their logical knowledge.

INTRODUCTION

De nombreux éléments interagissent dans le processus d'acquisition de concepts informatiques. Tout d'abord les connaissances préalables que les étudiants ou élèves ont en d'autres domaines peuvent servir de **précurseurs** pour des notions informatiques. Ces précurseurs sont des notions générales, comme celles de la logique, ou des connaissances mathématiques, ou des connaissances "métacognitives", sur l'approche dans la résolution d'un problème, ou la planification de l'action.

Ces précurseurs jouent un rôle producteur de sens pour de nouvelles acquisitions ; ils jouent aussi éventuellement un rôle réducteur dans la mesure où les élèves risquent de transposer dans le nouveau domaine de connaissance des propriétés de ces précurseurs qui sont en fait typiques de leur domaine d'origine.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.131-152) IREM de Strasbourg

De tels effets producteurs et réducteurs dépendent également des acquis des élèves et de leur cursus (Rogalski, 1987a; 1987b).
Les caractères intrinsèques au champ de savoir de l'informatique jouent leur rôle propre dans les difficultés voire les obstacles épistémologiques dans l'acquisition. Les concepts informatiques, leurs représentations symboliques, leurs relations constituent en effet un nouveau champ conceptuel ; les élèves doivent construire de nouvelles représentations mentales adaptées à ce champ conceptuel (Rogalski et Samurçay, 1986).
Enfin, les représentations que les élèves (étudiants) se construisent sur le dispositif informatique lui-même jouent un rôle particulier dans les acquisitions: en effet un programme informatique se réalise toujours à travers un dispositif qui d'une part a des propriétés quant à son fonctionement lors de l'exécution du programme et d'autre part possède des propriétés quant à la communication avec l'utilisateur du programme (et le programmeur lui-même).
L'utilisation de diverses réalisations d'un dispositif programmable a été étudiée par Cohors-Fresenborg (Cohors-Fresenborg, 1984; 1986). (On peut trouver une revue des recherches sur cette question dans Rogalski, 1986).
Notre hypothèse initiale est qu'il existe une forte interaction entre les acquis antérieurs, les éléments du champ conceptuel informatique considérés et les représentations mentales sur le dispositif informatique.
Nous avons centré plus précisément certaines de nos recherches sur les aspects de l'interaction due à l'existence de ce dispositif informatique. Nous avons travaillé avec des élèves en phase d'alphabétisation, c'est à dire la phase des 30 à 50 premières heures d'enseignement.
Nous allons présenter des observations qui concernent les 10-15 premières heures: on observe que des élèves "décrochent" complètement dans cette phase d'initiation. Si on veut se préoccuper de savoir comment organiser un enseignement qui ne sélectionne pas excessivement il est important de maîtriser les phénomènes didactiques de cette première période.
Les résultats qui suivent concernent des élèves de seconde des lycées qui suivent un enseignement d'informatique dans un cadre scolaire normal. Il s'agit de l'option informatique dans le second cycle des lycées, qui est un cours institutionnel comme les autres options, avec les contraintes de présence d'un programme, et à partir de 1988 d'une épreuve facultative au baccalauréat. Cet enseignement comporte en particulier une initiation aux concepts de la programmation, avec les structures conditionnelles et les structures itératives lors de la première année. (Nous avons également observé des adultes au-delà de la formation secondaire et vérifié que cette période d'alphabétisation était un moment crucial pour certains).

1. Intervention du Dispositif Informatique: DI

On peut schématiser comme suit le traitement d'un problème quelconque au travers d'un dispositif informatique:

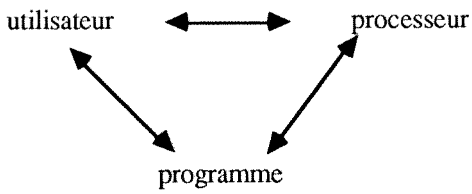
$$\begin{tikzcd} \text{problème} \arrow[r] & \text{DI} \arrow[r] & \text{production} \arrow[ll, bend left, "\text{rétroaction}"] \end{tikzcd}$$

La solution du problème doit être réalisée au travers du DI (dispositif matériel, système d'exploitation, logiciels utilisés, interfaces : clavier, écran , souris etc..).
Lors de l'exécution l'élève reçoit des informations sur sa production: effets attendus et divergences ou échecs. Ces informations contiennent d'une part des éléments tenant à la qualité "logique" de la solution qu'il a proposée pour le problème, et d'autre part des éléments qui relèvent de l'adaptation de la forme de la solution aux contraintes du dispositif informatique.
Lors de l'exécution d'un programme l'élève doit donc mettre en relation les effets obtenus avec la signification qu'il attribue au texte du programme, en utilisant les représentations qu'il se fait (même implicitement) sur la manière dont le dispositif informatique "traite" le texte du programme.
Une conséquence majeure est qu'il faut introduire dans les analyses une différence entre la formalisation (ou la modélisation) informatique et la formalisation mathématique qui peuvent correspondre à un même problème. L'existence du dispositif informatique oblige en effet à considérer une unité constituée par l'algorithme (mathématique) et sa réalisation effective dans un environnement informatique donné.

2. Quelques résultats sur les représentations du dispositif informatique.

Les représentations sur le dispositif informatique peuvent concerner des niveaux multiples: des propriétés fonctionnelles de la communication avec le dispositif informatique aux caractères particuliers des représentations de données en mémoire..

Nous allons ici donner des résultats sur les représentations qu'ont les élèves d'une part de l'exécution d'un programme par un dispositif informatique et d'autre part de la place qu'occupent respectivement l'utilisateur et le processeur lors de cette exécution.



Nous avons analysé des productions d'élèves (écriture et complétion de programmes) après une quinzaine d'heures de programmation (élèves de seconde). Trois grands niveaux de représentation du DI peuvent être dégagé à l'analyse des observations:

- Au niveau 0 un programme n'est pas conçu par l'élève comme une séquence d'instructions destinée à faire produire par un dispositif une classe de résultats pour une classe de données (avec les langages dits impératifs). Cela se traduit en particulier par des difficultés importantes à assimiler les contraintes syntaxiques nécessaires à la communication avec le DI. Par exemple on peut trouver à ce niveau des expressions comme "quand a>0 écrire racine de a", sans aucune prise en compte de l'existence d'une syntaxe spécifique. Ce niveau semble très fugace ; toutefois nous avons trouvé dans une de nos recherches 4 cas de ce niveau sur 44 élèves après 15 heures de programmation.

- Le niveau 1 correspond à une confusion entre les instructions tournées vers l'ordinateur et les actions de l'utilisateur: par exemple, au lieu d'écrire en LSE[1] l'instruction TERMINER qui indique la fin de l'exécution, des élèves écrivent *AFFICHER 'TERMINER'* qui produit une sortie sur écran à destination de l'utilisateur. Autre exemple, au lieu de ALLER EN 10 (où 10 est un numéro de ligne) on trouvera *AFFICHER 'ALLER EN 10'*, ce qui indique que l'élève délègue à l'utilisateur la fonction d'aller se placer au bon endroit dans le texte du programme au lieu de donner l'instruction à l'ordinateur.

- Le niveau 2 correspond à l'attribution à l'ordinateur des propriétés de compréhension de l'utilisateur. Un exemple classique relevant de ce niveau est l'écriture d'une instruction du type *AFFICHER 'le carré de x est x*x'* : la lecture que fera l'utilisateur et le calcul d'une expression qu'exécutera l'ordinateur sont mis sur le même plan.

Nous allons donner un exemple de comportement observé de niveau 2. On présente aux élèves le texte d'un programme dont les dernières instructions sont les suivantes:

AFFICHER 'voulez-vous continuer ? oui/non'
LIRE rep
SI rep='oui' ALORS ALLER EN 3
TERMINER

et on leur demande "ce qui se passe si l'utilisateur répond BOF".

Avec des représentations de niveau 2 les élèves attribuent à l'ordinateur des propriétés de compréhension de l'opérateur humain. Ils peuvent alors considérer que les seules réponses attendues par l'ordinateur sont OUI ou NON. Sur 56 élèves de seconde, testés après environ 15 heures de programmation, 28 donnent des réponses du type "l'ordinateur va se bloquer", ou "il va afficher un ?"; certains justifient explicitement leur réponse par "il attend OUI ou NON, comme il reçoit autre chose il ne sait pas quoi faire".

Des résultats analogues ont été relevés par Laborde et al, dans une étude expérimentale de l'acquisition de l'itération (Laborde, Balacheff et Méjias, 1985).
Tous les élèves qui ont produit, dans une autre tâche, des erreurs relevant de représentations de niveau 1 ont également fait ce type d'erreurs de niveau 2. Cela nous conduit à supposer qu'il y a une hiérarchie de niveau de représentation. (Nous avons retrouvé des erreurs de type 2 avec des adultes après plus de 50 heures de programmation, sur des problèmes de programmation plus difficiles: l'analyse des niveaux de représentation doit donc prendre en compte la complexité propre des programmes à produire).

3. Structures conditionnelles et représentations du dispositif informatique.

Nous allons aborder maintenant le point plus spécifique des effets produits par ces représentations du dispositif informatique sur l'acquisition des structures conditionnelles. Nous nous intéresserons essentiellement aux représentations de la séquentialité d'un programme. Nous mettrons ces représentations des élèves en relation avec leurs connaissances logiques.

En effet l'acquisition des structures conditionnelles pose d'une part le problème des rapports avec les acquis en logique (combinatoire et négation), d'autre part le problème de traitements qui lors de l'exécution ne coïncident pas avec l'ordre du texte du programme, puisque selon le cas effectivement rencontré lors de l'exécution une branche seulement sera parcourue.

La première situation conditionnelle est celle de l'alternative simple complète:

SI <condition> ALORS <TRAITEMENT 1> SINON <TRAITEMENT 2>.

Lorsqu'il y a plus de deux cas à traiter, une seule alternative complète simple n'est pas suffisante. Trois types de structures sont possibles:

- *emboîtement* de SI..ALORS..SINON..
- utilisation du *saut conditionnel* (GOTO ou ALLER EN)
- structure de *cas.*

Nous allons donner un exemple de réalisation de ces trois structures pour le traitement de l'équation du second degré selon le signe du discriminant D. Nous notons T1 le traitement: calcul et affichage de deux racines distinctes réelles; T2 calcul et affichage d'une racine double; T3 affichage de la non-existence de racines réelles.

Emboîtement:

```
SI D>=0 ALORS SI D>0 ALORS T1
              SINON T2
SINON T3
```

Saut conditionnel:

```
20 SI D<0 ALORS ALLER EN 50
30 SI D>0 ALORS T1 SINON T2
40 ALLER EN 60
50 T3
60 TERMINER.
```

- *Structure de cas :*

SI D>0 ALORS T1
SI D=0 ALORS T2
SI D<0 ALORS T3

Nous coderons par la suite ses différents styles respectivement par EMB, SAUT, CAS. Les difficultés relatives d'apprentissage et d'utilisation de ces structures ont été observées avec des adultes (Green, 1980; 1985; Sime, Green et Guest, 1973); on peut trouver dans Rogalski (Rogalski, à paraître) une brève revue sur les recherches concernant les structures conditionnelles.
Il faut ici rappeler une caractéristique commune au LSE et au BASIC: ce sont les langages comportant des lignes de programme, auxquelles on peut faire référence par leur numéro. Cela a des effets sur la manière dont on peut structurer les instructions pour gérer des conditions. Ces langages se prêtent particulièrement bien à l'étude des questions de séquentialité: en effet, la gestion des ALLER EN (ou des GOTO) est étroitement liée à la représentation de l'exécution.
Certains langages posent en termes différents la question de la séquentialité et des structures conditionnelles; ainsi dans un langage comme PASCAL le texte des programmes n'est pas organisé en lignes, et la structuration du langage permet d'éviter l'usage du GOTO. La rencontre avec la séquentialité de l'exécution dans l'alphabétisation se pose a priori de manière différente qu'avec BASIC ou LSE. Les langages de type "applicatif" (comme LOGO, LISP) ou "logique" (PROLOG) proposent un traitement notablement différent des conditions; en particulier la question des définitions conditionnelles de fonctions diffère conceptuellement de celle des instructions conditionnelles; il en est de même de la condition "implicative" en PROLOG. Les résultats et les hypothèses qui suivent ne sont donc pas directement transposables pour de tels langages; les méthodes d'étude ne sont pas non plus directement utilisables.

4.Quelques problèmes de méthode.

Nous nous sommes placées en situation de "recherche de terrain" au sens suivant: toutes nos observations ont été faites sur des problèmes posés par des enseignants dans le cadre de leur enseignement: ces problèmes ont donc été définis en fonction des objectifs pédagogiques des enseignants. Par ailleurs, nous ne sommes pas intervenues sur cet enseignement

mais nous avons essayé d'en tenir une chronique pour définir un cadre général de réactions d'élèves face à un ensemble de situations d'enseignement.
L'observation de phénomènes de classe permet de repérer l'existence d'indices significatifs: il s'agit de comportements d'élèves qu'on voit apparaître dans telle occasion, qu'on peut interpréter dans les termes de notre problèmatique. Il peut s'agir d'erreurs, de questions, de discussions entre élèves: on relève dans la mesure du possible les conditions dans lesquelles ces indices sont apparus. Ce sont des éléments pour construire ensuite des expériences (dans la mesure où celles-ci sont compatibles avec un déroulement normal de la classe). Soulignons qu'il n'est pas toujours possible de provoquer certains de ces comportements dans des situations d'interrogation de type expérimental et que les observations "in situ" ne peuvent pas toujours se ramener à une expérimentation.
Une question ouverte est de déterminer la dépendance des observations par rapport à la séquence didactique dans laquelle elles ont eu lieu (par séquence didactique nous entendons l'organisation de situations didactiques sur le moyen et le long terme).
Nous avons toutefois effectué aussi des constructions de problèmes à visée expérimentale. Cela est évidemment l'objet d'une négociation avec les enseignants, parce que de tels problèmes n'apparaissent pas toujours directement pertinents par rapport à l'enseignement; leur complexité ne répond pas toujours au contrat entre les enseignants et les élèves (problèmes trop "simples", ou au contraire trop peu "familiers" dans leur présentation).
Dans le cas de l'étude des structures conditionnelles nous avons utilisé plusieurs types de situations-problèmes: complétion de programmes dans lesquels il manque soit des lignes complètes isolées soit un morceau significatif; écriture d'un programme complet; explicitation de la classification des cas à traiter par des structures conditionnelles.
Il faut souligner que les problèmes d'écriture de programmes sont difficiles à analyser. Lorsque les élèves ne produisent pas de texte de programme on n'a plus aucune information sur leurs difficultés et leurs acquis. De plus un programme de quelques lignes, avec une seule structure de contrôle et une structure de données simple, peut être difficile pour des débutants : sur une production brève il peut s'avérer difficile d'inférer ce qui produit un programme erroné. Des tâches de complétion où l'élève doit remplir un "blanc" avec un test, un traitement, une instruction conditionnelle complète constituent un moyen d'exploration des acquis fournissant davantage d'informations directes. L'expérimentateur choisit la place du fragment de programme que les élèves doivent produire: cela limite le contenu et la forme possible des réponses, et facilite l'analyse de difficultés "locales". Toutefois de telles tâches permettent plus difficilement d'étudier toute la gamme des difficultés conceptuelles auxquelles on peut s'attendre dans les acquisitions en programmation (2). Les observations

"cliniques " des processus mêmes de réponse de élèves sont d'autant plus indispensables qu'on cherche à analyser des acquisitions complexes.

5.Les élèves et les situations-problèmes.

Les élèves sont en seconde de l'option informatique des lycées (2 classes). Ils ont d'abord rencontré dans l'enseignement l'alternative simple complète comme premier exemple de structure conditionnelle. L'enseignant leur a présenté des exemples de problèmes résolus avec la forme de conditionnelle:

SI <condition> ALORS <TRAITEMENT 1> SINON <TRAITEMENT 2>

Ils ont fait des exercices en classe sur cette forme de conditionnelle, avec un passage effectif de leur programme sur l'ordinateur.
D'autre part ils ont vu la conditionnelle incomplète:

SI <CONDITION> ALORS <TRAITEMENT 1>

dans laquelle il faut tenir compte de la séquentialité pour contrôler le traitement du cas où la condition n'est pas remplie.
Les problèmes choisis devaient permettre de voir des interactions entre acquisitions logiques, séquentialité et structures conditionnelles: il faut pour cela avoir plus de deux cas à traiter, sinon il s'agit d'une application pure et simple des structures dans leur forme apprise; dans ce cas l'usage de l'alternative conditionnelle conduit à des solutions correctes même si les élèves ne maîtrisent pas certains problèmes logiques, ou certains problèmes de représentation de la séquentialité.
Par ailleurs pour rencontrer des problèmes de précurseurs de combinatoire et/ou de logique, il faut avoir un minimum de cas à combiner, et avoir à effectuer des opérations logiques. Toutes les situations-problèmes posées aux élèves comportent donc au moins trois cas à traiter.

Ces situations sont les suivantes:

- **problème 1** : il s'agit de traiter trois cas avec trois traitements associés. Les cas correspondent à des moyennes à un examen, et les traitements sont les affichages appropriés selon les cas ("reçu", "collé", "oral"). La situation est simple, sauf le fait qu'il faut traiter les relations >= et <= et leur négation ; or on peut anticiper des problèmes de négation portant sur le traitement des inégalités. En effet une inégalité large comme >= peut être considérée comme une relation de type disjonctif (non exclusif); or on sait par ailleurs que des difficultés existent dans la négation de relations conjonctives ou disjonctives.

- **problème 2** : il s'agit d'écrire un programme qui affiche si l'utilisateur peut ou non conduire une moto, en fonction de la donnée de son année de naissance et du fait que son anniversaire est passé ou non. Soulignons que les élèves connaissent tous la condition à remplir: avoir 16 ans révolus. Ils savent évidemment déterminer correctement si quelqu'un remplit ou non la condition: c'est un prérequis, relevant des connaissances familières, nécessaire pour que l'analyse suivante ait tout son sens.
  Il n'est pas inutile de s'assurer de tels prérequis: nous avons pu observer par exemple que les programmes avec des pourcentages étaient mal traités par de nombreux élèves qui ne connaissaient pas le passage de l'expression en % au calcul numérique..
  La situation 2 est plus complexe que la première puisque il y a a priori 6 cas possibles, ou 4 si on fait les tests les plus "économiques", et seulement 2 traitements. Il y a donc des cas à regrouper. Dans cette situation les questions de traitement des égalités et inégalités peuvent également se poser.
  Les élèves qui ont eu ce problème à traiter ont moins de difficultés en mathématique et en français que ceux auxquels a été posé le premier problème, plus simple. On peut espérer avoir ainsi partiellement compensé les différences de difficulté.

- **le troisième problème** aborde le problème de la coordination entre des activités de classement (relevant de la logique et des représentations symboliques déjà disponibles), des tâches de programmation portant sur les structures conditionnelles; il est accompagné d'une tâche de programmation destinée à apprécier relativement "directement" l'existence de problèmes de maîtrise de la séquentialité par les élèves.
  La dernière situation (utilisée pour étudier les rapports entre logique et programmation) porte sur les états de l'eau selon la température: les élèves connaissent globalement le fait qu'au-dessous de 0° l'eau est à l'état de glace, qu'entre 0° et 100° l'eau est à l'état de li-

quide et qu'au-dessus de 100° l'eau est à l'état de gaz. On leur précise qu'à 0° l'état est la glace et à 100° la vapeur. Un des buts de cette précision est de marquer dans l'énoncé même du problème l'existence des cas d'égalité.
La tâche des élèves est de classer les cas possibles et de compléter le programme suivant:

```
10  LIRE T
20  ALORS AFFICHER 'liquide'
30  SI T > 100 ALORS AFFICHER 'vapeur'
40  ...
50  TERMINER
```

Ils ont donc d'une part à compléter une condition dans une ligne d'instruction connaissant le traitement (l'état de l'eau) et d'autre part à compléter toute une ligne de programme, correspondant à un traitement aisément déductible des informations précédentes sur les états de l'eau (puisqu'on en fournit 2 sur 3).

6.Analyse comparative a priori des traitements des situations-problèmes

Le problème 1 se prête très bien à un traitement sous forme de cas, tout comme le problème 3. Le problème 2 se prête mieux à une structure d'emboîtement. Les schémas ci-dessous résument la structure des trois situations et les structures conditionnelles qui leur correspondent le plus directement en LSE.

```
Pr 1    Cas     Traitements
        A  ......  T1
        B  ......  T2
        C  ......  T3

Pr 2    A  ......  T1
        B  ......  T2
             C1... T1
        C
             C0... T2

Pr 3    A  ......  T1
        B  ......  T2
        C  ......  T3
```

Dans le problème 2 il est possible mais peu économique de traiter les 6 cas a priori.

7. Résultats.

Le tableau qui suit (tableau 1) donne la répartition en pourcentage de la structure conditionnelle utilisée. Le nombre de sujets est de 20 pour le problème 1 et de 24 pour le problème 2, et les pourcentages ne sont donnés que pour faciliter les comparaisons.
Le codage est le suivant:

EMB: emboîtement de conditions
CAS: structure de cas
SIGN: problème de signification d'un texte de programme

TABLEAU 1

	Pr 1	Pr 2	Total
CAS	35 (25)	46 (17)	41 (20)
EMB	25 (5)	36 (8)	32 (7)
SIGN	10	8	9
∅	30	8	18

(Les nombres entre parenthèses donnent les pourcentages de réponses correctes au sens suivant: la logique des programme est correcte même s'il peut y avoir des erreurs de syntaxe).[3]
La faiblesse des élèves du premier groupe se manifeste surtout par le nombre relativement important de ceux qui ne produisent pas de programme. On constate par ailleurs que quelques élèves n'attribuent pas de signification à la notion de programme (ligne SIGN).
On remarque qu'il n'y a pas une différence significative entre les problèmes quant à l'utilisation des structures de cas et d'emboîtement: les élèves adaptent assez peu la structure du programme à la nature des situations traitées, et à l'organisation des cas.
On observe toutefois une différence entre le traitement par cas et le traitement par emboîtement: les réussites dans l'écriture des programmes sont liées essentiellement à l'utilisation de la structure de cas. Il semble plus facile de traiter les situations de cas, qui ne nécessitent pas la maîtrise de la séquentialité que l'emboîtement de conditions.
Nous retrouverons des résultats obtenus par des auteurs travaillant avec des adultes sur le

fait que la structure de cas a des propriétés facilitatrices; c'est le cas en particulier lorsqu'il existe une relation univoque entre les cas et les traitements (cette relation permet en effet de retrouver aussi bien les informations séquentielles que les inforamtions conditionnelles) (Sime et al; Green, op. cit.).

8. Relations entre logique et conditionnelles.

Une première analyse concerne le problème 1: nous avons déjà signalé plus haut que les élèves doivent travailler sur les relations d'égalité et d'inégalité avec les 3 cas: *M>=10, M<10 et M>=8, M<8*. Leur expression ne pose pas de problème majeur aux élèves : tous trouvent rapidement que *8≤M<10* doit se formuler *M>=8 et M<10* pour être compatible avec la syntaxe de LSE (les précurseurs d'écritures algébriques symboliques sont bien utilisés). En revanche lorsqu'il s'agit de traiter le cas *nonA* (où *A* est *M<8* par exemple) on constate des difficultés à faire apparaître l'égalité. Beaucoup d'élèves prennent comme négation de la relation d'inégalité stricte l'autre relation d'inégalité stricte: le cas d'égalité n'est pas pris en compte. Dans les tests du problème 1 nous avons ainsi relevé que les 3/4 des élèves "oubliaient" les cas d'égalité.
S'agit-il seulement d'un problème de négation ou doit-on aussi considérer le problème des statuts respectifs de la relation d'inégalité et de la relation d'égalité? Notre hypothèse est qu'il existe un problème de fond sur la façon dont sont utilisées dans l'enseignement ces deux relations : les relations d'ordre n'y jouent pas le même rôle que les relations d'égalité. En effet les élèves rencontrent l'égalité très fréquemment et cela dans des situations de résolution d'équations; les situations de comparaison, d'encadrement ou d'approximation dans lesquelles interviennent les relations d'ordre sont beaucoup plus rares. Cela doit probablement contribuer à donner un statut très hétérogène aux égalités et inégalités; ces notions appartiendraient, par le type de problèmes dans lesquels elles interviennent, à des champs conceptuels peu mis en relation. Il n' y a toutefois pas, à notre connaissance, de recherche didactique sur cette question, et l'hypothèse faite est donc une conjecture ouverte. Nous avons également étudié les problèmes spécifiques de négation dans le problème 2. On peut trouver des élèves produisant des négations de type "non(A et B)" = *"nonA et nonB"*, où A et B sont des booléens obtenus à partir de comparaison d'âges et d'information sur l'anniversaire.

Nous avons également noté les erreurs de logique du programme proposé: combinatoire des cas fausse (non exhaustive ou non exclusive, indépendamment du traitement particulier éventuel de l'égalité). Le tableau II donne la répartition de ces deux types d'erreurs dans les deux problèmes. Les codages sont les suivants:

LOG: erreurs de logique (combinatoire non exhaustive ou non exclusive)
NEG: problèmes de négation de relations
Total désigne le nombre d'élèves ayant produit effectivement un texte de programme.

TABLEAU II

	LOG	NEG	Total
CAS	4	3	11
EMB	4	2	9
N	8	5	20

Dans une situation où la combinatoire des cas possibles reste relativement simple, on peut relever que pour beaucoup d'élèves (parmi ceux qui rédigent un programme complet) les prérequis logiques ne sont pas assurés: alors que les élèves connaissent le traitement de la situation réelle évoquée, l'interaction des opérations logiques avec la tâche nouvelle d'écriture de programme conduit à de nombreuses erreurs de négation ou de combinatoire.
Cela nous conduit à des commentaires sur la didactique des structures conditionnelles; quand les enseignants font des corrigés de programme ou donnent aux élèves des méthodes de "vérification" fondées sur des jeux d'essais, ils utilisent les cas bien écrits et bien regroupés si nécessaire; or les élèves vont regarder dans un jeu d'essais les cas sur la base desquels ils ont écrit leur programme: celui-ci ne va donc pas être mis en défaut. (Dans le problème 1 les élèves ont fait tourner leur programme avec différentes valeurs, aucun n'a choisi les cas d'égalité..). Il faut donc fournir aux élèves des jeux de cas qui puissent effectivement mettre leur programme en défaut, et à partir desquels ils obtiennent des informations productives en retour de l'exécution.
Il est également utile de s'interroger plus précisément sur la manière dont les élèves passent d'un savoir implicite ou même explicite à une formulation adéquate, avec un système de représentation qui assure exhaustivité et exclusivité. Cela permettrait de dégager dans les dif-

ficultés d'écriture de programme ce qui relève des prérequis et ce qui relève des acquisitions conceptuelles propres au champ informatique. Des recherches sur des adultes (étudiants non scientifiques) ont confirmé l'existence d'interaction entre les acquis en programmation et les prérequis mathématiques (van der Veer, van Beek et Gruts, 1986).

8. Le modèle PRES

Nous avons dégagé dans la manière dont les programmes étaient conçus, l'existence possible d'un "modèle" (ou un théorème en acte), que nous avons appelé le modèle PRES (comme présupposition) et qui est le suivant.
"Quand j'ai effectué une instruction de type
SI <condition A> ALORS <traitement 1>
je suis dans la situation <non A>. Réciproquement tant que je n'ai pas terminé le traitement de la condition A les instructions écrites continuent à s'y rapporter".
C'est en gros le fonctionnement des conditionnelles dans la communication courante en langue naturelle dans laquelle la présupposition joue un rôle très important.
Nous avons attribué à ce type de modèles des réponses du genre suivant:

10 Si *A* ALORS T1
20 T2

où T2 est le traitement qui doit être associé à *nonA*.(4)

et du type plus complexe suivant:

10 SI A ALORS T1 SINON I
20 SI B ALORS T2

où I est une instruction qui appelle une donnée complémentaire (sur l'anniversaire dans le problème 2) et où B est une condition sur cette donnée, conduisant au traitement T2 lorsqu'on est toujours dans la situation nonA (c'est à dire dans la portée du SINON).

L'existence de ce modèle PRES n'est pas repérable avec toutes les écritures de programmes; en particulier la structure de cas permet rarement de le voir apparaitre (sauf si la structure est incomplète), en revanche ce modèle est repérable dans les structures d'emboîtement. L'existence d'un tel modèle n'est pas repérable avec tous les langages. Ainsi, la possibilité de mettre un ensemble complexe d'instructions, avec des imbrications de IF..THEN..ELSE, après le THEN et le ELSE de la structure alternative en PASCAL, limite le recours éventuel au modèle PRES. C'est sans doute à un autre niveau de complexité que les problèmes de séquentialité peuvent se repérer en PASCAL.
Le tableau III donne la répartition (en nombre de sujets) des écritures de programme compatibles avec l'existence de ce modèle PRES (dans les textes de programmes où on pouvait les voir apparaître, c'est à dire ici essentiellement ceux qui utilisent des emboîtements).
Le codage est le suivant :

PRES : réponses compatibles avec l'existence du modèle PRES
CORR : réponses correctes.

TABLEAU III

	Pr 1	Pr 2	Total
PRES	5	6	11
CORR	1	2	3
Autres		1	1
N	6	9	15

Il n'y a pas de différences majeures entre les problèmes 1 et 2, dans lesquels on observe une présence importante d'erreurs compatibles avec l'existence du modèle PRES.
Dans le troisième problème, la nature des éléments à compléter permet d'observer des erreurs compatibles avec le modèle PRES. Ainsi le fait de mettre dans la condition de la ligne 20 seulement l'inégalité T>0, peut s'interpréter par le modèle PRES: le test serait correct si on était bien dans une situation excluant le cas traité dans la ligne 30. Le fait de ne pas indiquer de condition dans la complétion de la ligne 40 est également compatible avec la présence du modèle PRES.
Si on regroupe les deux types d'erreurs compatibles avec le modèle PRES on observe environ 40% des élèves pour lesquels on peut faire l'hypothèse de l'utilisation de ce modèle; il faut remarquer que cette utilisation n'est pas systématique: seul 1 élève fait des erreurs à la

fois pour la complètion des lignes 20 et 40, ce qui est compatible avec une utilisation permanente de ce modèle.
Cette remarque ne nous semble pas invalider l'existence du modèle PRES: pour de très nombreux contenus n'appartenant pas au domaine informatique on a pu en effet observer une instabilité des modèles erronés. Dans les questions de structures conditionnelles, il y a peu de raisons qu'un modèle de représentation s'instaure comme modèle stable, quand rien ne le renforce dans les éléments apportés par l'enseignement. Cela n'empêche pas pour autant un tel modèle de jouer un rôle d'obstacle à l'intériorisation d'un modèle stable conforme à la séquentialité d'exécution des programmes.
Une tâche de programmation posée aux mêmes élèves nous a permis d'observer d'autres effets de non représentation de la séquentialité, ou du moins d'une absence de maîtrise de la représentation appropriée. Les élèves ont eu à construire une partie de programme qui stoppe l'exécution si l'utilisateur répond NON à la question qui lui est posée par le programme et affichée à l'écran: "voulez-vous continuer ?".
Le tableau IV donne la répartition des réponses selon les catégories suivantes:
CONF dénote les confusions entre le rôle de l'ordinateur et celui de l'utilisateur dans l'exécution du programme,
Par exemple au lieu d'écrire SI rep='NON' ALORS TERMINER, avec une instruction à l'ordinateur, l'élève écrit SI rep='NON' ALORS AFFICHER 'terminer', avec un message à l'utilisateur;
SEQU dénote une absence de maîtrise de la séquentialité, ainsi l'élève peut écrire un texte du type suivant :

110 SI rep='NON' ALORS TERMINER
120 SI rep='OUI' ALORS AFFICHER 'on continue'; TERMINER

avec l'instruction de fin d'exécution juste après le traitement du cas dans lequel l'exécution est dite continuer..

SIGN dénote l'absence d'acquisition de la notion de programme
CORR dénote des réponses correctes
NEG caractérise ici des textes de programme pour lesquels le contraire de la réponse NON conduisant à l'arrêt de l'exécution est la réponse OUI (alors que la logique de fonctionnement correspondant au texte de problème est d'arrêter en cas de reponse négative et de continuer sinon, c'est à dire pour toute autre réponse). Il faut remarquer que ce type d'erreur re-

coupe partiellement des problèmes de représentation sur les rapports entre utilisateur et ordinateur: l'utilisateur étant implicitement supposé répondre comme on l'attend: NON pour arrêter et OUI pour continuer. La possibilité d'autres réponses n'est pas envisagée, ce qui correspond aux présupposés dans le langage usuel.
Cette tâche pose les problèmes méthodologiques généraux des écritures de programmes: si les élèves utilisent le schéma appris de l'alternative complète on ne peut voir apparaître aucune erreur de séquentialité.

TABLEAU IV

	CONF	SEQU	SIGN	CORR	Total
CORR	2	2	1	7	12
NEG	2	1		3	6
N	4	3	1	10	18

Enfin, la classification des cas proposés aux élèves comme tâche préalable à la complétion du programme sur les états de l'eau, est correctement résolue par la plupart des élèves. On retrouve dans ces tâches le problème du statut de l'égalité: 2 élèves ne la prennent pas en compte ni dans la classification, ni dans l'écriture du programme, tandis que 4 "l'oublient" dans la seule écriture du programme. Il faut ajouter que 3 élèves ne donnent pas une formulation synthétique pour la classification mais exhibent un ensemble de cas représentatifs des différentes situations, égalité comprise. La plupart des formulations proposées pour la classification sont des formulations en langage naturel, ou des mélanges de formulations "algébriques" telles que T<=100 et de formulations en langage naturel. Le support de représentations graphiques de type tableau ou arbre, ne semble pas disponible chez les élèves, alors qu'il constituerait une aide pour structurer le programme avec les conditionnelles appropriées.

CONCLUSION

L'ensemble des résultats obtenus conforte l'hypothèse initiale d'interaction entre des prérequis logiques (la maîtrise des négations et de la combinatoire des cas en ce qui concerne les structures conditionnelles), des représentations sur le fonctionnement du dispositif informatique (en particulier de la séquentialité de l'exécution) et l'acquisition des concepts informatiques (ici les structures conditionnelles).
Il est possible de supposer que des difficultés à maîtriser la séquentialité sont une des raisons des difficultés observées dans l'usage des structures conditionnelles de type GOTO; cependant que les structures de type CAS (le CASE OF en PASCAL par exemple) sont plus faciles à utiliser correctement dans la mesure où elles ne font pas appel à la même représentation de la séquentialité. Il faut toutefois souligner que les élèves doivent maîtriser la négation pour traiter si nécessaire le complément des cas exprimés dans le CASE OF.
De plus nous pouvons, au vu de certaines difficultés à transposer dans l'écriture d'un programme des connaissances par ailleurs acquises, faire l'hypothèse d'une difficulté spécifique de "formalisation", au sens où il faut pour écrire un programme s'astreindre à une formulation respectant des contraintes particulières de syntaxe et de sémantique dues à la nécessité de la communication avec un dispositif informatique.
Les observations faites dans les séances d'enseignement nous conduisent à l'hypothèse que les résultats obtenus pour les structures conditionnelles pourraient se retrouver avec d'autres notions informatiques, comme les stuctures itératives. De plus les autres éléments que la séquentialité d'exécution qui interviennent dans les représentations sur le dispositif informatique interagissent certainement aussi avec l'acquisition des concepts informatiques; cela nous apparaît tout particulièrement important pour les acquisitions concernant la structuration des données sur laquelle existent peu de recherches à l'heure actuelle. Nous pouvons citer ici l'effet des types de variables et de leur statut fonctionnel sur des activités de programmation (Rogalski et Samurçay, 1986).
L'enseignement des notions informatiques ne nous semble en conséquence pas pouvoir s'appuyer seulement sur l'enseignement de l'algorithmique, hors de l'interaction avec les contraintes propres d'un langage de programmation et de la confrontation avec le fonctionnement réel d'un dispositif informatique.

Notes

(1) Le langage LSE a été élaboré dans un but didactique. Les mots réservés du langage sont "français" (AFFICHER, LIRE, TERMINER; ALLER EN..); LSE permet l'écriture de procédures indépendantes.

