

L'ÉTENDUE DES JOURS

Gépie BOUVIER

L'ORDRE DU JOUR.

Sans doute l'avez-vous remarqué? Les jours sont plus ou moins longs; par exemple la veille de vos résultats à un examen, ou de façon plus générale, les jours d'été sont particulièrement longs, alors que votre anniversaire, Noël et autres journées hivernales paraissent un peu courtes ...

Comment expliquer cela?

L'hypothèse d'une dilatation de la durée du jour sous l'effet de la chaleur paraît assez séduisante, mais alors pourquoi les zones polaires bénéficient-elles de largesses peu en rapport avec le froid de phoque qui y règne ...?

Nous vous proposons d'adopter une vision *cosmique* du problème (n'ayons pas peur des mots) afin de pouvoir avancer une explication qualitative et (la maison ne recule devant aucun sacrifice) quantitative assez satisfaisante (sauf peut-être pour les jours d'anniversaire).

Pour cela, entendons-nous. Qu'appelle-t-on *jour*? Pour nous, ce sera le moment où le Soleil, réduit à un point pour l'occasion, se trouve au dessus du plan dit horizontal (nous expliquerons cela plus loin). Nous établirons alors, avec force arguments tant géométriques qu'algébriques, voire de bon sens, une formule, qui donnera *la hauteur* du Soleil au dessus de cet horizon et dépendra de la date, mais aussi de la latitude de l'endroit qui nous intéresse. Puis nous en déduirons, facilement, une autre formule, celle-ci donnant la durée du jour en fonction des ci-avant paramètres.

Il resterait alors à exploiter cette formule, mais ceci est une autre histoire.

LE POINT DE VUE "COSMIQUE".

Voici nos principales hypothèses :

— La Terre tourne autour du Soleil, l'orbite étant située dans un plan *fixe* appelé écliptique, et la Terre est repérée par l'angle φ fait entre une direction fixe et la direction (Soleil \rightarrow Terre). (Voir figure 1).

— Cet angle φ dépend (uniquement) de la date T et varie de façon *discrète* : pour une date T_k donnée $\varphi_k = \varphi(T_k)$ reste constant durant 24 heures avant de *sauter* à φ_{k+1} .

- La Terre tourne autour d'elle-même autour d'un axe, appelé axe des pôles, de direction fixe (Soleil \rightarrow étoile polaire) suivant une loi de rotation uniforme.
- La Terre est une sphère et les rayons solaires sont tous parallèles à la direction (Soleil \rightarrow Terre).

Notons que le plan équatorial est le plan orthogonal à l'axe des pôles, et passant par le centre O de la Terre.

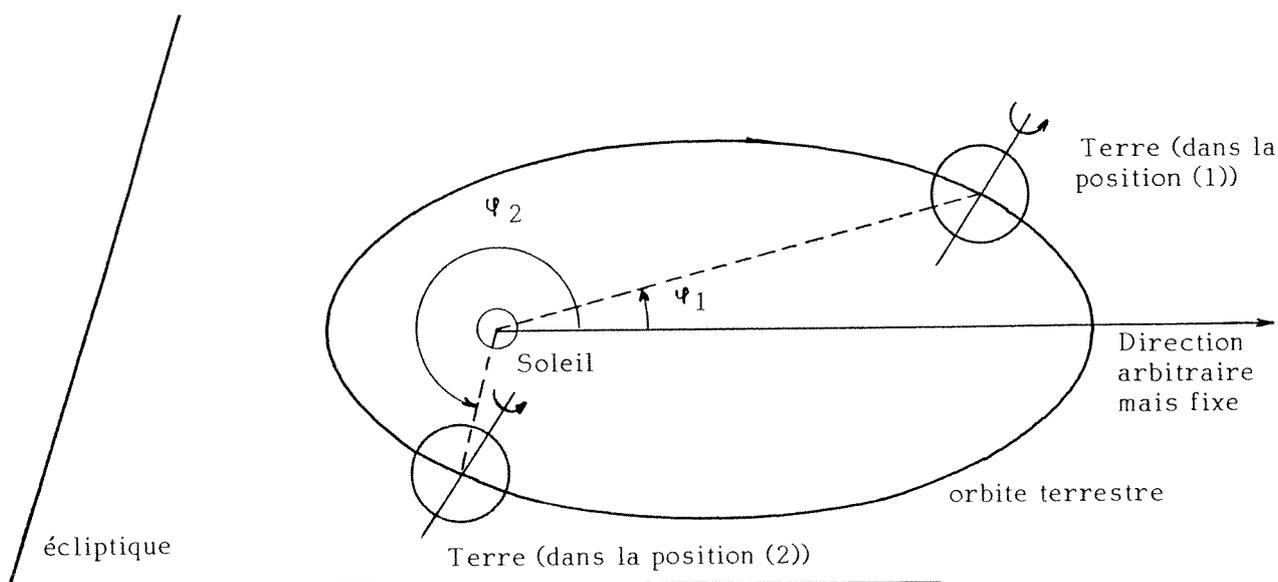


Figure 1

LA DATE INTERVIENT

Fixons un point M sur la Terre, par exemple ici, et examinons d'un peu plus près la position marquée (M) (Figure 2).

