DES ÉQUATIONS

QUI DÉTERMINENT LES SECTIONS CIRCULAIRES

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

C'est par ce titre que GAUSS ouvre le dernier chapitre de ses mémorables '*Recherches arithmétiques*'. Son objet est la résolution **algébrique** de l'équation $X^n - 1 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes, algébrique signifiant que les solutions devaient être exprimées uniquement à l'aide des opérations de l'algèbre : somme, produit, quotient, extraction de racines $n^{\text{ième}}$. On sait que les n solutions ont pour images dans le plan complexe les n sommets d'un polygone régulier convexe et l'on comprend que ce problème soit étroitement lié à la construction géométrique de ces polygones.

La construction de polygones réguliers, convexes ou étoilés, est un problème très ancien. L'école de PYTHAGORE (VI$^{\text{e}}$ siècle avant J.-C.) connaissait déjà le pentagone étoilé, le fameux pentagramme, signe de ralliement des pythagoriciens, et dont la construction à la règle et au compas ouvrait la voie à toute une mystique autour du nombre d'or. Mais, pour en rester à un plan strictement mathématique, la mesure de la longueur de la circonférence — autrement dit, le calcul de π — fut aussi très longtemps liée à ce problème. Tant en Grèce, qu'en Inde ou chez les arabes, le nombre π était calculé par approximation, en encadrant un cercle donné par des polygones réguliers inscrits et circonscrits. Dans la mesure où ces polygones étaient construits à la règle et au compas, on savait calculer la longueur de leur côté à l'aide de radicaux carrés, grâce à un emploi judicieux du théorème de PYTHAGORE.

Ainsi ARYABHATTA ($\sim$ 500 après J.-C.) donne $\pi = \frac{62832}{20000} = 3,1416$ à l'aide de polygones à 12, 24, 48, 96, 192, 284 côtés, dont il calcule le périmètre en utilisant la relation liant les côtés des polygones ayant n et $2n$ côtés (*cf : 'Mathématiques* 2^{de}' - I.R.E.M. de Strasbourg - ISTRA 1981 (suite convergente vers π)) :

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}.$$

Adrien ROMAIN (1561-1615) calcule 15 décimales avec un polygone de 15×2^{24} côtés.

> Mais, remarquera GAUSS : *"Il y a certainement bien lieu de s'étonner que la divisibilité du cercle en 3 et 5 parties ayant été connue dès le temps d'*EUCLIDE*, on n'ait rien ajouté à ces découvertes dans un intervalle de*

deux mille ans, et que tous les géomètres aient annoncé comme certain, qu'excepté ces divisions et celles qui s'en déduisent (les divisions en 2^{μ} , 15 , 3.2^{μ} , 5.2^{μ} , 15.2^{μ} *parties) on ne pouvait en effectuer aucune par des constructions géométriques".* [§ 365] *(*)*

Gauss, en effet, va complètement révolutionner la question, non seulement en démontrant la possibilité de construire à la règle et au compas le polygone régulier de 17 côtés (et plus généralement de $2^{2^n}+1$ côtés) mais il va mettre en place des méthodes précises et rigoureuses pour résoudre par radicaux l'équation dite *cyclotomique* pour un entier n quelconque $\frac{X^n-1}{X-1}=0$, équation directement liée, comme on va le voir, à ce problème. Cette découverte, Gauss la fit tout jeune, très exactement le 29 mars 1796 à 18 ans, comme il le raconte lui-même dans une lettre datée du 6 janvier 1819 à Chr. L. Gerling :

"C'était le 29 mars 1796 et le hasard n'y avait aucune part ... Une réflexion intense ... me permit, pendant des vacances à Brunswick, le matin de ce jour (encore avant que je me sois levé) de voir la solution avec une clarté totale, de sorte que je pus en faire sur-le-champ l'application particulière au polygone de 17 côtés et la confirmation numérique". [Correspondance entre Gauss et Chr. L. Gerling, p. 187.]

Gauss allait mettre sa théorie au point dans les années suivantes et la publier en 1801 (en latin) dans son premier ouvrage qui est aussi un des chefs d'œuvre de la littérature mathématique, sous le titre :

'*Disquisitiones arithmericae*' traduit en
'*Recherches arithmétiques*'

En réalité, seule la section VII et dernière est concernée directement par le problème qui nous occupe, les six premières sections traitant de l'arithmétique que Gauss appelle transcendante, c'est-à-dire pour l'essentiel des congruences du 2e degré :

$$aX^2+2bxy+cy^2 \equiv N[mod.p].$$

Gauss remarque lui-même que *"le lecteur pourrait s'étonner de rencontrer une semblable recherche* (— sur les polygones réguliers —) *dans un ouvrage consacré à une doctrine qui paraît au premier abord absolument hétérogène; mais l'exposition fera voir bien clairement quelle est la liaison de ce sujet et de l'Arithmétique transcendantale"*.[§355]

L'équation cyclotomique (c) $\frac{X^n-1}{X-1}=0$ avant Gauss.