(2) *Question: vous n'avez pas demandé d'écrire l'exécution d'un programme ?*
C'est une question qu'on s'est posée; la méthode consistant à faire exécuter "à la main" un programme a été utilisée par d'autres chercheurs; toutefois nous nous sommes aperçues (Colette Laborde et Béatrix Méjias avec un travail sur l'itération, moi-même au niveau de l'observation avec des élèves dans un contexte analogue) que les élèves exécutent le programme qu'ils voulaient écrire, et non pas toutjours celui qui est effectivement rédigé. Ainsi, au lieu d'exécuter ce qu'ils ont écrit, ils exécutent ce qu'ils voulaient avoir écrit
Question: mais s'ils n'ont pas écrit eux-mêmes le programme?
S'ils ne l'ont pas écrit c'est éventuellement plus facile mais ils peuvent aussi le lire de la manière dont ils l'auraient écrit (lorsqu'ils comprennent le programme) c'est à dire en lui donnant une autre signification, et ils peuvent donc donner une exécution "correcte" d'un programme "faux" parce qu'ils vont avoir des présupposés sur la signification des lignes écrites. Les observations doivent donc être de type "clinique" pour tirer des informations sur une telle tâche. Des chercheurs ont utilisé une technique voisine à celle que vous proposez dans l'étude des structures conditionnelles, en demandant au sujet soit de dire quel traitement vient après telle condition (information séquentielle) soit d'identifier quelle condition est remplie lorsqu'un traitement donné est effectué (information conditionnelle). Toutefois ils ont travaillé avec des adultes, étudiants en université de sciences humaines, dont on peut raisonnablement penser qu'ils n'ont pas de problèmes de formulation. La technique utilisée ne portait pas sur l'exécution proprement dite, et les auteurs ne s'interrogeaient pas sur des questions de représentations.
Certaines de nos tâches de complétion de programme ont des similitudes avec ces dernières tâches: lorsqu'on fait compléter un traitement on est dans la première situation (recherche d'information séquentielle); lorsqu'on fait compléter une condition on est dans la seconde situation (recherche d'information conditionnelle).

(3) L'étude de ces erreurs n'est pas notre propos; de plus des études effectuées avec des programmeurs débutants et des programmaeurs avertis montrent que les erreurs de syntaxe sont , en pourcentage ,assez faibles et du même ordre dans les deux populations; on peut supposer qu'il ne s'agit donc pas fondamentalement d'erreurs de nature conceptuelle.

(4)Il existe des langages où ce traitement d'une condition ne met pas en défaut le modèle PRES: en LOGO par exemple.

REFERENCES

COHORS-FRESENBORG E. (1984) — On the representation of algorithmic concept. *Osnabrücker Schriften zue Mathematik.* Heft 76.

COHORS-FRESENBORG E. (1986) — Empirische untersuchungen über verschiedene kognitive Struckturen bei algorithmischen Begriffs bildungsprocessen. *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématqiues et de l'informatique.* CIRM, Marseille-Luminy.

GREEN T.G.R. (1980) — Ifs and Then : is nesting just for birds ? *Software pratice and experience.* 10, 371-381.

GREEN T.G.R. (1985) — Design and use of programming languages (draft).

LABORDE C, BALACHEFF N, MEJIAS B (1985) — Genèse des concepts d'itération : une approche expérimentale. *Enfance* 2-3, 223-239.

ROGALSKI J. (1986) — Les représentations mentales du dispositif informatique. *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* CIRM Marseille-Luminy

ROGALSKI J. (1987a) — Epistémologie génétique et didactique : pour une théorie de l'acquisition des connaissances complexes. *Actes du colloque SFP : "les apprentissages : perspectives actuelles"*. Université de Saint-Denis.

ROGALSKI J. (1987b) — Acquisition de savoirs et savoir-faire en informatique. *Cahier de didactique des mathématiques* , 43, IREM, Université Paris VII.

ROGALSKI J. (à paraître) Acquisition et didactique des structures conditionnelles en programmation informatique. *Psychologie Française* (numéro spécial sur l'informatique dans l'enseignement).

ROGALSKI J., HÉ Y. (1987) Logic and mental representations of the informatical device in acquisition of conditional structures by 15-16 years old students. Draft.

ROGALSKI J., SAMURÇAY R. (1986) Les problèmes cognitifs rencontrés par des élèves de l'enseignement secondaire dans l'enseignement de l'informatique. *Journal Européen de Psychologie de l'Education* 1, 2, 97-110.

SAMURÇAY R. (1985) Signification et fonctionnement du concept de variables informatique chez des élèves débutants. *Educational Sudies in Mathematics* . 16, 143-161.

SIME M, GREEN T.G.R., GUEST G.A.N. (1973) Psychological evaluation of two conditional constructions used in computer languages. *Int. J. Man-Machine Studies* , 5, 102-113.

Van der VEER G, van BEEK J, GRUTS G.A.N. (1986) Learning structured diagrams. Effects of mathematical background, instruction and problem semantics. *Colloque : visual aids in programming*. Passau.

LA MESURE DES TR EN ARITHMETIQUE ELEMENTAIRE :

Spécificités d'une tâche de vérification.

J.P. FISCHER

La mesure des temps de vérification "d'égalités" numériques permet d'analyser quelques spécificités des tâches de vérification : effet de positivité, effet de distance symbolique, possibilité d'inverser l'opération ... Cette dernière présente un intérêt didactique particulier, en raison de l'insistance des Instructions Officielles de 1978 sur le calcul des soustractions par addition. Les élèves inversent-ils vraiment leur calcul des soustraction ?

1. Introduction

1.1. La possibilité matérielle - grâce à l'équipement informatique - d'introduire la mesure des Temps de Réponse (TR) dans les classes conduit à accorder une place plus importante, que celle que l'enseignement "traditionnel" leur accordait, aux **tâches de vérification** qui, seules, permettent une mesure commode et précise.

Une tâche de vérification consiste, en général, en une réponse dichotomique: *juste* ou *faux*, *oui* ou *non*, *même* ou *différent*, *appartient* ou *n'appartient pas*, *est* ou *n'est pas*, etc... Quand cette réponse à la question - ou plutôt au **stimulus** car la question, qui est toujours la même, n'est pas renouvelée à chaque mesure - est *juste*, *oui*, *même*, *appartient*, *est*,... le stimulus est qualifié de **positif.** Par contre, quand la réponse est *faux*, *non*, *différent*, *n'appartient pas*, *n'est pas*, ... le stimulus est qualifié de **négatif**. Par exemple, si l'on étudie les expressions algébriques (Ranney, 1987), 5L+(9)K *est* une expression algébrique donc un stimulus positif, alors que K9)L(5+ *n'est pas* une expression algébrique donc un stimulus négatif.

Qu'il me soit permis de remercier les élèves et responsables des classes impliquées dans l'expérience rapportée, ainsi que Philippe Bernat (IREM, Nancy), Guy Agostini et Gérard Cartron (EN Montigny-lès-Metz), Claire Dupuis et Raymond Duval (IREM, Strasbourg), qui ont tous pu m'aider dans l'une ou l'autre phase de ce travail.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.153- 178) IREM de Strasbourg

Or, dans le **domaine** de l'**arithmétique** élémentaire, auquel je me limiterai désormais, une tâche de vérification peut poser des problèmes spécifiques qui peuvent la différencier fondamentalement d'une **tâche de production.** Cette dernière, comme le suggère son nom, consiste à produire un résultat juste ou, plus généralement, vérifiant une certaine propriété, par exemple trouver le résultat de 72:8. Trois spécificités de la tâche de vérification vont me permettre d'illustrer cette différence entre les deux types de tâches.

(1) **Pour les stimuli négatifs, il est souvent possible de "court-circuiter" le passage par le résultat.** Par exemple, pour conclure que 9x8=71 est fausse, il n'y a pas besoin de savoir que 9x8=72: il suffit de savoir qu'un produit par 8 ne peut être impair. D'ailleurs, les recherches de Krueger et Hallford (1984) et Krueger (1986), sur des adultes il est vrai, supportent l'idée que ces derniers font intervenir des règles de parité dans leurs vérifications. Mais ceci ne signifie pas pour autant que le traitement des stimuli négatifs est toujours plus facile. Dans le domaine des calculs élémentaires, nous verrons par la suite pourquoi. Mais déjà, dans le cas de raisonnements inductifs (Lefèvre et Bisanz, 1986), où il s'agit de trouver une régularité dans une suite de nombres, on peut remarquer qu'un stimulus négatif comme 5, 10, 16, 20 semble poser bien plus de problèmes qu'un correspondant positif, par exemple 5,10,15, 20, du fait de l'existence possible d'une régularité qui n'est pas celle qui est suggérée.

(2) **Pour les opérations inverses, il se pose un problème évident de stratégie de lecture:** si un élève, qui a mémorisé la table de multiplication mais pas celle de division, doit vérifier 72:8=9 il a tout intérêt à lire l'égalité de droite à gauche et à vérifier ainsi 9x8=72, alors que s'il doit produire le résultat de 72:8 le passage par la multiplication n'est pas autant facilité ou induit.

A ce sujet, il est intéressant de noter que la seule (à ma connaissance) tentative de comparaison empirique entre tâche de production et tâche de vérification (Ashcraft, Fierman et Bartolotta, 1984) a porté sur une seule opération et a abouti à la conclusion que les deux tâches ne différaient pas essentiellement. Cette opération étant une opération directe - l'addition - il convient de s'interroger sur la validité d'un tel résultat pour les opérations inverses.

(3) Si les stimuli négatifs semblent poser des problèmes particuliers, les stimuli **positifs** en posent également ! En effet, **le fait d'indiquer la réponse juste transforme le rappel** - l'élève doit rappeler le carré de 3 par exemple - **en reconnaissance** - l'élève doit reconnaître une égalité juste, par exemple 3x3=9. Et l'expérience courante - un visage dont

on ne se rappelle pas mais que l'on arriverait facilement à reconnaître par exemple - suggère que cette distinction peut avoir son importance. D'ailleurs, à des niveaux élémentaires, Mishkin (1982) suggère que la reconnaissance est une activation de la représentation cérébrale par **la** voie sensorielle qui l'a créée, alors que le rappel est une activation de cette représentation par **une autre** voie. Egalement, un certain nombre de résultats - mon exemple aussi - font penser que le rappel nécessite plus de ressources de traitement que la reconnaissance (Craik et McDowd, 1987).

1.2. Les trois points qui viennent d'être dégagés introduisent au contenu de cet exposé. Le choix d'une tâche de vérification, dans les expériences JusteFaux (Fischer, 1987a, 1987b; Gadio, 1987; Fischer et Pluvinage, soumis), et quelques autres choix subséquents, que je vais rapporter, conduisent en effet à se poser toutes ces questions, et permettent d'y apporter des éléments de réponse.
D'abord, la présence d'une moitié de stimuli positifs conduit à se demander si l'on retrouve un **effet** général de **positivité,** un effet (*the fast-"same" effect*) qui a fait l'objet d'une littérature abondante dans les expériences de type "même-différent" où il s'agit de dire si deux stimuli perceptifs sont identiques ou différents (pour une synthèse, voir Farell, 1985). Ce problème, on peut le penser, est lié à celui posé dans le point (3) précédent. En effet, la reconnaissance n'est vraiment possible que pour les égalités justes, car il est peu probable que les égalités fausses soient stockées dans notre mémoire.
Ensuite, le choix de la réponse fausse s'avère, d'après le point (1), essentiel. En effet, si le faux résultat a la même parité que le vrai, le rejet sur la base de la parité, suggéré ci-dessus, n'est plus possible. Egalement et intuitivement, une égalité comme 6x7=100 (resp. 6x7=40) paraît "grossièrement" fausse, alors qu'une égalité comme 6x7=43 (resp. 6x7=48) paraît plus "vraisemblable". Certains psychologues ont tenté de traduire ceci en introduisant l'expression **distance symbolique**: plus la réponse fausse proposée est (symboliquement) distante de la réponse juste, plus l'égalité serait alors facile à rejeter.
Enfin, le choix de présenter, dans les expériences JusteFaux, les quatre opérations arithmétiques élémentaires pose à l'évidence le problème de l'**inversion** formelle soulevé dans le point (2). Si ce problème n'a guère été soulevé à ce jour c'est, je pense, pour des raisons conjoncturelles: les psychologues, cherchant à construire des modèles, notamment de la recherche en mémoire, préfèrent souvent les cas les plus simples, à savoir l'addition et la multiplication. Mais ceci les conduit à des résultats - par exemple le modèle de traitement d'Ashcraft (1982), ou le réseau unique (en mémoire) pour les additions et multiplications

(Geary, Widaman et Little, 1986) - dont la généralisation aux quatre opérations est loin d'être évidente et même, au vu des résultats de Fischer et Pluvinage (soumis), peu probable (d'autant que se pose aussi le problème de la représentativité des sujets testés).

1.3. Si les trois points dégagés dans le paragraphe 1.1 introduisent bien le contenu, il n'en est pas de même pour le plan. Celui-ci est en effet un peu inattendu.
Je commencerai, dans le paragraphe **2**, par rappeler la méthodologie des "anciennes" expériences JusteFaux. Ceci me permettra alors de discuter tout de suite le problème de l'inversion formelle des divisions. En effet, dans ces "anciennes" expériences, j'avais posé des divisions à des élèves majoritairement en fin de CM2. Or, à ce niveau et à cette époque de la scolarité, cette étude me paraît plus pertinente que celle que je pourrais faire sur les résultats, obtenus au début du CM1 avec la nouvelle version de JusteFaux, rapportés par la suite. Ceci parce qu'en début de CM1 les élèves venaient à peine de voir la division et que l'on sait - je l'ai d'ailleurs vérifié empiriquement pour la soustraction dans ma thèse (Fischer, 1979) - que l'introduction scolaire d'une nouvelle notion fondamentale ne conduit pas immédiatement à des effets miraculeux.
Je passerai ensuite, dans le paragraphe **3**, à la description des nouvelles versions de JusteFaux. Cette description sera d'autant plus facile que les principaux choix méthodologiques déjà décrits sont restés les mêmes.
Dans le paragraphe **4**, je terminerai la discussion de l'inversion des opérations en m'intéressant cette fois à la soustraction. Le fait de consacrer un paragraphe entier à cette dernière me paraît d'ailleurs didactiquement opportun: en effet, les effets de la forte incitation à calculer les soustractions par addition, que l'on peut trouver dans les programmes français de 1978, commencent maintenant à pouvoir être évalués.
Enfin, dans le paragraphe **5** , j'étudierai les effets de positivité et de distance symbolique.

2. Méthode et inversion des égalités de division

2.1. *Les principaux choix méthodologiques*

J'ai déjà longuement insisté sur le fait que le choix d'une **tâche de vérification** est un choix fondamental. Au passage j'ai également souligné que les expériences de type JusteFaux portent sur l'étude des quatre opérations élémentaires: addition, soustraction, multiplication et division. Je ne reviens donc pas sur ces choix et me limite ici à présenter quelques autres choix subséquents mais néanmoins importants.

2.1.1. Un premier choix est celui de la **limitation du temps de réponse** : les élèves n'avaient que 5 secondes, au maximum, pour répondre. Cette limitation du temps de réponse est plus ou moins imposée par mon désir de faire participer à l'expérience tous les élèves des classes impliquées. Ceci m'a en effet obligé à prévoir le cas des élèves qui ne savent pas, et n'ont pas non plus le moyen de retrouver, si une égalité est juste ou fausse: il fallait interrompre - automatiquement car je ne pouvais pas toujours être à côté de l'élève en difficulté - la mesure du TR. Quant à l'ordre de grandeur - 5 secondes - du délai de réponse, il me paraît justifié par la "taille" des égalités proposées (pour les additions et les multiplications par exemple, les deux termes de la somme ou du produit sont toujours inférieurs à 10). De plus, cette limitation à 5 secondes a l'avantage statistique d'éviter une trop grande variance des TR.

2.1.2. Un deuxième choix, une fois fait celui de l'étude des quatre opérations, est celui du mode de présentation: Fallait-il "mélanger" des opérations de nature différente ? Ici j'ai choisi de ne pas trancher: la moitié des élèves (modalité REGroupement) s'est vue proposer 10 additions, puis 10 soustractions, puis 10 multiplications et enfin 10 divisions, en étant prévenue, avant chaque bloc de10, de la nature de l'opération qui allait suivre; l'autre moitié (modalité Non-REGroupement) s'est par contre vue proposer les opérations "mélangées" et ignorait la nature de l'opération qui allait suivre. Par ailleurs, la présentation était telle que la comparaison des modalités REG et NREG devenait la plus légitime possible.

2.1.3. Enfin, un troisième choix est celui du traitement statistique des résultats. Pour intégrer le facteur exactitude - important en milieu scolaire ! - à mes comparaisons des TR, j'utilise le test de la somme des rangs (Wilcoxon) d'une manière un peu particulière (suggérée par Leach, 1979): pour chaque égalité, je répartis les élèves suivant leur TRu (Temps de Réussite: TR correspondant à une réponse correcte) dans n classes régulières de 500/n centisecondes (500 cs est le délai de réponse), et crée une classe extrême où sont regroupés les auteurs de réponses incorrectes ou de Non-Réponses (NR). Ceci conduit à une **comparaison intra-égalité**, non pas des TR, mais de ce que j'appelle **des performances**. Cette comparaison des performances constitue une réponse intéressante au délicat problème de l'échange vitesse-exactitude, comme cela a été montré dans Gadio (1987). En outre, je précise que le test, noté Z_{rn+1} par la suite, sera pratiqué unilatéralement car les meilleures performances dans la modalité REG me semblent prévisibles (voir le 2.2 suivant).

2.2. *L'approche du problème*

Les élèves dans la modalité REG, qui sont prévenus qu'ils vont faire des divisions, peuvent adapter leur stratégie, de lecture notamment. En conséquence, ils peuvent, sans perte de temps, transformer la vérification des items de divisions en opération de mutiplication. Comme ces dernières sont en général beaucoup plus travaillées et connues, on peut faire l'hypothèse qu'ils vont surclasser leurs camarades de la modalité NREG. Pour voir s'il en est bien ainsi, j'ai comparé les performances dans les deux modalités pour les 10 items de division, aussi bien dans l'expérience au CM2 (Fischer, 1987a) que dans l'étude génétique au CM1 et CM2 (Fischer, 1987b), les divisions n'ayant pas été présentées au CE2.

2.3. *Les résultats*

Le tableau de la page suivante résume les résultats.
Comme on peut le voir, l'hypothèse d'une supériorité des élèves de la modalité REG s'est amplement confirmée au CM2: dans l'une des expériences il y a en effet 8 égalités sur les 10 qui ont conduit à des différences significatives au seuil usuel de .05; dans l'autre, il y en a 9 sur les 10 qui sont significatives. De plus, sans aucune exception, les élèves dans la modalité REG ont toujours été plus rapides.
Au CM1, les résultats sont loin d'être aussi nets. Certes la seule égalité significative est encore en faveur de REG, mais quatre fois sur 10 les élèves de NREG ont été très légèrement plus rapides.
L'ensemble de ces résultats suggère donc l'existence d'une **tendance développementale** qui serait en faveur de l'interprétation d'une adaptation de la stratégie. En effet, l'adoption, en modalité REG, d'une stratégie qui creuse d'importantes différences par rapport à la modalité NREG, présupposerait la compréhension de la relation formelle liant division et multiplication. Or une telle compréhension doit être, à l'évidence, plus fréquente au CM2 qu'au CM1.

Remarques. Pour ce qui concerne la tendance développementale, il convient de faire deux réserves:

1) Le grand nombre de différences significatives au CM2, comparativement au CM1, n'est pas une preuve statistique de son existence.
2) Les élèves de la modalité REG au CM1 semblent avoir été plus faibles (en moyenne) que leurs camarades de NREG: la comparaison des modalités présentée dans mon autre contribution le suggère très nettement.

Comparaison des modalités pour les divisions

Division	CM1 (Fischer, 1987b)			CM2 (Fischer, 1987b)			CM2 (Fischer, 1987a)		
égalités	Zr501	Signif.	différence TRu	Zr501	Signif.	différence TRu	Zr1001	Signif.	différence TRu
6 : 3 = 2	.87	n.s		4.05	.001		1.67	.05	
16: 4 = 4	1.85	.05		5.18	.001		5.58	.001	
12: 3 = 5	1.26	n.s		1.83	.05		4.87	.001	
10: 2 = 4	- .42	n.s		3.29	.001		3.80	.001	
15: 5 = 3	.87	n.s		1.41	.1		4.85	.001	
14: 7 = 3	1.50	.1		3.42	.001		4.69	.001	
72: 8 = 9	1.31	.1		2.00	.05		1.64	.10	
81: 9 = 9	.53	n.s		4.47	.001		4.61	.001	
42: 6 = 9	- .92	n.s		2.73	.005		3.05	.005	
48: 6 = 7	.93	n.s		1.59	.1		3.93	.001	
Moyenne:									

Légende: = 30 cs pour REG; = 30 cs pour NREG (justifié à droite)

2.4. *Commentaire et vérifications complémentaires.*

En présentant l'hypothèse, j'ai en fait privilégié l'une des interprétations qui peut expliquer de meilleures performances dans la modalité REG. Mais les seuls résultats statistiques ci-dessus ne permettent pas d'affirmer que les élèves dans la modalité REG ont effectivement lu et calculé de droite à gauche si on n'a pas une idée de l'avantage que procure la modalité REG en général, i.e indépendamment de ce problème d'inversion de la lecture et du calcul.
Il faut donc préciser que pour la multiplication (l'autre structure multiplicative) où, à l'évidence, le problème de l'inversion ne se pose pas, j'ai enregistré les résultats suivants: au CM2b, il y a 5 égalités (sur 10) significatives en faveur de REG; au CM2a, 6; et au CM1, 1. Ces résultats suggèrent donc que l'inversion dans la modalité REG seulement n'est pas la seule source de la différence des modalités. Néanmoins ils sont parfaitement compatibles avec le fait qu'une partie de la population, de la modalité REG, a bien inversé la lecture et, en conséquence, le calcul.

2.5. *Observations cliniques*

Ces observations ont surtout été faites dans les préexpériences ou au cours de l'expérience de Fischer (1987a) où la passation était individuelle. Voici quelques observations directes, commentaires spontanés ou explications sollicitées d'élèves, tous de CM2 et tous dans la modalité REG:
Lae est une élève, scolairement performante mais qui se plaint de manquer d'entraînement (« *C'est dur quand même: l'année dernière on en faisait tous les jours, et cette année on n'en fait plus* »), qui oralise systématiquement le calcul inverse.
Nat commente spontanément après les divisions: «*J'ai multiplié les deux nombres à droite.*»

Jea, qui s'emmêle un peu dans les termes, explique : « *Je prends le résultat puis je prends le quotient - Je regarde si le diviseur est juste.... Je fais la preuve quoi !* »
Mic, un élève performant à JusteFaux, à qui j'ai demandé comment il faisait pour aller aussi vite et dont on peut regretter le silence (et la non-relance par l'expérimentateur) sur les soustractions:
« *Ben je faisais des petits trucs comme dit notre maîtresse. Par exemple pour les divisions je prenais la réponse qui était donnée et je la multipliais par le nombre qu'on devait diviser.*

Pour les additions j'avais pas trop de moyens: j'additionnais, je faisais l'opération en tête. Pour les multiplications je multipliais les deux nombres et puis je regardais. »
Ces quelques observations confirment donc qu'une partie au moins de la population, électivement dans la modalité REG, utilise bien le calcul inverse et, peut-être aussi, la lecture de droite à gauche.

2.6. *Conclusion.*

Mon intention était de montrer que les divisions, proposées dans une tâche de vérification, peuvent conduire à des stratégies de calcul, voire de lecture, essentiellement différentes de celle d'une tâche de production. Lorsque les divisions ne sont pas mélangées avec d'autres opérations, les résultats statistiques, aussi bien que les observations cliniques, vont effectivement dans ce sens, et montrent donc une limitation d'un modèle tel que celui d'Ashcraft (1982) s'il doit s'appliquer à toute l'arithmétique mentale.

3. Expérience avec une nouvelle version de JusteFaux

3.1. *Les changements (par rapport à l'ancienne version)*

La nouvelle version de JusteFaux étant destinée à l'évaluation scolaire de la connaissance des égalités numériques élémentaires, elle devait résoudre un problème d' "injustice" dans l'ancienne version: les élèves dans la modalité REG étaient globalement favorisés (dans le bilan du logiciel, il y avait une compensation théorique). Pour le résoudre, la nouvelle version prévoit deux passations pour chaque élève: l'une dans la modalité REG, l'autre dans NREG. Ceci permet en outre d'avoir deux jeux d'égalités et aussi une meilleure stabilisation statistique.
Sinon, les choix méthodologiques de l'ancienne version sont repris: tout au plus, on peut encore signaler que le nombre d'égalités par série est passé de 10 à 14, et que le délai de réponse, dans l'expérience qui va être décrite, a été de 532 cs.

3.2. *Le choix des égalités*

Je limite les faits numériques à des opérations portant sur des nombres entiers positifs inférieurs à 10 pour les opérations directes (additions et multiplications), et à des opérations dont le deuxième terme et le résultat sont inférieurs à 10 pour les opérations inverses

(soustractions et divisions).
Choix des opérations directes. Une fois ce choix fait, je ne prends en compte que l'un des deux couples de termes associés à une même paire. De plus, j'élimine les couples dans lesquels les éléments neutres 0 ou/et 1 sont impliqués et les doubles (couples de la forme (x,x)). Il reste alors 28 additions et 28 multiplications.
Dans ces 28 additions (resp. multiplications) je distingue 2 niveaux en les définissant essentiellement (et a priori) par des critères structuraux:
les additions et multiplications de niveau1 sont celles impliquant deux nombres inférieurs ou égaux à 5, ou au moins l'un des deux nombres, 2 ou 5.
Choix des réponses fausses. Le choix des réponses incorrectes aux égalités négatives se décompose ainsi:

- pour les 14 additions négatives, 7 réponses incorrectes s'écartent de 1 de la réponse correcte, et les 7 autres de 2;
- pour les 14 multiplications négatives, 7 réponses incorrectes s'écartent aussi de 1 de la réponse correcte, mais les 7 autres s'écartent d'un multiplicateur (ex.: 8x5=35).

En outre, et pour chacune des opérations, la moitié des réponses incorrectes est supérieure à la réponse correcte, l'autre moitié étant évidemment inférieure.
Choix des opérations inverses. A chaque opération directe choisie correspondent deux opérations inverses. Par exemple, à 2+3 (resp. 2x3) correspondent 5-2 et 5-3 (resp. 6:2 et 6:3). J'ai choisi arbitrairement l'une des deux (en réalité et primitivement j'ai opéré systématiquement: une fois sur deux je gardais le premier terme de l'opération directe. Mais des problèmes d'équilibrage m'ont ensuite obligé à abandonner ce choix initial dans le cas des structures multiplicatives). Enfin, le choix des réponses incorrectes pour les égalités négatives est analogue à celui des additions.

3.3. *Equilibrage d'après les tables de Wheeler.*

Pour toutes les études annoncées en introduction, le choix des égalités s'avère particulièrement important. Prenons l'exemple de l'effet de positivité. Pour étudier directement cet effet, la méthode la plus immédiate aurait pu consister à poser les mêmes calculs avec une fois une réponse correcte, une autre fois une réponse fausse. Mais comme je ne désirais pas reprendre plusieurs fois le même calcul je suis obligé d'effectuer la comparaison sur des calculs différents. Il est donc essentiel que, a priori, les calculs ayant généré les égalités positives soient de la même difficulté que ceux ayant généré les égalités négatives.
Pour arriver à un certain équilibre, j'ai utilisé les deux tables de Wheeler (1939 et 1941) qui donnent la hiérarchie de difficulté des 100 additions de la table, et des 99 multiplications

(Wheeler n'a pas inclus 0x0).
Avec ces tables, et en faisant la somme des rangs, j'ai équilibré les additions (resp. multiplications). Pour les soustractions (resp. divisions) j'ai considéré qu'une opération a-b=c (resp. a:b=c) obtiendrait le même classement que sa correspondante b+c=a (resp. bxc=a) ou c+b=a (resp. cxb=a) qui figure dans l'échantillon. Le tableau suivant - représentant le rang moyen obtenu par les égalités choisies (avec les conventions faites pour les opérations inverses) -résume les équilibres auxquels je suis parvenu:

	ADD		SOU		MUL		DIV	
	pos	nég	pos	nég	pos	nég	pos	nég
Ecart = 1	-	68	-	68	-	68	-	71
Ecart > 1	-	71	-	71	-	71	-	68
Ensemble	70	70	70	70	69	70	69	70
Egalités 1	69	68	71	71	70	69	69	70
Egalités 2	71	71	69	68	69	70	70	69

De plus, je distingue les **soustractions additives** et les **soustractions soustractives**: les soustractions additives (resp. soustractives) sont celles pour lesquelles le deuxième terme de la différence est supérieur (resp. inférieur) à la moitié du premier. Avec ces conventions de vocabulaire, les soustractions additives ont un rang moyen de 69.5, et les soustractives de 70.0. Il y a bien entendu aussi la même proportion - une sur deux - d'égalités positives dans les soustractions additives que dans les soustractions soustractives.

3.4. *L'ordre de présentation* .

Dans la modalité NREG, les égalités 1 se présentent dans l'ordre suivant:

- Série1: 9+5=14, 5x3=14, 72:9=6, 6+8=16, 13-5=8, 18:9=2, 3+4=7, 10-6=3, 24:3=7, 3+7=10, 4x6=24, 12:2=7, 10-2=8, 7x2=16.
- Série2: 13-9=4, 6+2=9, 9x3=27, 28:7=6, 11-5=7, 8+3=11, 6x5=30, 20:5=4, 9x4=36, 7+5=10, 54:9=7, 8+9=17, 11-4=8, 8x2=16.
- Série3: 35:5=7, 8x7=56, 2+3=7, 63:7=9, 8x5=35, 6:2=3, 3+9=11, 8-5=1, 4+2=6, 13-7=6, 8x6=47, 9-4=5, 32:4=8, 9-3=4.

- Série4: 4x2=8, 12:3=3, 6x7=49, 9+7=16, 5x9=46, 21:7=3, 11-9=4, 7+2=8, 15-6=8, 7+8=13, 10:5=4, 7-5=2, 3x6=17, 12-8=4.

Maintenant le jeu des <u>égalités 2</u>:

- Série1: 3+5=6, 4x5=20, 56:7=8, 8+4=12, 8-6=3, 30:6=5, 5+4=9, 17-9=8, 24:4=6, 4+7=10, 8x3=27, 16:2=8, 5-2=1, 5x2=9.
- Série2: 11-3=8, 5+6=12, 7x3=21, 27:9=3, 12-7=7, 4+9=13, 6x2=10, 15:3=7, 8x4=32, 2+8=10, 36:9=4, 7+6=13, 16-7=9, 3x4=16.
- Série3: 14:7=3, 6x9=45, 2+5=7, 18:3=4, 3x2=6, 45:9=3, 6+4=11, 14-5=9, 9+2=13, 12-9=4, 7x4=29, 7-3=4, 42:6=8, 10-7=3.
- Série4: 5x7=35, 40:5=7, 9x8=73, 6+3=7, 9x2=18, 48:8=4, 6-4=2, 5+8=13, 14-6=6, 9+6=16, 8:4=2, 9-2=6, 7x9=63, 15-8=9.

L'ordre de présentation dans la modalité REG peut être déduit des précédents: il suffit d'extraire, au fur et à mesure qu'on les rencontre, dans un jeu, d'abord les 14 additions, puis les 14 soustractions, puis les 14 multiplications, enfin les 14 divisions.

3.5. *L'expérience*

La population. L'expérience concerne quatre classes de CM de la proche banlieue ou campagne de Metz, dont l'évaluation est envisagée sur deux ans, à raison d'une fois tous les six mois environ. La présente étude porte sur la première évaluation, donc au CM1. L'effectif total a été de 82 élèves, mais un a du être éliminé pour réponses trop rapides (plutôt un problème d'alcoolisme parental que de contrat) et la dernière élève à être passée par ordre alphabétique a également été éliminée (de mon étude) pour avoir un plan expérimental "parfait". Tous les résultats portent donc sur 80 élèves.

La passation. Elle s'est déroulée en décembre-janvier et se décompose en deux: les passations 1 et 2 sont espacées d'une semaine environ. Les élèves passaient, en général, par groupes de 6 dans une salle informatique équipée soit d'un nanoréseau, soit d'une configuration de TO7 ou TO7/70 isolés, sous la surveillance de l'expérimentateur ou d'un collaborateur. Avant chacune des passations, l'expérimentateur donne quelques consignes collectives à l'ensemble d'une classe. Avant la passation 1, il informe succinctement les élèves de l'ensemble du projet (évaluation tous les six mois), du fonctionnement du programme, des informations que l'on peut tirer de ces mesures. Avant chacune des passations il insiste sur le fait qu'il s'agit de répondre vite mais correctement avant tout.

Les élèves "tombent", au hasard, sur une des quatre conditions expérimentales (équitablement distribuées) lors de la première passation: les égalités 1 dans la modalité

REG, ou les 1 dans NREG, ou les 2 dans REG, ou les 2 dans NREG. La condition expérimentale de la passation 2 est alors entièrement déterminée, pour chaque élève, par celle qu'il a eue au cours de la passation 1: s'il a eu les égalités 1 (resp. 2) il aura les égalités 2 (resp. 1) et s'il a travaillé dans la modalité REG (resp. NREG), il travaillera dans NREG (resp. REG).

Les contrôles statistiques. Par rapport à la version "ancienne" de JusteFaux, la nouvelle offre des possibilités supplémentaires de contrôle statistique. En effet, chaque élève ayant passé dans les deux modalités, on peut procéder à une comparaison des TRu moyens respectifs. Comme le suggère un exemple de Bradley (1968 p.101-102) la différence entre les deux, calculée pour chaque élève, donne un ensemble de nombres positifs ou négatifs, qui peut être soumis au test des rangs signés de Wilcoxon (procédure de Leach, 1979). Je parlerai d'une **comparaison intra-élève** des modalités, la comparaison intra-égalité restant bien entendu possible aussi.

De manière analogue, on peut utiliser ce test pour la comparaison des égalités justes et fausses, pour la comparaison des soustractions additives et soustractives, ou encore pour la comparaison des différences de modalités pour deux opérations arithmétiques différentes.

Remarque.

Comme c'est dans les échecs que la proportion de réponses "au hasard", d'accidents, de réponses trop hâtives,... doit être la plus grande, on voit immédiatement l'avantage principal de la considération des TRu au lieu des TR. Secondairement cela évite aussi d'assigner un temps arbitraire aux Non-Réponses.

Cette considération des TRu a cependant l'inconvénient de réduire, considérablement pour certains élèves, le nombre de mesures sur lequel porte le calcul de la moyenne. Elle pourrait aussi conduire à une déformation du pattern des vitesses de réponse: par exemple si, dans la comparaison des égalités positives et négatives, les échecs ont été très rapides pour les égalités positives, et très lents (ou des NR) pour les égalités négatives, on voit que le pattern des vitesses de réponse serait distordu en défaveur des égalités positives.

L'analyse des temps d'échec, et des nombres de NR, montre que la description ci-dessus est bien purement théorique.

4. Etude des soustractions

4.1. *L'inversion des égalités de soustraction*

4.1.1. *Le problème et la manière de l'attaquer.* Comme cela a déjà été souligné, les programmes français 1978 pour le Cours Elémentaire, qui sont ceux auxquels les sujets de la présente expérience ont en principe été soumis, préconisent le calcul des soustractions par

addition.
De manière précise, les Instructions Complémentaires mentionnent:

> En ce qui concerne la soustraction, le fait de calculer une différence par addition, constitue une technique qui a l'avantage de ne pas exiger des enfants d'autres compétences que celles requises pour l'addition. Si la disposition initiale (directement dérivée de a + . = b) est $\begin{array}{c} a \\ +\,. \\ \hline b \end{array}$ il conviendra d'aboutir, au moins en fin de cycle élémentaire, à la disposition habituelle $\begin{array}{c} b \\ -\,a\,. \\ \hline \end{array}$ sans que pour autant la technique de calcul soit modifiée.

Remarquons d'emblée que l'argumentation, qui s'appuie exclusivement sur un argument de "logique économique", paraît **antipsychologique**: peu de gens doivent calculer, par exemple 35-1 en passant par 1 + . = 35. Plus généralement, elle paraît refléter une certaine conception de l'apprentissage - les élèves apprennent les additions au CP, puis les utilisent au CE - qui est peu compatible avec des observations comme celles que j'ai faites sur le développement de la connaissance des faits numériques (Fischer, 1987b).
Passons maintenant à la manière d'approcher le problème. Si les élèves "adhèrent" à, i.e utilisent et comprennent, la manière de calculer suggérée par les Instructions, on peut penser qu'ils vont profiter de la présence d'une réponse pour effectuer une vérification: pour 11-5=7 par exemple, ils vont calculer tout de suite 7+5 et ne pas se demander 5+. =11. Dans ce cas nous devrions donc observer un phénomène analogue à celui qui a été observé pour les divisions: les performances dans la modalité REG devraient être bien meilleures que celles dans la modalité NREG.