L'ÉTENDUE DES JOURS

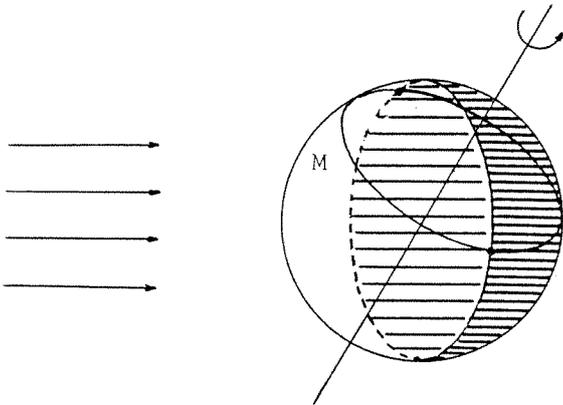


Figure 2

Le point M va décrire le cercle C à vitesse angulaire constante. Lorsqu'il est dans la zone claire, il fait jour, et inversement dans la zone grisée il fait nuit. La vitesse étant constante, on a ici (durée du jour) $<$ (durée de la nuit) car ces durées sont proportionnelles aux longueurs des arcs de cercles de C situés dans la zone claire et la zone grisée respectivement.

Ainsi, pour cette date :

$$T_1 : J < N.$$

Que se passe-t-il dans la position (2)? L'examen de la figure 3 va ... nous éclairer!

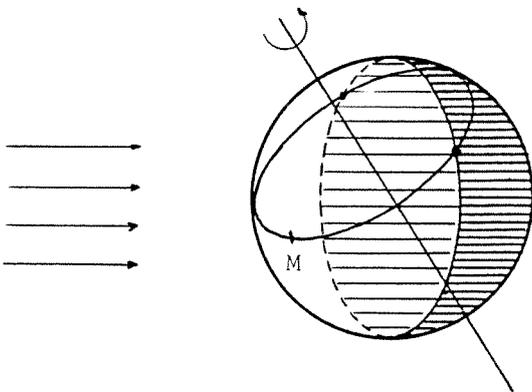


Figure 3

Ici on obtient

$$JOUR > NUIT$$

... nous semblons être sur la bonne voie!

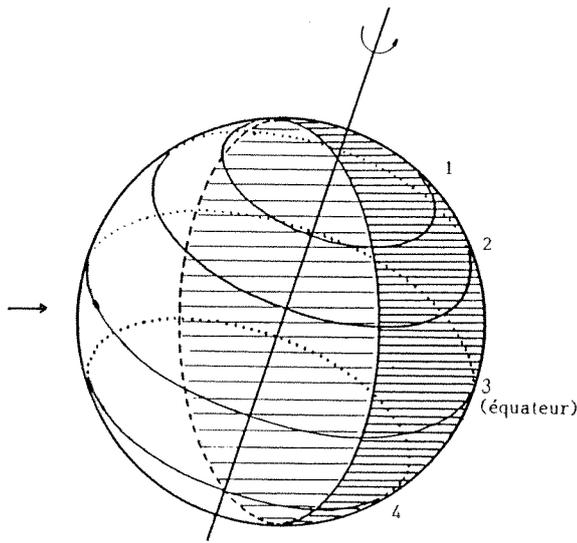
LA LONGITUDE ... N'INTERVIENT PAS.

Voici mis en évidence le rôle de φ (donc de la date) dans la durée du jour. Remarquons que le cercle C est un cercle d'égale latitude (parallèle à l'équateur) et que si M' est un autre point de C , donc d'égale latitude mais de longitude différente, la durée du jour est la même pour M et M' car ils décrivent le même cercle.

LA LATITUDE INTERVIENT.

Que va-t-il se passer maintenant, si nous examinons l'influence de la latitude dans notre problème ?

Nous allons revenir à la position de la figure 2 en examinant la situation sous diverses latitudes : (cf. figure 4).



Pour une date donnée
 en 1 JOUR << NUIT
 (et on imagine qu'un peu plus haut, il n'y a pas de jour du tout !)
 en 2 JOUR < NUIT
 en 3 JOUR = NUIT
 le plan équatorial passant par le centre de la Terre, l'équateur est coupé en deux demi-cercles.
 Enfin, on retrouve la position 2, façon néo-zélandaise :
 en 4 JOUR > NUIT.

Figure 4

RETOUR SUR TERRE.

Dorénavant, nous nous fixerons les deux paramètres φ et θ et nous allons continuer l'étude du problème d'un point de vue plus terre à terre, en définissant le plan horizontal, et la déclinaison une notion liée à celle de hauteur au dessus de l'horizon, mais d'un usage plus commode.

Nous dirons que le plan horizontal en un lieu donné M est le plan tangent à la Terre (en ce point). La verticale est alors la direction (centre de la Terre $\rightarrow M$) : elle prolonge le rayon terrestre OM (cf. figure 5).

δ (déclinaison) est alors l'angle (verticale en $M \rightarrow$ Soleil) (cf. figure 6).

Le Soleil est au dessus de l'horizon si (et seulement si)

$$|\delta| \leq \pi/2 \text{ soit encore } \cos \delta \geq 0.$$

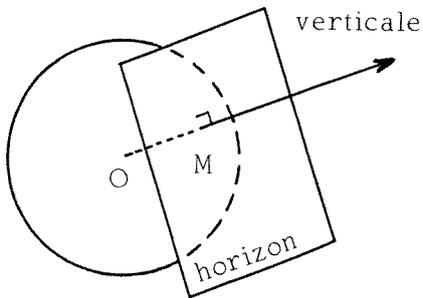


Figure 5

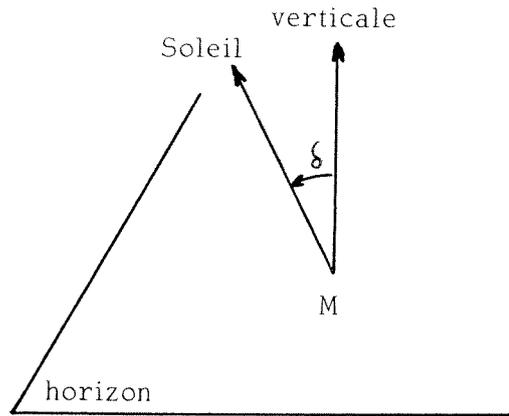


Figure 6

Notons que δ dépend de φ et de θ comme il a été dit, mais également du paramètre horaire t (M décrit le cercle \mathcal{C}).