Dès le début du XVIIIe siècle, la résolution de $X^n-1=0$ est ramenée par Cotes et De Moivre à la division du cercle en n parties égales. De Moivre remarque

(*) Les citations repérées par [§...] renvoient aux '*Recherches Arithmétiques*'.

en particulier que la substitution

$$Y = X + \frac{1}{X} = 2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

réduit la résolution de $X^n - 1 = 0$ à la résolution par radicaux d'une équation de degré $\frac{n-1}{2}$. Par exemple $X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = 0$ donne pour le second facteur :

$$X^2\left[X^2 + \frac{1}{X^2} + X + \frac{1}{X} + 1\right] = 0 \text{ soit } Y^2 + Y - 1 = 0.$$

Malheureusement, dès que n est premier et dépasse 7 on se heurte à une difficulté incontournable : l'impossibilité de résoudre en général une équation de degré supérieur ou égal à 5, par radicaux. Cette impossibilité n'était bien sûr pas établie au XVIII^{e} siècle : nous avons vu les efforts de LAGRANGE pour la cerner, dans ses '*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*' (1770) [Voir '*L'Ouvert*' n°44 (sept. 1986)et n° 45 (déc. 1986)] où il est amené à constater :

> "*On pourra résoudre ... toute équation*
>
> $$X^n - 1 = 0$$
>
> *lorsque n ne contiendra d'autres facteurs simples que 2, 3 et 5, c'est-à-dire lorsque n sera de la forme $2^\lambda \,.\, 3^\mu \,.\, 5^\nu$. En admettant la résolution des équations du 3e degré on pourra encore résoudre l'équation*
>
> $$X^7 - 1 = 0$$
>
> *et par conséquent toute équation*
>
> $$X^n - 1 = 0$$
>
> *lorsque n sera de la forme $2^\lambda.3^\mu.5^\nu.7^\omega$.*
> *Mais on ne saurait aller plus loin, puisque le nombre premier qui suit 7 étant 11 il faudrait pouvoir résoudre l'équation*
>
> $$X^{11} - 1 = 0$$
>
> **ce qui demanderait la résolution d'une équation du cinquième degré**". [§ 22]

Cela situe bien les deux niveaux d'attaque du problème de la résolution de l'équation cyclotomique (c) par radicaux :

1. ramener l'équation (c) à des équations que l'on sait résoudre, c'est-à-dire de degré inférieur à cinq;

2. trouver une méthode de résolution **propre** à ce type d'équation, et valable si possible quel que soit le degré, en jouant sur les propriétés spécifiques des racines de cette équation.

La même année où LAGRANGE publiait ses '*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*' un autre mathématicien français VANDERMONDE ouvrait une brèche sur le deuxième front, en résolvant effectivement l'équation (c) dans le cas $n = 11$.

VANDERMONDE : 'Mémoire sur la résolution des équations'.

Cette résolution par VANDERMONDE mérite qu'on s'y arrête un peu, car elle contient en germe la méthode qu'utilisera GAUSS, calculant avant lui des fonctions des racines invariantes par permutation circulaire.

Soit donc l'équation $\frac{X^{11}-1}{X-1} = 0$ qui devient, avec $u = -(X + \frac{1}{X})$,

(1) $u^5 - u^4 - 4u^3 + 3u^2 + 3u - 1 = 0$ et dont les racines sont les nombres $(-2\cos\frac{2k\pi}{11})$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Remarquons que, à cause de la relation $2\cos 2\theta = (2\cos\theta)^2 - 2$, on a intérêt à ranger ces cinq racines dans l'ordre a, b, c, d, e avec

$$a = -2\cos\frac{2\pi}{11} \qquad b = -2\cos\frac{4\pi}{11} \qquad c = -2\cos\frac{8\pi}{11}$$
$$d = -2\cos\frac{16\pi}{11} = -2\cos\frac{6\pi}{11} \qquad e = -2\cos\frac{32\pi}{11} = -2\cos\frac{10\pi}{11}.$$

De sorte que

$$\begin{array}{lllll} a^2 = -b+2 & b^2 = -c+2 & c^2 = -d+2 & d^2 = -e+2 & e^2 = -a+2 \\ ab = -a-d & bc = -b-e & cd = -a-c & ac = -d-e & bd = -a-e \\ ce = -b-a & ad = -b-c & be = -c-d & de = -d-b & ae = -c-e. \end{array}$$

Alors le nombre $\Delta^5 = (a + rb + r^2c + r^3d + r^4e)^5$ — où r est l'une quelconque des racines 5^e de l'unité $(r \neq 1)$ — s'exprime à l'aide des fonctions symétriques des racines et est donc calculable à l'aide des coefficients de l'équation (1).