4.1.2. *Résultats.* La supériorité de la modalité REG se confirme sans ambiguïté: comparativement à la modalité NREG, les TRu y sont inférieurs en moyenne de 32 cs (différence fortement significative: z=4,40); le pourcentage d'échecs y est inférieur de 3% (non significative: z=1,51). Mais le même problème que pour les divisions se repose ici: peut-on interpréter cette supériorité de REG comme une "preuve" d'inversion ? Pour répondre, on peut comparer les soustractions cette fois aux additions pour lesquelles le problème de l'inversion ne se pose pas. Or, contrairement à ce qui s'est passé pour les divisions comparativement aux multiplications, les soustractions ne semblent pas conduire à une différence des modalités plus importante que les additions. Par exemple, la comparaison intra-égalités, avec le test Zr51, conduit à **11** différences significatives sur 28 possibles, en faveur de REG, pour les soustractions, alors qu'il y en a **12** pour les additions. Il y a également une augmentation du pourcentage de réussite de 4% (significative: z=2,39), supérieure aux 3% ci-dessus. Par contre, la différence des TRu pour les additions n'est que de 26 cs: même si elle est tout aussi fortement significative (z=4,85), elle est inférieure aux 32 cs observés pour les soustractions. En dernier, une comparaison directe entre les différences des TRu dans les deux modalités pour les soustractions et les additions ne conduit **pas** à une **différence significative** (z=1,31): comme elle va néanmoins dans la direction d'une plus grande différence dans les soustractions, il est utile de rajouter (car il ne pourrait s'agir que d'un problème de pouvoir de rejet) que la comparaison analogue entre soustraction et multiplication est bien significative (fortement: z=2,80).

4.1.3. *Observations incidentes.* Contrairement à ce que j'ai rapporté sur les divisions, je n'ai pas observé d'élève inversant systématiquement (à haute voix) les soustractions, ni même faisant une remarque laissant sous-entendre une telle inversion systématique. Certes, la raison est en partie "technique": j'ai beaucoup moins observé les élèves individuellement au cours de cette recherche qu'au cours de Fischer (1987a). Néanmoins, cette raison "technique" ne m'a pas empêché de noter encore une jolie remarque sur l'inversion des ... divisions: « *Pour les divisions j'ai un truc* » (Pie) ! Mais surtout, en "rattrapant" Séb, absent lors de la passation "officielle", il m'a fait spontanément une confidence: « *Pour les divisions, je fais le contraire* ». Et cette fois-ci, contrairement à ce qui s'était passé pour Mic (voir le 2.5), je n'ai pas manqué l'occasion de rajouter: Et pour les soustractions aussi ? - « *Euh.... non.* » - Pourquoi pas ? - « *Parce que les soustractions je sais assez bien.* »
Le traitement différent des soustractions et des divisions semble ici très bien illustré. De plus, la surprise de Séb semble montrer qu'il ne s'était pas vraiment posé la question de l'inversion des soustractions, et son explication n'est guère convaincante lorsqu'on connaît la difficulté des soustractions (voir Fischer, 1987a), tout au moins pour ce qui concerne leur exécution (voir Fischer et Pluvinage, soumis). D'ailleurs les performances de Séb, au cours de la passation qui a suivi cette observation, sont conformes à ce pattern général: il a fait 5 fautes aux 14 soustractions, contre une seulement aux 14 divisions.

4.1.4. *Conclusions.* Pour les soustractions comme pour les divisions les observations cliniques ou incidentes rejoignent les observations statistiques. Mais cette fois-ci la conclusion est autre: l'ensemble des observations est en accord avec l'hypothèse que **très peu d'élèves inversent systématiquement leur vérification des égalités de sous-**

traction.

4.2. *Trois modèles de calcul des soustractions*

4.2.1. Si peu d'élèves calculent donc à partir du résultat, on peut se demander de quelle manière s'y prennent ceux qui calculent effectivement, car quelques-uns "démissionnent" dans les soustractions difficiles et quelques autres connaissent peut-être les soustractions faciles par coeur. Parmi les modèles les plus plausibles, trois me semblent intéressants à considérer ici. Ceci parce qu'ils peuvent conduire, grâce à la présence et à l'équilibrage des soustractions additives et soustractives, à des prédictions vérifiables.
Ces trois modèles sont les suivants:

- l'Addition mécanique (Am): elle se distingue de l'Addition avec adhésion (Aa) précédente par le fait que l'élève calcule mécaniquement, par exemple 11-3, par addition, i.e en cherchant 3+.=11, sans tenir compte, dans son calcul, de la réponse proposée;
- la Soustraction mécanique (Sm): les élèves utilisent une procédure de comptage, non nécessairement un par un, en arrière;
- le Choix: l'élève choisit, en fonction du rapport des deux termes de la différence, un calcul par Addition mécanique s'il est inférieur à deux, et un calcul par Soustraction mécanique s'il est supérieur.

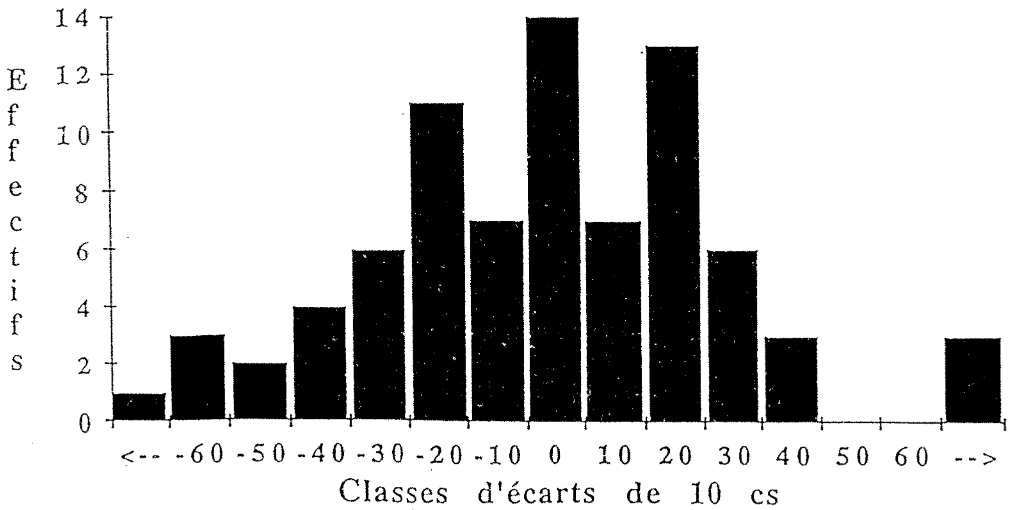
Les prédictions que l'on peut faire, si l'un de ces modèles s'avérait largement dominant, sont les suivantes:
- si Am est dominant, les soustractions additives devraient être plus faciles
- si Sm est dominant, les soustractions soustractives devraient être plus faciles
- si Ch est dominant, on devrait avoir un équilibre. Tout au moins si l'on admet que, par exemple, le calcul de 11-8 par addition est équivalent à celui de 11-3 par soustraction; ou au moins qu'il y a une équivalence globale, c'est-à-dire qu'un déséquilibre des calculs cités est compensé par un ou plusieurs autres déséquilibres.

4.2.2. La comparaison des résultats conduit à une **égalité quasi-parfaite entre soustractions additives et soustractives**. Qu'on en juge:
- les TRu sont respectivement de 275 et 276 cs;
- les pourcentages d'échecs de 23,4 et 23,8%.

Bien entendu, aucune de ces différences n'est significative, et même la faible tendance - car les soustractions additives sont à la fois très légèrement plus rapides et mieux réussies - n'est pas vraiment pertinente car le choix des réponses fausses a pu légèrement favoriser les

soustractions additives.
La conclusion est donc qu'**aucun des deux modèles Am ou Sm n'est largement dominant** dans la population étudiée. Mais ceci ne signifie pas pour autant que c'est le modèle Ch qui est dominant. En effet, si ce modèle est bien compatible avec l'équilibre des deux types de soustraction observé, il n'est pas la seule manière d'arriver à un tel équilibre. Par exemple, et théoriquement, on peut imaginer qu'une moitié des élèves suit Am et l'autre Sm: dans un tel cas, on aurait aussi l'équilibre. Ou encore, on peut imaginer qu'un tiers des élèves suit Am, un deuxième tiers Sm et le dernier tiers Ch.

4.2.3. Pour essayer de voir si l'une ou l'autre de ces possibilités théoriques s'est effectivement réalisée, j'ai analysé la distribution des écarts individuels des TRu aux deux types de soustractions. En effet, si on se place par exemple dans le cas du partage en trois tiers, on devrait avoir une ditribution trimodale des écarts individuels: en calculant l'écart dans le sens TRu aux soustraction additives - TRu aux soustractions soustractives, le tiers d'élèves suivant Am devrait se regrouper autour d'un écart négatif, le tiers d'élèves suivant Sm autour d'un écart positif, et tiers suivant Ch autour de 0. La distribution obtenue est reproduite ci-après.



A première vue cette distribution a effectivement une allure un peu trimodale. Néanmoins, pour que l'on puisse affirmer qu'elle est trimodale, il faudrait, au minimum, arriver à rejeter l'hypothèse de normalité à un seuil peu sévère comme .10.

Un χ^2 d'ajustement (Snedecor et Cochran, 1971) appliqué aux données regroupées en classes, larges de 10 cs et centrées sur les multiples de 10 (comme sur la figure, où j'ai regroupé les classes extrêmes), n'a pas permis ce rejet. Comme le regroupement en classes est arbitraire et conduit à une perte d'information, j'ai aussi testé la normalité avec le test de Kolmogorov-Smirnov (Siegel, 1956) qui peut s'appliquer aux données originales: ce test n'a pas conduit non plus au rejet de l'hypothèse de normalité. Enfin, en dernier recours, j'ai testé la symétrie et l'aplatissement: la première semble normale, mais pas le second. Néanmoins cet aplatissement non normal semble essentiellement dû à quelques cas extrêmes douteux.
Tout cela m'incite présentement à ne pas m'aventurer au-delà des conclusions soulignées dans le 4.2.2, des conclusions que le non rejet de la symétrie renforce d'ailleurs.

4.3. *Conclusion*

Même si la technique précise du calcul n'a pu être élucidée, il n'en demeure pas moins que les résultats du 4.1., en ce qui concerne le modèle Aa, et les résultats du 4.2, en ce qui concerne Am, sont compatibles avec le fait qu'**il n'y pas un phénomène massif de calcul des soustractions par addition.**

5. Effets de positivité et de distance symbolique

5.1. *Les hypothèses*

5.1.1. Plusieurs recherches sur les calculs élémentaires ont mis en évidence l'effet de positivité, tout au moins lorsque les réponses fausses proposées ne sont pas trop grossièrement erronées: Findlay (1978), Ashcraft et Fierman (1982), Hamann et Ashcraft (1985), Ashcraft et Battaglia (1978), Ashcraft et Stazyk (1981), Gonzalez et Kolers (1982), Krueger et Hallford (1984), Krueger (1986), Stazyk, Ashcraft et Hamann (1982). Hormis les trois premières, ces recherches portent cependant sur des sujets adultes (étudiants). De plus, les quatre opérations arithmétiques sont loin d'être uniformément représentées: seules les deux dernières recherches portent sur une structure multiplicative. Les opérations inverses n'apparaissent qu'une fois: il s'agit de la recherche de Findlay (1978), qui a "mélangé" additions et soustractions et qui porte d'ailleurs sur une population statistiquement peu nom-

breuse.
Pour donner une idée de l'ampleur de l'effet de positivité, je citerai la différence temporelle trouvée par Ashcraft et Fierman (1982), pour des additions de nombres à un chiffre et sur des élèves de $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$ et $6^{\text{ème}}$ année d'école: environ 17 cs en moyenne. Pour la différence des pourcentages d'erreur, les résultats d'Hamann et Ashcraft (1985) vont, en $4^{\text{ème}}$ année d'école du moins, en sens contraire. Mais, d'une part, la différence n'est pas très importante, d'autre part, sur les trois "tailles" d'erreurs étudiées - 1 ou 2, 6 ou 7, et 12 ou 13 - l'avant dernière, et surtout la dernière, sont déjà assez grossières pour de petites additions. Or comme dans la recherche de Findlay il apparaît que les erreurs de 1 conduisent à 2,5% d'erreurs de plus que les erreurs plus grossières, on peut donc penser que, chez Hamann et Ashcraft, ce sont surtout les deux dernières tailles d'erreurs qui sont à l'origine de ce résultat.
Pour justement essayer de préciser ce que l'on peut entendre par égalités *grossièrement* fausses, c'est la recherche d'Ashcraft et Stazyk (1981) qui me paraît la plus intéressante à citer, même si elle porte sur des adultes. Ashcraft et Stazyk avaient en effet proposé des additions (sur des nombres à un chiffre) fausses de 1, de 5, de 9 et de 13: l'effet de positivité a diminué avec l'écart mais ne s'est inversé que pour 13. Et cette inversion, très nette pour les "grandes" additions, où elle est de l'ordre de 20 cs, est théoriquement importante. Elle souligne d'une part qu'il vaut mieux parler d'un effet de négativité, d'autre part une limitation de certaines explications générales, par exemple celle consistant à attribuer l'effet de positivité à un « *caractère général des représentations élémentaires* » qui serait « *d'insister sur les aspects positifs des objets et événements et de négliger leurs aspects négatifs (x «n'est pas» a, b, etc.)* » (formulations de Piaget, 1977).
Ces précisions données, je peux maintenant en revenir à ma propre expérience. Aucune des réponses fausses ne semblant l'être "grossièrement", je ferai l'**hypothèse 1** que, **pour chacune des quatre opérations, les performances sont meilleures pour les égalités positives** (comparativement aux négatives correspondantes) de mon échantillon.

5.1.2. Pour l'effet de distance symbolique, comme on a déjà pu l'entrevoir à propos des erreurs "grossières", les choses se compliquent un peu. En effet, les quelques recherches ayant étudié cet effet ont souvent choisi des distances bien "espacées" comme 1, 5, 9, 13, et ont parfois eu du mal à le retrouver, notamment pour la multiplication (Stazyk et al., 1982). Se pose aussi le problème des réponses violant la parité (Krueger et Hallford, 1984; Krueger, 1986).
Pour donner une idée de l'ampleur de l'effet, je citerai encore la recherche d'Ashcraft et

Fierman (1982): ils ont trouvé que des additions fausses de 1 étaient plus lentes d'environ 30 cs que des additions fausses de 5 ou 7. Pour les multiplications, Stazyk et al., avec des adultes, ont bien introduit (expérience 3) des réponses fausses de la table comme je l'ai fait. Mais leur technique n'a pas été identique à la mienne: ils présentaient le calcul 20 ou 60 cs avant la réponse. Je préfère donc me référer à un "papier" de Duffy et Fisher (rapporté dans Krueger et Hallford, 1984 p. 179): ces chercheurs ont trouvé que les produits faux sont rejetés plus rapidement (115 millisecondes) si la réponse n'est pas un multiple de l'un des deux termes.
En dépit donc de certaines "complications" et du manque d'évidences (nettes et fines) de l'effet de distance symbolique pour certaines opérations ou pour certaines populations, mon **hypothèse 2** sera que **les élèves sont plus performants dans les additions, soustractions et divisions fausses de 2 que dans celles fausses de 1**, mais que, par contre, **ils sont plus performants dans les multiplications fausses de 1 que dans celles fausses d'un multiplicateur.**

5.2. *Les résultats*

Le tableau suivant rassemble tous les résultats.

		effet de positivité			effet de distance symbol.		
Opér.	Crit	posit.	négat.	différ.	nég. 1	nég. >1	différ.
ADD	Ech.	15	13	- n.s.	15	11	+ p<.05
	TRu	234	253	+ p<.0002	255	251	+ n.s.
SOU	Ech.	24	23	- n.s.	29	17	+ p<.0002
	TRu	268	283	+ p<.001	290	276	+ p<.002
MUL	Ech.	09	14	+ p<.01	09	18	+ p<.0002
	TRu	226	260	+ p<.0002	262	257	- n.s.
DIV	Ech.	18	19	+ n.s.	24	14	+ p<.0002
	TRu	254	278	+ p<.0002	280	276	+ n.s.

Pour la lecture de ce tableau, il faut donner les précisions suivantes:

- les Echecs sont indiqués en pourcentages et portent respectivement sur 1120 (=14x80) mesures par case pour l'effet de positivité, 560 (=7x80) mesures par case pour l'effet de distance symbolique;

- les Temps de Réussite sont en centièmes de seconde;
- le signe + (resp. -) montre que la comparaison va (resp. ne va pas) dans le sens de l'hypothèse;
- p<s précise le seuil s de signification (test bilatéral), et n.s. signifie non significatif, les seuils extrêmes pris en considération étant s=.20 et s=.0002.

5.3. *Les commentaires*

5.3.1. Pour l'**effet de positivité**, on voit que dans la colonne des différences le signe - apparaît deux fois. Mais la tendance contraire à l'hypothèse 1 qu'il traduit n'est pas significative. Comme par ailleurs tous les résultats non significatifs (qui concernent exclusivement les échecs) sont accompagnés d'un résultat fortement significatif pour les TRu, on peut conclure que, globalement, l'hypothèse 1 est confirmée: **les performances sont meilleures pour les égalités positives.**
Néanmoins, l'hypothèse 1 mérite incontestablement d'être affinée dans le sens que laissait prévoir l'examen de la littérature: l'effet facilitant de la positivité est clair et net pour les TRu, en particulier pour la multiplication, mais, hormis pour ces dernières, il ne se voit quasiment pas pour les échecs.

5.3.2. Pour l'**effet de distance symbolique**, le commentaire prend à peu près la même forme. La seule fois où il apparaît un signe - dans la colonne des différences, la tendance contraire à l'hypothèse 2 qu'il traduit n'est pas significative. Comme tous les résultats non significatifs (exclusivement au niveau des TRu) s'accompagnent toujours d'un résultat significatif pour les échecs, on peut aussi conclure que l'hypothèse 2 s'est, globalement, confirmée: **les performances sont moins bonnes pour les égalités fausses de 1, sauf pour les multiplications.**
Néanmoins, il convient de préciser que c'est surtout au niveau des échecs que le résultat est clair et net, alors qu'au niveau des TRu il n'existe que pour les soutractions.

5.3.3. Mais le commentaire serait incomplet si l'on ne discutait pas simultanément les deux effets. D'autant que les résultats obtenus sont, pour les opérations inverses du moins, particulièrement jolis: les égalités positives viennent chaque fois, au niveau des échecs, s'intercaler entre les égalités fausses de 1 (moins souvent réussies que les positives) et les égalités fausses de 2 (plus souvent réussies). Ceci renforce un peu l'hypothèse 1 dans la mesure où, même pour les échecs, il semble y avoir un petit effet facilitant de positivité si l'on choisit des réponses fausses symboliquement très proches de la réponse juste. Et, dans cette dernière perspective, 2 s'avère déjà une trop grande distance, alors qu'un multiplicateur s'avère, dans le seul cas des multiplications évidemment, un choix qui semble idéal.

6. Conclusions

6.1. Dans la présente contribution, j'ai essayé de montrer qu'une tâche de vérification, en arithmétique élémentaire, présentait quelques spécificités par rapport à une tâche de production.

Les spécificités sur lesquelles j'ai insisté sont: la possibilité de vérifier les égalités impliquant les opérations inverses (soustraction et division) en partant du résultat proposé, l'effet de positivité selon lequel les égalités positives (justes) conduisent à de meilleures performances, et l'effet de distance symbolique selon lequel une égalité négative (fausse) est d'autant plus difficile à rejeter que la réponse fausse proposée est symboliquement proche de la réponse juste.

En général, avec éventuellement quelques affinements, mes différentes observations **confirment** assez nettement ces spécificités, à l'exception toutefois de la vérification de la soustraction.

Mais cette confirmation ne doit pas faire croire que la mesure des TR dans une tâche de vérification est un exercice vraiment particulier dans lequel, par exemple, le réflexe jouerait un rôle prépondérant: d'une part, parce que les corrélations que j'ai pu faire entre un classement à JusteFaux et le classement scolaire habituel sont toujours significativement positives, d'autre part parce que Geary et Widaman (1987) ont montré que les composantes du traitement détectées avec cette méthode sont en continuité avec les habiletés intellectuelles identifiées par les méthodes d'analyse factorielle.

6.2. L'exception des soustractions m'a conduit à analyser le calcul des soustractions d'un peu plus près: les résultats trouvés, les observations recueillies, et les interprétations proposées, suggèrent que **les élèves de CM1 n'utilisent pas** systématiquement et massivement **la technique de calcul par addition** fortement recommandée par les programmes officiels auxquels ils ont été soumis.

J'ai suggéré ailleurs (Fischer, 1987a) une explication possible de ce fait: bon nombre d'élèves connaissent insuffisamment les additions pour que le passage par ces dernières présente un réel avantage pour eux. Mais d'autres explications complémentaires peuvent être avancées:

- le calcul "normal" et conscient est, sous la pression du temps, "court-circuité" par une reconnaissance (voir mon autre contribution) qui est parfois erronée. En témoigne cette réponse d'un sujet assez brillant (un an d'avance scolaire) qui a, néanmoins et comme beaucoup de ses camarades, échoué à 11-3=9. Lorsque je lui ai demandé, a posteriori, comment il a fait pour se tromper, il a expliqué: «**Normalement** je fais neuf plus trois, douze .... »;

- les élèves ont des procédures soustractives déjà trop bien "ancrées" pour que l'apprentissage scolaire puisse les modifier: le cas de Séb, rapporté dans le 4.1.3, illustre très bien une telle explication. En effet, Séb explique, en dépit des nombreuses fautes qu'il fait, qu'il n'inverse pas les égalités de soustraction parce qu'il les *sait assez bien.* Une autre observation peut la corroborer: les nombreuses erreurs pour les soustractions fausses de 1 - 29%, i.e nettement le pourcentage d'erreurs le plus fort dans le tableau précédent - est en accord avec l'utilisation de procédures soustractives, apprises très précocément (Fischer, 1981), lesquelles conduisent souvent à des erreurs de 1 (Beattie, 1979; Fischer, 1979)[1].

6.3. Les résultats, souvent plus psychologiques que didactiques, peuvent cependant, comme j'ai essayé de le montrer pour la soustraction, présenter un intérêt didactique immédiat au niveau de l'évaluation globale. D'autres inférences sont d'ailleurs possibles: le fait que les additions et soustractions fausses de 2 sont beaucoup mieux réussies que celles fausses de 1 suggère que les raisonnements corrects de parité n'ont pas joué un rôle important. Ceci ne prouve pas pour autant qu'ils sont totalement étrangers à des élèves de CM1: il se peut, par exemple, que les élèves qui, de manière intuitive, en auraient été capables, se retrouvent préférentiellement parmi ceux qui ont calculé exactement.

Mais au-delà de ces résultats immédiats, il me paraît important, si l'on veut utiliser la méthode des TR (dans une tâche de vérification) dans les classes, de s'assurer de sa sensibilité et de sa fiabilité en milieu scolaire. Car ce dernier implique des conditions (bruit, dérangement, etc ...) qui ne sont pas toujours celles des laboratoires de psychologie où sont typiquement étudiés les effets que j'ai rapportés. Or, sur ce plan, **les résultats** trouvés, la différence des pourcentages d'échec entre les égalités fausses de 1 et celles fausses de 2 (ou d'un multiplicateur) notamment, me **paraissent plutôt convaincants.**

(1) Il est intéressant de noter que:

1. Fischer (1979) a observé, au CE1 et avant l'apprentissage scolaire de la soustraction, une **procédure** soustractive **erronée** (voir p.65) et fréquemment utilisée (voir p.35), expliquant parfaitement l'échec de la vérification de 11-3=9;
2. Fischer et Pluvinage (soumis) soutiennent que les élèves, de CM2 en tout cas, ont souvent recours à une **mémoire procédurale** pour les soustractions;
3. Gadio (1987) a trouvé, en 6$^{\text{ème}}$, **61% d'échecs** dans la vérification de 11-3=9.

REFERENCES

Ashcraft M.H., 1982. The development of mental arithmetic: A chronometric approach. *Developmental Review,* **2**, 213-236.

Ashcraft M.H. et Battaglia J., 1978. Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory,* **4**, 527-538.

Ashcraft M.H. et Fierman B.A., 1982. Mental addition in third, fourth, and sixth graders. *Journal of Experimental Child Psychology,* **33**, 216-234.

Ashcraft M.H., Fierman B.A. et Bartolotta R., 1984. The production and verification tasks in mental addition: An empirical comparison. *Developmental Review,* **4**, 157-170.

Ashcraft M.H. et Stazyk E.H., 1981. Mental addition: A test of three verification models. *Memory & Cognition,* **9**, 185-196.

Beattie I.D., 1979. Children's strategies for solving subtraction-fact combinations. *Arithmetic Teacher,* **27**, 14-15.

Bradley J.V., 1968. Distribution-free statistical tests. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Craik F.I.M. et McDowd J.M., 1987. Age differences in recall and recognition. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition,* **13**, 474-479.

Farell B., 1985. "Same"-"Different" judgments: A review of current controversies in perceptual comparisons. *Psychological Bulletin,* **98**, 419-456.

Findlay J.M., 1978. What form of memory do schoolchildren use whilst performing mental arithmetic ? In M.M. Gruneberg, P.E. Morris, R.N. Sykes (Eds), *Practical aspects of memory* . London: Academic Press.

Fischer J.P., 1979. La perception des problèmes soustractifs aux débuts de l'apprentissage de la soustraction. Thèse: Université Nancy I.

Fischer J.P., 1981. Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **2**, 277-302.

Fischer J.P., 1987a. L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie,* **80**, 17-24.

Fischer J.P., 1987b. Les faits numériques à l'école: une étude développementale par les TR. *Psychologie Scolaire,* **60**, 7-24.

Fischer J.P. et Pluvinage F., soumis. Complexités de compréhension et d'exécution des opérations numériques élémentaires.

Gadio I., 1987. L'automatisation du calcul au début de l'école secondaire. (Manuscrit: DEA de Didactique des Mathématiques). Strasbourg: non publié.

Geary D.C. et Widaman K.F., 1987. Individual differences in cognitive arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General,* **116**, 154-171.

Geary D.C., Widaman K.F. et Little T.D., 1986. Cognitive addition and multiplication: Evidence for a single memory network. *Memory & Cognition,* **14**, 478-487.

Gonzalez E.G. et Kolers P.A., 1982. Mental manipulation of arithmetic symbols. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition,* **8**, 308-319.

Hamann M.S. et Ashcraft M.H., 1985. Simple and complex mental addition across development. *Journal of Experimental Child Psychology,* **40**, 49-72.

Krueger L.E., 1986. Why 2x2=5 looks so wrong: On the odd-even rule in product verification. *Memory & Cognition,* **14**, 141-149.

Krueger L.E. et Hallford E.W., 1984. Why 2+2=5 looks so wrong: On the odd-even rule in sum verification. *Memory & Cognition,* **12**, 171-180.

Leach C., 1979. Introduction to statistics: A nonparametric approach for the social sciences. New York: Wiley.

LeFevre J.A. et Bisanz J., 1986. A cognitive analysis of number-series problems: Sources of individual differences in performance. *Memory & Cognition,* **14**, 287-298.

Mishkin M., 1982. A memory system in the monkey. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B,* **298**, 85-95.

Piaget J., 1977. Recherches sur l'abstraction réfléchissante : 1/ L'abstraction des relations logico-arithmétiques (tome 34 des EEG). Paris : PUF.

Ranney M., 1987. The role of structural context in perception: Syntax in the recognition of algebraic expressions. *Memory & Cognition,* **15**, 29-41.

Siegel S., 1956. Nonparametrics statistics for the behavioral sciences. New York: Mc Graw-Hill.

Snedecor G.W. et Cochran W.G., 1971. Méthodes statistiques. Paris: Association de Coordination Technique Agricole (6ème éd.).

Stazyk E.H., Ashcraft M.H. et Hamann M.S., 1982. A network approach to mental multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition,* **8**, 320-335.

Wheeler L.R., 1939. A comparative study of the difficulty of the 100 addition combinations. *Journal of Genetic Psychology*, **54**, 295-312.
Wheeler L.R., 1941. A comparative study of the difficulty of learning the multiplication combinations. *Journal of Genetic Psychology*, **59**, 189-206.

LE ROLE POSITIF DES ERREURS

N'EST-IL PAS SURFAIT ?

J.P. FISCHER

L'analyse des processus internes conduisant au choix de réponses, dans les tâches arithmétiques élémentaires, débouche sur une hypothèse qui éclaire une question ancienne : si l'on pose quelques additions, puis une multiplication, pourquoi certains élèves continuent-ils à faire des additions ? Cette erreur de persévération s'expliquerait par le recours à une mémoire procédurale plutôt qu'à une mémoire déclarative sensible avec effet d'amorçage.

> « Tout ce qu'elle disait prouva qu'elle avait entièrement raison, et eux entièrement tort. Malgré cela, la gravité de son cas ne lui a pas suffi pour se faire entendre rapidement, car en science le grade a de l'importance. »
>
> **W. Broad et N. Wade, 1982.**

1. Introduction

> « Toute erreur est donc imputable au sujet lui-même, et à une défaillance de sa faculté de juger; toute erreur, prise pour base de l'action, entraîne une déception, dont le sujet a tendance à rejeter la responsabilité sur les choses elles-mêmes, sur ses organes et sur autrui. »
>
> **Dictionnaire Encyclopédique Quillet, 1969.**

1.1. L'intérêt pour les erreurs, dans l'apprentissage des mathématiques, n'est certes pas nouveau : Seemann (1931), par exemple, avait consacré tout un ouvrage aux erreurs de calcul, à l'analyse de leurs causes psychologiques et à la manière de les éviter. Mais, comme le suggère d'ailleurs le titre de son ouvrage, les erreurs apparaissent quasi-exclusivement comme négatives et "à éviter".
Peut-être en réaction à cette conception des erreurs "à éviter", un flot croissant de littérature

----

La présente recherche a été aidée, en partie, par l'IREM de Lorraine. Qu'il me soit aussi permis de remercier Sylvie Coirault (EN, Montigny-lès-Metz), Claire Dupuis et Raymond Duval (IREM, Strasbourg), qui m'ont donné quelques conseils de rédaction.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.179- 201) IREM de Strasbourg

didactique - tendant à montrer que les erreurs jouent un rôle positif essentiel dans l'apprentissage - s'est récemment développé. Et cette littérature peut aller extrêmement loin. Ainsi,la revue Hypothèse (n°1, mai 1986) a proposé, avec un gros titre (les caractères ont 1,5 cm de hauteur !), un " **PLAIDOYER POUR L'ERREUR EN MATHS** ".
En fait, il s'agit d'un entretien avec Stella Baruk - professeur de mathématiques, écrivain et conférencière, spécialisée dans la « rééducation des élèves dépassés et des enseignants désemparés » (d'après la présentation de la revue).
Et le Monde de l' Education (n° 131, octobre 1986), dans son dossier sur "**Les Victimes des Maths**", a surenchéri (les caractères peuvent avoir 2 cm de hauteur !): " **les erreurs qui sauvent** ".

1.2. Un minimum de bon sens permet tout de suite de voir l'absurdité de tels points de vue. Par exemple, si l'erreur jouait un rôle aussi bienfaiteur que le laissent envisager ces titres, il faudrait que les élèves qui en font beaucoup finissent par être les plus brillants, un phénomène qui n'a jamais été observé à ma connaissance ! Bien entendu, on peut penser que c'est un simple malentendu sur la définition du mot **erreur** qui est à l'origine de la non-compatibilité de mon point de vue avec celui actuellement dominant. Je donne donc, bien qu'elle ne joue pas un rôle majeur par la suite, une définition possible: **l'erreur est une action planifiée qui n'arrive pas à atteindre la conséquence désirée** (Reason, 1977).

Cette définition conduit alors logiquement à distinguer les erreurs de **conception** et les erreurs d'**exécution** (du plan), la conception (ou compréhension) et l'exécution étant, dans le domaine du calcul, deux dimensions de compétence bien distinctes (Fischer et Pluvinage, soumis).

Dans cet article, j'étudierai surtout les erreurs d'exécution (paragraphes **3** et **4**), trop souvent négligées lorsqu'on parle du rôle positif des erreurs. Cependant, dans le paragraphe **2** suivant, les erreurs de compréhension sont également envisagées.

2. Bruner et les trois formes de l'information en retour

«Nous commencerons par une brève discussion de l'information en retour qui donne trop souvent lieu à des simplifications abusives. »
J.S. Bruner, 1973a.

2.0. Le caractère positif attribué à l'erreur s'est probablement développé à partir d'une conception très réductrice de la notion d'information en retour. En effet, on peut penser qu'un sujet qui, s'appuyant sur une conception personnelle, fait une erreur, profitera de l'information en retour que lui procure cette erreur pour améliorer sa conception. Cette théorie, qui repose d'ailleurs sur des imprécisions de langage - pourquoi appeler erreur une hypothèse non confirmée, un essai non transformé, une assimilation non réussie, etc... - peut certes avoir des succès locaux. Mais ce que j'entends montrer ici, c'est qu'elle néglige d'autres formes d'information en retour (et, à l'évidence, le fait qu'une réussite apporte aussi une information en retour) qui me paraissent tout aussi fondamentales. Ce faisant, je pense montrer que la conception à laquelle j'ai fait initialement allusion et qui est parfois érigée en **théorie de l'apprentissage par erreur**, est **globalement fausse** en tant que théorie générale de l'apprentissage.

2.1. Bruner (1973a) suggère que l'information en retour présente au moins **trois formes:**

a) l'information en retour *interne* qui signale, dans le système nerveux, une intentionnalité d'action, et qui apparaît *avant* l'action manifeste (d'où sa qualification de prospective) ;
b) l'information en retour *proprement dite* en provenance du système effecteur *au cours de l'action* ;
c) la *connaissance des résultats* qui n'est possible *qu'après* que l'action soit terminée.

Cette distinction me semble éclairer - dans la mesure ou de nombreux auteurs ne considèrent que la troisième forme (la plus visible) - pourquoi certaines conceptions de l'apprentissage sont incomplètes, donc fausses dans la mesure où ce sont des points fondamentaux qui sont omis.

2.2. *Illustration 1.* Lorsque des élèves, en début d'école élémentaire par exemple, doivent dénombrer un grand nombre d'objets (de l'ordre de quelques dizaines), ils peuvent utiliser

différentes stratégies dont les deux principales sont le comptage un à un, qui donne directement le résultat, et la formation de paquets, qui nécessite ensuite soit l'addition, soit la numération (dans le seul cas de paquets de 10).
Un élève qui réfléchirait, ne serait-ce qu'un très court moment (non nécessairement perceptible), en intégrant différentes informations (l'impression de numérosité que lui donne la collection à dénombrer, les expériences antérieures,...) aurait une information en retour de la forme a).
Un élève qui se lancerait immédiatement dans le comptage un à un mais s'apercevrait en cours de route que ce mode de dénombrement est pénible, incertain,... aurait une information en retour de la forme b).
Enfin, un élève qui se lancerait immédiatement dans le comptage un à un et, en allant jusqu'au bout, trouverait un résultat juste (resp. faux) aurait (de la part de la maîtresse par exemple) une information en retour positive (resp. négative) de la forme c).

2.3. *Illustration 2.* Les observations d'élèves de 4ème utilisant un logiciel de dessin géométrique décrites dans Tzekaki (1986) me permettent d'illustrer aussi au moins deux de ces formes, et surtout leurs conséquences. Tzekaki a en effet conclu que, sur les 4 binômes observés, un seul offre l'image d'une évolution assez importante. Pour un autre de ces binômes, il est intéressant de rapporter les termes descriptifs utilisés par l'auteur: « il est assez avancé », «il adapte son analyse assez globale aux possibilités du logiciel », « c'est le seul binôme qui utilise, dès le début, des éléments non tracés », « pour chaque tracé ils examinent si ils ont tous les éléments nécessaires pour cela et ceci est fait assez rapidement ». Cette description suggère en effet que ce binôme profite essentiellement (et rapidement) de l'information en retour interne et, en conséquence, ne fait guère d'erreurs. Quant au binôme qui a présenté une évolution assez importante, il est important de noter que les erreurs - encore que j'hésite à parler d'erreur au début de l'utilisation d'un logiciel - dont il a pu profiter ne conduiront à un apprentissage que si elles sont ensuite mémorisées. Dans ce dernier cas, elles pourront en effet être intégrées aux informations consultables au cours de la boucle prospective et, si l'élève avait tendance à refaire les mêmes erreurs, c'est maintenant une information en retour interne qui pourra l'en dissuader. Et alors il est essentiel de savoir que **la mémoire n'est pas fixée au moment de l'apprentissage mais** continue à se stabiliser (ou consolider) **avec le passage du temps** (Squire, 1986), et que le changement local **persistant** dans les neurones corticaux, qui doit accompagner tout apprentissage digne de ce nom, résulte du seul **entraînement** (Thompson, 1986).