VOUS MANQUEZ DE REPÈRES ?

Calculer $\cos \delta(t, \varphi, \theta)$ va nécessiter un petit peu de courage et deux repères orthonormés directs de l'espace, mettons

$$(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) \text{ et } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant un repère naturellement lié à la Terre (cf. figure 7) :

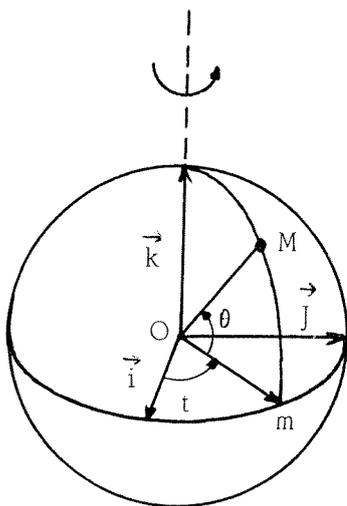


Figure 7

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \cos \theta \vec{om} + \sin \theta \vec{k} \\ &= \cos \theta (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) \\ &\quad + \sin \theta \vec{k} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \cos \theta \cos t \vec{i} \\ &\quad + \cos \theta \sin t \vec{j} \\ &\quad + \sin \theta \vec{k}. \end{aligned}$$

$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ étant lié au Soleil (cf. figure 8) :

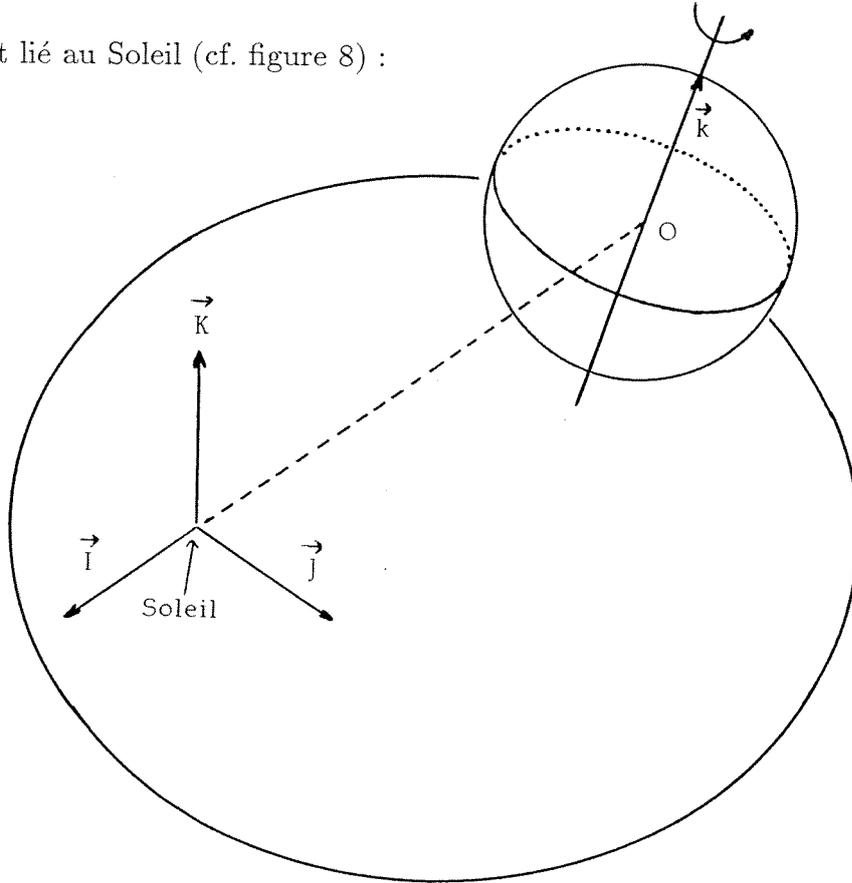


Figure 8

\vec{I} : unitaire parallèle à Terre \rightarrow Soleil.

\vec{I}, \vec{J} : repère orthonormé de l'écliptique.

$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$: repère orthonormé de l'espace.

On prend \vec{k} parallèle à l'axe des pôles.

(\vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé du plan équatorial, arbitraire. On choisit alors \vec{i} de telle sorte que \vec{i} appartienne également à l'écliptique : cela simplifiera les calculs.

Notons à présent qu'avec ces notations : $\cos \delta = \cos(\overrightarrow{OM}, \vec{I})$ car \overrightarrow{OM} représente la verticale en M et \vec{I} la direction du Soleil.

Ainsi si

$$\overrightarrow{OM} = X \vec{I} + Y \vec{J} + Z \vec{K} \quad \cos \delta = X$$

il ne reste plus qu'à calculer X .

L'ÉTENDUE DES JOURS

Comme $\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{i} = X_i \overrightarrow{I} + Y_i \overrightarrow{J} + Z_i \overrightarrow{K}$$

$$\overrightarrow{j} = X_j \overrightarrow{I} + Y_j \overrightarrow{J} + Z_j \overrightarrow{K}$$

$$\overrightarrow{k} = X_k \overrightarrow{I} + Y_k \overrightarrow{J} + Z_k \overrightarrow{K}$$

on a $X = xX_i + yX_j + zX_k$.

CLASSÉ X !