En effet : $\Delta^2 = (-2r + 2r^2 - r^3)(a + r^2b + r^4c + r^6d + r^8e)$ et en utilisant la permutation des r^p définie par $r \to r^2$:

$$\Delta^4 = (2r - 2r^2 - r^3)^2(2r^2 - 2r^4 - r^6)(a + r^4b + r^3c + r^2d + re),$$

d'où

$$\Delta^5 = -11(6r + 41r^2 + 16r^3 + 26r^4).$$

Si l'on prend par exemple

$$r = e^{\frac{2i\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

on obtient

$$\Delta^5 = \frac{11}{4}\left[89 + 25\sqrt{5} + (20\sqrt{10+2\sqrt{5}})i - (25\sqrt{10-2\sqrt{5}})i\right]$$

ou encore

$$\Delta^5 = \frac{11}{4}\left[89 + 25\sqrt{5} - 5i\sqrt{5+2\sqrt{5}} - 45i\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right]$$

en remarquant que

$$\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \pm \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

VANDERMONDE ne donne pas le détail du calcul dans son mémoire; il indique simplement que

$$\Delta' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}(89 + 25\sqrt{5} - 5q + 45p)}$$

avec $q = \sqrt{-5+2\sqrt{5}}$ et $p = \sqrt{-5-2\sqrt{5}}$ et des valeurs semblables, pour les autres valeurs de r :

$$\Delta'' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}(89 - 25\sqrt{5} + 5q - 45p)}$$

$$\Delta''' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}(89 - 25\sqrt{5} - 5q - 45p)}$$

$$\Delta'''' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}(89 - 25\sqrt{5} + 5q - 45p)}$$

et l'expression d'une racine

$$X = \frac{1}{5}(1 + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta'''').$$

Le lecteur d'aujourd'hui peut s'étonner de voir écrit ces derniers radicaux portant sur des nombres négatifs, voire imaginaires; cela n'avait rien de choquant à l'époque puisque jusqu'à GAUSS le nombre i était noté $\sqrt{-1}$.

Le projet avoué de VANDERMONDE était plus ambitieux que simplement la résolution de l'équation cyclotomique. Il pensait que sa méthode devait pouvoir s'appliquer à n'importe quelle équation du 5^e degré, en trouvant une fonction correcte (calculable) des cinq racines.

> *"Il faudrait, si le 5^e degré est résoluble généralement qu'on arrivât en dernière analyse à des équations qui eussent des facteurs rationnels, du 4^e degré au plus; et que dans l'usage à faire des racines de ces facteurs égalés à zéro, on ne fut obligé de passer que par des équations d'un degré*

moindre que le 5e ! Mais nous pouvons suivre le fil de ces recherches sans calculer les équations même (...) et **si quelque chose nous empêche d'épuiser successivement par ce moyen toutes les possibilités, ce ne sera que la longueur des calculs**". [VANDERMONDE § XXXIV, p. 412—413.]

ABEL et GALOIS nous ont appris depuis, que loin d'être seulement une question de longueur de calcul, il y avait une impossibilité '*structurelle*' pour résoudre l'équation générale du 5e degré.

LEBESGUE qui était très préoccupé des questions historiques en mathématiques, a voulu cependant rendre justice à VANDERMONDE :

> "*Certes le travail de* GAUSS *est un chef-d'œuvre : chef-d'œuvre d'exposition élégante, rigoureuse et complète, chef-d'œuvre de compréhension et d'intelligence mais où la part d'invention personnelle est en réalité fort mince (...).* GAUSS *dans l'un ou l'autre de ses calculs suit pas à pas* VANDERMONDE*; mais bien entendu, il le perfectionne beaucoup (...). De* VANDERMONDE *est la méthode, de* GAUSS *sont les résultats. Il ne s'agit pas de diminuer* GAUSS, *mais de rendre justice* à VANDERMONDE ". [Cité dans '*Message d'un mathématicien*', p. 120, par Lucienne FÉLIX.]

Pour savoir si LEBESGUE a raison, il faudrait étudier ligne par ligne le texte de VANDERMONDE et le comparer à celui de GAUSS. Nous nous contenterons ici de présenter le texte de ce dernier lors du prochain numéro de '*L'Ouvert*'.

EH TEL INEGAL PALINDROME NE MORD NI LA PLAGE NI LE THE

$$356 + 875 = 578 + 653$$
$$38 + 72 = 27 + 83$$
$$2375 + 4841 = 1484 + 5732$$
$$x^2a + a^2x$$
$$23 \times 54 + 876 = 678 + 45 \times 32$$
$$24 \times 35 + 76 \times 87 = 78 \times 67 + 53 \times 42$$
$$343 = (3+4)^2(5+2) = (2+5)^2(4+3) = 343$$
$$(38+72)^2(29+81) = (18+92)^2(27+83)$$

Remarque : Ceci n'est en aucune façon l'illustration de la commutativité des différentes opérations.