2.4. Bruner a souligné l'omniprésence et l'importance de l'information en retour interne. En particulier, c'est elle qui rend possible la mise en place d'un ordre sériel dans le comportement. C'est aussi elle qui conduira un élève un peu plus âgé, en présence d'une collection de **7** éléments seulement et sous la pression du temps, non plus à compter ou à décomposer en paquets équivalents, mais à partager visuellement la collection en deux et à additionner ensuite les deux cardinaux des sous-ensembles ainsi formés; ou encore, quand la collection est réduite à **3** éléments à "décider" qu'il n'y a plus besoin de compter, ni décomposer (pour le choix de **3** et **7**, voir Fischer et Meljac, 1987). Il est donc clair que l'élève doit traiter de façon anticipée un certain nombre de paramètres relatifs non seulement à la collection (numérosité, disposition des éléments,..), mais aussi aux contraintes de la situation (il faut répondre rapidement,...), au contexte, aux expériences antérieures, etc... Toutes ces informations, de différentes natures, influent sur son choix, en définitive (et en général) unique, d'une certaine stratégie. Mais pour cela, il faut organiser la sélection des informations pertinentes, leur "unitisation" pour une prise en compte simultanée, etc..., et tout cela avant de déclencher l'action.

2.5. La deuxième illustration, du fait que certains élèves n'ont pas progressé, me permet maintenant de soulever la question: pourquoi certains élèves ne profitent-ils pas de leurs erreurs ? C'est là une question qu'avait implicitement soulevée Salin (1976) dans son étude sur le rôle de l'erreur: elle avait en effet choisi, en commençant son travail, d'observer des enfants nettement en difficulté, puisque ce sont eux qui en font le plus. Mais au terme de son étude elle constate « qu'il est beaucoup plus significatif d'observer des enfants "moyens" ». Pour illustrer cette question, je vais rappeler une très belle expérience de Piaget et Inhelder (1948), expérience reprise par Smedslund et résumée par Gréco (1963), comme suit: à des enfants de 5-7 ans, on présente un bocal contenant un liquide coloré, et on leur demande de dessiner le niveau du liquide quand le bocal aura été diversement incliné. A ceux qui ne prévoient pas l'horizontalité, on demande de bien observer le niveau du liquide tandis qu'on incline effectivement le bocal. Puis, on recommence l'épreuve de prévision: les améliorations sont quasi nulles, et n'apparaissent pas davantage si l'enfant, au lieu de dessiner, doit choisir entre plusieurs dessins modèles. Pour Gréco, constater la permanence de l'horizontalité exige en effet des mises en relation entre le niveau actuel et un cadre de référence spatial extérieur au bocal. Or ce cadre qui repose sur une structure représentative, ne saurait être tiré des constatations que son absence rend, du reste, impossibles ou incertaines. Cette expérience valait, à mon avis, d'être rappelée, car on aurait pu croire que les enfants, qui sont censés avoir "vu" leur erreur, vont en tenir compte dans leurs prévisions ultérieures.

2.6. Un dernier point à discuter est le problème d'une information en retour positive. Une logique un peu naïve permet là encore de croire qu'elle ne sert pas à grand chose puisque le sujet "savait déjà". C'est une absurdité, puisqu'elle conduirait à la conclusion que les élèves qui répondent correctement n'apprennent rien. Elle peut être levée en remarquant que les élèves qui "savent déjà", en fait, profitent de l'activité pour automatiser leur savoir-faire. Une telle automatisation pourrait alors se caractériser par une part de plus en plus prépondérante de l'information en retour interne. Elle permet, en fin de compte et avec les termes de Bruner (1973b), une redistribution de ces savoir-faire, comme sous-routines, en combinaisons répondant aux exigences que posent des tâches particulières.

2.7. Pour terminer ce paragraphe, et faire un lien ou, plutôt, préparer les suivants, je remarquerai encore que non seulement Bruner a su voir - avec les connaissances neuropsychologiques de l'époque (Bruner cite notamment Von Holst et Mittelstaedt (1950): voir suite) - l'existence et l'importance de l'information en retour interne, mais aussi il a distingué deux types de mémoires: la mémoire avec enregistrement et la mémoire sans enregistrement (*with record* et *without record* : voir Bruner, 1969). Or, c'est cette idée de distinction entre deux mémoires que Squire et Cohen (Cohen, 1981; Squire et Cohen, 1984) ont reprise pour décrire la préservation de certaines capacités mnésiques et d'apprentissage chez les amnésiques.

Squire et Cohen, et par la suite Pluvinage et moi-même (Fischer et Pluvinage, soumis), ont préféré les qualificatifs **déclarative** (avec enregistrement) et **procédurale** (sans enregistrement) pour les deux mémoires. Pour illustrer ces deux qualificatifs, je reprendrai l'exemple de la multiplication proposé par Squire et Cohen (1984, p.38):

« Dans un système de représentation déclaratif, les réponses peuvent être générées en consultant une base de données (de tables de multiplication) et en repérant simplement les entrées. Les adultes sans aucun doute utilisent cette méthode pour effectuer la multiplication de deux nombres à un chiffre. Dans un système de représentation procédural, les réponses peuvent être générées en effectuant en fait les opérations de multiplication: à savoir, en additionnant itérativement x à lui-même, n fois, justement comme font les enfants avant qu'ils n'apprennent les tables de multiplication. Ainsi, dans un système déclaratif, il y a un accès explicite à la base de données dans laquelle seront sélectionnées les réponses, alors que dans un système procédural les réponses dérivent de l'application d'algorithmes particuliers. »

3. Deux notions-clés : amorçage et rétroaction d'attente

> « Le thème théorique central sera, Comment une erreur de codage peut-elle être corrigée si aucune cellule individuelle ne sait qu'elle s'est produite ? »
> **S. Grossberg, 1980.**

Ces deux notions-clés sont importantes et générales: elles permettent, dans cet article, d'interpréter certaines erreurs de "calcul" ou leurs corrections internes.

3.1. L'amorçage (*priming*)

3.1.1. La technique d'amorçage - *priming* en anglais - consiste à donner, à l'avance, une information destinée à restreindre l'attention des sujets à un sous-ensemble de l'ensemble complet des possibilités expérimentales.
On distingue parfois (Sudevan et Taylor, 1987) le *priming* du *cuing* (*to cue* = donner une indication): il y a *priming* si l'indication ou information apportée n'est pas nécessaire, et *cuing* si elle l'est.
Par exemple, dans les expériences JusteFaux, l'information apportée aux élèves dans la modalité **REG** (voir mon autre article dans le présent volume; ou aussi Fischer, 1987a ou b) n'est pas nécessaire puisque le signe opératoire est affiché pour chacune des égalités: il s'agit donc bien d'un *priming* au sens de Sudevan et Taylor. Par contre, si on ne présentait qu'un couple de deux nombres et son image par une opération arithmétique simplement schématisée par une flèche, par exemple (2,3) ---> 6, l'information préalable sur la nature de l'opération deviendrait nécessaire, et l'on serait (si on la donne) donc dans un cas de *cuing* .

3.1.2. Mais c'est plutôt une autre distinction qui est au coeur de la présente contribution: celle entre un amorçage **attentionnel**, médiatisé par une attention active, et un amorçage

par **répétition** (ou direct: cf. Schacter et Graf, 1986). A vrai dire, ce dernier n'est pas un amorçage au sens où l'amorçage vient d'être défini. Mais il serait difficile de comprendre - ne serait-ce que certains titres de la bibliographie - si on se limitait à cette définition stricte de l'amorçage. On peut donc considérer l'amorçage par répétition comme un amorçage au sens large dans la mesure où il apporte, non pas une information, mais une aide (positive ou négative).
Dans les expériences JusteFaux, on retrouve ces deux types d'amorçage: en effet, les élèves de la modalité **REG** qui, avant chaque bloc de 10 ou 14 questions, sont prévenus de la nature de l'opération bénéficient bien d'un amorçage attentionnel. Mais, une fois qu'ils ont fait au moins un calcul, ils bénéficient aussi d'un amorçage par répétition dans la mesure où c'est toujours la même opération qui se répète.

3.1.3. Comme le suggère la dernière parenthèse, il convient aussi de faire une distinction entre un amorçage par répétition **facilitant** et un amorçage par répétition **biaisant**. J'utilise ce dernier qualificatif par référence à Shimamura (1986), mais aussi par référence à ce qui pourrait se passer réellement. En effet, d'après des modèles récents de circulation de l'information dans le cerveau, par exemple celui du transfert de l'information sensorielle vers l'hippocampe (Deadwyler, 1985), ce dernier se fait sous la régulation d'un processus endogène synaptique, semblable à un filtre, qui est fortement **biaisé** par le contexte des événements successifs vécus, en particulier les plus récents.
Ceci permet d'ailleurs de souligner tout de suite une caractéristique fondamentale du priming par répétition, à savoir qu'il est **automatique**. Globalement, on en connaît le mécanisme: lorsqu'un sujet perçoit un mot, par exemple, cela active l'assemblée des éléments neuraux dont l'activité conjointe correspond à cette perception. C'est cette activation qui dessert l'effet d'amorçage (par répétition), un processus **inconscient** qui temporairement facilite le traitement du même mot et des mots associés (Squire, 1986).
Dans les expérience JusteFaux, l'amorçage par répétition semble globalement facilitant dans la modalité **REG**. La petite réserve que l'on peut faire vient essentiellement d'un problème d'ordre des questions facile à comprendre: si un élève, qui vient de juger 7-2=5 en comptant en arrière, un par un (7,6: 5), est immédiatement après amené à juger 6-4=2, et que sous l'influence du calcul précédent il compte de nouveau en arrière, un par un (6,5,4,3: 2), alors que "normalement" il aurait compté en avant (5,6: 2), on serait plutôt tenté d'y voir un cas d'amorçage par répétiton biaisant. Dans la modalité **NREG**, comme la même opération ne se répète jamais deux fois de suite (sauf l'une où l'autre fois au CE2), on peut par contre

penser que l'on se trouve, assez systématiquement mais faiblement (car il n'y a qu'un seul calcul), dans un cas d'amorçage par répétition biaisant.

3.1.4. L'amorçage est présenté par Squire (1986) comme faisant partie des connaissances procédurales. Squire note cependant qu'une telle classification reste en discussion. Il convient donc de regarder d'un peu plus près ce qui a été réellement montré.

Dans les connaissances non-procédurales (ou les mémoires qui les sous-tendent), on peut distinguer, entre autres (voir Craik, 1985), la **reconnaissance** (*recognition*) qui nous permet par exemple de reconnaître dans "7x7=49" une égalité juste, dans la mesure où une telle égalité est stockée dans notre mémoire déclarative (ici de préférence sous forme d'une image), le **rappel** (*recall*), par exemple si on demande à quelqu'un de rappeler "le produit de sept par lui-même", et entre les deux, le **rappel avec indication** (*cued recall*), par exemple si on demande de rappeler "sept fois sept"

L'importance de cette distinction, notamment entre reconnaissance et rappel, apparaît dans le 3.2 suivant : le mécanisme qui y est décrit ne peut en effet s'appliquer directement qu'à une mémoire de reconnaissance.

Avec ces définitions et d'après la "revue" de Schacter (1985), on peut penser que **les effets d'amorçage par répétition et la mémoire de reconnaissance** ou, à un degré moindre, de rappel, **sont indépendants**.

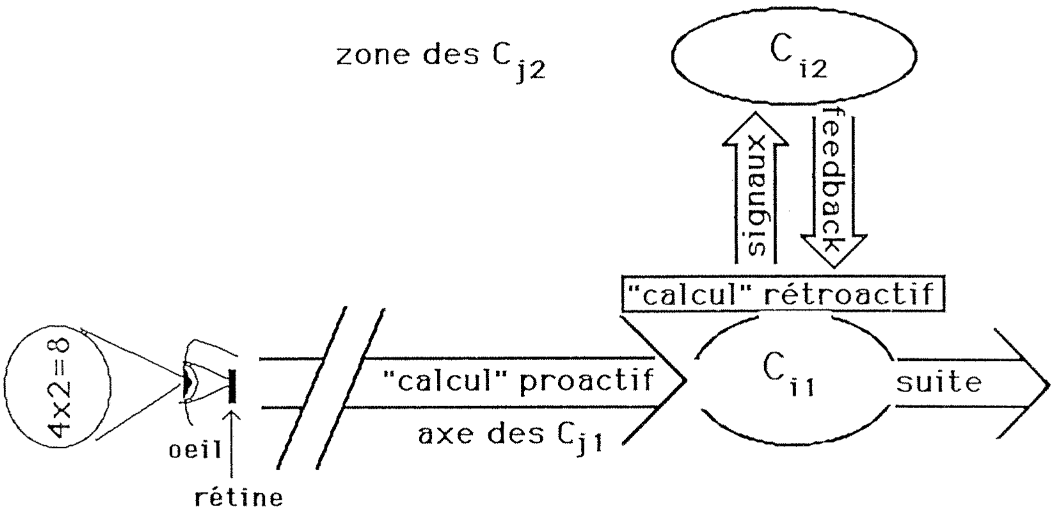
3.2. La rétroaction d'attente (*feedback expectancy*)

3.2.0. J'aurais pu continuer cette distinction de différentes formes d'amorçage en parlant encore de l'amorçage basé sur l'attente (*expectancy -based priming*) comme Flowers, Nelson, Carson et Larsen (1984). Mais je crains que cela n'aurait lassé même les derniers lecteurs (s'il en restait) !

Plus sérieusement, je pense qu'en me référant à la notion de rétroaction d'attente extraite de la **théorie de Grossberg** (1980, 1982), la différence avec les effets précédemment discutés apparaît plus clairement. Egalement, ce vocabulaire permet de bien différencier les traitements du bas vers le haut (*bottom-up*) et du haut vers le bas (*top-down*), deux types de traitements qu'un modèle du comportement humain doit saisir en même temps (cf. Chi et Rees, 1983).

3.2.1. Grossberg (1980) commence par remarquer que le fonctionnement d'un mécanisme de détection et de correction d'erreur nécessite (au moins) une information en retour, car si un traitement est totalement linéaire, une fois l'erreur produite, il n'y a plus moyen de la rectifier. J'indicerai le champ de cellules (nerveuses) où se produit l'information en retour qui m'intéresse par i, pour bien montrer qu'il est intermédiaire et peut donc éventuellement être précédé ou suivi par d'autres champs où se produit aussi une information en retour.
Il nécessite aussi, à l'évidence - sinon comment pourrait-on voir qu'il y a erreur ! - des connaissances antérieurement apprises: pour traduire que ces connaissances se situent à un niveau supérieur, j'introduis un deuxième indice constamment fixé à 2 pour le champ où sont stockées ces connaissances; ce même indice est fixé à 1 pour le champ où le code initial est comparé au code retourné par la rétroaction et où, en conséquence, une erreur peut éventuellement être détectée.

Tout ceci explique les notations C_{i1} et C_{i2}, et plus généralement C_{jk}, que j'utilise.
Voici donc un **schéma** illustrant cette explication; il reprend, avec des modifications ou ajouts importants, celui de Grossberg (1980, p.11):



3.2.2. Pour que la lecture du schéma soit complète, il faut encore parler de **deux types de "calcul"**. J'utilise "calcul" (entre double-cotes) lorsque je me réfère à une conception de l'individu humain comme un "dispositif calculatoire", conception qui me paraît acceptable lorsqu'on se limite au domaine cognitif. Je distingue alors le "calcul" **proactif** (*feedforward computation*) qui s'appuie plutôt sur les **données** et le "calcul" **rétroactif** (*feedback computation*) qui s'appuie plutôt sur les **connaissances**. Dans le cadre d'un modèle (au moins partiellement) hiérarchisé du cerveau, on peut aussi voir dans le "calcul" proactif un calcul par le **"bas"** (*bottom up*) - dans la mesure où il est plus proche de l'input sensoriel dans la rétine -, et dans le "calcul" rétroactif un "calcul" par le **"haut"** (*top-down)* dans la mesure où il implique davantage les fonctions corticales supérieures.

3.2.3. Même s'il m'est impossible de décrire le fonctionnement détaillé d'un tel mécanisme, il est assez facile d'en concevoir intuitivement certains effets possibles.
Je commencerai par un effet "pervers". Dans le cas d'une égalité interférante, par exemple 2+3=6 (qualifiée d'interférante car 2x3=6), l'élève qui connaît par coeur 2x3=6 sera éventuellement incité, par la rétroaction d'attente, à "voir" 2x3=6.

Notons qu'une théorie comme celle des assemblées de connaissances (Hayes-Roth) explique comment peut se produire une telle erreur de "lecture". Cette théorie suppose que les faits sont représentés comme des traces propositionnelles, chaque trace étant constituée de noeuds conceptuels associés par des liens relationnels, ainsi qu'une activation qui se diffuse (*spreading activation*) commune à de nombreuses théories. Un fait est alors sujet à interférence parce que les concepts qui le constituent sont associés à d'autres concepts. En outre, la force des traces, noeuds et liens est supposée varier, notamment, avec la récence de l'activation (d'après Pirolli et Anderson, 1985). Cette théorie explique alors très bien pourquoi l'erreur va se produire beaucoup plus fréquemment dans la modalité NREG: dans cette dernière, lorsque l'élève doit juger 2+3=6, la multiplication a été activée beaucoup plus récemment que dans la modalité REG où c'est l'addition qui a été, récemment et quasi-exclusivement, activée.

Il risque donc de se tromper ou, à tout le moins, de perdre un peu de temps. Ainsi:

- Winkelman et Schmidt (1974), en faisant interférer l'addition et la multiplication sur des étudiants, ont trouvé une perte de temps de 50 ms en moyenne et une augmentation du pourcentage d'erreurs de 12,15% comparativement à des égalités "nettement" fausses;
- Findlay (1978), en faisant interférer l'addition et la soustraction sur des élèves de 9 à 11 ans, a surtout observé une augmentation du pourcentage d'erreurs de 10,4% comparativement à des égalités "nettement" fausses, et de 7,9% comparativement à des égalités "fausses de 1";

- Hamann et Ashcraft (1985) ont trouvé, en $10^{ème}$ année d'école, une perte de 31 (resp. 182) ms pour les petites (resp. moyennes) égalités comme, par exemple, 3+4=12 (resp. 3+9=27). Mais en $7^{ème}$ et $4^{ème}$ année, ni non plus évidemment en $1^{ère}$, l'effet de confusion n'a pas été net.

Mais un tel exemple ne reflète pas bien l'esprit de la théorie, appelée théorie de la résonance **adaptative**, de Grossberg. En effet, pour Grossberg, un tel mécanisme nous permet surtout d'éliminer les informations non pertinentes. En ce sens il est donc adaptatif: il conduit à une stabilisation des codes cognitifs contre les effets érosifs des fluctuations non pertinentes de l'environnement.
Pour illustrer cet aspect "correcteur", je prends maintenant l'exemple d'une égalité juste: 4x2=8. Si un élève, pour une raison qui peut très bien être un effet d'amorçage biaisant, arrive à un code erroné - celui de 4+2=8 - au bout du "calcul" proactif, la rétroaction d'attente peut - éventuellement et à condition que 4x2=8 soit stockée dans sa mémoire déclarative - le ramener sur la "bonne route". Dans un tel cas, la rétroaction d'attente agirait donc comme **un mécanisme correcteur d'erreur.**

3.2.4. Remarques neuropsychologiques.

(1) On peut imaginer à loisir des complexifications d'un tel schéma. Par exemple, on pourrait considérer une **suite** de boucles (Ci_1, Ci_2), (Ci_2,Ci_3),...., ($Ci_{(n-1)}$,Ci_n) successives: on déboucherait alors sur un schéma analogue à celui proposé initialement par Von Holst et Mittelstaedt (1950). Notons cependant que Von Holst et Mittelstaedt, étudiant plutôt des performances motrices, se plaçaient (sur ce qui est mon axe Cj_1) immédiatement après l'input sensoriel, et donc n'avaient pas besoin d'un indice double (j vaudrait 1 constamment). Comme mon Champ de cellules (qui est le Field of cells de Grossberg) était appelé Centre (Zentrum en allemand), on retrouve bien la notation Z_1, Z_2,..., Z_n du schéma (p. 467) explicatif de leur célèbre principe de réafférence.

(2) Pour concrétiser ce que pourrait être ces champs de cellules, Grossberg cite une idéalisation du corps genouillé latéral pour un Cj_1 et une idéalisation du cortex visuel pour le Cj_2 correspondant.

(3) Il faut bien entendu s'interroger sur la possibilité du cerveau de "gérer" de telles boucles de rétroaction. Les liaisons réciproques entre structures corticales et sous-corticales (voir par ex. Mishkin et Appenzeller, 1987) autorisent cette "gestion". Certains chercheurs citent d'ailleurs un ordre de grandeur possible pour la durée de telles boucles: Grossberg (1980 p.10) les centaines de millisecondes; Crick (1984, p.4588), 100 ms; Harth et Unnikrishnan (1985 p.114), 100 à 200 ou 10 à 12 ms.

(4) La théorie de Grossberg fait jouer un rôle important à l'hippocampe. Et l'implication de l'hippocampe dans la mémoire, préférentiellement déclarative, semble se préciser: voir Squire (1986 p.1618), Gazzaniga (1984 p.85), Kesner (1984 p.115), Thompson et al. (1984 p.138), Nissen, Knopman et Schacter (1987 p.793).

(5) Finke (1986) rapporte des expériences très fines mettant en évidence l'action rétroactive d'une image mentale pré-existante sur le traitement de l'information visuelle sans spéculer sur les structures nerveuses qui l'assurent.

4. Quelques illustrations

> « Nous sommes de ce fait en droit de supposer l'existence d'un facteur nerveux central modifiant l'action du stimulus. Il ne nous reste plus qu'à trouver des lois régissant ce facteur. »
>
> D.O Hebb, 1949.

4.0. L'électrophysiologie du système nerveux central nous indique que le cerveau est continuellement actif en son entier et qu'une excitation afférente vient se superposer à une excitation déjà existante (Hebb, 1949). Le problème psychologique, déjà souligné par Hebb, est alors de savoir comment la situation, i.e cette excitation déjà existante, peut exercer une action sélective logique, au lieu de produire une répartition d'erreurs au hasard.
Les exemples suivants sont destinés à montrer comment les notions introduites dans le paragraphe précédent peuvent "expliquer" certaines erreurs ou difficultés ou, à tout le moins, à montrer qu'elles sont compatibles avec certains effets observés.

4.1. Effets d'un amorçage par répétition biaisant

4.1.1. Je rapporte d'abord une observation que j'ai faite dans une classe de CMM (CM1 & CM2) faible. Un indice de cette faiblesse est le taux d'élèves ayant un retard scolaire: celui des élèves ayant au moins un an de retard était de 0,60, et celui des élèves ayant au moins deux ans de retard était de 0,47. Ceci m'avait incité à choisir un délai de réponse très long pour la mesure des TR: 981 cs. En dépit de ce délai, le taux d'erreur a été de 0,23, alors que, à titre comparatif, dans un autre CMM avec le même délai de réponse, il n'a été de 0,06. Or, dans ce CMM faible, et à un moment donné de la passation, ce fut un petit "festival" d'erreurs de lecture du signe opératoire. Ainsi:

- **Dra** (2 ans de retard), se trompe à 2+8=10 en 237 cs. A ma question: « Tu sais pas deux plus huit ? », il s'exclame : « *Ah ! j'ai **cru** que c'était fois !* »;
- **Cél** (1 an de retard), à l'entraînement, se trompe pour 0:7=0. A ma question: « Zéro divisé par sept tu sais pas ? », elle répond : « *Ah ! mais j'ai fait plus.* »;
- **Dav** (2 ans de retard), répond incorrectement à 2+8=10 en 299 cs et s'indigne: « *Huit et huit ça fait seize, et c'est faux !* ».

Je précise que tous les trois élèves étaient dans la modalité NREG. De plus, dans les deux cas (identiques) où un contrôle a posteriori est possible - à l'entraînement les égalités sont générées au hasard - l'égalité 2+8=10 était bien précédée par une multiplication.
Pour ces élèves on peut donc penser que c'est un amorçage par répétition biaisant qui a conduit à une fausse lecture du signe opératoire.

Remarque. Dans le dernier cas, on peut éventuellement croire qu'il ne s'agit pas d'une erreur de signe, mais du " 2 " qui a été lu " 8 ". Le fait que le calcul qui précédait 2+8=10 est une multiplication accrédite cependant l'interprétation de l'erreur de Dav comme une erreur de signe et confirmerait qu'il utilise une méthode procédurale pour trouver le résultat de 2x8. Cette observation peut alors illustrer la double-hypothèse ci-après. Je précise également que, d'après son attitude indignée et révoltée, le terme «faux» qu'il a utilisé n'était probablement pas une réitération de son jugement de l'égalité, mais renvoyait plutôt au verdict de l'ordinateur.

4.1.2. Le cas d'Ala, un élève qui a un an de retard et de faibles performances scolaires (avant-dernier au classement général), est un peu moins net. Au cours des expériences de mesure des TR dans sa classe de CM2 (laquelle a été suivie sur toute une année), j'ai pu entendre, car il oralisait (au moins partiellement), que pour vérifier 4x9=36, il calculait 4x9 en passant par «*neuf et neuf, dix-huit* », un calcul qui ne semblait d'ailleurs pas improvisé puisqu'il a conduit à une réponse correcte en 257 centisecondes. L'évaluation suivante, au dernier trimestre, m'a en outre permis d'observer qu'il vérifiait 4+2=6 en oralisant: «*4, 5: 6 juste* », le tout en 157 cs. Or, au deuxième trimestre, il s'était trompé en 145 cs dans la vérification de 4x2=8: il a oralisé « *six* » et appuyé sur **Faux**. Comme je lui ai fait remarquer qu'il pourrait quand même connaître 4x2, il a répondu qu'il a « ***cru*** » que c'était « *plus* ». Comme l'égalité 4x2=8 était une tête de série, elle était précédée par le bilan de la série précédente et une période de repos (interrompue par l'élève). De plus, la dernière égalité de la série précédente était une soustraction. Ici l'effet de l'amorçage par répétition est donc moins directement "accusable". Néanmoins, on peut encore remarquer que c'est dans la modalité NREG que cette erreur de lecture d'Ala s'est produite, et que l'égalité précédente, à savoir 9-3=4 a très bien pu être, vu les autres observations, vérifiée par un comptage un par un.

4.1.3. Un petit bilan montre donc que les erreurs de lecture du signe rapportées se sont toutes produites dans la modalité NREG, et 2 fois sur les 3 où un contrôle a posteriori est possible, le signe erroné lu est le signe de l'opération immédiatement précédente. De plus, chez tous ces élèves où vraiment rien ne semble connu par coeur - sur l'image de la classe de CMM (cf. pour le principe, Fischer 1987a), les lignes des multiplications et divisions de niveau 2, difficiles à reconstruire rapidement, sont tout à fait dégarnies -, on peut aussi penser que la rétroaction d'attente ne peut pas jouer son rôle de correcteur d'erreur. Ceci me conduit alors à la double-hypothèse suivante:

(1) **les élèves n'ayant guère de connaissances déclaratives**, par suite d'un recours plus fréquent à une mémoire procédurale - qui serait davantage sensible aux effets biaisants de l'amorçage (par répétition) - **sont** plus particulièrement **"victimes" de ce genre d'erreurs de lecture** (dans la modalité NREG) au cours du "calcul" proactif;

(2) une fois "victimes" de l'erreur, **le mécanisme de correction de l'erreur**, qui exige des connaissances déclaratives pour fonctionner, **ne leur permet pas de se rattraper** au cours du "calcul" rétroactif.

Cette double-hypothèse explique d'ailleurs, encore mieux me semble-t-il, pourquoi les élèves qui connaissent les résultats "par coeur" feront beaucoup moins ce type d'erreur: non seulement il est très improbable qu'ils soient induits en erreur par le calcul précédent car la mémoire de reconnaissance qu'ils peuvent utiliser n'est pas sensible à l'amorçage, mais même si d'aventure cela leur arrivait, le "calcul" rétroactif leur offre une bonne chance de se rattraper (alors que les autres travaillent "sans filet").

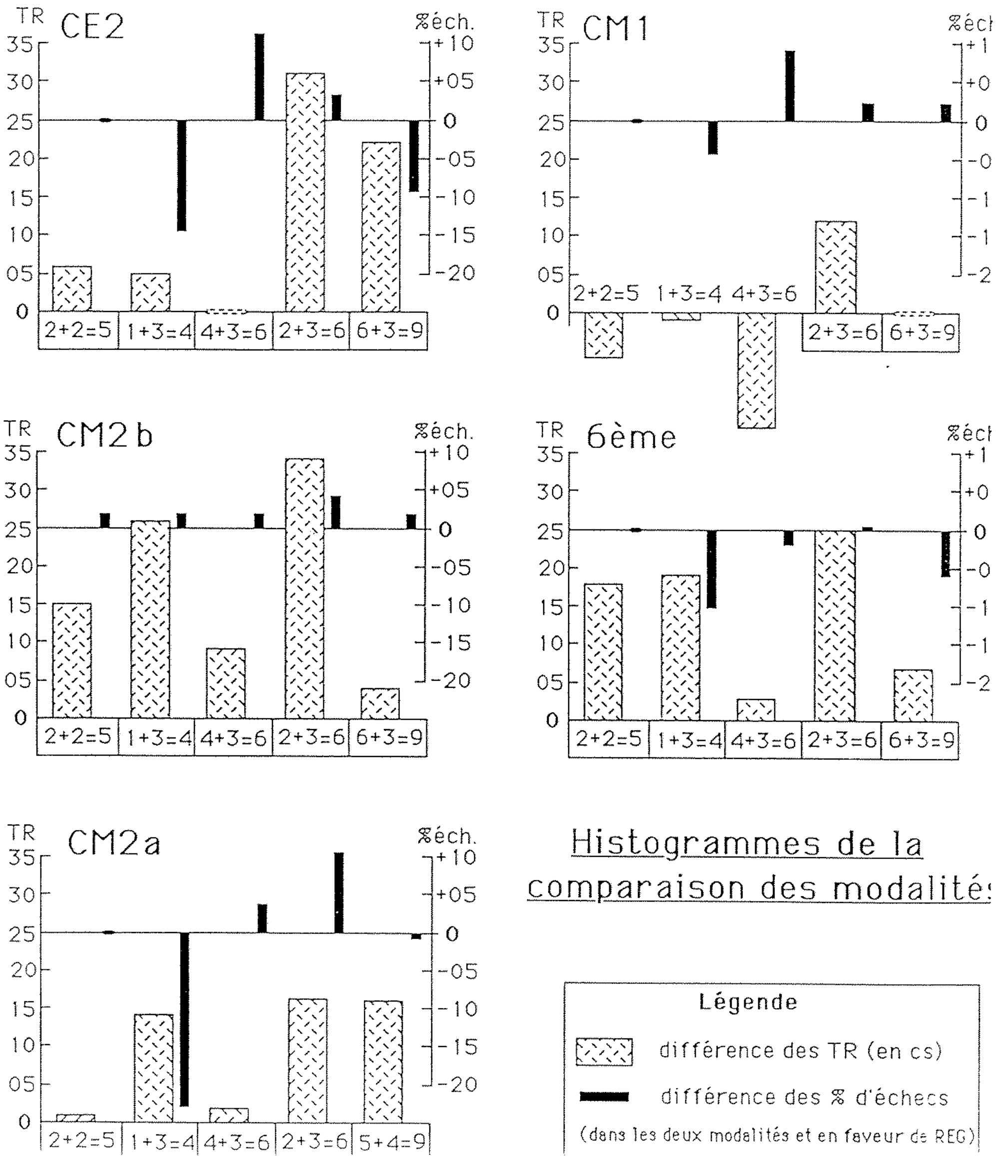
4.2. Un possible effet de la rétroaction d'attente

4.2.1. L'égalité interférante 2+3=6 figurait dans Fischer (1987a, 1987b) et Gadio (1987). Comme je l'ai déjà souligné, on peut penser que les élèves de la modalité REG bénéficient d'un amorçage facilitant attentionnel ou automatique, alors que ceux de la modalité

NREG sont plutôt soumis à un "léger" effet d'amorçage par répétition biaisant. En conséquence, il faut s'attendre à ce que les performances soient meilleures, en général, dans la modalité REG. Un tel résultat se confirme amplement et n'est pas au coeur de la présente discussion. En effet, dans le cas d'une égalité interférante, le problème de la rétroaction d'attente vient se greffer sur ce premier problème: dans la modalité REG, du fait que l'élève est en train de faire des additions (2+3=6 était la 7ème addition dans une série de 10), il est peu probable que la rétroaction d'attente le conduise à attendre une multiplication et à voir ainsi 2x3=6. Par contre, dans la modalité NREG et bien que 2+3=6 suivait une soustraction, l'effet "pervers" décrit dans le 3.2.3 a plus de chances de se produire. S'est-il produit ?

4.2.2. La première chose dont on peut s'assurer c'est que les performances à 2+3=6 sont bien meilleures dans la modalité REG. Avant de donner les résultats, il me faut préciser que dans la notion de performance j'essaie de tenir compte à la fois des TR et des erreurs (ou échecs, car j'inclus quelques très rares Non-Réponses dans le délai de 500 cs). Avec un test statistique qui permet la comparaison des performances (voir Fischer, 1987a), la différence entre modalités est effectivement **toujours** en faveur de REG: elle est significative (seuil de .05, test bilatéral) au CM2 dans les deux recherches (Fischer, 1987a et 1987b) et en sixième dans la recherche de Gadio (1987). Mais un tel résultat ne doit pas induire en erreur: la plus grande difficulté de la modalité NREG apparaît à peu près partout, comme je l'ai rappelé ci-dessus. Pour pouvoir suggérer qu'elle provient de la rétroaction d'attente, il faudrait que la différence des modalités soit plus accentuée pour 2+3=6 que pour les autres égalités comparables, à savoir les "petites" additions. L'est-elle ?

4.2.3. Pour le voir j'ai construit les histogrammes de la page suivante. J'explique d'abord quelques points de leur construction et lecture. Pour chacun des histogrammes, j'ai calculé la moyenne des TR (ici les Non-Réponses ont été éliminées) et le pourcentage d'échecs dans chacune des deux modalités. Ensuite j'ai fait la différence dans le sens NREG-REG. Des résultats positifs sont donc des résultats en faveur de REG: le TR y est moindre et le pourcentage d'échecs aussi.



Histogrammes de la comparaison des modalités

Je peux maintenant les commenter. En regardant séparément les TR et les échecs, on peut constater que:

- pour les TR, c'est bien 2+3=6 qui conduit **toujours**, i.e 5 fois sur 5, à la plus grande supériorité de REG;

- pour les échecs, 2+3=6 conduit à la plus grande différence positive aux trois niveaux scolaires supérieurs (les deux expériences en CM2 et celle en 6ème), et est en deuxième position au CE2 et au CM1, précédée chaque fois par 4+3=6.

Ces deux exceptions, à l'hypothèse d'une plus grande supériorité de REG pour la seule petite addition interférante, ne sont cependant pas très graves si l'on remarque que l'égalité "concurrente", à savoir 4+3=6, arrive dans les deux cas en dernière position pour les TR, et qu'il a donc pu se produire un échange entre exactitude et vitesse.

D'ailleurs, pour essayer d'introduire qualitativement la notion de performance à laquelle j'ai fait précédemment allusion, on peut par exemple considérer le rang moyen aux TR et aux échecs obtenu par chacune des égalités (à son niveau de scolarité). Alors il apparaît bien que c'est l'égalité 2+3=6 qui est **toujours** en tête. Et ceci très nettement car aucune autre égalité ne se détache vraiment derrière elle: par exemple, l'égalité 4+3=6, que l'on pouvait croire "concurrente" a le pattern de rangs suivant: 3; 3; 3,75; 4 et 3 (j'ai utilisé les décimales après la virgule pour départager certaines égalités et, en cas d'égalité parfaite, j'ai appliqué la technique habituelle pour maintenir constante la somme des rangs).
Ceci me conduit donc à penser qu'un phénomène particulier a bien affecté l'égalité 2+3=6: il n'est pas impossible que ce soit la rétroaction d'attente décrite antérieurement.

5. Résumé et conclusions

> « Ainsi, ces enfants qui ne savent rien démontrent-ils à leur manière que la part de l'appris, de la mémorisation, du mécanisme ne doit pas être considérée comme entièrement négligeable,...»
>
> C. Meljac, 1979.