Les lignes qui suivent sont déconseillées aux âmes innocentes ... Il faut (et cela suffira) calculer $X_i, Y_i, Z_i, X_j, Y_j, Z_j, X_k, Y_k, Z_k$. Commençons par tout calculer en fonction des coordonnées de $\overrightarrow{k} : X_k, Y_k, Z_k$.

\overrightarrow{i} est dans l'écliptique donc $Z_i = 0$, perpendiculaire à \overrightarrow{k} donc $X_i X_k + Y_i Y_k = 0$ soit $X_i = \lambda Y_k$ $Y_i = -\lambda X_k$, unitaire : $\lambda^2 Y_k^2 + \lambda^2 X_k^2 = 1$ d'où $X_i = (\sqrt{X_k^2 + Y_k^2})^{-1} Y_k$ $Y_i = -(\sqrt{X_k^2 + Y_k^2})^{-1} X_k$ et d'un !

Pour \overrightarrow{j} , on peut soit exprimer le fait que \overrightarrow{j} est perpendiculaire à \overrightarrow{i} et \overrightarrow{k} , unitaire et que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est direct, soit plus élégamment remarquer que $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i}$ d'où

$$X_j = \mu X_k \quad Y_j = \mu Y_k \quad Z_j = -\mu(X_k^2 + Y_k^2)/Z_k \text{ avec}$$

$$\mu = -\lambda \sqrt{Z_k^2 / (\lambda^2 + Z_k^2)} \quad (\lambda = 1 / \sqrt{X_k^2 + Y_k^2}).$$

Occupons nous maintenant de $X_k, Y_k, Z_k : \overrightarrow{k}$ et \overrightarrow{K} sont fixes dans l'espace et $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ tourne autour de \overrightarrow{K} . Tout se passe donc comme si $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ était fixe et \overrightarrow{k} tournait autour de \overrightarrow{K} avec le mouvement (en fait avec le mouvement inverse, mais ça n'a pas d'importance) de (I, J) c'est-à-dire celui de la Terre autour du Soleil (cf. figure 9) :

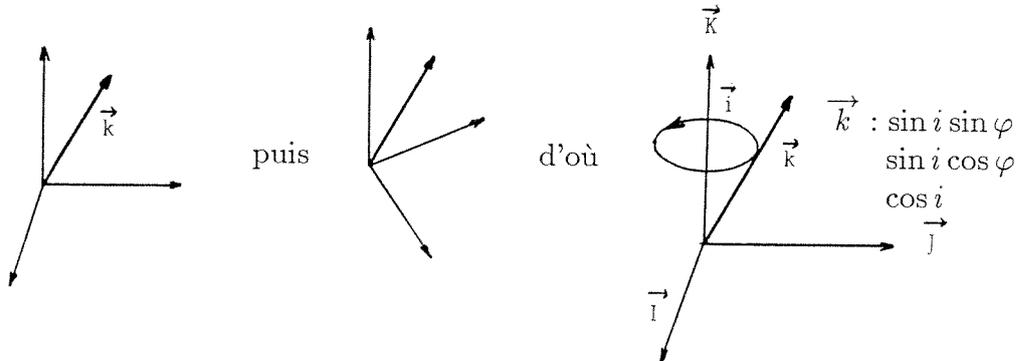


Figure 9

Soit finalement

$$X_k = \sin i \sin \varphi \quad X_i = \cos \varphi \quad X_j = -\cos i \sin \varphi.$$

Et donc (les âmes sensibles peuvent rouvrir les yeux) :

$$\cos \delta = \cos \theta \cos \varphi \cos T - \cos \theta \cos i \sin \varphi \sin t + \sin i \sin \varphi \sin \theta$$

(i est l'angle — constant — (\vec{K}, \vec{k})).

UN DERNIER EFFORT.

Ce qui nous intéresse, c'est de savoir quand $\cos \delta \geq 0$. Or, $\cos \delta$ est de la forme $A \cos t + B \sin t + C$, expression que le trigonomètre distingué qui sommeille en chacun de nos amis lecteurs transforme en $\cos \delta = D \cos(t + t_o) + E$. (*)

D'où $\cos \delta \geq 0$ devient $\cos(t + t_o) \geq -E/D$.

t varie dans $[0; 2\pi]$, ou mieux, dans $[0, 24]$ l'unité d'angle étant alors l'heure ($1^h = \pi/12$); nous cherchons la durée du jour J c'est-à-dire la longueur de l'intervalle de $[0; 24]$ où $\cos(t + t_o) \geq -E/D$, soit encore $-\arccos(-E/D) \leq t + t_o \leq \arccos(-E/D)$ d'où enfin finalement pour conclure

$$J = 2 \arccos\left(-\frac{E}{D}\right)$$

ou plus explicitement :

$$J = \frac{24}{180} \arccos\left(\frac{-\sin \theta \sin i \sin \varphi}{\cos \theta (\sqrt{\cos^2 2\varphi + \cos^2 i \sin^2 \varphi})}\right) (**)$$

J en heures, dixièmes, centièmes ... d'heures.

θ est la latitude en degré.

φ la position angulaire de la Terre, en degré, fonction de T (i est une constante, chez nous $i = 23^\circ 27'$).

Reste à donner une expression utilisable de φ , ce qui n'est pas si simple ...

OU EST MA PLANÈTE ?

φ est la position angulaire de la Terre à une date T donnée

— Si l'on suppose que la Terre décrit autour du Soleil un cercle, à vitesse constante, on obtient

$$\varphi = \frac{360}{365} T, \quad \varphi \text{ en degré, } T \text{ en jours.}$$

(*) Voici le détail : on écrit $A = D \cos t_o$ $B = -D \sin t_o$ pour se ramener à la formule d'addition des cosinus, ce qui permet d'évaluer $D (= \sqrt{A^2 + B^2})$ et t_o (dont on n'a que faire) et on conclut par l'astucieux changement $E = C$.

(**) Nom de la formule utilisée à la première ligne de l'alinéa "en guise de conclusion".

L'ÉTENDUE DES JOURS

— Le lecteur épris de précision se reportera à la table numérique de l'annexe I, construite en admettant que la Terre décrit autour du Soleil une ellipse, suivant les lois de KÉPLER et NEWTON.

— Le lecteur maniaque des décimales pourra se farcir les calculs lui-même s'il veut tenir compte de la lune, des lois de la mécanique relativiste, de la non-ponctualité du Soleil, des marées, de la nutation, du principe d'incertitude de HEISENBERG, du prix du pain et bien sûr de l'âge du capitaine.

EN GUISE DE CONCLUSION.

Revenons un instant à notre formule (*) qui mérite bien un détour. Il peut être intéressant d'étudier pour différentes, ou même une seule, valeurs de θ la fonction $T \rightarrow J(T)$. Pour cela nous recommandons l'usage d'une calculatrice programmable (essayez de dériver $J(T)$ pour rire !). Une telle étude mettra en évidence les phénomènes de solstice, d'équinoxe etc ... Le fait de varier θ permet d'expliquer les *Soleil de minuit* par exemple. Une possibilité d'une pareille étude, est donnée dans la suite de cet article sous le titre "*Des Canada-sinusoïdes*". Les résultats sont donnés dans l'annexe II. Le calcul de $\cos \delta$ peut déboucher lui aussi sur une activité numérique intéressante, par exemple en rapport avec le phénomène des saisons.

Nous tenons enfin à ajouter que la formule donnant J ne tient compte qu'approximativement de la réalité, et que les personnes qui confronteront la théorie et l'expérimentation devront s'en souvenir avant de casser leurs montres.

Une courte discussion sur la qualité de cette approximation est donnée en annexe III.

BIBLIOGRAPHIE

"*Ephémérides de l'Annuaire du Bureau des Longitudes*" (**) (Gauthier-Villars).

DES CANADA-SINUSOÏDES

Nous allons étudier numériquement la fonction $J(T)$ dépendant du paramètre θ , qui donne la durée du jour J en fonction de la date T , en un lieu de latitude θ .

(**) Document disponible à la Bibliothèque de l'I.R.E.M.

Rappelons :

$$J(T) = \frac{24}{180} \arccos \left(- \frac{\sin \theta \sin i \sin \varphi(T)}{\cos \theta \sqrt{\cos^2 \varphi(T) + \cos^2 i \sin^2 \varphi(T)}} \right)$$

$i = 23^\circ 27'$ φ est fournie en annexe I.

Les résultats de l'annexe II sont calculés avec $\varphi_3(T)$.

L'AIR DU JOUR.

En programmant $J(T)$, avec la possibilité de modifier facilement θ , on peut construire la courbe $(T, J(T))$ (exemple : $\theta = 48^\circ 24'$, annexe II, figure 10, trait gras) pour une latitude θ fixée.

L'allure de cette courbe est assez sinusoïdale (mais ce n'est pas une sinusoïde) pour le tracé des courbes $(T, J(T))$ pour différentes valeurs de θ .

($\theta = 0, 20, 40, 60, 80^\circ$ en annexe II, figure 1).

A partir d'une certaine valeur de θ , nous remarquons un phénomène particulier (cela correspond au *Soleil de minuit*).

L'AIR D'UNE SINUSOÏDE.

On peut facilement montrer que pour toute valeur de θ $J(T)$ n'est pas de la forme $A \sin(BT + C) + D$: D est la valeur moyenne de J donc égale à 12, B correspond à la périodicité : $B = 2\pi/1 \text{ an} = 360/365$ avec nos unités $C = 0$ avec nos conventions sur T , enfin A est l'amplitude : $A = J_{\max} - 12$ (on peut calculer exactement J_{\max} donc A).

La figure 11 de l'annexe II est un tableau avec une première colonne où figure T , une seconde $J(T)$, une troisième $A \sin(BT) + D$ une quatrième la différence $|J - A \sin(BT) - D|$ pour $\theta = 48^\circ 24'$.

LES QUATRE SAISONS.

L'étude des variations de $J(T)$ va permettre de définir les équinoxes et les solstices. Plutôt que de dériver J , étudions $D(T) = J(T+1) - J(T)$ (pour un θ fixé).

(La figure 12 est faite dans le cas $\theta = 48^\circ 24'$ il y a le rappel de $J(T)$ en gras, $D(T)$ étant en pointillé.)

Le point où $D(T)$ est maximum est l'équinoxe du Printemps.

Le point où $J(T)$ est maximum est le solstice d'Été.

Le point où $D(T)$ est minimum est l'équinoxe d'Automne.

Le point où $J(T)$ est minimum est le solstice d'Hiver.

Notons que l'usage de la fonction φ_3 conduit à des durées inégales pour les saisons (ce qui est conforme à la réalité).

DES JOURNÉES INTERMINABLES.

Nous allons revenir aux latitudes élevées.

Une étude rapide de la fonction $x \rightarrow \arccos x$ montre que celle-ci n'est définie que pour x compris entre -1 et 1.

La condition

$$\left| \operatorname{tg} \theta \frac{\sin i \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \cos^2 i \sin^2 \varphi}} \right| \geq 1$$

traduit donc le fait que le Soleil ne se couche, ou ne se lève pas au cours d'une journée.

On transforme cette condition en

$$\operatorname{tg}^2 \varphi \geq \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 i - \cos^2 i}$$

pour $\varphi \in [0, 180]$ par exemple.