5.1. La distinction d'au moins trois formes d'information en retour par Bruner m'aura permis, dans cette contribution, de montrer qu'une **théorie de l'apprentissage "par erreur"**, soutenant qu'un sujet qui fait une erreur en profiterait pour améliorer sa concep-

tion personnelle (qui a conduit à l'erreur) est une théorie extrêmement **réductrice**. En outre, par référence à une très belle expérience de l'école piagétienne et à d'autres observations, j'ai montré qu'elle est loin de s'appliquer toujours.
Pour décrire le travail interne - celui que certains enseignants ou chercheurs ne voient pas -, j'ai ensuite essayé de présenter de multiples formes d'amorçage auxquelles le système nerveux humain peut être soumis, et une forme d'information en retour interne - la rétroaction d'attente - qui a été théorisée par Grossberg.

5.2. Bien sûr, on peut estimer que ces notions ne concernent que des mécanismes rudimentaires au point d'être impopulaires (songer à l'expression "savoir bêtement par coeur"). Mais l'étude précise des processus élémentaires peut éclairer la compréhension de phénomènes bien plus complexes, y compris **didactiquement**.
Mon hypothèse[1] (la partie (1)) du 4.1.3 en est la preuve.

(1) Si on la généralise à la reconnaissance des mots, elle est parfaitement compatible - et éclairerait même - avec une observation montrant que des élèves en difficulté d'apprentissage, qui ont évidemment fait plus d'erreurs, ont des patterns d'activation cérébrale davantage sensibles aux effets d'amorçage (Obrzut, Hynd et Zellner, 1983).
Il faut préciser que ces auteurs parlent d'effets attentionnels, mais leur compte-rendu contient une (malheureuse) contradiction interne: ils annoncent, en titre, un **déficit attentionnel** pour les enfants en difficuté d'apprentissage, alors que, dans l'abstract, ils signalent que ces derniers ont des patterns d'activation cérébrale **davantage sensibles aux effets attentionnels.**
Mon hypothèse lèverait cette contradiction ainsi: l'effet attentionnel conduit à une activation de l'hémisphère gauche (car il est dû à une indication verbale et orale). Les "normaux" sont, vraisemblablement au moins autant que les élèves en difficulté, soumis à cette activation. Mais contrairement aux enfants en difficulté, leur méthode (les maîtres ont souligné leurs très bonnes habiletés de reconnaissance des mots: *strong word recognition skills*) non procédurale n'est pas influencée par cette activation, alors que la méthode procédurale des élèves en difficulté l'est.

Elle éclaire en effet, d'une manière que je crois originale, un phénomène que les enseignants connaissent bien: lorsqu'on donne plusieurs additions (par exemple) de suite, puis (sans trop avertir), une multiplication (par exemple), il se trouve toujours quelques élèves qui continuent à faire des additions. Habituellement on dit qu'ils ne font pas assez attention. Or la présente hypothèse suggère que ce n'est pas - en tout cas pas exclusivement - un problème d'attention. C'est la répétition des additions (ou même une seule) qui conduit à un effet d'amorçage par répétition qui n'est pas attentionnel mais automatique.
Et alors, et c'est ceci qui me paraît **nouveau et didactiquement intéressant**, ce qui expliquerait **l'erreur**, qui a été qualifiée **de persévération**, de ces élèves, **ce n'est pas un défaut d'attention, mais la manière de calculer**: en utilisant un calcul procédural qui reconstruit le résultat, plutôt que la reconnaissance d'un résultat stocké dans une mémoire déclarative, ils peuvent facilement être "victimes" d'un effet d'amorçage, un effet qui ne semble pas affecter la mémoire déclarative et épargne donc les élèves qui y ont recours, i.e ceux qui connaissent les "faits numériques" par coeur.

REFERENCES

Broad W. et Wade N., 1982. La souris truquée. Paris: Seuil, 1987.

Bruner J.S., 1969. Modalities of memory. In G.A. Talland, N.C. Waugh (Eds), *The pathology of memory* . New York: Academic Press.

Bruner J.S., 1973a. L'organisation des premiers savoir-faire. In Bruner,1983.

Bruner J.S., 1973b. La compétence, sa nature et comment on la cultive. In Bruner, 1983.

Bruner J.S., 1983. Savoir faire, savoir dire. Paris: PUF.

Chi M.T.H. et Rees E.T., 1983. A learning framework for development. In M.T.H. Chi (Ed), *Trends in memory development research* . Basel: Karger.

Cohen N.J., 1981. Neuropsychological evidence for a distinction between procedural and declarative knowdlege in human memory and amnesia. Ann Arbor: University Microfilms International (Ph. D., University of California).

Craik F.I.M., 1985. Paradigms in human memory research. In L.G. Nilsson, T. Archer (Eds), *Perspectives on learning and memory* . Hillsdale: Erlbaum.

Crick F., 1984. Functions of the thalamic reticular complex: The searchlight hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Science,* **81**, 4586-4590.

Deadwyler S.A., 1985. Involvement of hippocampal systems in learning and memory. In Weinberger et al.

Findlay J.M., 1978. What form of memory do schoolchildren use whilst performing mental arithmetic ? In M.M.Gruneberg, P.E.Morris, R.N. Sykes (Eds), *Practical aspects of memory* . London: Academic Press.

Finke R., 1986. Imagerie mentale et système visuel. *Pour la Science,* n°**103**, 86-93.

Fischer J.P., 1987a. L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie*, **80**, 17-24.

Fischer J.P., 1987b. Les faits numériques à l'école: une étude développementale par les TR. *Psychologie Scolaire*, **60**, 7-24.

Fischer J.P. et Meljac C., 1987. Pour une réhabilitation du dénombrement: le rôle du comptage dans les tout premiers apprentissages. *Revue Canadienne de Psycho-Education*, **16**, 31-47.

Fischer J.P. et Pluvinage F., soumis. Complexités de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires.

Gadio I., 1987. L'automatisation du calcul au début de l'école secondaire. (Manuscrit: DEA de Didactique des Mathématiques). Strasbourg: Non publié.

Gazzaniga M.S., 1984. Advances in cognitive neurosciences: The problem of information storage in the human brain. In Lynch et al.

Gréco P., 1963. Apprentissage et structures intellectuelles. In P. Fraisse, J. Piaget (Eds), *Traité de psychologie expérimentale: VII. L'Intelligence.* Paris: PUF.

Grossberg S., 1980. How does a brain build a cognitive code ? *Psychological Review,* **87**, 1-51. (Reproduit dans Grossberg, 1982).

Grossberg S., 1982. Studies of mind and brain: Neural principles of learning, perception, development, cognition, and motor control. Dordrecht: Reidel.

Hamann M.S. et Ashcraft M.H., 1985. Simple and complex mental addition across development. *Journal of Experimental Child Psychology,* **40**, 49-72.

Harth E. et Unnikrishnan K.P., 1985. Brainstem control of sensory information: a mechanism for perception. *International Journal of Psychophysiology,* **3**, 101-119.

Hebb D.O., 1949. Psycho-physiologie du comportement. Paris: PUF, 1958.

Kesner R.P., 1984. The neurobiology of memory: Implicit and explicit assumptions. In Lynch et al.

Lynch G., McGaugh J.L. et Weinberger N.M. (Eds), 1984. Neurobiology of learning and memory. New York: Guilford.

Meljac C., 1979. Décrire, agir et compter: l'enfant et le dénombrement spontané. Paris: PUF.

Mishkin M. et Appenzeller T., 1987. L'anatomie de la mémoire. *Pour la Science,* n°**118**, 26-36.

Nissen M.J., Knopman D.S. et Schacter D.L., 1987. Neurochemical dissociation of memory systems. *Neurology,* **37**, 789-794.

Obrzut J.E., Hynd G.W. et Zellner R.D., 1983. Attentional deficit in learning-disabled children: Evidence from visual half-field asymmetries. *Brain and Cognition,* **2**, 89-101.

Piaget J. et Inhelder B., 1948. La représentation de l'espace. Paris: PUF.

Pirolli P.L. et Anderson J.R., 1985. The role of practice in fact retrieval. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition,* **11**, 136-153.

Reason J.T., 1977. Skill and error in everyday life. In M.J.A. Howe (Ed), *Adult learning: Psychological research and applications.* New York: Wiley.

Salin M.H., 1976. Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire (Mémoire de DEA). Bordeaux: IREM.

Schacter D.L, 1985. Multiple forms of memory in humans and animals. In Weinberger et al.

Schacter D.L. et Graf P., 1986. Preserved learning in amnesic patients: Perspectives from research on direct priming. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology*, **8**, 727-743.

Seemann J., 1931. Die Rechenfehler : Ihre psychologischen Ursachen und ihre Verhütung. Langensalza: Beyer.

Shimamura A.P., 1986. Priming effects in amnesia: Evidence for a dissociable memory function. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, **38A**, 619-644.

Squire L.R., 1986. Mechanisms of memory. *Science*, **232**, 1612-1619.

Squire L.R. et Cohen N.J., 1984. Human memory and amnesia. In Lynch et al.

Sudevan P. et Taylor D.A., 1987. The cuing and priming of cognitive operations. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, **13**, 89-103.

Thompson R.F., 1986. The neurobiology of learning and memory. *Science*, 233, 941-947.

Thompson R.F., Clark G.A., Donegan N.H., Lavond D.G., Lincoln J.S., Madden IV J., Mamounas L.A., Mauk M.D., McCormick D.A. et Thompson J.K., 1984. Neuronal substrates of learning and memory: A "Multiple-Trace" view. In Lynch et al.

Tzekaki M., 1986. L'outil informatique et le tracé de figures géométriques (Manuscrit: DEA de Didactique des Mathématiques). Strasbourg: Non publié.

Von Holst E. et Mittelstaedt H., 1950. Das Reafferenzprinzip. *Naturwissenschaften*, **37**, 464-476.

Weinberger N.M., McGaugh J.L. et Lynch G. (Eds), 1985. Memory systems of the brain: Animal and human cognitive process. New York: Guilford.

Winkelman J.H. et Schmidt J., 1974. Associative confusions in mental arithmetic. *Journal of Experimental Psychology*, **102**, 734-736.

TYPOLOGIE DES SITUATIONS PROBABILISTES

ET DEMARCHES DE REPONSES

M. ZAKI

Les travaux didactiques sur les raisonnements probabilistes ont privilégié la comparaison de deux sacs . Ils n'ont envisagé dans le cadre d'équiprobabilité que les situations de proptionnalité .
L'auteur propose une formule générale qui donne, dans la comparaison de deux sacs, des compositions non proportionnelles et équiprobables pour un événement donné .

PREMIERE PARTIE

1. Introduction .

Pour évaluer le jugement probabiliste des élèves la plupart des tests (questionnaires d'enquête) recourent à la situation de prévision "a priori" suivante :

Situation -type:
Choisir parmi deux sacs contenant des boules blanches et noires, celui dans lequel il est plus probable de tirer une boule d'une couleur donnée. Les compositions des deux sacs sont connues.

Dans sa thèse , Alarcon a critiqué le recours à cette situation-type . Une telle situation, exploitée lors d'études sur la quantification des probabilités, ne suffit pas pour obtenir des résultats qui aident à l'interprétation du jugement des comportements probabilistes des élèves.

Cette situation-type conduit d'emblée l'élève à faire des calculs de rapports . Les réponses à un questionnaire de type standard, c'est à dire à choix multiple ou en vrai ou faux, ne permettent pas de distinguer les réussites et les échecs relevant de la démarche probabiliste, et ceux tenant surtout à l'utilisation de la notion de rapport.

1 (1988) (p.203-216) IREM de Strasbourg

Afin d'accéder à une meilleure information sur le jugement probabiliste, Alarcon exploite une situation, qu'il appelle de décision " a posteriori ", et fait intervenir les deux variables suivantes:

Variable 1 : ◆
Le nombre de tirage: il ne se limite pas au cas d'un seul tirage, mais exploite aussi celui de plusieurs tirages avec remise.

Variable 2 : ◆
Afin d'augmenter l'incertitude de la situation , il exploite le cas où l'un des deux sacs est inconnu(1) : d'un point de vue purement probabiliste, pour pondérer l'éventualité d'un tirage fait dans le sac caché, il faut tenir compte des différences qui existent entre le résultat du tirage et ce que l'on pourrait attendre si le tirage avait été fait dans le sac connu .(2)

Situation J.A :
Retrouver parmi deux sacs, celui pris lors du tirage d'une ou d'une série de boules avec remise.Les deux sacs ne contiennent que des boules blanches et noires.

Cette différence pouvant intervenir dans l'approche d'une situation de prévision "a priori" et celle d'une situation de décision "a posteriori" , Alarcon l'analyse de la facon suivante :
Une situation de prévision "a priori" comporte une double incertitude et un enchevêtrement d'au moins trois univers :

Incertitudes :

* l'une concerne le résultat du tirage, il y a possibilité d'un écart entre l'événement et le résultat obtenu.
* l'autre, qui découle de la première , se réfère au choix du sac.

(1) *le contenu d'un sac n'est pas connu.*
(2) *sac dont on connait la composition.*

Univers :

* l'univers concernant les deux sacs : on prend l'un des deux sacs pour faire le tirage .
* l'univers des événements possibles, et c'est à ce dernier que se réfère le résultat du tirage.
* "l'univers" des conditions de l'"acceptabilité" de la situation probabiliste (situation incertaine) pour produire une réponse.

Alarcon précise que, dans le cadre d'une prévision, un choix de réponse est possible si et seulement si l'un des sacs est plus probable que l'autre; en revanche,dans une décision, il faut tenir compte de la possibilité d'un écart qui existe entre l'événement voulu et le résultat du tirage.

2. Décision et Prévision .

L'analyse d'Alarcon semble associer "prévision" et "a priori", ainsi que "décision" et "a posteriori". En fait, il nous semble préférable de séparer les situations, de décision ou prévision, de l'information possédée sur des tirages (pas d'information : cas de l'"a priori", résultats connus : cas de l'"a posteriori").

Commençons par donner deux exemples simples :
Exemple 1:
Quelles sont les urnes de *Bernouilli* pour lesquelles l'extraction (sans remise) de deux boules conduit les deux événements "tirer deux boules blanches" et "tirer deux boules de couleurs différentes" à avoir même probabilité ?
Réponse :
Soit a le nombre de boules blanches et b le nombre de boules noires.
La probabilité d'extraction de deux boules blanches est C_a^2 / C_{a+b}^2 et celle d'extraction de deux boules noires est C_b^2 / C_{a+b}^2 .Donc l'obtention de deux boules de couleurs différentes a pour probabilité : $(C_{a+b}^2 - C_a^2 - C_b^2) / C_{a+b}^2$ .Ainsi l'égalité de l'énoncé se traduit par : $C_a^2 = C_{a+b}^2 - C_a^2 - C_b^2$, ou encore :

$$2a(a-1) + b(b-1) - (a+b)(a+b)(a+b-1) = 0.$$

La résolution conduit immédiatement à la condition : $a = 2b + 1$ qui est affine.
Les exemples d'urnes répondant à la question seront du type :

1 noire et 3 blanches,
2 noires et 5 blanches,
3 noires et 7 blanches,
etc...

Voici un premier exemple (de nature affine) qui traduit très "rapidement" l'éloignement de la proportionnalité.

Exemple 2 : (cité dans la thèse de J.Alarcon). ✤
On fait trois tirages avec remise dans l'un des deux sacs contenant des boules blanches(B) et des boules noires(N). Le sac1 contient 1B et 12N , le sac2 contient 9B et 4N. Le résultat du tirage a été 1B et 2N : Lequel des deux sacs a-t-on pris lors du tirage ?
En dénotant par A l'événement "sortir une blanche en trois tirages", on obtient :

pour le sac1: P(A) = 432/2197,
pour le sac2: P(A) = 432/2197.

Le rapport R du nombre de boules noires et celui du nombre total de boules est :

pour le sac1: R = 36/39,
pour le sac2: R = 12/39,
pour le tirage: R = 26/39.

Autrement dit , le résultat du tirage est beaucoup plus plus proche de la composition du sac1 que celle du sac2, cependant les deux sacs sont équiprobables pour l'événement A.

Dans l'un ou l'autre des deux exemples cités ci-dessus, malgré la simplicité des situations proposées la pondération des probabilités ne peut se réduire à un simple calcul de rapport.

Donc a partir de ces deux exemples, nous dirons que l'analyse d'Alarcon demeure incomplète, et ce pour les raisons suivantes :

* Une situation de décision n'admet que deux réponses : on choisit ou le sac1 ou le sac 2. Ce choix comporte une prise de risques qui entrainera un coût pour le sujet.
* Une situation de prévision peut admettre des degrés dans le choix d'un sac. L'examen du contenu des deux sacs(1), en fonction du rapport cas favorables sur cas possibles, conduit à une pondération des résultats prévisibles du tirage.

(1) cela suppose que l'on connait la composition des deux sacs.

Les degrés d'engagement admissibles pour le choix d'un sac (plus probable, moins probable, aussi probable...) dépendent uniquement de cette pondération, ils ne reflètent aucune prise de risque.

En définitive, dans une situation de décision, le jugement probabiliste n'intervient pas tout seul. Par définition même d'une décision, il y a comme on l'a déja dit plus haut, apparition d'une fonction de risque, elle même liée à la régle (ou fonction) de décision. Le sujet dans ce cas là sera amené à produire une réponse en faveur de l'un et un seul des deux sacs, moyennant une stratégie (pertinente ou non), toujours accompagnée d'un double risque : celui de ne pas choisir le bon sac (risque de première espèce), et celui de choisir le mauvais sac (risque de deuxième espèce), ces deux risques n'étant pas bien sûr symétriques.

Pour la situation de prévision, une variante au niveau de la formulation de l'énoncé du tirage[(1)], permet de distinguer deux sortes de prévisions : une prévision " a priori " et une prévision " a posteriori " .Cette expression de "prévision a posteriori" semble contradictoire. Mais après tout , une voyante ne "lit" elle pas le passé aussi bien qu'elle "prédit" l'avenir. Plus précisement, imaginons qu'une épreuve choisie parmi deux possibles soit indiquée dans une enveloppe scellée . Pour un sujet qui ignore le choix fait mais qui voit des résultats, il y a effectivement une prévision : celle du contenu qu'il découvrira dans l'enveloppe quand celle-ci sera ouverte. C'est ce genre de situations que nous avons examinée dans le cadre de mémoire de D.E.A .
Dans une situation de prévision " a priori ", la formulation du résultat du tirage sera un énoncé équivalent à :

" Dans quel sac avez-vous le plus de chance <u>de tirer tel résultat?</u> "

Par contre, dans une situation de prévision " a posteriori ", la formulation du résultat du tirage sera un énoncé équivalent à :

" <u>On a tiré tel résultat</u> , quel est le sac qui a été le plus probablement utilisé?"

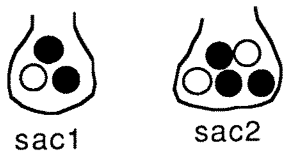
Autrement dit la situation de prévision " a priori " met en avant l'univers des événements possibles, tandis que la situation de prévision " a posteriori " met en avant l'univers des deux sacs.

(1) on se réfère à l'énoncé du tirage du questionnaire.

Le sujet dans cette dernière situation est beaucoup moins confronté à la possibilité de l'éventualité du résultat du tirage, l'univers des événements possibles dans ce cas là est beaucoup moins apparent.

En revanche cette variation au niveau de la formulation de l'énoncé du résultat du tirage, n'a pas le même effet dans une situation de décision
Dans tous les cas, c'est l'univers des deux sacs qui intervient, en un premier temps au niveau de la quantification de la probabilité du résultat du tirage et ce à l'aide du contenu des deux sacs, ensuite en un deuxième temps au niveau de la stratégie de décision (non nécessairement de nature probabiliste) pour le choix de l'un des deux sacs.
Voici quelques exemples de questions à choix multiples, pour illustrer la différence entre les trois types de situations : de décision, de prévision " a priori " et de prévision " a posteriori".

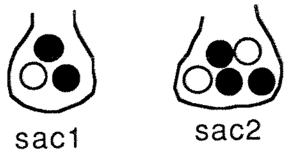
Situation de décision :
Vous prenez l'un des deux sacs et tirez une boule (resp. plusieurs boules avec remise).



* Dans quel sac avez-vous le plus de chance de tirer une boule B (ou N), (resp.plusieurs boules avec remise B , N) ?
* Mettez une croix dans la case de votre choix.

☐ le sac1 ☐ le sac2

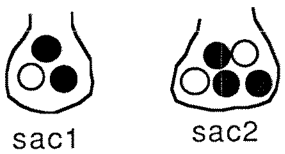
Situation de prévision " a priori ":
Paul prend l'un des deux sacs et tire une boule (resp. plusieurs boules avec remise).



* Dans quel sac Paul a le plus de chance de tirer une boule B (ou N), (resp.plusieurs boules avec remise B, N) ?
* Mettez une croix dans la case de votre choix.

□	□	□	□	□
forcément le sac1	plutôt le sac1	pas de raison de préférer l'un des sacs	plutôt le sac2	forcément le sac2

Situation de prévision " a posteriori ":
Paul a pris l'un des deux sacs et a tiré une boule (resp. plusieurs boules avec remise).



* Dans quel sac Paul avait-t-il probablement tirer une boule B (ou N), (resp.plusieurs boules avec remise B, N) ?
* Mettez une croix dans la case de votre choix.

□	□	□	□	□
forcément le sac1	plutôt le sac1	pas de raison de préférer l'un des sacs	plutôt le sac2	forcément le sac2

3. Une variante méthologique et conclusion .

Variante méthodologique :
Si l'objectif est d'étudier le comportement des élèves devant une situation probabiliste, on peut penser que les deux variables relevées par Alarcon (voir ◆) ne suffiraient pas dans le cadre d'enquêtes de type standard(1).
Tout en restant dans les conditions expérimentales traditionnelles (questionnaire à choix multiples ou en vrai ou faux) qui permettent de comparer les réactions d'élèves, si on leur demande de justifier leur choix de réponse, on peut ainsi accéder à beaucoup plus d'informations sur les mécanismes formateurs de leurs réactions.

(1) à choix multiples ou en vrai ou faux.

Sylvette Maury a adopté cette méthode d'interrogation qui s'est avérée très révélatrice : des réponses identiques à une même question étaient justifiées par des argumentations tout à fait différentes.
En conséquence, nous pensons qu'à un questionnaire de type standard il convient d'adjoindre une demande de justification des réponses, pour permettre une l'analyse des argumentations et des procédures développées par les élèves.

Conclusion :
A propos de l'exemple 2 (voir ✦), Alarcon dit que cet exemple "marque une rupture avec la proportionalité : la décision correcte ne peut se réduire à un simple calcul de rapport, nous n'avons pas envisagé ce type de situations "
Selon nous, les élèves auront tendance à considérer la situation probabiliste qu'on leur présente, soit comme une situation de décision soit comme une situation de prévision " a priori " ou " a posteriori ", et cela indépendamment de la formulation de la question. La première difficulté ne concernerait donc pas "le" raisonnement probabiliste, mais comme on a essayé de le mettre en valeur plus haut, la discrimination des différents types de situations que l'on peut présenter.
Dans le même exemple (tel qu'il a été cité par Alarcon) , on pense qu'un élève ayant calculé la probabilité du résultat du tirage sous l'hypothèse du sac1 et ensuite sous celle du sac 2, mais n'ayant pas relevé la non équivalence des deux sacs, aura tendance à se mettre en situation de prévision, donc à ne pas préférer l'un des deux sacs. Par contre, un élève qui ne se limite pas à cette pondération et qui remarque la non équivalence des deux sacs, aura tendance à se mettre en situation de décision, et ce, moyenant une procédure de décision tel que le calcul du rapport nombre de boules noires sur nombre total de boules, ou autre stratégie de décision :
En conséquence, dans le cadre d'une situation de décision, les procédures et argumentations des élèves peuvent ne plus se limiter à un calcul purement probabiliste. Des estimations relevant de stratégies, dites de décision, quelles soient pertinentes ou non, peuvent aussi intervenir.
Parmi les situations probabilistes les plus pertinentes, on peut relever celles où les deux sacs sont équivalents, indépendamment du résultat du tirage, ou encore celles où les deux sacs sont équiprobables pour un certain type de résultat de tirage. C'est devant ce type de situations que nous pensons que les procédures des élèves varieront, indépendamment de la formulation de la question, mais suivant le type de situation, de décision ou de pévision, dans laquel ils se placeront .

La pertinence du jugement probabiliste des élèves dans ce cas là ne pourra être appréciée qu'en fonction du type de situation dans lequel ils se sont placés .
Sylvette Maury a obtenu pour certaines questions où les deux sacs étaient équivalents ($N1/B1=N2/B2$) , des réponses en faveur d'un sac alors que dans leur argumentations ils avaient fait remarquer l'équiprobabilité des deux sacs pour l'événement demandé. Elle a attribué ce genre de procédure, qu'elle a classée parmi les non pertinentes , à la mauvaise formulation de la question (dans son questionnaire,elle a utilisé le mot " choisir ") : pour notre part ces élèves se sont placés dans une situation de décision.

DEUXIEME PARTIE

UNE SITUATION PROBABILISTE DE NON PROPORTIONNALITE

Dans le cas où le contenu des deux sacs était connu , S.Maury et J.Alarcon avaient exploré les trois situations suivantes :

* comparaison à une variable (sans grand interêt) :
  $B_1= B_2$ et $N_1 \neq N_2$ (ou $B_1 \neq B_2$ et $N_1 = N_2$)

* comparaison à deux variables :

$$N_1 \neq N_2 \quad , \quad B_1 \neq B_2 \quad \text{et} \quad \frac{N_1}{B_1} \neq \frac{N_1}{B_2} \ .$$

* proportionnalité :

$$\frac{N_1}{B_1} = \frac{N_2}{B_2} \ .$$

Une quatrième situation non moins pertinente que les trois précédentes , nous semble s'imposer lors d'une étude sur le comportement probabiliste des élèves :
Il s'agit du cas où les deux sacs ne sont pas proportionnels , mais équiprobables pour un même tirage avec remise .
Quelques exemples de ce type de situation permettent de mettre en valeur son interêt , ainsi on se propose de l'étudier de manière générale .

Situation explorée :

On considère deux sacs S_1 et S_2 remplis de boules blanches et de boules noires , où p_1 (resp p_2) désigne la proportion de boules blanches dans S_1 (resp dans S_2). En supposant qu'à l'issue d'un tirage avec remise on ait obtenu k_1 boules blanches et k_2 boules noires :

Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 , avec $p_1 \neq p_2$, la probabilité de cet événement est la même pour les deux sacs S_1 et S_2 ?
ou encore :
k_1 et k_2 etant fixés dans $\mathbb{N}$, existe-t-il p_1 et p_2 tels que :

$$p_1^{k_1}(1 - p_1)^{k_2} = p_2^{k_1}(1 - p_2)^{k_2} \qquad (1) \quad ?$$

Remarquons tout d'abord que :
si $k_1 = 0$ et $k_2 \neq 0$ alors l'équation (1) devient :

$$p_1 = p_2 \ .$$

Ce qui traduit la proportionnalité des deux sacs S_1 et S_2.
Nous supposerons par conséquent que :

$$(k_1,k_2) \in \mathbb{N}^* \mathrm{x}\, \mathbb{N}^* \ .$$

Pour k_1 et k_2 fixés dans $\mathbb{N}^*$, on est donc amené à résoudre l'équation :

$$x^{k_1}(1 - x)^{k_2} = y^{k_1}(1 - y)^{k_2} \qquad (2)$$

où $(x,y) \in]0,1[\mathrm{x}]0,1[\,/\, \Delta$, avec $\Delta = \{(t,t) \in \mathrm{R}^2 / t \in]0,1[\}$.

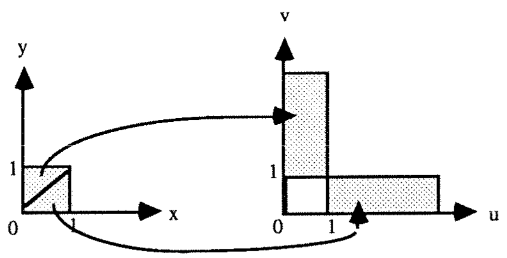
$$(2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{k_1}\left(\frac{1 - x}{1 - y}\right)^{k_2} = 1$$

A l'aide du changement de variables :

$u = \frac{x}{y}$ et $v = \frac{1 - x}{1 - y}$

où $(u,v) \in \Phi = (]0,1[\times R) \cup (R \times]0,1[) /]0,1[^2$,

qui revient à faire la correspondance biunivoque suivante :



on devra résoudre :

$u^{k_1} . v^{k_2} = 1$ où $(u,v) \in \Phi$.

Par conséquent l'ensemble des solutions sera :

$(u,v) \in \{(t, t^{-\frac{k_1}{k_2}}) / t \in R_+^* - \{1\}\}$

ou encore en terme de p1 et de p2 :

$$(p_1,p_2) \in \left\{ \left(\frac{t - t^{1 - k_1/k_2}}{t - t^{-k_1/k_2}} , \frac{1 - t^{-k_2/k_1}}{t - t^{-k_2/k_1}} \right) \Big/ t \in R_+^* - \{1\} \right\}$$

d'où une infinité de solutions .

Quelques exemples :

Pour donner une illustration à cet ensemble de solutions , nous présenterons quelques tableaux donnant la composition des deux sacs S_1 et S_2 .

1) k1=k2=1 (càd qu'on tire avec remise 1B et 1N).

t	composition Sac1	composition Sac2
1/4	1B et 4N	4B et 1N
1/5	1B et 5N	5B et 1N
1/6	1B et 6N	6B et 1N
3/4	3B et 4N	4B et 3N
5/6	5B et 6N	6B et 5N

2) k1=1 et k2=2 (càd qu'on tire avec remise 1B et 2N).

t	composition Sac1	composition Sac2
4	4B et 3N	1B et 6N
9	1B et 12N	9B et 4N
16	16B et 5N	1B et 20N
25	25B et 6N	1B et 30N
9/4	9B et 10N	4B et 15N
9/16	9B et 28N	16B et 21N
9/25	9B et 80N	25B et 64N
4/25	4B et35N	25B et 14N
16/25	16B et 45N	25B et 36N

3) k1=1 et k2=3 (c-à-d qu'on tire avec remise 1B et 3N).

t	composition Sac1	composition Sac2
8	8B et 7N	1B et 14N
27	27B et 13N	1B et 39N
64	192B et 13N	3B et 260N
125	125B et 31N	1B et 155N
216	216B et 43N	1B et 258N
8/27	8B et 57N	27B et 38N
8/125	8B et 195N	125B et 78N
27/64	27B et 148N	64B et 111N

4) k1=1 et k2=4 (càd qu'on tire avec remise 1B et 4N).

t	composition Sac1	composition Sac2
16	16B et 15N	1B et 30N
81	81B et 60N	1B et 140N
4^4	256B et 85N	1B et 340N
5^4	625B et 156N	1B et 780N
16/81	16B et 195N	81B et 130N
$16/5^4$	16B et 1015N	625B et 406N
$81/4^4$	81B et 700N	256B et 525N
$81/5^4$	81B et 1360N	625B et 816N
$4^4/5^4$	256B et 1845N	625B et 1476N

5) k1=2 et k2=3 (càd qu'on tire avec remise 2B et 3N).

t	composition Sac1	composition Sac2
8	24B et 7N	3B et 28N
27	108B et 13N	4B et 117N
64	320B et 21N	5B et 336N
125	750B et 31N	6B et 775N
216	1512B et 43N	7B et 1748N
8/27	40B et 171N	135B et 76N
8/125	56B et 975N	875B et 156N
27/64	189B et 592N	448B et 333N
27/125	216B et 1225N	8B et 1433N
64/125	576B et 1525N	1125B et 976N
125/216	1375B et 3276N	2376B et 2275N

Pour conclure cet article, on voudrait attirer l'attention du lecteur sur quelques exemples issus des tableaux ci-dessus , qui paraissent particulièrement interessants:

<u>Exemple 1</u> :

On tire avec remise 1B et 2N dans l'un des deux sacs où :
- la composition du sac1 est 4B et 3N,
- la composition du sac2 est 1B et 6N.

Exemple 2 :

On tire avec remise 1B et 2N dans l'un des deux sacs où :
- la composition du sac1 est 1B et 12N,
- la composition du sac2 est 9B et 4N.

Exemple 3 :

On tire avec remise 1B et 3N dans l'un des deux sacs où :
- la composition du sac1 est 8B et 7N,
- la composition du sac2 est 1B et 14N.

Exemple 4:

On tire avec remise 1B et 4N dans l'un des deux sacs où :
- la composition du sac1 est 16B et 15N,
- la composition du sac2 est 1B et 30N.

Exemple 5 :

On tire avec remise 2B et 3N dans l'un des deux sacs où :
- la composition du sac1 est 24B et 7N,
- la composition du sac2 est 3B et 28N.

REFERENCES

J.Alarcon : *L'apprehension des situations probabilistes chez des élèves 12 - 14 ans.* Thèse de 3ème cycle .Strasbourg , Juin 1982.

S.Maury : *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes* Doctorat és-science. Montpellier, Juillet 1986.

TEST DE CLOSURE ET FORMULES MATHEMATIQUES

F. PLUVINAGE

$$\left|\sum_{p=1}^{n}(x-x_p)\right| \leq \sum_{p=1}^{n}\left|x-x_p\right|$$

Combien y a-t-il de mots dans cette phrase symbolique ? D'après cette étude, dix-neuf, dont deux à sauter si on applique la technique de closure (supprimer un mot sur cinq). Un intérêt didactique du test de closure est la prise de conscience de la lecture de textes scientifiques qu'il peut provoquer.

1. INTRODUCTION

A la suite des études de A. Gagatsis [G 84] et du travail réalisé en collaboration avec R. Duval et le même A. Gagatsis [DGP 87], nous disposons d'un instrument qui nous donne satisfaction pour l'évaluation et l'observation de l'accès de lecteurs au contenu de textes courants, et même de textes scientifiques principalement rédigés en langue usuelle. Cependant, la présence dans un texte d'une proportion importante d'écritures symboliques constituait encore, par rapport à l'application du test de closure, une difficulté que nous n'avions pas examinée dans le détail. C'est à un tel examen qu'un séjour de travail à la Seccion Matematica Educativa de l'Institut Polytechnique National de Mexico nous a donné l'occasion de procéder ; dans [P 87] on trouvera un compte-rendu d'une observation effectuée auprès d'un petit groupe de professeurs du Mexique, et nous nous rapporterons à cette observation pour en extraire quelques résultats intéressants ici.

Rappelons, à l'intention du lecteur qui ne connaîtrait pas le test de closure, que ce test consiste à présenter un texte mutilé par la suppression régulière d'un mot sur cinq. Les mots ainsi supprimés sont remplacés soit par des points de suspension, dans la présentation où chaque lecteur répond sur la feuille où apparaît le texte, soit par des numéros encadrés, dans la présentation où les lecteurs répondent sur une feuille à part.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.217-234) IREM de Strasbourg

La première présentation s'utilise en enquête, et alors la longueur des pointillés est la même d'une lacune à l'autre pour ne pas donner d'indication sur la longueur des mots manquants, la deuxième présentation s'utilise pour des livres utilisables par plusieurs personnes dans le temps. La tâche du lecteur est de retrouver les mots manquants, en les inscrivant, à leur place dans la première présentation, en regard des numéros qu'il recopie dans la deuxième présentation. En évaluation, on ne prend en compte comme réussite pour un mot que la reconstitution par le lecteur du mot précis utilisé dans le texte original. En enquête, on peut ajouter à cette prise en compte celle de termes synonymes pourvu que l'on prenne soin dans chaque cas de dresser la liste exhaustive de tous les mots acceptés comme synonymes du mot original : le principe général est d'accepter comme tel à un endroit donné un mot qui conduit à une phrase correcte de même signification que celle du texte original. La comparaison des analyses sans ou avec acceptation de synonymie permet de voir le rôle de cette prise-en-compte. Par exemple, dans [DGP 87], nous avions relevé de ce point de vue une différence entre textes courants, pour lesquels les propositions de synonymes sont aléatoires pour un lecteur donné, et textes mathématiques, donnant lieu quantitativement à moins de propositions de synonymes mais en revanche à des propositions qui peuvent être révélatrices de connaissances ou d'attitudes du lecteur vis à vis du texte.

Les mots supprimés du texte pouvant avoir des rôles très différents, la tâche de reconstitution est loin d'être homogène d'un mot à l'autre. C'est pourquoi nous avons proposé de compter à part les unes des autres les réussites à quatre catégories de mots à retrouver : les mots "outils" *(articles, prépositions, pronoms, verbes auxiliaires,...)* donnant lieu à deux catégories :

L0 (langue de niveau 0) - articles et prépositions
L1 (langue de niveau 1) - autres mots "outils",

les mots "pleins" *(substantifs, verbes autres qu'auxiliaires, adjectifs et adverbes de manière)* donnent lieu aux deux catégories I0 et I1 *(information de niveaux 0 et 1)* selon qu'ils appartiennent ou non à des groupes de mots répétés de la même façon dans le texte *(exemple : si on trouve plusieurs fois le groupe "le produit scalaire des vecteurs..." dans un texte, les mots "pleins" de ce groupe seront classés en I0 ; mais le mot "produit" employé seul, ailleurs dans le texte, sera classé en I1).*

La distinction entre I0 et I1 n'a pratiquement pas lieu d'être faite sur un texte courant, le nombre de groupes de mots répétés exactement étant très généralement tout à fait infime, sinon nul. Il n'en est pas de même pour des textes mathématiques, dans lesquels certaines expressions ou certains groupes de mots peuvent apparaître de multiples fois.

2. *ECRITURE COURANTE ET ECRITURE SYMBOLIQUE DU POINT DE VUE DE LA TECHNIQUE DE CLOSURE*

Reproduisant le discours oral qui se déroule dans le temps, l'écriture courante est organisée selon une ligne unique *("cassée", pour remplir une page, en une suite de segments)*, dans laquelle les mots sont identifiés comme des groupes de lettres séparés entre eux par des blancs, ou espacements. A cela s'ajoute une ponctuation qui sert à délimiter des unités de sens, comme les phrases, et à marquer des formes d'énonciation que l'oral rend par des intonations particulières *(l'exclamation, l'interrogation, la digression ou l'a-parte notamment, ces derniers rendus par des parenthèses)*. Toutefois l'écriture comme le langage qu'elle reflète, est le résultat de phénomènes de nature probabiliste que l'usage a tendu à optimiser. En conséquence, on trouve quelques exceptions à la situation générale des mots organisés en suite de blocs connexes *(chacun d'un seul tenant)*, séparés de leurs voisins. Ces exceptions sont :

- des situations de connexion comme le groupe "a-t-il", ou l'enclise de certaines langues comme l'espagnol qui rassemble plusieurs mots en un même groupe,

- des situations de séparation, par exemple d'un verbe avec une particule qui en détermine indissociablement le sens *(ainsi, en allemand, "Hör mal zu !" signifie "Ecoute !", tandis que "Hör mal auf !" signifie "Arrête !")*.

Ces quelques exceptions se rencontrent avec une fréquence suffisamment faible pour ne produire que peu de perturbations dans l'application de la technique de closure. Il n'en est pas de même, si l'on ne prend pas quelques précautions, pour le cas des écritures symboliques. Les groupes formés par concaténation de chiffres sont évidemment des mots dans la numération de position, mais la concaténation de lettres pose problème : par exemple "PQ" dans un contexte de calcul polynomial représentera sans doute un produit de deux facteurs, chacun d'eux ayant son individualité de "mot", tandis que dans un contexte géométrique ce pourra être une droite que l'on désignera ailleurs par une lettre unique. On rencontre aussi beaucoup de situations de séparation, à cause de l'obligation de "parenthéser" pour hiérarchiser la prise en compte d'éléments dans une expression ; par exemple "l'intervalle 0,1" s'écrit "[0 ; 1]", ce qui permet d'écrire des égalités comme

$$[-1 ; 0] \cup [0 ; 1] = [-1 ; 1]$$

Le mot français "intervalle" a ainsi été rendu par un groupe de deux symboles disjoints : un crochet ouvrant et un crochet fermant. Notons dans ce cas que la distinction "extrémité comprise" ou "non comprise" conduit éventuellement à individualiser chaque crochet : "l'intervalle 0,1 fermé en 0 et ouvert en 1" s'écrivant "[0 ; 1[".
De nombreux textes ont par ailleurs souligné l'aspect non uni - mais bidimentionnel de l'écriture symbolique. Nous ne nous étendrons donc pas sur ce point, nous contentant de présenter quelques phrases symboliques — soulignons au passage que, fort heureusement, l'écriture symbolique ne remet pas en cause la notion de phrase *(nous reviendrons sur ce point dans l'examen du rôle des symboles)* — en signalant quelques problèmes qu'elles peuvent soulever pour l'application de la technique de closure.

a) $$p(\theta \in [b1(T), b2(T)]) \geq 1 - \alpha$$

Cette phrase symbolique est quasi linéaire : les deux indices après la lettre b s'écriraient d'ailleurs au même niveau que b dans un langage informatique tel que le BASIC. Sa lecture serait :
«... (la) probabilité pour que θ appartienne à l'intervalle b1 de T, b2 de T (est) supérieure ou égale à un moins α»
Les problèmes viennent essentiellement ici de l'existence de trois niveaux d'emboîtements *(parenthèses, crochets, parenthèses)*. Faut-il compter comme des mots distincts ces parenthèses et crochets ouvrant et fermant ?

b)

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \right) - \ln n \right] = c$$

Dans cette expression qui définit la constante d'Euler, il y a comme précédemment des emboîtements, mais de plus l'aspect bidimensionnel est à la fois net, et compliqué dans sa prise en compte. En effet, "$n \to +\infty$" se lit après "limite" *(abrégé en lim dans l'écriture symbolique)*, ce qui correspond au déroulement normal d'une lecture *(de haut en bas)*, mais

$$\text{“}\sum_{p=1}^{n}\text{”}$$

se lit "somme pour p allant de 1 à n" ce qui correspond à la lecture successive de "Σ", "p=1" et "n", soit pour l'axe vertical un ordre de lecture : milieu-bas-haut tout à fait insolite (mais qui a ses raisons).

c) Pour

$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, les deux dérivées sont :

$$\frac{df}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

et

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

L'apparition de l'égalité :

"$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$"

au milieu d'une phrase française n'est pas gênante pour la procédure de closure. Le symbole de racine carrée surmonte une expression (qui n'a alors pas besoin d'être placée entre parenthèses) ; est-ce gênant de présenter une lacune sous la forme "... $1+x^2$", qui demandera pour être complétée, le tracé d'un trait qui va au dessus de "$1+x^2$" ?

Les dérivées posent problème dans cette écriture : un mathématicien a bien envie de dire ici que

"$\frac{df}{dx}$" est un mot, de même que "$\frac{d^2f}{dx^2}$"

Mais si f est opposée à une autre fonction g, ce seront plutôt

"$\frac{d}{dx}$" et "$\frac{d^2}{dx^2}$"

qui seront considérés comme des mots *(au titre d'opérateurs de dérivation s'appliquant à diverses fonctions)*. Notons que l'emploi d'une autre notation serait f'(x) pour la dérivée première et f''(x) pour la dérivée seconde, et on se poserait alors par exemple la question de savoir si l'on peut considérer comme des mots les guillemets simples ou doubles, ou si ces guillemets sont indissociables du "f" qu'ils accompagnent.

3. SOLUTIONS PROPOSEES POUR APPLIQUER LA TECHNIQUE DE CLOSURE AUX ECRITURES SYMBOLIQUES.

Il existe deux types de situations qui obligent à linéariser une écriture symbolique :

– la lecture à voix haute,
– la programmation

Dans le premier cas, on ne peut faire autrement que d'introduire un ordre temporel dans l'énonciation. Dans le second cas, on est obligé d'introduire un ordre dans les instructions données à la machine par l'intermédiaire d'un clavier ou d'une "souris".

A priori, la référence à la programmation pouvait sembler plus précise que la référence à la lecture. En effet, la première a des exigences plus stricte que la seconde. Mais la rigueur qui régit l'utilisation d'un langage s'accompagne de variations importantes quand on passe d'un langage de programmation à un autre. Par exemple, dans l'expression $\cos(1+x^2)$, la fonction "cos" devra être introduite en premier lieu ou en dernier, selon les langages. C'est qu'il s'agit de présenter une suite d'ordres déterminant comment obtenir $\cos(1+x^2)$ à partir de x ; et cette finalité de traitement est diversement conciliée, selon les langages, avec les habitudes d'encodage dirigées vers la compréhension à la lecture. Au contraire, la lecture à voix haute est dégagée de ce caractère d'ordres à faire exécuter, et son économie provient exclusivement de la saisie en mémoire et de l'écriture. En effet, la lecture spontanée à voix haute en mathématiques est fréquemment effectuée en parallèle avec l'écriture.

De là résulte une standardisation finalement plus grande que celle qui pourrait être attendue a priori.
Par exemple, voici les phases successives de l'écriture de l'expression :

$$\sum_{p=1}^{n} p^2$$

telles qu'elles apparaissent très massivement chez ses utilisateurs :

① $\sum$ ② $\sum\limits_{p=1}$ ③ $\sum\limits_{p=1}^{n}$ ④ $\sum\limits_{p=1}^{n} p^2$

A titre de référence par rapport à la programmation, il peut être intéressant de remarquer que cette expression correspond à une séquence qui est un véritable programme.

En BASIC par exemple, nous ne reconnaîtrons pas l'expression, sans habitude de décodage, sous la forme suivante :

```
.
.
.
100     S = 0
110     FOR P=1 TO N
120         S = S+P*P
130     NEXT
.
.
.
```

Ces considérations nous ont finalement conduit à nous repérer en premier lieu sur la lecture à haute voix associée à l'écriture, disposant du recours à la programmation en cas de doute.

1° Principe général de détermination des mots :

On considère comme **un** mot tout symbole, tout caractère qui donne lieu à une trace audible à la lecture.

Exemple 1

L'expression $(a + b)^2$ se lit "a plus b au carré ". Par suite les parenthèses de cette expression ne sont pas à prendre en compte comme des mots, et il faut donc considérer l'expression comme formée de quatre mots.

Exemple 2

Dans l'écriture française des combinaisons,

à savoir C_n^p,

on lit "C,n,p" et on compte donc trois mots, tandis que l'on ne comptera que deux mots dans l'écriture anglo-saxone

$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ du même objet mathématique.

Toutefois ce principe général ne peut pas s'appliquer de manière aveugle : d'une part certains groupes de caractères sont indissociables, et le groupe complet est alors à considérer comme un mot, d'autre part certaines difficultés de prise en compte peuvent conduire à ne pas considérer comme mots des symboles qui pourtant se manifestent lors de la lecture à voix haute. Ce sont les exceptions au principe général qui sont répertoriées ci-après.

2° Nombres

L'écriture décimale confère aux chiffres une valeur tributaire de leur position dans un nombre *(comparer par exemple 36 et 63)*. En écriture décimale, un nombre est donc à considérer comme **un** mot ; par extension, le signe "moins" des nombres négatif est aussi à incorporer au mot-nombre : par exemple "(- 1)" est **un** mot, puisque par ailleurs ses parenthèses ne se disent pas.

3° Fonctions usuelles

L'écriture normalisée de certaines fonctions comporte plusieurs lettres, comme pour cos, tan, ln,... Bien évidemment, il serait absurde de dissocier, même si la lecture peut correspondre au fait d'épeler *(ce qui se fait fréquemment pour "ln" par exemple)*. Chacun de ces assemblages sera donc considéré comme **un** mot.

4 Abréviations

Des abréviations soit traditionnelles, comme lim, Max, Min, Sup et Inf, soit introduites dans un texte par l'auteur *(par exemple, on rencontre "opp" pour opposé, "det" pour déterminant, etc)* sont à considérer comme des mots de la même manière que les fonctions usuelles.

5° Blocs

Sans être des abréviations, certaines désignations sont globales, c'est-à-dire n'assignent aucun rôle à l'un au moins des caractères qui les constituent ; par exemple, on pourra rencontrer "l'axe x'x" sans que x' ou x aient un sens par eux-mêmes, ou bien "la fonction f(t)" sans que la variable t ait un rôle *(un autre auteur écrirait au même* *endroit "la fonction f"*). De même, certains indices n'ont pas d'autre but qu'un simple repérage : c'est la cas si une question de géométrie fait intervenir disons trois droites d_1, d_2 et d_3 *(mais ce n'est pas le cas si l'on a affaire à une suite $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$)* Pourvu qu'aucune conséquence gênante n'en résulte, on peut déroger pour de telles désignations au principe général en les considérant comme **un seul mot** chacune.

Les considérations qui précèdent laissent subsister un type de difficulté pour appliquer la procédure de closure : il peut arriver que la suppression d'un mot entraîne une difficulté de présentation.

Que subsistera-t-il par exemple de la fraction

$$\frac{a+b}{c+d}$$

si l'on tente de supprimer son trait de fraction *(symbole rendu dans le langage par le mot "sur", donc à compter comme mot)* ? On peut certes envisager de s'autoriser la réécriture (a+b)/(c+d), mais celle-ci introduit des parenthèses. En cas de difficulté de ce type, il nous paraît préférable de s'autoriser à **sauter** le mot difficile pour supprimer son suivant dans l'ordre de la lecture à haute voix et de l'écriture.

6° Saut de mots à suppression gênante :

Outre des cas comme un trait de fraction horizontal ou un racine carrée concernant plusieurs termes

$$(\text{comme } \frac{a}{b+c} \text{ ou } \sqrt{a+b}),$$

les mots à suppression gênante sont en rapport avec des cas de non connexion, c'est-à-dire de séparation de signes rendus dans la chaîne parlée par un seul mot ou un groupe de mots successifs. Par exemple, l'inégalité

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

se lit «valeur absolue de a plus b (est) inférieure ou égale à valeur absolue de a plus valeur absolue de b», c'est-à-dire que les deux barres verticales encadrant a+b, a et b ne sont rendues dans le discours que par un groupe : "valeur absolue de".

Compter comme un mot unique deux barres séparées est problématique. D'où la suggestion générale de **sauter** les quelques mots difficiles, du point de vue de la procédure de closure, dans l'application de cette procédure à un texte mathématique.

4 VALEUR DES SIGNES ET SYMBOLES

Rappelons la proposition, présentée dans [DGP 87], de déterminer pour un test de closure quatre scores individuels regroupés selon une matrice 2×2 :

	0	1
L	L0	L1
I	I0	I1

Dans cette matrice, L désigne le corpus des mots outils de la langue *(tels articles, prépositions, pronoms, adverbes autres que de manière,...)* et I celui des mots porteurs de sens, d'information par eux-mêmes *(tels substantifs, adjectifs, verbes,...)* ; les chiffres 0 et 1 renvoient à deux niveaux : le niveau 0 concerne les mots qui peuvent être rétablis par un lecteur sans nécessité pour lui d'avoir pénétré le sens du texte considéré, le niveau 1 ceux qui demandent un certain accès à ce sens, aux articulations du texte. Ainsi *(voir § 2)* ont été retenus comme mots L0 les articles et les prépositions, qui apparaissent statistiquement comme les mots qu'une simple connaissance générale de la langue suffit à rétablir, et comme mots I0 les mots de de la catégorie I qui se retrouvent dans des groupes répétés dans le texte.

Comme nous l'avons déjà signalé (§ 2), on ne rencontre pratiquement pas de mots I0 dans un texte de langue courante, alors qu'il peut y avoir en abondance dans un texte mathématique. Au contraire, on ne rencontrera pas de mots L0 dans des phrases symboliques, les autres catégories étant, elles, représentées.
Les mots "informations" dans une phrase symbolique sont soit des verbes *(exemples :* $\Rightarrow$, $=$, $>$, $\in$, $\in$ *)* soit des substantifs *(exemples : nombres, variables, fonctions, fonctionnelles telles que la dérivation ou la sommation*). Les mots "langue" *(tous de niveau L1)* correspondent à des conjonctions de la langue courante : opérateurs tels que + ou $\times$, quantificateurs $\forall$ *(pour tout)* et $\exists$ *(pour au moins un)*. Nous n'avons pas pris en compte les parenthèses, crochets ou accolades qui n'ont pas de signification propre ; leur rôle dans la phrase symbolique est souvent comparable à celui de la ponctuation dans la phrase courante *(et celle-ci n'est pas prise en compte non plus dans le test de closure)* . A vrai dire, un cas comme "f(x)", qui se lit "f de x", nous avait fait hésiter dans un premier temps : les parenthèses ne rendent-elles pas ici la préposition

"de" ? En fait, si l'on se refère par exemple à "$\sqrt{x}$", qui se lit "racine de x" ou à "lnx" qui se lit "log[arithme] de x", on se rend compte de l'inutilité des parenthèses pour que la préposition "de" soit dite. En définitive, il faut donc associer les parenthèses de phrases symboliques avec l'emploi de subordonnées dans la langue courante, ce qui est particulièrement évident dans l'exemple donné au § 2, (a) où les parenthèses encadrent une proposition complète, ou avec l'emploi de l'apposition, indiquée par la ponctuation.

Une question mérite d'être soulevée, au terme de ce paragraphe, sur la valeur ou le rôle des constituants d'une phrase symbolique du point de vue de l'enseignement : est-il opportun, et si oui à quel niveau, d'apprendre que l'écriture symbolique présente des phrases, organisées chacune autour d'un verbe principal ? Ou alors, la syntaxe d'une phrase symbolique est-elle assez simple en général pour ne pas nécessiter d'être explicitée ?

5 *Un exemple de test*

Le texte *(mutilé)* qui suit est emprunté à l'ouvrage de Jacques Dixmier, Mathématiques Générales, tome I pages 247 et 248, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
Nous avons retenu ce texte parce qu'il utilise largement l'écriture symbolique. Pour les réponses, voir la liste en annexe, à la fin de cette étude

DERIVEES

① *Définition*

Soit f [1] fonction réelle ou complexe, [2] dans un intervalle I [3] R. Soit x_0 un [4] de I. On dit [5] f est dérivable en [6] de dérivée ℓ si :

$$\lim_{x \to x_0,\ [8]\ x_0} \frac{f(x) - f([9])}{x - [10]} = \ell .$$

Cette dérivée [11] note $f'(x_0)$.

②

Posons, [12] ①, $x = x_0$ 13 h. Dire que f [14] en x_0 la dérivée [15] signifie que

$$\lim_{h\ [16]\ 0,\ h \neq 0} \frac{[17]\ (x_0 + h) - [18]\ (x_0)}{h} = [19]$$

③ Théorème

Si f est [20] en x_0, on a

$$[21]\ (x_0+h) = [22]\ (x_0) + hf'(\ [23]\ ) + h\,o(1)\ \ [24]\ \ h \to 0.$$

Démonstration

[25] a, pour $h \neq [26]$,

$$\frac{f(x_0+h)[27]f(x_0)}{h}\ [28]\ f'(x_0) + \varepsilon\ ([29])$$

avec $\varepsilon(h) \to [30]$ quand $f \to 0$ [31] valeurs $\neq 0$. L'[32] précédente s'écrit

$$f([33]+h) = f([34]) + h(f'(x_0)\ \ [35]\ \varepsilon\ (h))$$

Cette égalité [36] encore vraie pour h [37] 0 si l'on pose [38] (0) = 0. On [39] alors $\varepsilon(h) \to$ [40] quand $h \to 0$.

④ [41]

Si f est dérivable [42] x_0, f est continue [43] x_0

Démonstration

D'après [44], on a $f(x_0$ [45] $h) - f(x_0)$ [46] 0 quand $h \to$ [47].

⑤

Le théorème ③ admet [48] réciproque. Supposons qu'il [49] une constante a telle [50]

$$f(x_0+ h) \text{ [51] } f(x_0) + h \text{ [52] } + h\mathrm{o}(1)$$

[53] $h \to 0$. Alors [54] est dérivable en x_0 [55] de dérivée a. En [56], l'hypothèse entraîne, pour [57] $\neq 0$,

$$\frac{f(x_0 \text{ [58] } h) - f(x_0)}{\text{[59]}} = a + 0(\text{[60]}),$$

donc

$$\lim_{h \to \text{[61]}, h \neq 0} \frac{f(\text{[62]} + h) - f(\text{[63]})}{h} = a.$$

En fait, à l'origine de ce test se trouve la version espagnole du texte de J. Dixmier (*son livre a été traduit dans cette langue*) , version que nous avons utilisée dans un groupe de formation continue de professeurs mexicains. Cet extrait nous avait paru intéressant parce qu'il contient, sous un volume réduit, à la fois des aspects différents de la dérivée et des théorèmes (*très simples*) avec leur démonstration, autrement dit un échantillon de démarche mathématique. Mais après coup et au vu de quelques uns des résultats, nous avons été amené à constater que la manière de procéder à certaines suppressions dans les phrases symboliques était critiquable.Par exemple, nous avions supprimé, au lieu du seul trou qui porte ci-dessus le numéro 16, toute l'expression qui figure sous le mot "lim". Le verdict des réponses ne s'est pas fait attendre : "$h \to 0$", au lieu de l'expression complète "$h\to0$, $h \neq 0$", a été donné le plus souvent. De même, nous avions prévu un seul trou pour "f(x0+h)" *(voir le trou numéro 33 du texte ci-dessus)*, mais dans ce cas il n'y a guère eu de répercussion sur les réponses, qui ont été conformes à l'original pour leur quasi-totalité. Toutefois, nous nous adressions à des professeurs, pour lesquels les écritures présentées étaient très familières ; leurs habitudes d'encodage ont alors pris assez facilement le pas sur la consigne "un trou-un mot" dans les quelques cas litigieux. Mais qu'en aurait-il été avec des élèves novices sur le sujet ? D'où notre souci d'examiner attentivement l'application de la procédure de closure pour l'écriture symbolique. Le lecteur observateur aura remarqué le décalage du trou 59 : nous avons "sauté" le trait de fraction *(voir § 3, 6°)*.

Sans entrer dans le détail des résultats, que nous avons publiés par ailleurs ([P87]) et qui s'avèrent intéressants et valides malgré les quelques défauts signalés ci-dessus, indiquons ici l'intérêt des matrices de scores individuels. Selon les scores globaux, nous aurions classé nos professeurs en quatre groupes :

Groupe 1 *(taux dans notre population : . 25) :*
Très bonne compréhension, avec 2/3 de réussites ou plus.

Groupe 2 *(taux dans notre population : . 42) :*
Bonne compréhension, avec un taux de réussites entre 1/2 et 2/3.

Groupe 3 *(taux dans notre population : . 25) :*
Compréhension moyenne, avec un taux de réussites entre 1/4 et 1/2.

Groupe 4 *(taux dans notre population : . 08) :*
Difficultés de compréhension avec moins de 1/4 de réussites.

Mais les matrices de scores individuels, la matrice parfaite étant

	0	1
L	6	9
I	7	29

(il s'agit du texte espagnol et non de la version présentée précédemment) font apparaître d'une autre façon les résultats. Les minima que nous proposons pour témoigner d'une compréhension satisfaisante sont :

66% de réussite pour le score L0
50% de réussite pour le score L1
33% de réussite pour le score I1

aucun minimum n'étant fixé pour la catégorie I0. Ainsi, nous penserons à des difficultés sur le texte proposé lorsque l'un des minima suivants ne sera pas atteint.

	0	1
L	4	5
I		10

Matrice des minima

La même population repérée de cette manière donne lieu à la classification :

P1 (taux dans notre population : . 25) : Maîtrise du texte, tous les minima étant dépassés , le taux de réussite à I1 dépassant, lui, 50%.

P2 (taux dans notre population : .42) : Compréhension moyenne, certains minima étant juste atteints ou le taux de réussite à I1 étant compris entre 33% et 50%.

P3 (taux dans notre population : . 33) : difficultés pour l'enseignement du thème, certains minima n'étant pas atteints.

Il est intéressant de noter que si P1 coïncide avec le groupe 1 précédent, en revanche P2 diffère du groupe 2 et, conséquemment, P3 diffère de la réunion des groupes 3 et 4. Par exemple, un individu peut passer du groupe 2 à la catégorie P3 parce que son score L1 est faible, même si son score global est bon en particulier à cause d'un 100%, non significatif, sur le score I0.

Un résultat général qui nous avait frappé lors de cette étude, et que nous livrons ici en guise de conclusion didactique, est que même des professeurs de mathématiques ont pu sembler peu rompus à la lecture de textes scientifiques. Ce constat provient du peu de réussites observé sur les cas qui nécessitaient soit une anticipation un peu lointaine, soit un retour en arrière. Or c'est bien une caractéristique de la lecture scientifique que d'amener à *consulter* un texte et non simplement de le parcourir "linéairement", du début à la fin. Eventuellement, cette consultation gagne, dans le cas des mathématiques, à être menée en parallèle avec un travail personnel papier-crayon (*pour d'autre cas, comme l'informatique, le travail personnel mené en parallèle s'effectuera à l'aide d'instruments, comme l'ordinateur*). Pour certains membres de notre groupe de professeurs, la correction du test a presque été l'occasion d'une véritable découverte à ce sujet. Et il nous est alors apparu que le test de closure pouvait ne pas être seulement utilisé comme instrument d'évaluation de l'accès à des textes par des lecteurs, mais aussi comme un des moyens pour initier à la lecture scientifique.

ANNEXE

Matrice des maxima pour le texte du § 5

	0	1
L	7	12
I	16	28

Matrice des minima pour le texte du § 5

	0	1
L	4	6
I		10

Liste des mots du texte présenté au § 5

N°	Mot	Catégorie	N°	Mot	Catégorie	N°	Mot	Catégorie
1	une	L0	22	f	I0	43	en	L0
2	définie	I1	23	x0	I1	44	3	I1
3	de	L0	24	quand	L1	45	+	L1
4	point	I1	25	on	L1	46	→	I1
5	que	L1	26	0	I0	47	0	I0
6	x0	I0	27	-	L1	48	une	L0
7	lim	I1	28	=	I0	49	existe	I1
8	≠	I1	29	h	I1	50	que	L1
9	x0	I1	30	0	I0	51	=	I1
10	x0	I1	31	par	L0	52	a	I1
11	se	L1	32	égalité	I1	53	quand	L1
12	dans	L0	33	x0	I0	54	f	I1
13	+	L1	34	x0	I1	55	et	L1
14	admet	I1	35	+	L1	56	effet	I1
15	1	I1	36	est	I1	57	h	I1
16	→	I1	37	=	I1	58	+	L1
17	f	I0	38	ε	I1	59	h	I0
18	f	I0	39	α	I1	60	1	I1
19	1	I1	40	0	I0	61	0	I0
20	dérivable	I0	41	Corollaire	I1	62	x0	I0
21	f	I0	42	en	L0	63	x0	I0

REFERENCES

[DGP] R. DUVAL, Athanassios GAGATSIS, F. PLUVINAGE, 1987 Evaluation Multidimensionnelle de l'Activité de Lecture, Scientia Paedagogica Experimentalis, XXIV, 1, Gent (Belgique).

[G84] A. GAGATSIS, 1984, Préalables à une Mesure de la Compréhension, Recherches en Didactique des Mathématiques, 5.1, La Pensée Sauvage, Grenoble (France).

[P87] F. PLUVINAGE, 1987, Medidas de Comprension por el Test de Completacion, Cuadernos de Investigacion, CINVESTAV, Mexico.

GRAPHIQUES ET EQUATIONS :

L'Articulation de deux registres

R. DUVAL

La lecture des représentations graphiques présuppose la discrimination des variables visuelles pertinentes et la perception des variations correspondantes de l'écriture algébrique. Cette lecture est une démarche d'interprétation globale qui suppose une attitude contraire à la pratique épellative associant un point à un couple de nombres. Une description systématique des variables visuelles à prendre en compte dans la démarche d'interprétation globale est proposée. Les résultats de plusieurs observations montrent que la majorité des élèves de seconde ne les discriminent pas.

De nombreuses études ont déjà montré les difficultés de lecture et d'interprétation des représentations graphiques cartésiennes. Par exemple, la liaison entre le concept de pente(1) et la direction de la droite dans le plan n'est pas le plus souvent effectuée [6]. De même la confusion entre pente et hauteur semble fréquente [3]. On observe aussi l'impossibilité de trouver l'équation d'une droite en partant de sa représentation graphique, même dans les cas les plus élémentaires. Rien que pour les droites, l'articulation entre le registre des représentations graphiques et celui des équations ne semble pas établi même après un enseignement des fonctions affines.

La raison profonde de ces difficultés n'est pas à chercher dans les concepts mathématiques liés aux fonctions affines, mais dans la méconnaissance des règles de correspondance sémiotique entre le registre des représentations graphiques et celui de l'écriture algébrique. En effet, dans l'enseignement et dans certaines études didactiques on s'en tient au passage d'une équation à sa représentation avec construction point par point, et on oublie que *c'est le passage inverse qui fait problème*. Pour effectuer ce passage inverse *l'approche point par point* non seulement est inadéquate mais *constitue un obstacle.*

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.235-253) IREM de Strasbourg

(1) Dans le cadre de cette étude nous nous limiterons aux repères orthonormés. Sinon la notion de pente de vrait être remplacée par celle de coefficient directeur.

Pour le montrer nous allons successivement :

- présenter les *trois traitements hétérogènes* auxquels les représentations cartésiennes donnent lieu.
- expliciter les*variables visuelles pertinentes* qui correspondent aux caractéristiques significatives d'une écriture algébrique.
- illustrer notre analyse par quelques résultats d'une enquête menée à cet effet et aussi par l'explication d'erreurs typiques relevées dans d'autres études.

En l'absence d'une prise en compte des règles sémiotiques de correspondance, les représentations graphiques restent des représentations aveugles pour la majorité des élèves de seconde et au-delà....

I Les trois traitements des représentations graphiques

Face à une représentation graphique trois démarches très différentes sont possibles : elles ne prennent pas en compte les mêmes données visuelles du graphique et elles ne sont pas commandées par le même type de question.

1) *La démarche de* **pointage.**

C'est par cette démarche que l'on introduit et que l'on définit les représentations graphiques. Par référence à deux axes gradués un couple de nombres permet d'identifier un point (et, inversement, un point se traduit par un couple de nombres). Cette démarche associative reste limitée à des valeurs particulières et à des points marqués dans le plan repéré. Cette démarche est nécéssairement favorisée lorsqu'il s'agit de TRACER le graphique correspondant à une équation du premier degré, celui correspondant à une équation du second degré..., ou de LIRE les coordonnées d'un point intéressant (parce que point d'intersection avec l'un des axes, ou avec une autre droite, parce que maximum,...etc).

2) *Une démarche d'***extension** du tracé effectué.

Cette démarche correspond aux activités d'interpolation et d'extrapolation, lesquelles s'appuient sur ce qu'on a appelé les aspects producteurs et les aspects réducteurs des représentations graphiques [8]. Le plus souvent cette démarche d'extension reste purement mentale : elle ne donne pas lieu à des tracés complémentaires et explicatifs comme un changement local de la graduation des axes pour " agrandir " une partie du tracé.Il faut-souligner que cette démarche d'extension ne s'appuie plus sur l'ensemble fini des points marqués (l'intersection des lignes du papier millimétré, par exemple) comme dans le cas de la démarche de pointage; cette extension s'appuie sur l'ensemble infini des points potentiels, c'est-à-dire sur le fond homogène de la feuille, sur les intervalles entre les points marqués. Mais dans cette démarche, comme dans la précédente, on s'en tient aux données du tracé et on ne prend pas en compte les variables visuelles pertinentes de la représentation graphique. De même le traitement reste orienté vers la recherche de valeurs particulières, sans que l'on ait à s'arrêter sur la forme de l'écriture algébrique.

3) *Une démarche d'***interprétation globale** *des propriétés figurales*

L'ensemble tracé/axes forme une image qui représente un "objet" décrit par une expression algébrique.Toute modification de cette image qui entraîne une modification dans l'écriture de l'expression algébrique correspondante détermine une variable visuelle pertinente pour l'interprétation du graphique. Il est donc importarnt d'identifier toutes les modifications pertinentes possibles de cette image, c'est-à-dire de voir les modifications conjointes de l'image et de la forme de son écriture algébrique. Cela relève d'une analyse de congruence entre deux registres de présentation d'un objet ou d'une information. Avec cette démarche *nous ne sommes plus en présence de l'association "un point-un couple de nombres", mais de l'association " variable visuelle de la représentation-unité significative de l'écriture algébrique "*. Lorsqu'il s'agit de partir de la représentation graphique pour retrouver, par exemple, l'équation correspondante, ou pour utiliser le concept de pente ou celui de direction, c'est cette démarche d'interprétation globale qui devient nécessaire. Car le recours à la démarche de pointage devient ici totalement inopérant puisque, par définition, il détourne l'attention de toutes les variables visuelles. Et la pratique systématique de la démarche de pointage ne peut favoriser la démarche d'interprétation globale. Comme cette démarche est généralement négligée *dans l'enseignement*, car elle relève d'une analyse sémiotique des registres visuel et algébrique, on comprend que la majorité des élèves reste en deçà d'une utilisation correcte des représentations graphiques.

II Variables visuelles et unités symboliques significatives.

Une analyse de congruence exige la discrimination des unités significatives propres à chaque registre de présentation ainsi que l'examen des transformations implicites éventuelles requises pour changer de registre.

La discrimination des unités significatives propres à une expression algébrique est relativement évidente. Il y a :

les symboles relationnels (< , > , = ,.....)
les symboles d'opération ou de signe (+ , --)
les symboles de variable
les symboles d'exposant,de coefficient et de constante.

Dans une expression algébrique chaque symbole correspond généralement à une unité significative. Il y a cependant des unités significatives dont les symboles sont omis : le coefficient 1, le caractère " positif " des coefficients plus grands que zéro. Ainsi on n'écrit pas $y = +1x$, en revanche on écrit $y = -2x$. Le rappel de cette trivialité est important lorsqu'il s'agit de mettre en correspondance les variables visuelles pertinentes du graphique et les unités significatives de l'écriture algébrique.

La discriminination des propriétés figurales d'une représentation graphique est, en revanche, moins évidente. En reprenant certaines des variables visuelles définies par Bertin [1 pp 186-189], et en en précisant d'autres, nous distinguerons deux variables générales et trois variables relatives aux cas où le graphique est un tracé simple (droite ou parabole).

Les deux variables générales sont :

– l'implantation de la tache, c.à d. ce qui se détache comme figure sur fond : un *trait* ou une *zone*.
– la forme de la tache : le trait tracé, qu'il délimite ou non une zone, est droit ou est courbe. S'il est courbe il est ouvert ou fermé.

Les trois variables particulières correspondent à une simple modification de la configuration trait-tracé/axes orientés. Nous allons ici nous limiter au cas où le trait tracé est une droite. Une analyse tout à fait similaire peut être effectuée pour le cas où le trait tracé est une courbe ouverte comme la parabole. Les trois variables particulières sont :

Variables visuelles	**Valeurs des variables visuelles**
– le sens d'inclinaison du tracé :	- le trait *monte* de la gauche vers la droite - le trait *descend* de la gauche vers la droite. **Remarque** : la référence gauche droite est le sens normal du parcours visuel d'une page écrite en caractères latins).
– les angles du tracé avec les axes :	il y a *partage symétrique* du quadrant traversé - l'angle formé avec l'axe horizontal est *plus petit* que celui formé avec l'axe vertical - l'angle formé avec l'axe horizontal est *plus grand* que celui formé avec l'axe vertical. **Remarque** : lorsque la droite tracée ne passe pas par l'origine,il suffit de déplacer l'axe vertical, par exemple, jusqu'au point d'intersection de la droite avec l'axe horizontal.
– la position du tracé par rapport à l'origine de l'axe vertical :	- le tracé coupe l'axe y *au dessus* de l'origine - le tracé coupe l'axe y *au dessous* de l'origine - le tracé coupe l'axe y *à l'origine*.

La première des trois variables visuelles particulières peut donc prendre deux valeurs, la seconde peut en prendre trois et la troisième aussi trois. Nous avons omis deux cas, ceux dans lesquels la droite est parallèle à l'un des deux axes : il n'y a plus à prendre en compte les valeurs des variables précédentes, il suffit de lire la valeur du point d'intersection de la droite avec l'autre axe.

A chacune de ces huit valeurs des variables visuelles particulières correspond une unité significative dans l'écriture algébrique de l'équation de la droite : ce qui importe dans l'écriture y = ax + b, c'est le coefficient a et la constante b.