On transforme cette condition en $\operatorname{tg}^2 \varphi \geq \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 i - \cos^2 \theta}$ pour $\varphi \in [0; 180]$. En introduisant les fonctions

$$\Phi_1 : \operatorname{arctg} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 i - \cos^2 \theta}} \text{ et } \Phi_2 : 180 - \Phi_1.$$

On peut écrire :

$$\Phi_1 \leq \varphi \leq \Phi_2.$$

Par exemple pour $\theta = 79^\circ$ on trouve :

$$28,65^\circ \leq \varphi \leq 151,35^\circ.$$

Puis on utilise l'annexe I (colonne φ_3). Il fait donc jour du 19 avril au 23 août (approximativement), soit environ 126 jours.

Il peut être également intéressant de montrer que la durée maximale du jour est donnée par :

$$J_{\max} = \frac{24}{180} \arccos \left(-\operatorname{tg} \theta \frac{\sin i}{\cos i} \right)$$

obtenu pour $\varphi = 90^\circ$ et valable pour $\theta \leq 90 - i$.

Voir figure 13 pour $\theta \rightarrow J_{\max}(\theta)$.

ANNEXE I

La fonction $\varphi(T)$

La table numérique suivante comprend 4 colonnes, la première donne la valeur de T pour la date indiquée (l'origine est fixée au 21 mars, équinoxe de printemps). La seconde colonne donne la valeur $\varphi_1(T) = 360/365T$, correspondant à l'assimilation du mouvement de la Terre à un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante.

La troisième colonne donne la valeur $\varphi_2(T)$ calculée de la façon suivante : la Terre est soumise à un champ de forces centrales (de centre ... le Soleil) "en $\frac{1}{p^2}$ " (l'intensité de la force attractive est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre), conformément aux lois de la mécanique Newtonienne. Un calcul, assez technique, permet d'obtenir une relation $F(\varphi) = T$, mais F^{-1} n'est pas explicitable

(¹).

$\varphi_2(T)$ est alors une approximation de la racine de l'équation $F(\varphi) - T = 0$ obtenue par la méthode de Newton (encore lui!). La quatrième colonne donne la valeur $\varphi_3(T)$ calculée en corrigeant la valeur $F_1(T)$ par une sinusoïde de sorte que $\int_0^{365} |\varphi_2 - \varphi_3| dT$ soit le plus petit possible : $\varphi_3(T) = \varphi_1(T) + 0,97 \cos[\varphi_1(T - 14)] - 0,94$.

Date	T	$\varphi_1(T) = 360/365 T$	$\varphi_2(T)$	$\varphi_3(T)$	Δ (²)
21 mars	0	0	0	0	
26 "	5	4,93	4,95	4,95	
31 "	10	9,86	9,89	9,89	
5 avril	15	14,79	14,82	14,82	
10 "	20	19,73	19,75	19,75	
15 "	25	24,66	24,67	24,67	
20 "	30	29,59	29,58	29,58	
25 "	35	34,52	34,48	34,49	1
30 "	40	39,45	39,38	39,39	1
5 mai	45	44,38	44,27	44,28	1
10 "	50	49,32	49,16	49,16	
15 "	55	54,25	54,04	54,04	
20 "	60	59,18	58,91	58,92	1
25 "	65	64,11	63,78	63,79	1
30 "	70	69,04	68,65	68,65	
4 juin	75	73,97	73,51	73,52	1
9 "	80	78,90	78,36	78,37	1
14 "	85	83,84	83,22	83,23	1
19 "	90	88,77	88,07	88,08	1
24 "	95	93,70	92,92	92,93	1

Table

$$^{(1)} F(\varphi) = \frac{73}{36} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{tg \varphi / 2}{w} + \omega \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2} \frac{tg \varphi / 2}{tg^2 \varphi / 2\omega^2} \right) \right] \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{ où } e \text{ est l'excentricité de}$$

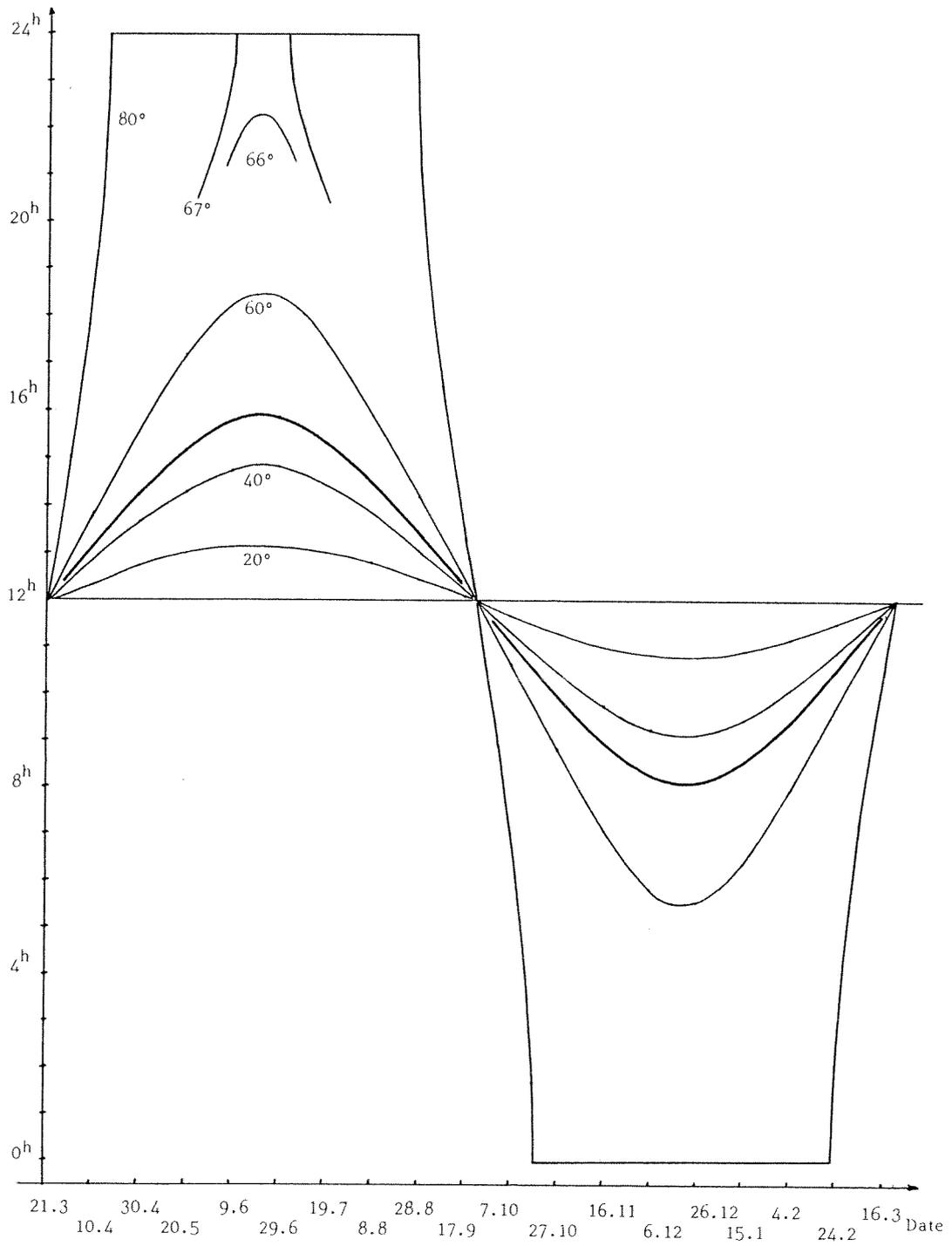
l'orbite.

$$^{(2)} \Delta = 100 |\varphi_2 - \varphi_3|.$$

L'ÉTENDUE DES JOURS

29 "	100	98,63	97,77	97,78	1
4 juillet	105	103,56	102,62	102,63	1
9 "	110	108,49	107,47	107,47	
14 "	115	113,42	112,32	112,32	
19 "	120	118,36	117,17	117,17	
24 "	125	123,29	122,02	122,02	
29 "	130	128,22	126,88	126,88	
3 août	135	133,15	131,73	131,74	1
8 "	140	138,08	136,59	136,60	1
13 "	145	143,01	141,46	141,46	
18 "	150	147,95	146,33	146,33	
23 "	155	152,88	151,20	151,20	
28 septembre	160	157,81	156,08	156,08	
2 "	165	162,74	160,97	160,97	
7 "	170	167,67	165,86	165,86	
12 "	175	172,60	170,76	170,76	
17 "	180	177,53	175,66	175,66	
22 "	185	182,47	180,57	180,57	
27 "	190	187,40	185,49	185,49	
2 octobre	195	192,33	190,42	190,42	
7 "	200	197,26	195,35	195,35	
12 "	205	202,19	200,29	200,29	
17 "	210	207,12	205,24	205,24	
22 "	215	212,05	210,19	210,19	
27 "	220	216,99	215,15	215,15	
1 novembre	225	221,92	220,12	220,12	
6 "	230	226,85	225,09	220,10	1
11 "	235	231,78	230,07	230,08	1
16 "	240	236,71	235,06	235,06	
21 "	245	241,64	240,05	240,05	
26 "	250	246,58	245,05	245,05	
1 décembre	255	251,51	250,05	250,05	
6 "	260	256,44	255,05	255,05	
11 "	265	261,37	260,06	260,06	
16 "	270	266,36	265,07	265,07	
21 "	275	271,23	270,08	270,08	
26 "	280	276,16	275,10	275,10	
31 "	285	281,10	280,11	280,11	
5 janvier	290	286,03	285,12	285,12	
10 "	295	290,96	290,14	290,14	
15 "	300	295,89	295,16	295,15	1
20 "	305	300,82	300,17	300,17	
25 "	310	305,75	305,18	305,18	
30 "	315	310,68	310,19	310,18	1
4 février	320	315,62	315,19	315,19	
9 "	325	320,55	320,19	320,19	
14 "	330	326,48	325,19	325,18	1
19 "	335	330,41	330,18	330,18	
24 "	340	335,34	335,17	335,16	1
1 mars	345	340,27	340,15	340,14	1
6 "	350	345,21	345,12	345,12	
11 "	355	350,14	350,09	350,09	
16 "	360	355,07	355,05	355,05	
21 "	365	360	360	360	

Figure 10 : $J_{\theta}(T)$



L'ÉTENDUE DES JOURS

Figure 11 : comparaison avec une sinusoïde

T	J(T)	A sin(BT)+D	écart
0	12,00	12,00	0
45	14,53	14,73	0,20
92	15,90	15,90	0
120	15,36	15,43	0,07
150	13,97	14,07	0,10
182	12,14	12,03	0,11
184	12,02	11,90	0,12

L'écart est faible mais c'est un écart.

(0,1 heure = 6 min).

L'emploi de φ_1 à la place de φ_3 rapproche J d'une sinusoïde, mais il subsiste un écart.