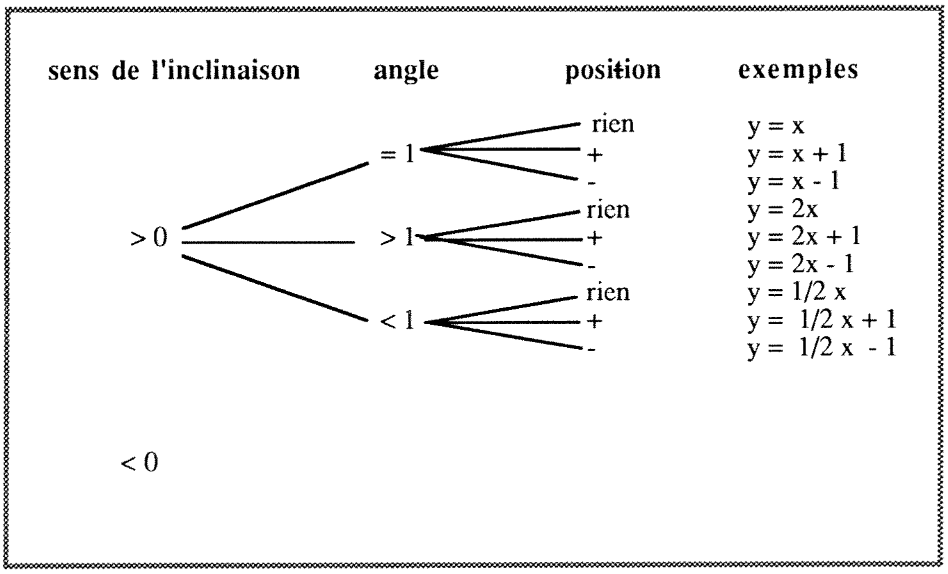
Variables visuelles	**Valeurs**	**Unités symboliques correspondantes**	
– sens d'inclinaison :	trait montant	coefficient >0	absence du symbole –
	trait descendant	coefficient < 0	présence du symbole –
– angles avec les axes :	partage symétrique	coefficient = 1	pas de coefficient écrit
	angle *plus petit*	coefficient < 1	
	angle *plus grand*	coefficient > 1	
– postion sur l'axe y :	coupe au dessus	on ajoute une constante	signe +
	coupe au dessous	on soustrait une constante	signe –
	coupe à l'origine	pas de correction additive	

A la simple lecture de ce tableau, limité au cas des droites, nous pouvons faire les remarques suivantes :

1) Le *concept de pente*, algébriquement traduit par le coefficient, *recouvre deux unités significatives différentes*, l'une définie par rapport au signe et l'autre par rapport à l'entier 1. Et ces deux unités significatives correspondent à deux variables différentes, respectivement le *sens de l'inclinaison* et *l'angle. Il n'y a pas congruence entre la direction de la droite dans le plan repéré et le coefficient qui détermine cette direction dans l'écriture de l'expression algébrique.* Car dans toute valeur de coefficient donnée (2,1/2,-2..) il faut dégager deux propriétés distinctes, relativement à 0 et relativement à 1.

2) Le coût très inégal des passages entre écriture symbolique et représentation graphique apparait ici de façon précise. Pour aller de l'écriture symbolique à la représentation graphique, on peut se contenter de la seule démarche de pointage : on donne des valeurs particulières à x, sans avoir à se préoccuper de leurs propriétés, pour trouver des couples de nombres, c'est à dire des points. Mais pour aller de la représentation graphique à l'écriture algébrique cela n'est plus possible : *il faut identifier chacune des valeurs des variables visuelles et les intégrer toutes.* Autrement dit le passage de la représentation graphique à l'écriture algébrique relève d'une interprétation globale. A la différence de la démarche de pointage, ou même de celle d'extension représentative, la démarche d'interprétation exige que l'on centre son attention sur un ensemble de propriétés et non plus sur des valeurs particulières prises une à une.

3) On voit que pour les droites non parallèles aux axes *il y a seulement 18 représentations graphiques qui soient différentes visuellement de façon significative*. A chacune de ces représentations correspond une équation particulière :



dans le cas de parallélisme à l'un des deux axes,il y a disparition de la variable référant à cet axe.

Une présentation explicite et systématique des variations visuelles significatives non seulement centre l'attention sur la correspondance entre représentation graphique et écriture algébrique,mais elle permet de trouver directement l'expression algébique de propriétés géométriques : perpendicularité ou parallélisme de deux droites par exemple. Il suffit en effet de *pratiquer la démarche expérimentale la plus classique : faire varier une unité significative de l'écriture en gardant toutes les autres constantes et voir ce qui se passe dans l'autre registre* (ou faire varier chaque variable visuelle en gardant les deux autres constantes et voir les modifications d'écriture). Ainsi, par exemple, l'opposition entre $y = x$ et $y = - x$ s'articule dans l'unité d'une image visuelle, et cette image se prête à des modifications qui ont leur contrepartie algébrique immédiate.

Cette analyse ne se limite pas évidemment au cas des droites. Pour revenir aux deux variables générales, mentionnées plus haut, nous pouvons indiquer les correspondances suivantes :

Variables visuelles	**Valeurs**	**Unités symboliques corresp.**
– implantation de la tache :	- zone	>,<,...
	- trait	=
– forme de la tache :	-trait droit	exposant de la variable = 1
	-trait courbe	exposant de la variable > 1

En tenant compte de la forme implicite ou de la forme explicite de l'écriture des fonctions nous pourrions intégrer d'autres caractéristiques visuelles importantes, comme le caractère ouvert ou fermé des courbes...(1) Sans développer ici cette analyse, nous pouvons simplement relever que ces variables générales, à la différence des variables particulières, correspondent à une modification intrinsèque de l'image.

Malgré les apparences une telle approche de l'articulation entre représentation graphique et écriture algébrique est absente des perspectives d'un enseignement mathématique. Ou-

(1) Ces possibilités d'extension de l'analyse de congruence nous ont été suggérées par F. Pluvinage

vrons, par exemple, un manuel récent qui frappe par la variété et par la richesse de ses représentations graphiques. Ce manuel présente un "herbier des fonctions usuelles" [7 p.323] dans lequel on semble mettre en avant l'articulation des deux registres, graphique et algébrique.

Mais, en regardant de près, on s'aperçoit que si la position du tracé et le sens de son inclinaison sont pris en compte, la variable visuelle de l'angle du tracé est omise. En outre, les deux unités significatives de la pente dans l'écriture de l'expression algébrique ne sont pas distinguées. Autrement dit la discrimination des variables visuelles et leur mise en relation avec les unités symboliques correspondantes sont en fait ignorées. L'écriture générale :
$y = ax + b$ est utilisée comme la base initiale de travail et non comme le terme d'une intégration cognitive résultant de la démarche expérimentale que nous évoquions plus haut.

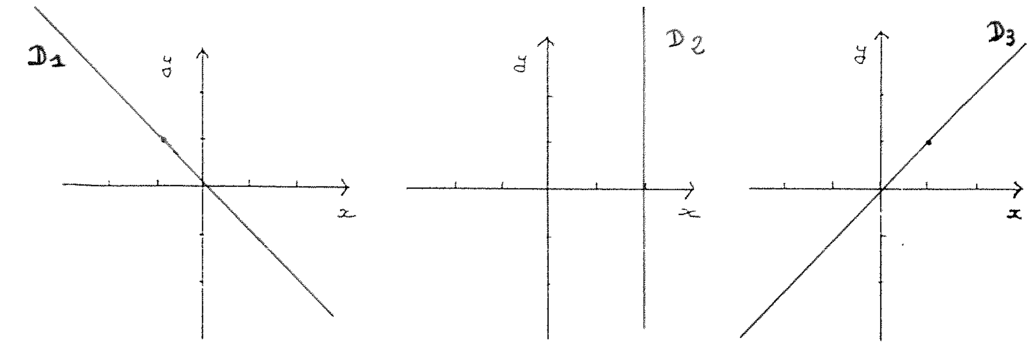
III Le syncrétisme de la perception des représentations graphiques chez les élèves.

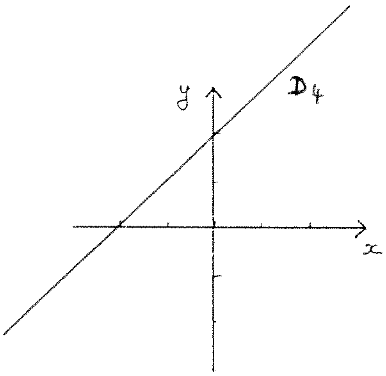
Il ne peut y avoir d'utilisation correcte des représentations graphiques cartésiennes sans discrimination explicite des variables visuelles pertinentes et sans une correspondance systématiquement établie entre les valeurs de ces variables et les unités significatives de l'écriture algébrique. En méconnaissant la spécificité et l'importance de la démarche d'interprétation globale, l'enseignement ne peut atteindre l'objectif d'une utlisation correcte des graphiques cartésiens par la majorité des élèves de seconde (15-16 ans), et les recherches didactiques se privent du moyen de comprendre la raison profonde des erreurs constatées.

1 *Variables visuelles particulières et représentation des droites*

Pour illustrer l'importance et la nature des difficultés rencontrées par la majorité des élèves, voici une courte épreuve de reconnaissance proposée à trois classes de seconde, l'année dernière au cours du premier trimestre (cfr.page suivante). On remarquera les différences avec la question du test sur les graphes de Kerslake, retenue par Herscovics dans son étude sur la construction de ce signification pour les équations linéaires [6 p.375]... La question du test n'est pas significative puiqu'elle ne propose aucune discrimination entre des droites dont les valeurs de variables visuelles sont communes sauf une, et puisqu'elle ne propose pas simultanément un choix entre plusieurs expressions algébriques proches. Sans discrimination de toutes les valeurs visuelles et des variations d'écriture correspondantes, il n'y a pas à proprement parler de reconnaissance d'une droite ou de son équation.

On désigne pas x l'abscisse et par y l'ordonnée d'un point M du plan repéré. Indiquer à quelle expression algébrique (E1, E2, ... ou E10) chacune des droites D1, D2 ... D5 correspond.





E 1 : $y > x$	E 6 : $y = x+2$
E 2 : $y \geqslant x$	E 7 : $y = x-2$
E 3 : $y = x$	E 8 : $y = 2x$
E 4 : $y = -x$	E 9 : $y \geq x+2$
E 5 : $y = 0$	E 10: $x = 2$

R E P O N S E S

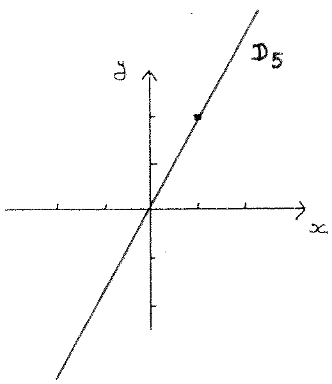
La droite D1 correspond à l'expression: ....

" D2 " " ....

" D3 " " ....

" D4 " " ....

" D5 " " ....



Sur un total de 105 élèves,

75	ont correctement associé	$y = x$	à D3
59		$y = -x$	à D1
68		$x = 2$	à D2
26		$y = x + 2$	à D4
39		$y = 2x$	à D5

59	ont trouvée et donc discriminé	$y = x$ et $y = -x$
23		$y = 2x$ et $y = x + 2$

16 ont réussi les cinq items
14 ont échoué aux cinq items

Parmi les erreurs dominantes nous avons relevé :

- 21réponses $y = x$ pour D1. Ces élèves n'ont pas associé l'inclinaison descendante du tracé au symbole " - " du coefficient.

- 23 réponses $y = -x$ pour D4. Ces élèves ne retiennent que la propriété figurale de l'intersection de D4 avec la branche négative de l'axe x.

- 14 réponses $y \geq x$ pour D5. Ces 14 élèves s'efforcent de traduire le fait que dans la quadrant supérieur droit chaque valeur de y est plus grande que la valeur de x. Ces élèves s'en tiennent manifestement à une démarche de pointage : on prend plusieurs points sur la droite, on passe aux couples de nombres associés à ces points et on s'efforce de définir une relation caractérisant ces couples.

Nous avons fait passer cette épreuve de reconnaissance dans deux autres classes de seconde après un enseignement des fonctions affines et nous avons enregistré les résultats suivants, pour un total de 60 èlèves :

47	ont correctement associé	y = x	à D3
48		y = -x	à D1
49		y = 2	à D2
24		y = x + 2	à D4
27		y = 2 x	à D5

15 ont trouvé y = x + 2 et y = 2 x
14 ont réussi les cinq items.

Dans les deux populations 1/4 seulement des èlèves distinguent y =x+2 et y = 2x, et *moins d'un élève sur cinq réussit les cinq items.* Mais le résultat le plus spectaculaire est que sur les 165 élèves de seconde ayant passé cette épreuve, *seulement 99 c'est à dire 60% voient une différence de sens d'inclinaison de la droite associée à la différence entre* y = x et y = - x .

Nous n'allons pas épiloguer sur ces résultats. Ils montrent de façon brutale le fossé qui sépare la démarche de pointage et la démarche d'interprétation globale. Cette dernière exige une discrimination de toutes les variables visuelles pertinentes, ce qui n'est ni requis ni induit par la construction des droites à partir de leur équation. Et, sans cette démarche d'interprétation globale, il n'y a pas d'utilisation des graphiques possible pour donner une valeur intuitive à l'écriture algébrique, pour exprimer analytiquement des propriétés géométriques, ou, a fortiori, pour interpréter des graphiques dont les axes représentent des grandeurs hétérogènes (temps, distance parcourue, vitesse, etc,...).

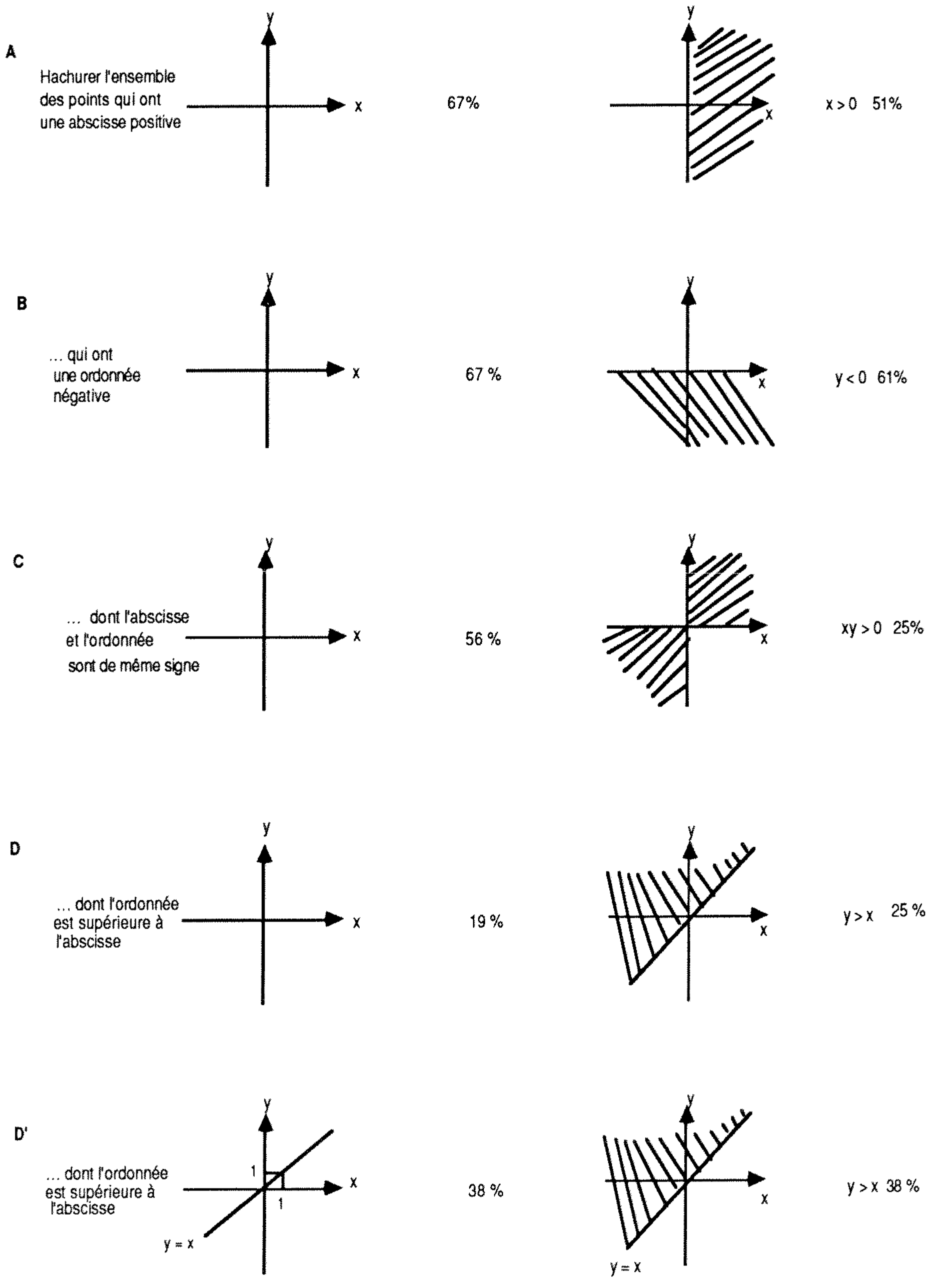
2 *Variables visuelles générales et représentation des relations*

Hajri a proposé des situations élémentaires dans lesquelles il faut prendre en compte les variables générales.

Il a demandé à des élèves de 3ème et de seconde de hachurer sur un plan repéré :

- l'ensemble des points qui ont une abscisse positive
- l'ensemble des points qui ont une ordonnée négative
- l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe
- l'ensemble des points dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse.

Nous avons repris ce type de tâche en le modifiant. Ayant hachuré sur le plan repéré les zones correspondantes aux expressions ci-dessus, nous avons demandé de choisir parmi plusieurs expressions algébriques, $y = x$, $y > x$, $y < x$, $y = -x$, $xy \geq 0$, $x > 0$, $y < 0$, ... celles représentées par chacune des zones hachurées. Ce type de tâche a été proposé à des élèves de seconde. Nous avons aussi proposé les questions posées par Hajri en introduisant la variation suivante : devant l'importance de l'échec enregistré dans le travail d'Hajri pour l'expression "l'ensemble des points dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse" nous avons proposé deux versions, l'une avec la droite $y = x$ tracée et désignée par son équation (Ligne D' de la page suivante), l'autre sans aucune indication comme dans le questionnaire d'Hajri (ligne D de la page suivante). Nous n'avons pas pris en compte les problèmes de frontière, c'est-à-dire la différence entre $y > x$ et $y \geq x$. Voici les résultats que nous avons enregistré pour 105 élèves de seconde.


A
Hachurer l'ensemble
des points qui ont
une abscisse positive
y
x
67%
x > 0 51%
B
... qui ont
une ordonnée
négative
67 %
y < 0 61%
C
... dont l'abscisse
et l'ordonnée
sont de même signe
56 %
xy > 0 25%
D
... dont l'ordonnée
est supérieure à
l'abscisse
19 %
y > x 25 %
D'
... dont l'ordonnée
est supérieure à
l'abscisse
1
y = x
38 %
y > x 38 %

Sur le premier type de tâche (la moitié gauche du tableau ci-dessus) nous enregistrons le même ordre de réussite et donc les mêmes écarts de réussite que chez Hajri [4, p. 95-96]. Si nous comparons les écarts de réussite entre les deux types de changement de registre demandés, nous remarquons que :

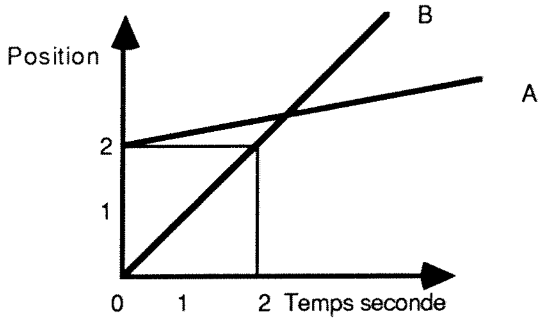
- Il y a congruence sémantique pour les cas A et B dans les deux tâches : l'expression discursive, la représentation graphique et l'écriture algébrique donnent la même information à partir des mêmes éléments identificateurs : abscisse positive (branche positive de l'axe x), ordonnée négative (branche négative de l'axe y). Ces présentations qui relèvent de trois registres différents sont congruentes. Les réussites pour les quatre questions sont du même ordre de grandeur.

- Il y a encore congruence sémantique pour la première tâche du cas C, mais *plus du tout pour la seconde.* Pour reconnaître l'équivalence de la présentation algébrique avec les deux autres présentations, il faut reconvertir la base du codage de l'expression : il faut passer par l'équivalence "branches de même signe ⇔ le produit des coordonnées est positif". Quand on passe de la première à la deuxième tâche, le taux de réussite chute de plus de moitié.

- Il n'y a plus de congruence sémantique dans le cas D : la relation n'est plus exprimée discursivement ou algébriquement en fonction des éléments identificateurs du graphique (branche positive de l'axe x, ...). Le taux de réussite est donc très bas. En revanche quand on réduit la non-conguence comme nous l'avons fait avec la version D', le taux des réussites double.

3 *L'interprétation des des graphiques représentant des grandeurs hétérogènes.*

Dans [1 p.371-372], J. Clement signale l'erreur type "prendre la hauteur pour la pente" dans la situation suivante:



à l'instant t = 2secondes, la vitesse de l'objet A est-elle plus grande, moins grande ou égale à la vitesse de l'objet B ?"

Les observations et les analyses précédentes nous éclairent sur ce type d'erreur souvent mentionné :

1) la formulation de la question oriente vers une démarche de pointage. Si la question avait été formulée de façon à centrer l'attention sur la prise en compte d'intervalles et non sur la position de deux points pour $x= 2$, la proportion de ce type d'erreur pourrait diminuer : durant les deux premières secondes, est-ce la vitesse de l'objet A qui a le plus augmenté, ou celle de l'objet B ?

2) Mais là n'est pas la raison profonde de ce type d'erreur. Si l'on revient à notre analyse des variables visuelles, on remarque que la hauteur d'un point par rapport à l'axe vertical n'est pas une valeur figurale pertinente : l*a hauteur résulte des valeurs prises par deux variables visuelles différentes,* à savoir l'angle du tracé et la position du tracé. Et sur le graphique ci-dessus, *la comparaison des angles des tracés A et B ne pouvait être faite qu'en neutralisant les valeurs différentes de position.* Ce que révèle cette erreur type n'est pas d'abord la difficulté du concept de pente, mais l'absence de discrimination des variables visuelles pertinentes dans le registre même des représentations graphiques.

Il est également intéressant de remarquer, dans l'expérience de construction de signification des représentations graphiques rapportée par Herscovics, que :

- ce qui est décrit comme une construction intuitive est tout simplement une démarche de pointage [6 p.36]

- la construction relationnelle ne prend jamais en compte l'articulation entre les variables visuelles du graphique et les unités significatives de l'écriture symbolique. Le registre de la représentation et celui de l'écriture des formules sont travaillés séparément et de façon syncrétique [6 p.366-371].

Rien d'étonnant alors qu'il y ait échec à la question 3 présentée plus haut, et pourtant non discriminante, lors du test de juin [6 p.376-377]. Cette expérience a ignoré les problèmes spécifiques à l'articulation de deux registres différents d'information.

CONCLUSION

L'interprétation des représentations graphiques cartésiennes dépend d'une identification précise de *toutes les valeurs des variables visuelles pertinentes* et de la reconnaissance qualitative des unités d'écriture symboliques qui y correspondent. Pour la grande majorité des élèves cet apprentissage ne se fait pas par le seul entraînement à des exercices de construction dans le plan repéré, ni par des tâches de lecture mettant en jeu la règle d'association point-coordonées. La majorité des élèves en reste donc à une approche syncrétique, et inopérante, sans réelle valeur intuitive, des représentations graphiques.

Pour effectuer un apprentissage spécifique, il est important de distinguer deux types de situations où l'on utilise des représentations graphiques :

- celles où le recours aux graphiques reste dans le cadre d'une étude purement mathématique : ce sont alors des relations entre nombres qui sont représentées.

- celles où le recours se fait dans un cadre qui n'est plus seulement mathématique : ce sont alors des relations entre grandeurs de nature différente qui sont représentées (temps, distance, vitesse,...).

Au vu des analyses précédentes, il apparaît qu'un apprentissage de la démarche d'interprétation globale ne peut pas faire l'économie d'une étude purement mathématique. Car c'est dans ce cadre que l'articulation entre valeurs des variables visuelles et propriétés conceptuelles relatives à ces valeurs peut être montrée pour elle-même. La signification des graphiques cartésiens, et pas conséquent leur lecture, dépend de la perception de cette articulation. Lorsque le graphique représente des grandeurs hétérogènes, la démarche d'interprétation globale se double d'une interprétation des grandeurs en présence.
La présentation d'un phénomène physique, économique ou biologique donne peut être un intérêt plus grand pour les graphiques, mais cette présentation ne facilite pas l'appréhension du fonctionnement sémiotique d'un registre, elle la présuppose au contraire.
De ce point de vue le questionnaire sur les graphes utilisé dans l'enquête de K. Hart et repris dans le "Chelsea Diagnostic Mathematics Tests " appelle beaucoup de réserves [5, 2]. Presque toutes les questions se situent dans un cadre non mathématique exigeant l'interprétation de grandeurs hétérogènes, et les rares questions qui se placent dans le cadre mathématique restent en deçà d'une tâche réélle de discrimination des variations visuelles et des variations correspondantes d'écriture. Pour avancer, les recherches sur les représentations graphiques doivent s'engager dans une autre voie.

REFERENCES

[1] **J.BERTIN**, 1977 *La Graphique et le traitement graphique de l'information* Paris Flammarion.

[2] *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests* , NFER-NELSON, 1984.

[3] **J. CLEMENT**, 1985 Misconceptions in Graphing, in *P. M. E. 85,* vol., pp 369-375.

[4] **H. HAJRI**, 1986 *Perception des relations dans le plan repéré* — Thèse 3ème cycle, Publication IRMA, Strasbourg.

[5] **K.M. HART,** 1981 *Children's Understanding of Mathematics : 11-16* London,John Murray .

[6]**N.HERSCOVICS** Constructing Meaning for linear Equations;a problem of Representation, in *R. D. M.* 1980 vol.1.3 pp 351-383.

[7]*Mathématiques 2ème* Paris, Casteilla ,1986.

[8] **J. ROGALSKI,** 1981 Caractères réducteurs et producteurs des représentations graphiques des fonctions. Séminaire de didactique des Mathématiques, Strasbourg, Décembre.

UNE MÉTHODE D'APPRENTISSAGE FONDÉ SUR LE TATONNEMENT EXPERIMENTAL DE L'APPRENANT

J-C RÉGNIER

Le "tâtonnement expérimental" est, selon C. Freinet (1896-1966) un processus sur lequel se fonde tout apprentissage. Nous cherchons à expliciter ce processus dans le cadre de l'enseignement des mathémaqtiques en classe de Seconde de Lycée. Pour cela, nous avons élaboré une séquence didactique portant sur la notion de "fonction" de telle sorte qu'elle favorise une démarche de "tâtonnement expérimental" chez les élèves. Dans cet article, nous exposons les premiers éléments de notre réflexion en même temps que nous présentons la séquence didactique et les premiers résultats de l'expérience à laquelle elle nous conduit.

Pour bon nombre d'enseignants de mathématiques s'adressant à des adolescents lycéens dans le cadre actuel du système scolaire, organiser un enseignement efficace et agréable pour les élèves, et aussi pour eux-mêmes, demeure un souci constant et fixe un but. Pour l'atteindre chacun recourt à des stratégies plus ou moins personnelles.

La mise en place d'une méthode d'apprentissage "fondé sur le tâtonnement expérimental de l'apprenant " participe de ce projet. Afin de dépasser le simple niveau des convictions personnelles, nous avons recherché l'explicitation d'une théorie donnant un sens à cette notion et vérifiable à l'épreuve des faits. En quelque sorte, il s'agit pour nous d'analyser certains présupposés qui guident notre action pédagogique, d'en examiner la pertinence, d'en mesurer l'efficience et d'en préciser les conditions requises.

Au cœur de notre problématique, il y a ce que nous appelons le "TATONNEMENT EXPERIMENTAL". Cette notion a été développée par C. Freinet et adaptée – en particulier par E. Lémery – aux situations d'apprentissage des mathématiques en collège. Elle nécessite une réflexion et une articulation avec d'autres notions comme celles "d'erreur", de "réussite", "d'acte réussi", de "trace", "d'expérimentation", ...

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1 (1988) (p.255-279) IREM de Strasbourg*

Dans le cadre de cette "théorie" de l'apprentissage fondé sur le tâtonnement expérimental de l'apprenant, nous avons réalisé une séquence didactique portant sur "les fonctions en classe de Seconde de lycée". C'est cette séquence que nous présentons ici . Pour bien situer cette séquence, nous exposerons d'abord la théorie sur laquelle elle s'appuie et nous donnerons quelques résultats observés lors de la phase d'évaluation formative diagnostique de départ ainsi que ceux recueillis dans l'exploration du champ représentatif des élèves.

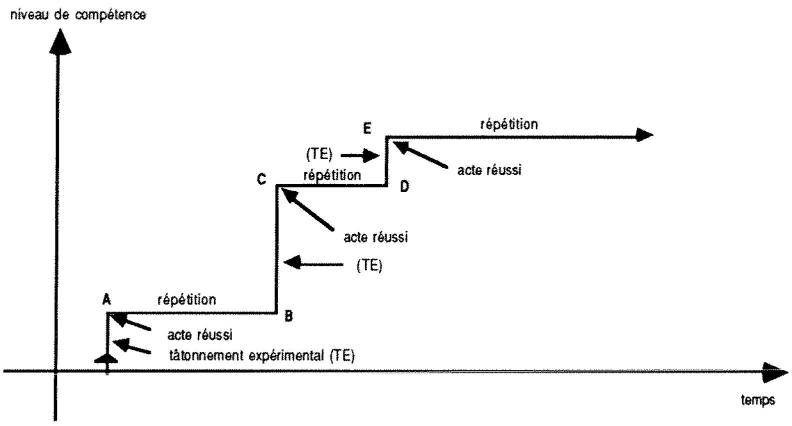
I Le "tâtonnement expérimental" selon Edmond Lemery

Dans son ouvrage "Pour une mathématique populaire" [L1] E. Lemery, professeur de mathématiques en collège, a consigné les résultats d'une longue réflexion issue de nombreuses observations conduites depuis plus de vingt ans dans ses classes. Sur la base du recueil de nombreuses "libres recherches d'adolescents au collège" il rapporte un témoignage vécu et vivant sur une opérationnalisation possible des idées de Freinet, dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Il y décrypte ses observations sur des travaux d'élèves, à l'aide d'une grille de lecture élaborée à partir des principes de Freinet. Ce qui nous intéresse particulièrement, c'est l'enrichissement du modèle proposé par Freinet décrivant le processus d'apprentissage fondé sur le tâtonnement expérimental.

Pour le voir, reprenons le premier schéma de "l'escalier" de Freinet, dans sa version adaptée aux apprentissages scolaires, rapporté dans l'ouvrage "la méthode naturelle" [F1].

"A partir du *premier acte réussi par tâtonnement expérimental* (A), l'individu répète cet *acte* jusqu'à ce que la *trace* soit creusée d'une façon indélébile, qu'elle soit devenue *mécanique et technique de vie* (B). Le *temps* de cet *exercice* varie avec la *perméabilité à l'expérience*, c'est-à-dire *l'intelligence* . Lorsque la *maîtrise mécanique de l'acte est acquise* , un nouveau tâtonnement expérimental conduit à un second acte réussi (C), qui, à son tour, va se répéter jusqu'à *l'automatisme* (D), puis laisser la place à d'autres tâtonnements".

Cette description est illustrée par le dessin ci-après :



E. Lemery propose ensuite un second schéma, qui fait apparaître des facteurs occultés par le schéma de Freinet. Il applique ce modèle tant à l'individu apprenant qu'au groupe d'apprenants.

Phase n°	Description
1	L'individu part d'un acquis et d'un perçu. Un évènement, un besoin, l'expérience des autres (imitation), une situation problématique à résoudre déclenche le processus.
2	L'action s'engage dans une direction selon des hypothèses prometteuses jusqu'au moment où s'exerce "une critique"
3, 4, 5, 6	ce peut être : - une critique des faits apportés par le phénomène, la nature, la non réponse - une critique des personnes apportées par les exemples ou l'expérience des autres (élèves), par l'enseignant (part aidante du maître), par la production du groupe. Elle a pour effet de modifier, en général, la direction de recherche.
7	L'information et la connaissance interviennent dans le processus.
8	Ces "approximations successives" s'enchaînent jusqu'à ce qu'un but ou une "loi" soient atteints. C'est l'acte réussi.
9	On atteint alors le palier de renforcement par la répétition mécanique ou la répétition-intégration avec évolution.
10	Cette nouvelle "loi" peut, elle, être source de nouvelles expériences tâtonnées qui sont soit une *correction* , soit un *affinement* , soit un *enrichissement* de cette loi.

A l'issue d'une telle démarche oscillatoire, l'intégration de cette nouvelle "loi" constitue un enrichissement du savoir de l'individu. En ce sens, on peut dire qu'il s'agit d'un processus d'apprentissage. Enfin ce modèle donne aussi un sens à la notion de "mathématisation" du point de vue de l'apprenant.

II Le "tâtonnement expérimental" selon notre point de vue

Certes, sur le plan de la conviction militante, les propositions de Freinet comme celles de Lémery, nous satisfont suffisamment pour orienter et guider efficacement notre action quotidienne d'enseignant. Mais il n'en est plus de même quand nous nous situons dans le champ des questionnements de la "didactique des mathématiques". Ce questionnement générateur du doute scientifique, induit un désir d'y voir plus clair et de reculer les limites des incertitudes. Le modèle "oscillatoire" de Lémery nous paraît déjà plus satisfaisant que celui de "l'escalier" de Freinet. Aussi le prendrons nous comme point de départ.

Que pouvons-nous entendre par "tâtonnement expérimental" dans le cadre particulier de notre recherche où l'acteur principal du "tâtonnement" n'est autre qu'un apprenant, adolescent et lycéen ?

En présence d'une circonstance nouvelle ou d'un problème nouveau, cet individu va se mettre à tâtonner, c'est-à-dire, partant de ses acquis actuels inadéquats pour apporter automatiquement une solution satisfaisante, il va essayer selon divers chemins de produire une réponse. Ces essais se réalisent sur des objets concrets ou abstraits, sur des actions concrètes ou abstraites. Ils peuvent être latents ou manifestes et perceptibles par un observateur.
Ce tâtonnement est régulé par un ensemble de facteurs qui peuvent avoir un caractère soit contingent, soit nécessaire, soit encore aléatoire.
De la part de l'apprenant, ce tâtonnement résulte d'une *intention* d'action qui oriente le fonctionnement et détermine la coordination des mécanismes.
En quoi ce tâtonnement est-il plus expérimental qu'empirique ?

Certes c'est l'expérience qui guide l'action et mène à un but fixé par un besoin. Mais ce n'est là qu'un aspect du tâtonnement et le processus ne laisse pas l'individu à ce niveau. En effet, le caractère expérimental provient du fait que l'individu "réfléchit" et "raisonne" tout en tâtonnant. Partant toujours d'un acquis (en tant que "sujet connaissant"), il formule plus ou moins explicitement une foison de questions plus ou moins organisées. Cette explicitation traduit la

"réflexion" du besoin en une problématique. Le choix d'une question centrale avec une éventuelle aide extérieure venant d'un autre apprenant, d'un groupe, d'un enseignant ou d'un outil, oriente alors la recherche dans une direction. En fonction de ses acquis antérieurs mais aussi d'éléments contingents, nécessaires ou aléatoires, il émet des hypothèses qui constituent une anticipation des solutions possibles, relatives à la question. C'est alors que la mise en œuvre de procédures de contrôle va lui permettre de sélectionner les "bonnes" solutions. Puis de nouveau l'individu retourne à la question initiale, enrichie des informations issues de cette première boucle, pour s'engager dans une seconde boucle. Ce processus circulaire ou plutôt spiralé fonctionne jusqu'à ce que l'individu prenne la décision de s'arrêter soit pour des raisons internes (abandon, renoncement, satisfaction) soit pour des raisons externes (adéquation de la réponse à la demande, critère d'arrêt imposé).
Les effets psychologiques des résultats de ce contrôle et des expériences qui lui sont attachées, ont néanmoins un caractère ambivalent qui intervient dans la décision de l'arrêt. Ils peuvent engendrer soit une inhibition, soit une facilitation, proactives ou rétroactives. L'identification de la nature de ces effets sur un individu semble être un acte particulièrement difficile et délicat. C'est pourtant à ce niveau que l'enseignant a un rôle important à jouer dans sa relation à l'apprenant. Le dispositif pédagogique qu'il élabore, doit lui permettre d'en tenir compte.

C'est aussi à ce niveau que la notion "d'erreur" intervient. Le statut qu'elle acquiert et la signification qu'elle prend pour l'apprenant paraissent constituer un des déterminants du processus. Les effets ne semblent vraisemblablement pas identiques si l'erreur est vécue comme une "faute" ou seulement comme un "élément inexact dans certaines opérations", "une chose fausse par rapport à une norme", "une simple différence entre production et celle attendue dans un modèle ou éventuellement dans la réalité".

Pour nous, l'erreur n'est le fruit ni d'une "lacune" ni d'un "manque de travail" (au sens habituel), ni une quelconque "violation d'une règle imposée par un code, conduisant à une attitude répréhensible et regrettable". L'erreur est le résultat de la mise en œuvre de procédures inadéquates et non pertinentes dans une situation-problème, de procédures non conformes aux modèles rationnels attachés au problème.

Le tâtonnement expérimental constitue donc d'une certaine manière un ensemble de techniques d'investigation et de démarches de réflexion que se construit un individu avec l'aide d'un enseignant, d'un pair ou d'un outil. La production de bonnes solutions et ces solutions elles-mêmes déterminent de nouvelles connaissances pour l'individu, qui viennent enrichir ses acquis initiaux par restructuration.

Quel est le sens de cet "acte réussi" qui produit du savoir pour l'individu ?

La notion *d'acte réussi* nous reporte au couple "réussite/échec". Là nous avons affaire à deux termes inséparables, aux acceptions multiples, fortement connotés, porteurs d'une lourde charge affective. Si on peut considérer logiquement l'échec comme une simple non-réussite, il n'en est pas de même sur les effets psychologiques.
Un échec place l'individu dans une situation qui lui impose le choix d'une des trois conduites suivantes :

- recommencer l'acte selon la même direction
- recommencer l'acte en prenant une autre direction
- abandonner l'acte et renoncer à l'atteinte du but.

Dans le cadre scolaire, l'expression "échec scolaire" évoque souvent l'image d'un individu isolé, parfois même humilié par ses insuccés accumulés, manifestant une incapacité à affronter les tâches qui lui sont demandées, et qui plus est, réprimandé par sa proche famille. La cause dominante de cet "échec global" est, selon notre opinion, l'accumulation d'échecs ponctuels non dépassés. Il peut être aussi dans certains cas la conséquence d'une conduite d'échec qui fait que l'individu, persuadé qu'il ne peut qu'échouer, échoue effectivement là où il aurait dû réussir ou bien encore conserve un sentiment d'échec là où il a réussi. Rétroactivement, l'apparition de cette conduite d'échec peut, elle aussi, résulter d'un cumul d'insuccès ponctuels.

Pour notre part, nous considérons *l'échec* en tant que phénomène ponctuel dont il convient d'en relativiser les circonstantces. Dans le cadre restreint de notre étude, nous retenons encore les deux catégories que nous avons explicitées dans d'autres travaux (R.4). Ainsi avons-nous distingué "échec par erreur" et "échec par non-réponse". Quant à la réussite, c'est-à-dire l'aboutissement au résultat adéquat, elle ne soulève pas des difficultés de l'ampleur de celles qu'induit l'échec. Force est de constater, par exemple, que face à un échec, l'individu s'investit dans des processus de justification et de simulation visant à se dissimuler à lui-même cet échec. Un tel comportement ne s'observe pas face à la réussite qui induit chez l'individu un sentiment de satisfaction, générateur de l'envie de prolonger ou de renouveler son action.

Les effets négatifs d'une réussite ponctuelle s'observent au travers de deux types de conduite désignés par les termes de “sous compréhension” et de “compréhension partielle” On peut aussi rencontrer le cas d'individus qui ayant réussi, s'en tiennent là et se reposent sur leurs lauriers.

Quoi qu'il en soit, l'acte réussi s'avère avoir un retentissement beaucoup plus positif que l'acte échoué, sur l'individu. On observe en général que le niveau d'aspiration s'élève après un succès mais s'abaisse après un échec. Toutefois, pour l'individu, l'échec devient positif dès lors qu'il est une prise de conscience intellectuelle de sa propre responsabilité et que tout se mobilise en lui pour surmonter et dominer cet échec. Ce changement de perspective est fortement dépendant du statut attribué à l'erreur dans le processus d'apprentissage. Il s'appuie sur la distinction profonde entre la *faute* et *l'erreur*. Le sentiment de faute génère la culpabilisation et l'effet attendu est le repentir alors que dans cette optique, le sentiment d'échec génère une prise de conscience objective et l'effet attendu est la remise en cause. Nous pensons que le repentir s'accompagne d'une soumission aux normes et induit la passivité alors que la remise en cause participe d'une sorte de révolution culturelle et entretient une activité mentale nécessaire au développement cognitif.

Qu'est-ce qui différencie ce tâtonnement expérimental et la démarche scientifique expérimentale ?
Si globalement la différence n'est pas sensible, il nous semble qu'elle existe néanmoins par au moins deux aspects :

– le premier est ordonné aux finalités : le tâtonnement expérimental est un moyen dont se saisit l'apprenant pour accroître son champ d'action à l'intérieur d'un domaine déjà exploré et maîtrisé du savoir, alors que la démarche expérimentale scientifique vise à accroître ce savoir en repoussant les limites de sa vérité d'une époque, en la précisant et en l'ajustant.

- le second est ordonné à la transparence du fonctionnement : la démarche expérimentale scientifique se réalise selon des protocoles explicites qui en assurent une certaine transparence et essentiellement sa reproductibilité alors que le tâtonnement expérimental s'effectue selon des processus intérieurs individuels difficilement accessibles à un observateur extérieur.

Une méthode d'apprentissage fondé sur le tâtonnement expérimental est donc une méthode qui permet à l'individu apprenant de s'engager *intentionnellement* dans ce processus pour parvenir à l'objet d'apprentissage.

Dans le cadre restreint de la classe, lieu de notre étude, cette intentionalité qui exprime un besoin motivant l'individu, nous interpelle. Les objets d'apprentissage offerts par le savoir mathématique et déterminés institutionnellement au travers des programmes officiels d'une part, et par la formation universitaire des professeurs de mathématiques d'autre part, n'ont aucune raison apparente d'être des objets naturels de désir spontané, suscitant un besoin chez les lycéens. Et si toutefois quelques élèves éprouvent ces besoins et les manifestent au travers de demandes orientées vers des objets mathématiques, il nous semble que cela tire son origine moins de la recherche pour satisfaire ces pulsions que de contraintes exogéniques de nature socio-culturelle ou socio-économique.
Dans ces conditions, que devient la “libre recherche” ?
Dans la situation idéale attachée à nos principes pédagogiques, les problèmes sont apportés dans la classe par les élèves eux-mêmes. Le fait de les poser ainsi témoigne du déclenchement d'un processus de recherche individuelle ou collective. C'est ce que nous appelons la “libre recherche”. Elle n'exclut nullement la “part du maître”. Celui-ci intervient non pas a priori, mais a postériori à la demande de l'élève ou de son propre chef pour contrôler les productions lorsqu'elles atteignent un stade avancé, pour apporter une éventuelle contradiction ou pour guider, relancer, encourager en cas de blocage.Toutefois, au cours des douze années scolaires écoulées, ce fait s'est avéré relativement rare en classe de Seconde. Disons suffisamment peu fréquent pour qu'une telle pratique ne soit pas considérée comme facilement généralisable sans condition particulière.

Par ailleurs cette pratique n'est pas sans risque : les problèmes posés peuvent s'avérer d'une complexité telle que les obstacles vont s'accumuler et réduire l'intérêt initial et l'enseignant ne disposera pas des moyens nécessaires pour relancer le processus de recherche dans une voie prometteuse, faute de compétence suffisante. Ponctuellement, cette situation ne serait pas grave mais sa répétition excessive provoquerait une dérive de la méthode vers des buts contraires aux principes fondateurs.

C'est pourquoi, dans la situation habituelle, c'est l'enseignant qui apporte les situations-problèmes en classe. Il les aura choisies en fonction d'une pluralité de critères plus ou moins explicites.Toute la difficulté réside alors dans la dévolution de cette problématique, de l'enseignant vers les élèves. Cela nécessite une phase d'appropriation de cette problématique par les élèves durant laquelle l'enseignant tient le rôle prépondérant de guide et d'incitateur. Ce rôle est maintenu jusqu'à ce que les élèves s'engagent dans la recherche et poursuivent d'une manière autonome les investigations. C'est pourquoi l'expression "libre recherche" est remplacée par celle de "recherche guidée". Dès que les élèves se sont saisis complètement du problème, on se retrouve dans des conditions voisines de celles de la "libre recherche" et les procédures mises en œuvre sont celles du tâtonnement expérimental. La prépondérance du rôle de l'enseignant réapparaît dans l'extraction des productions des recherches des élèves, les notions, les concepts et les méthodes qui correspondent aux buts et aux objectifs cognitifs de la classe. Cette action est facilitée dans la situation "recherche guidée" puisque l'enseignant aura choisi des problématiques en fonction d'objectifs fixés, ce qui lui permet de conserver une certaine maîtrise de la situation.

En les circonstances présentes et en notre qualité d'enseignant de mathématiques, nous nous retrouvons bel et bien devant une problématique du champ de la didactique des mathématiques sans pour autant en nier le caractère éminemment interdisciplinaire (psychologie, biologie, sociologie, sciences de l'éducaiton, histoire et épistémologie des mathématiques).

Notre travail consiste pour une part à identifier un maximum de variables didactiques et de les éprouver en figeant au mieux les autres paramètres. Pour répondre à ces exigences nous avons élaboré un premier outil : une séquence didactique autour de la notion de "fonction" en classe de seconde. Cette élaboration fait appel à des procédures qui relèvent de "l'ingénierie didactique". Cette séquence a ensuite été expérimentée en classe de Seconde au cours des années scolaires 85/86 et 86/87. Il s'agit de classes où l'auteur de ces propos enseigne. Ceci nous place dans une situation d'observateur impliqué qui nécessite le recours à des protocoles adéquats. Cette séquence didactique correspond à une tentative d'opérationnalisation de la méthode d'apprentissage fondé sur le tâtonnement expérimental. Sa mise en pratique vise à recueillir les effets didactiques. A côté de cette première démarche, nous envisageons ultérieurement d'autres procédures d'investigation et d'observation portant sur les processus mentaux effectivement mis en œuvre par les apprenants pour résoudre un problème, c'est-à-dire affronter un objet d'apprentissage et se l'approprier comme un nouvel objet de connaissance.

La difficulté essentielle demeure dans notre propre incapacité de procéder à une observation directe de ce qui se passe dans la tête des individus en situation de problème. J.M. De Ketele

relate dans son livre (D.l.) "Observer pour éduquer" (page 123) une technique possible désignée sous le nom de "technique de Rimoldi" de laquelle nous pourrions nous inspirer. Nous pourrions aussi nous appuyer sur la méthode clinique de Piaget. A ce propos, nous remarquons que Piaget accepte ce principe de tâtonnement qui n'exclut en aucune façon le processus d'assimilation-accomodation.
Une telle observation nous apporterait de précieuses informations sur la validité du concept de tâtonnement expérimental que nous avons tenté de définir intensionnellement.

III Une opérationnalisation des conditions du tâtonnement expérimental : exemple d'une séquence didactique sur la notion de fonction en classe de Seconde.

Le document complet d'une centaine de pages rapportant dans les détails cette séquence didactique fera l'objet d'une publication prochaine, à l'I.N.R.A.P. de Dijon. Nous nous contenterons d'une description sommaire en nous fondant sur le référentiel terminologique et conceptuel que nous avons explicité dans les parties précédentes.
Ici nous ne rentrerons ni dans l'analyse historique et épistémologique du concept de fonction, ni dans celle de son enseignement.

Passons donc à la description de la séquence.

PHASE N° 1 : la dévolution de la problématique aux apprenants

Etape n° 1.1	Le plan de travail : Il est élaboré par l'enseignant et distribué à chaque élève. Il fixe le cadre général et la trame de la séquence. Il est informatif.
Etape n° 1.2	L'exploration du champ représentatif des apprenants. Il s'agit d'une prise d'information au moyen d'un questionnaire écrit auquel chaque élève répond par écrit.
Etape n° 1.3	L'exploration du champ cognitif des apprenants. Un test vise à contrôler d'une part la maîtrise de certains savoirs et savoir-faire considérés comme des prérequis à l'étude, d'autre part ce que les individus connaissent

déjà relativement à l'objet d'apprentissage et que nous désignons par préacquis. A l'issue de la séance de contrôle, un document autocorrectif est remis à chaque élève. En fait, ici, il se réduit à fournir les réponses aux items du test. Des compléments sont apportés ora lement par l'enseignant selon la demande des élèves. Après hétérocorrection des épreu ves, l'enseignant peut aussi être amené à mettre en place certaines remédia- tions ponctuelles, éventuellement individualisées, soit en organisant des séances de "soutien" centrées sur les élèves les plus en difficulté par rapport aux attentes des prérequis, soit sous la forme d'un travail autonome avec des livrets autocorrectifs (R.1)

Ces deux étapes relèvent de l'évaluation formative diagnostique de départ.

Etape n° 1.4 La mise en route de la problématique.
Cette étape est la plus délicate et correspond à l'analyse que nous avons produite dans la troisième partie à propos de la "Libre Recherche/Recherche guidée". Elle se déroule en trois temps.

— premier temps —

Voilà ce que nous avons communiqué oralement :
«Nous allons nous intéresser à une question qui touche au problème des conditionnements et des emballages :
– à quels problèmes peuvent être confrontés les fabricants ? »
Le rôle de l'enseignant est alors de provoquer un débat dans la classe, de faire émerger les réponses, de les noter au tableau sans exclusive. Avec l'aide des élèves, on procède à un classement de ces réponses. Celles que nous avons effectivement obtenues lors de la première expérience se ramènent aux variables suivantes :
– facilités de manutention, rangement, empilement
– esthétique
– volume, contenance
– destination : contenu, transport, conservation
– matériaux : nature, densité, résistance, utilisation.

De là, en relation avec les objectifs visés par l'enseignant, la question centrale, "imposée sans résistance manifeste" porte sur la "forme géométrique" des emballages.

— second temps —

Le travail demandé à chaque élève est une éventuelle prise de contact avec certains fabricants afin de recueillir quelques informations "concrètes et réalistes" sur la question. Il leur est aussi demandé de collecter dans leur environnement quotidien, quelques exemplaires d'emballages dont ils doivent étudier la construction et le calcul du volume et de la surface latérale. Ce travail fait l'objet d'une courte synthèse rédigée. A la suite de quoi les recherches individuelles sont mises en commun. On procède alors à un travail sur les surfaces et volumes usuels. Chaque élève réalise de manière autonome une recherche documentaire sur ces objets géométriques (triangle, rectangle, carré, parallélogramme, disque, sphère, cône, cylindre droit, cube, ...). Cette recherche doit aboutir à un dossier rédigé contenant les représentations géométriques graphiques de ces objets et les formules de mesures qui leur correspondent. Ce compte-rendu est corrigé par le professeur.

— troisième temps —

Il est l'aboutissement du processus de dévolution et doit assurer l'engagement optimal de l'apprenant dans le processus de résolution, de ce qui est supposé devenir *son problème* . Dès lors, le rôle de l'enseignant se déplace et réduit sa prépondérance. Cette mise en situation est médiatisée par une suite de fiches-guide. Sur la base de ce questionnement, chaque élève rédige un compte-rendu individuel qu'il remet au professeur à l'échéance fixée par le plan de travail (Annexe A)

PHASE N° 2 : activités autonomes de recherche et exercice du tâtonnement expérimental.

Etape n° 2.1

- l'enseignant réorganise le groupe-classe en groupes restreints de 3 ou 4 élèves sur la base des données recueillies durant l'étape n° 1.3. Il est aussi possible de compléter ces informations par d'autres de nature socio- affective glanées lors des situations antérieures dans la classe (usage de sociogrammes).
- par groupe, les individus vont poursuivre leurs recherches en confrontant leurs opinions et leurs réponses individuelles. Les consignes sont fournies par écrit et complétées oralement par l'enseignant. (Voir Annexe B).Cette structure vise à opérationnaliser le "conflit sociocognitif". (R5)

Etape 2.2

Exploration du champ représentatif .

Etape n° 2.3

L'analyse des comptes rendus produits à l'issue des travaux de groupes permet à l'enseignant de procéder à une première *synthèse*. Elle consiste à mettre en évidence un certain nombre de notions et d'expliciter la mathématisation du problème.

Etape n° 2.4

La synthèse précédente est dirigée vers une relance des individus dans les activités, en exploitant les informations ainsi apportées, et vers une aide pour atteindre le but fixé par le problème (production d'une réponse mathématiquement correcte) de la sorte on réunit les conditions de production *d'un acte réussi*.

Etape n° 2.5

En restant dans le même processus d'activités cognitives, il s'agit d'amener l'individu à se réinvestir dans des questions voisines de la précédente. La production finale est de nouveau individuelle mais les échanges interindividuels d'informations sont tout à fait libres.

Cette étape participe de la mise en place de conditions favorables à une conduite de transfert.

Etape n° 2.6

Seconde synthèse.

PHASE N° 3 : évaluation formative de fin d'activités

Etape n° 3.1 Test individuel sur un problème voisin :
Etude de l'aire d'une classe de rectangles isopérimétriques (épreuve en temps limité et "surveillé")

Etape n° 3.2 Hétérocorrection conduite par l'enseignant.

PHASE N° 4 : décontextualisation de la notion de "fonction" ainsi abordée dans une problèmatique particulière

Etape n° 4.1

- Distribution d'un document polycopié exposant les éléments théoriques et historiques relatifs à la notion. Celui-ci est rédigé sous une forme "ouverte" qui en fait un outil impliquant l'activité de l'apprenant au cours de sa lecture.
  Ce document doit être étudié par chacun avant l'étape suivante.

Etape 4.2

- L'enseignant commente le contenu du document polycopié et apporte des compléments.
  L'enseignant répond aux questions posées par les élèves.
- L'enseignant organise le contenu de ses apports autour d'une mise en relation des éléments théoriques avec les produits issus des activités manipulatoires.

Etape 4.3 Exercices d'application considérés comme une activité intégrée au processus au niveau du "palier de répétition".

PHASE N° 5 : évaluation formative de fin de séquence didactique

Etape n° 5.1 Test préliminaire autocorrigé

Etape n° 5.2 Auto-évaluation de l'atteinte des objectifs

Etape n° 5.3 Test final hétérocorrigé

Etape n° 5.4 Bilan individuel de travail.

Etape n° 5.5 Correction du test final

Etape n° 5.6 Exploration du champ représentatif

PHASE N° 6 : fin de la séquence, passage à la séquence suivante portant sur le thème des "suites"

Quelques mots concernant les procédures évaluatives :

Ainsi que nous l'avons précisé, la finalité dominante de l'évaluation au cours de cette séquence didactique est d'aider l'apprenant à progresser dans son processus de formation. C'est pourquoi nous qualifions cette évaluation de "formative". Toute l'organisation de notre travail est orientée vers une acceptation par l'élève de l'erreur comme phénomène inhérent à tout processus d'apprentissage, de l'échec en tant qu'acte de prise de conscience d'un savoir inopérant ou inadéquat.

Pour faciliter cette transformation, toutes les productions contrôlées sont évaluées à l'aide d'une échelle à trois modalités :

modalités	codes
objectif atteint globalement	+
objectif partiellement atteint	0
objectif non atteint ou objectif insuffisamment atteint	-

Le recours à l'usage de la "note traditionnelle" est limité à l'épreuve du test des prérequis-préacquis, et celle du test final hétérocorrigé. Et encore, celle-ci revient-elle à un "pourvingtage" ! Nous n'évoquerons ici ni le rôle inhibiteur de la pratique de la notation traditionnelle, ni la critique impitoyable que nous lui proférons — aidé en cela par des travaux comme ceux de M.C. Dauvisis (D.2) — ni nos recherches concernant des procédures de substitution cohérentes avec notre option pédagogique. Nous renvoyons le lecteur intéressé à notre publication (R.3). Toutefois, nous ne négligeons pas l'obligation institutionnelle qui nous est faite de recourir à la notation "de 0 à 20". Nous en faisons un usage le plus proche possible de nos principes : par exemple nous ne calculons pas de moyenne, nous expliquons longuement aux élèves en quoi la note est une variable qualitative (en particulier à l'occasion de la séquence didactique sur le thème "statistique").

Enfin le test final hétérocorrigé offre aussi les apparences d'une procédure d'évaluation sommative. La prise en compte de ses résultats dans la décision finale concernant l'orientation à l'issue de la classe de Seconde contribue à lui faire jouer ce rôle. Toutefois, l'organisation pédagogique annuelle rend à cette épreuve son caractère formatif.

Deux aspects de ce dispositif général peuvent l'illustrer : (R.3)

- le premier est lié à l'existence d'une épreuve d'évaluation sommative en fin d'année.
- le second est relatif au fait que tout au long de l'année, l'agencement des séquences didactiques est tel qu'il facilite la redondance et permet le réinvestissement des divers savoirs, savoir-faire et savoir-être.

Quelques mots concernant les différents types de situations pédagogiques que nous rencontrons au sein de la classe. Nous avons identifié [M.1] :

A.la situation impositive collective
B.la situation individualisée
C.la situation interactive

La séquence proposée s'articule autour de ces trois situations comme le montre le tableau ci-dessous :

situation	A	B	C
Etape n°	1.3 3.2 1.4 4.2 2.4 4.3 2.6 5.5	1.1 2.2 4.3 1.2 2.5 5.1 1.3 3.1 5.2 1.4 4.1 5.3 5.4 5.6	2.1 (2.5) (4.3) (5.1)

Au cours de cette séquence, seul l'étape n° 2.1 peut être considérée comme une situation interactive institutionnalisée. Il n'en reste pas moins que cette interactivité fonctionne aussi de manière plus spontannée au cours des étapes 2.5, 4.3, 5.1. Dans le dispositif général il subsiste des séquences plus centrées sur les situations interactives.

En l'état actuel de nos travaux d'investigation, nous ne sommes pas en mesure d'en dire plus sur cette séquence didactique. Nous nous contenterons d'aborder en quatrième partie quelques résultats issus de la première expérimentation.

IV Quelques résultats issus de la première expérimentation (année scolaire 1985/86).

1 Evaluation formative diagnostique de départ (étape n° 1.3)

Cette épreuve est constituée de trois tests :
- le test des prérequis formé de 30 items
- le test des préacquis formé de 11 items
- le test "usage de la calculatrice" de 7 items.

Pour l'ensemble des 48 items de cette épreuve soumise aux 31 élèves de la classe de Seconde dont nous avons la responsabilité, nous avons obtenu les résultats globaux suivants :

nombre d'items réussis (réussite forte R+)	0-15	16-20	21-26	27-32	33-38	39-42	43-48
nombre d'élèves relatif à chaque intervalle	0	3	4	7	8	8	1

en particulier pour les 11 items du test des préacquis, nous avons :

nombre d'items réussis	0-1	2-4	5-6	7-8	9-10	11
effectifs	1	8	8	5	8	1

2 Exploration du champ représentatif concernant la notion de fonction (étapes n° 1.2, 2.2, 5.6)

Si nous nous référons au dictionnaire le terme "fonction" renvoie à trois acceptions que nous caractérisons comme suit :

A - "ce que doit accomplir une personne pour jouer un rôle dans un groupe"
B - "role caractéristique que joue une chose dans l'ensemble dont elle fait partie"
C - "relation qui existe entre deux éléments telle que toute variation du premier entraîne une variation correspondante du second".

L'acception à laquelle nous nous attachons dans notre domaine mathématique est fournie par la troisième formulation C.
Il est clair que l'ensemble des individus ont rencontré ces trois acceptions et en particulier dès la classe de 4ème au collège ; ils ont fréquenté la définition même de la notion mathématique. De plus, dans la période qui a précédé la mise en œuvre de la séquence, les élèves ont reçu des informations concernant cette notion par exemple dans les séquences sur le thème "tigonométrie" et sur le thème "statistique".
Voici ce qui résulte du dépouillement des questionnaires :

Etape n° 1.2

«dans le domaine mathématique, as-tu entendu parler de la notion de "fonction" ?»

réponse	oui	oui vaguement	non je ne crois pas	non jamais	sans réponse
effectif	15	12	3	0	1

quant à l'évocation, elle se rattache aux acceptions précédentes selon la répartition suivante :

acception	A-B	B	B-C	C	non réponse
effectif	2	5	1	21	2

Etape n° 2.2

«au stade actuel du travail, as-tu l'impression de reconnaître un lien entre les activités et la notion de "fonction" ? »

réponse	oui	non	je ne sais pas
effectif	4	6	21

Une analyse des justifications qui accompagnent ces réponses conduit à repérer 9 catégories d'arguments.

La réponse est "je ne sais pas" ou "non" car ...	nombre d'apparitions
- a - je ne peux établir le lien car je ne connais pas la signification	2
- b - je ne perçois pas le lien mais il se peut que le travail réalisé amène un travail sur les fonctions — ou — je crois qu'il en existe un	3
- c - on n'a pas fait de cours proprement dit	2
- d - à part les représentations graphiques et (peut être) les relations, je ne vois pas le lien	1
- e - je ne vois aucun rapport ou peu de rapport	8
- f - je ne m'en souviens plus	3
- g - ce que l'on a fait ne m'a pas encore permis de donner une signification au terme "fonction"	2
- h - absence d'application avec des tableaux, des expres sions de f(x), des graphiques comme en 3ème	2
- i - aucun rapport avec ce qui a été étudié en classe de 3ème	1
sans justification	1

Ainsi, seulement 7/31 affirment percevoir un lien entre ces activités et la notion.

Etape n° 5.6

Cette étape est l'étape finale de la séquence didactique. A la question portant sur l'évocation du terme "fonction", la quasi-totalité rapporte une évocation du type C. En affinant l'analyse des formulations nous avons identifié les cinq catégories suivantes :

Codage	**l'évocation renvoie ...l'évocation renvoie ...**
C.1	à la définition mathématique
C.2	aux ingrédients : tableaux, graphiques, notation ensemble de définition
C.3	à quelque chose hors du domaine mathématique
C.4	à un outil pour des calculs et des études
C.5	à l'idée de dépendance

Les individus se répartissent selon ces catégories de la manière suivante :

modalités	C.1	C.2	C.3	C.4	C.5	non-réponse	absent
effectifs	12	8	2	4	2	1	1

1

Et lorsque l'on demande d'en donner la définition mathématique on obtient :

validité de la réponse	juste	fausse	sans réponse	absent
effectif	15	1	14	1

Ces résultats font apparaître le déplacement de la représentation évoquée vers la représentation attendue du concept. Mais force est de constater que la moitié seulement des individus parviennent à formuler la définition de la notion. Cela mérite sans doute d'être approfondi, afin de dépister la part de psittacisme dans les groupes où les définitions sont récitées à 100% par cœur.

Comparons maintenant cette capacité à produire la définition avec celle à répondre aux questions du test final. Dans un premier temps, pour des commodités d'étude, nous avons extrait un échantillon de 7 items sur les 28 proposés. Le contenu de ces 7 items figure en annexe – Annexe C.

Le tableau ci-dessous apporte les effectifs de réussite.

item n°	1	10	11	13	16	20	28
nombre de réussites fortes R+	25	14	22	27	18	15	18
nombre de réussites faibles R-	29	23	22	27	28	27	20

Effectif total : 31

NB : R+ : réponse fournie isomorphe à la réponse attendue.
R - : réponse fournie isomorphe à une réponse située dans un voisinage de la réponse fournie.

Nous avons concentré notre observation sur la sous-polulation de 21 élèves qui ont fourni une évocation de type C.1 et C.2, proche de la définition mathématique.

item n°	1 et 10		11		13 et 16		20		28		
validité de la réponse	R	E	R	E	R	E	R	E	R	E	total
définition exacte	7	1	7	1	6	2	8	0	8	0	8
définition inexacte	9	4	8	5	11	2	11	2	6	7	13

A première vue ces tableaux laissent à penser que la capacité d'énoncer la définition s'accompagne d'une réduction d'échec mais elle ne constitue pas un prérequis à la réussite. Il resterait à prouver le degré de signification statistique de cette hypothèse.

L'incidence didactique serait alors de ne pas se centrer sur la capacité à énoncer une définition d'un concept comme un indicateur de la capacité à faire fonctionner ce concept. Nous nous en tiendrons là pour cette fois.

V En guise d'absence de conclusion

L'essentiel de cet exposé a été construit à partir d'une approche réflexive et qualitative de la notion de "tâtonnement expérimental" en tant que notion fondant un processus d'apprentissage. Le but était de progresser dans le travail de conceptualisation que nous avons entrepris. Ici l'approche quantitative a été délibérément laissée de côté et les quelques éléments qui en relèvent ont été concentrés dans la quatrième partie. L'information qui y est rapportée ne contribue pas directement à éclairer la problématique, mais elle permet de réguler le processus dans une seconde phase d'expérimentation. Ainsi, la prise en compte du degré d'importance à accorder l'énoncé de la définition comme indicateur d'efficience du processus didactique, par exemple, ...

RÉFÉRENCES

(D.1) **J.M. DE Ketele** *Observer pour éduquer* P. Lang - Berne Francfort / M- 1980 p.213.

(D.2) **M.C. Dauvisis** *Objectifs de l'enseignement des mathématiques et docimologie.* Thèse de doctorat d'Etat - 1982 - Univ. Toulouse le Mirail - 3 tomes p. 834.

(F.1) **C. Freinet** *La méthode naturelle* Tome 1 - Delachaux et Niestlé.

(I.1) **I.C.E.M.** Dans les traces du Tâtonnement Expérimental B.T.R. n° 18-19 - Avril 76.

(L.1) **E. Lémery** *Pour une mathématique populaire* Libres recherches d'adolescents au collège Casterman - 1983 p. 172.

(M.1) **Ph. Meirieu** *L'école, mode d'emploi : des méthodes actives à la pédagogie différenciée* Editions E.S.F. Paris 1985 p. 174.

(R.1) **J.C Régnier** *Elaboration d'un livret autocorrectif* Rapport de D.E.A. de mathématique (didactique) Universités de Nancy I et L.P. Strasbourg - 1980.

(R.3) **J.C.Régnier** *Etude d'une tentative de Formation à l'autoévaluation d'élèves de classe de Seconde de Lycées, dans le cadre de l'enseignement des mathématiques* Tomes 1 - 2 - 3 Septembre 1986 D.E.A. de Sciences de l'Education.

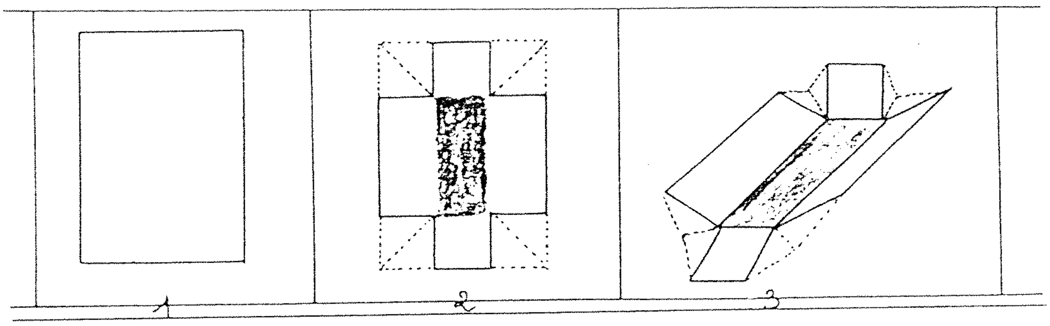
(R.4) **J.C. Régnier** *Evaluation et Autonomie* I.R.E.M. Strasbourg - mai 1983.

(R.5) **J.C. Régnier** Mathématiques et Coopération *Animation et Education* n° 45 Décembre 1981 en collaboration avec A. Denis et R. Dimier.

Annexe A : Etude d'un exemple :

Nous allons nous intéresser cette fois à un cas particulier : celui de la construction d'une boîte parallélépipédique (type boite à sucre ou à chaussures) sans son couvercle.

• Soit en utilisant le film ci-dessous réaliser un exemplaire de cette boîte à partir d'une feuille de format usuel A4 (21x29,7)



Mesurer l'aire latérale et le volume :

boîte n°
①

aire	unité	volume	unité
a =		ϑ =	

• Soit en utilisant les consignes ci-dessous :

- prendre une feuille de format 21 x29,7 (unité : cm)
- délimiter quatre carrrés de même dimensions, un en chacun des quatre angles de la feuille rectangulaire, en traçant des pointillés
- découper ces quatre carrés
- plier les quatre morceaux rectangulaires restant afin d'obtenir la boîte recherchée (parallélépipède)

ou encore

- tracer en pointillés les diagonales des quatre carrés (celles qui sont issues des sommets de la feuille rectangulaire)
- plier selon ces diagonales et les côtés des carrés adjacents aux bords intérieurs de la partie restante de la feuille de papier
- réaliser la boîte en rabattant les faces latérales.

Annexe B : Etude du problème de l'existence d'une boîte (type sucre) dont le volume est maximum

Modalité de travail : par groupe de quatre.
Chacun ayant construit quatre exemplaires de la boîte et calculé les aires latérales et les volumes respectifs, le groupe dispose ainsi de seize données.

- Mettre en commun ces informations et trouver deux présentations différentes des résultats obtenus.

Quelles conjectures pouvez-vous formuler ?
Le volume de la boîte dépend-il de la découpe ?
La surface latérale dépend-elle de la découpe ?
Quelles sont les différentes “variables” qui interviennent dans ce problème ?
Quelles sont les “relations” qui lient ces “vartiables”

On pourra se reporter à la fiche méthodologique :
“Comment résoudre un problème”
remise en début d'année scolaire.

Production

Rédiger une synthèse du travail donnant la démarche et les réponses aux diverses questions.

Remettre cette synthèse au professeur à la fin de la séance.

Annexe C

Item 1

Pour représenter la fonction f déterminée par

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1} \quad \text{pour } x > \frac{1}{2}$$

on a utilisé une table traçante connectée à un ordinateur.
On a choisi de représenter f pour $0{,}51 \leq x \leq 5{,}51$.
Le graphique est inscrit dans le carré fourni dans l'épreuve de côté 10 cm qui correspond à $0{,}51 \leq x \leq 5{,}51$ et $0 \leq y \leq 25$.
Calculer f(5) :

Item 10

Soit la fonction

$$\left\{\begin{array}{l} \quad f \\ E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = 1 - \dfrac{1+x}{1-x} \\ E = \mathbb{R} - \{1\} \end{array}\right.$$

Calculer f(- 0,01).

Item 11

On considère la fonction

$$g : \begin{cases} E \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x \rightarrow g(x) = 120 \times - 4\sqrt{x} - \sqrt{1} - x - 40 \\ E = [0\,;1] \end{cases}$$

Parmi les nombres de l'ensemble A en est-il qui ont pour image par g le nombre 0 ?

$$A = \left\{ - b\,; -\frac{9}{19}\,; 0\,; \frac{25}{169}\,; \frac{1}{4}\,; \frac{5}{16}\,; \frac{9}{25}\,; \frac{1}{2}\,; \right\}$$

Indiquer la réponse.

Item 13

Soit f l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$.
Pour obtenir une image f(x) supérieure à 1000, suffit il de prendre : $x \geq 10$? Cocher oui ou non.

Item 16

Justifier la réponse de l'item 13 précédent.

Item 20

On considère la fonction

$$h \begin{cases} E \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \rightarrow h(x) = \frac{1}{3} x^3 \\ E = [-3\,;\,3] \end{cases}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé
$(0, \overline{0I}, \overline{0J})$ (unité 0I = 0J = 1cm),
construire la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de h.

Item 28

Dans le plan donné à l'item 20, le point K a une ordonnée qui vaut 8/3.
Que vaut son abscisse ?

LISTE DES AUTEURS AYANT COLLABORÉ

A CE VOLUME

DUPUIS Claire	Département de Mathématiques, 7 rue René Descartes 67084 Strasbourg Cedex
DUVAL Raymond	I.R.E.M., 10 rue du Général Zimmer 67084 Strasbourg Cedex
EGRET Marie-Agnès	Collège Fustel de Coulanges, 2 rue Jacques Peirotes 67000 Strasbourg
FISCHER Jean-Paul	Ecole Normale de Montigny-lès-Metz, 16 rue de la Victoi re 57041 METZ 01
GUIN Dominique	Département de Mathématiques, 7, rue René Descartes 67084 Strasbourg Cedex
LABORDE Colette	Equipe de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, IMAG - BP 68 - 38402 Saint Martin d'Hères Cedex
MESQUITA Ana	Etudiante en 3e cycle de Didactique des Mathématiques, (Boursière de F. Gulbenkian), 10 rue du Général Zimmer 67084 Strasbourg Cedex
PLUVINAGE François	I.R.E.M. - 10, rue du Général Zimmer 67084 Strasbourg
RAUSCHER Jean-Claude	Collège Martin Schongauer, rue A. Gerig 67400 Ostwald
REGNIER Jean-Claude	Lycée Monceau les Mines 71300 Monceau-les-Mines
ROGALSKI Janine	Laboratoire de psychologie du développement et de l'éducation de l'enfant, 46 rue Saint Jacques 75005 Paris
VERGNAUD Gérard	Laboratoire de psychologie du développement et de l'éducation de l'enfant, 46 rue Saint Jacques 75005 Paris
ZAKI Moncef	Etudiant en 3e cycle de Didactique des Mathématiques, 10 rue du Général Zimmer 67084 Strasbourg Cedex