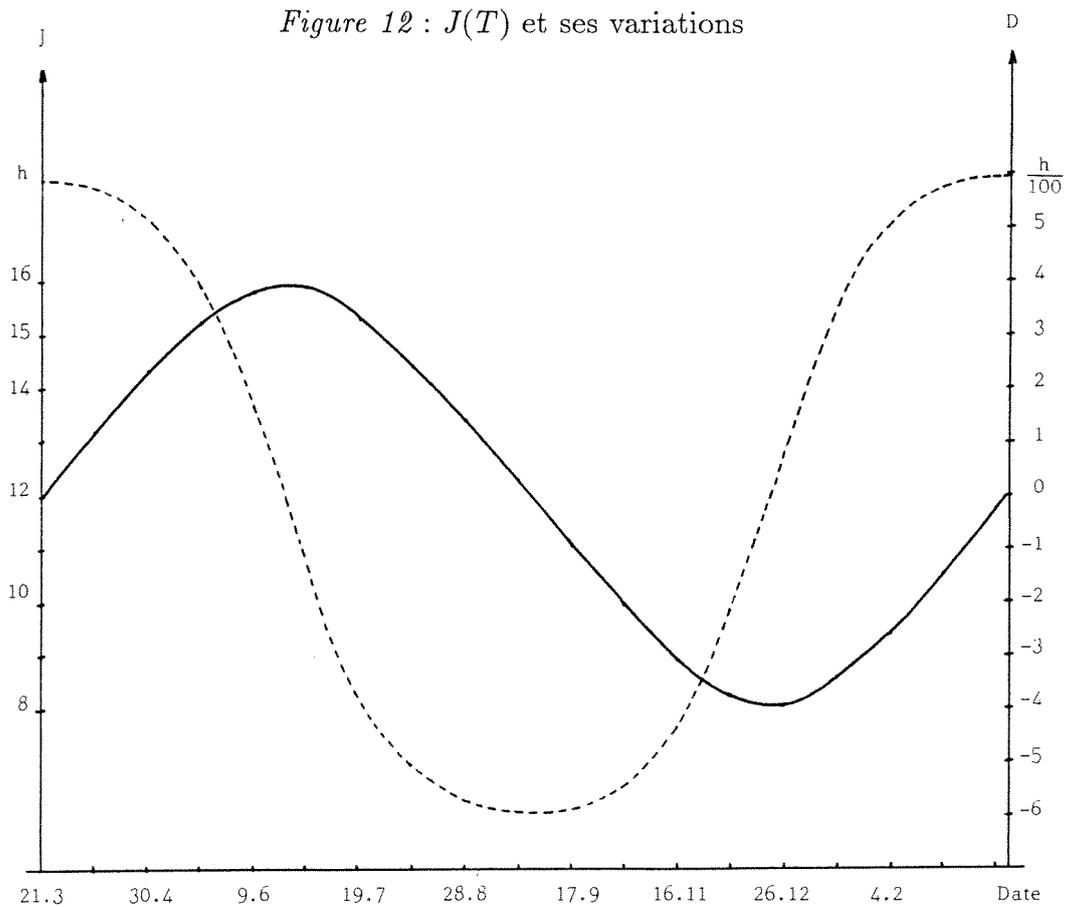
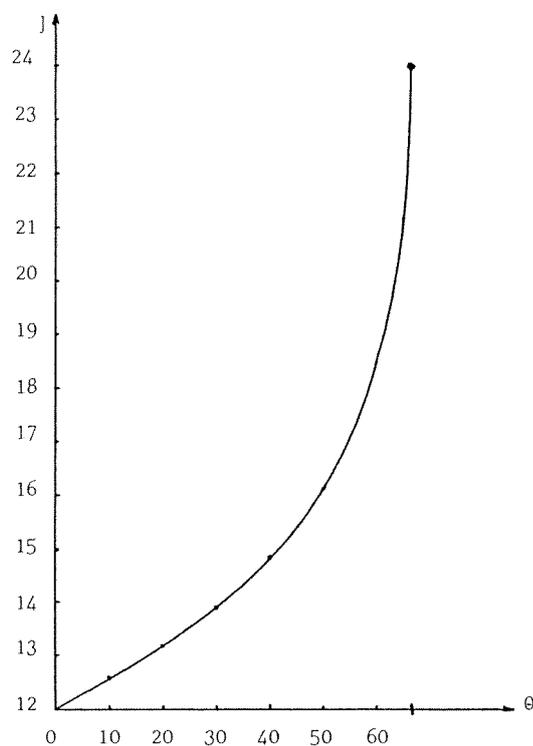


Figure 13 : le jour le plus long



ANNEXE III

Extrait des "Ephémérides"

Lever et Coucher du Soleil à Paris

 $\theta = 48^{\circ}, 84.$

Date	Lever	Coucher	J	T
01.01.79	7 ^h 46	16 ^h 2	8,27	286
09.02.79	7 ^h 11	16 ^h 59	9,80	305
21.03.79	5 ^h 54	18 ^h 3	12,15	0
30.04.79	4 ^h 35	19 ^h 2	14,45	40
19.06.79	3 ^h 48	19 ^h 55	16,12	90
08.08.79	4 ^h 34	19 ^h 18	14,73	140
27.09.79	5 ^h 45	17 ^h 38	11,88	190
26.11.79	7 ^h 17	15 ^h 59	8,70	250

L'ÉTENDUE DES JOURS

On constate un écart systématique de 0,1 à 0,2 heures (6 à 12 mn) : J observé $> J$ calculé. Cet écart s'explique par le fait que l'on n'a pas tenu compte de la réfraction à l'horizon :

il fait jour si $\cos \delta \geq -a$ et non zéro

d'où la formule corrigée :

$$J(T) = \frac{24}{180} \arccos \left(\frac{-\sin \theta \sin i \sin \varphi(T) - a}{\cos \theta \sqrt{\cos^2 \varphi(T) + \cos^2 i \sin^2 \varphi(T)}} \right)$$

avec $a = \sin(36', 36'')$ valeur de la réfraction horizontale l'écart varie entre 0 et 5 minutes.